Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học của ai khác.

Tác giả

Võ Thị Thu Hiền

TÓM TẮT

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu độ trơn, tính giải tích, tính chính quy Gevrey của nghiệm của phương trình nửa tuyến tính elliptic suy biến

$$G_{k,c}^{a,b}f + \psi\big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\big) = 0, \tag{1}$$

với $a, b, c \in \mathbb{C},\ k$ là số nguyên dương, ở đây

$$G_{k,c}^{a,b} = \big(\frac{\partial}{\partial x} - iax^k \frac{\partial}{\partial y}\big)\big(\frac{\partial}{\partial x} - ibx^k \frac{\partial}{\partial y}\big) + icx^{k-1}\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Trong Chương 1, chúng tôi xét phương trình (1) với k lẻ và đã xây dựng được công thức hiển của nghiệm cơ bản của $G_{k,c}^{a,b}$, chứng minh được tính hypoelliptic của $G_{k,c}^{a,b}$ và nghiệm của phương trình (1) là hàm giải tích (hàm Gevrey) với điều kiện ψ là hàm giải tích (hàm Gevrey) tương ứng.

Trong Chương 2, sử dụng biến đổi Fourier chúng tôi đã thu được nghiệm cơ bản của $G_{k,c}^{a,b}$ khi k chẵn và nhận được tính giải tích, tính chính quy Gevrey của nghiệm của phương trình (1).

ABSTRACT

In this thesis, we invertigate the smoothness, analyticity, Gevrey regularity of solutions to the semilinear degenerate elliptic equation.

$$G_{k,c}^{a,b}f + \psi\big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\big) = 0. \tag{1}$$

Where $a, b, c \in \mathbb{C},\ k$ being a positive integer,

$$G_{k,c}^{a,b} = \big(\frac{\partial}{\partial x} - iax^k \frac{\partial}{\partial y}\big)\big(\frac{\partial}{\partial x} - ibx^k \frac{\partial}{\partial y}\big) + icx^{k-1}\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

In Chapter 1, we consider equation (1) when k is odd. We have constructed an explicit fundamental solution of $G_{k,c}^{a,b}$. We have obtained results on hypoellipticity of $G_{k,c}^{a,b}$, proven that solutions of equation (1) are analytic functions (Gevrey functions) provided ψ is an analytic function (Gevrey function), respectively.

In Chapter 2, we use the Fourier transform to obtain a fundamental solution of $G_{k,c}^{a,b}$ for k even, and then derive the analyticity, Gevrey regularity of solutions to equation (1).

Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện và hoàn thành tại Viện Toán học thuộc Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của PGS.TSKH Nguyễn Minh Trí. Thầy đã truyền thụ cho tác giả kiến thức, kinh nghiệm học tập và nghiên cứu khoa học. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đối với Thầy.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu, tác giả cũng luôn nhận được sự góp ý, động viên của GS.TSKH Nguyễn Minh Chương, GS.TSKH Nguyễn Tự Cường, GS.TSKH Đinh Nho Hào, PGS.TS Hà Tiến Ngoạn, TS Nguyễn Văn Ngọc. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự quan tâm giúp đỡ của các thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo cùng các anh chị em NCS, Cao học trong seminar Phòng Phương trình vi phân đã luôn giúp đỡ, động viên tác giả trong nghiên cứu khoa học và cuộc sống.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo Sau đại học cùng toàn thể cán bộ, công nhân viên Viện Toán học đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình thực hiện luận án.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Binh chủng Tăng Thiết giáp, Trường SQ Tăng Thiết giáp, Đoàn Quản lý học viên 871- Bộ Quốc phòng, đã tạo mọi điều kiện giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả chân thành cảm ơn bạn bè đồng nghiệp, đặc biệt là chồng, các con cùng những người thân trong gia đình đã giúp đỡ, động viên tác giả trong quá trình thực hiện luận án.

Mục lục

Lời cam đoan 1

Tóm tắt 2

Lời cảm ơn 3

Mục lục 4

Một số ký hiệu dùng trong luận án 5

Mở đầu 6

Chương 1. Tính chính qui Gevrey của nghiệm của một lớp phương trình elliptic suy biến phi tuyến cấp hai với bậc suy biến lẻ **14**

1.1 Nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ 14

1.2 Tính khả vi vô cùng của nghiệm 29

1.3 Tính chính quy Gevrey của nghiệm 41

Chương 2. Biến đổi Fourier và tính chính qui Gevrey của nghiệm của một lớp phương trình elliptic suy biến phi tuyến cấp hai với bậc suy biến chẵn **89**

2.1 Nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ 90

2.1.1 Nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ khi k chẵn 90

2.1.2 Nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ khi k lẻ 99

2.2 Các đánh giá đối với nghiệm cơ bản 102

2.3 Tính chính quy Gevrey của nghiệm 114

Kết luận và kiến nghị 121

Danh mục công trình công bố của tác giả 122

Tài liệu tham khảo 123

Một số ký hiệu dùng trong luận án

$A(\Omega)$: không gian các hàm giải tích trên Ω,

$C^k(\Omega)$: không gian các hàm liên tục khả vi đến cấp k trên Ω,

$\mathcal{D}(\Omega)$: không gian các hàm khả vi vô cùng và có giá compac trong Ω,

$\mathcal{D}'(\Omega)$: không gian đối ngẫu của $\mathcal{D}(\Omega)$,

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$: không gian các hàm khả vi vô cùng trên Ω,

$G^s(\Omega)$: không gian các hàm Gevrey cấp s trên Ω,

L^p_{loc} : không gian các hàm khả tích địa phương cấp p,

$\mathbb{R}^n$: không gian véc tơ Euclide n chiều.

Mở đầu

Từ buổi sơ khai của lý thuyết phương trình đạo hàm riêng, người ta đã quan tâm tới tính chất định tính của nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đạo hàm riêng, trong đó độ trơn và tính giải tích được nhiều nhà toán học quan tâm đặc biệt. Độ trơn của nghiệm được mô tả trong các lớp toán tử hypoelliptic. Lý thuyết các toán tử tuyến tính hypoelliptic được bắt đầu trong những công trình của N. A. Kolmogorov [27], H. Weyl [40], L. Schwartz [32], L. Hörmander [25]. Người ta đã thiết lập được điều kiện cần và đủ để toán tử vi phân với hệ số hằng $P(D)$ là hypoelliptic, nhưng vấn đề trở nên khá phức tạp nếu toán tử $P(x, D)$ có hệ số biến thiên. Hiện nay, mới chỉ có các điều kiện đủ để xác định tính hypoelliptic của một số các lớp toán tử đặc biệt, chẳng hạn như lớp toán tử với lực không đổi, lực biến thiên chậm, toán tử loại chính trong các công trình của Yu.V. Egorov [11], L. Hörmander [24].

Với vấn đề nghiên cứu tính giải tích của nghiệm, S. Bernstein là người đầu tiên giải được bài toán về tính giải tích của nghiệm của phương trình elliptic phi tuyến cấp hai với hàm hai biến số. Ông công bố công trình này vào năm 1904. Kết quả của S. Bernstein đã được nhiều nhà toán học khác quan tâm và phát triển. T. Rado, M. Gevrey, H. Lewy đã chứng minh chính kết quả này bằng các cách khác nhau. Sau đó, vào năm 1932, kết quả của S. Bernstein được G. Giraud và E. Hopf chứng minh với phương trình elliptic phi tuyến cấp hai với số biến bất kỳ. Tiếp sau đó, I. Petrowski xét tới hệ phương trình elliptic với cấp và số biến bất kỳ cũng thu được kết quả về tính giải tích của nghiệm của hệ này (xem [12] và các trích dẫn trong đó). Đến năm 1958, trong bài báo [12], A. Friedman đã chứng minh kết quả về tính giải tích, tính chính qui Gevrey cho một hệ phương trình elliptic phi tuyến tổng quát với cấp, số ẩn hàm và số biến bất kỳ. Kết quả này của A. Friedman là kết quả tổng quát nhất về tính chính qui Gevrey của nghiệm của một hệ phương trình elliptic phi tuyến tổng quát. Như vậy các bài toán về độ trơn, tính giải tích của nghiệm đã được giải quyết trọn vẹn trong lớp các phương trình elliptic. Sau đó, các nhà toán học tiếp tục nghiên cứu bài toán về độ trơn và tính giải tích cho các phương trình không elliptic. Do có nhiều phức tạp khi nghiên cứu phương trình loại này nên mới đầu người ta nghiên cứu các phương trình không elliptic tuyến tính. Tuy các kết quả này chưa phải là trọn vẹn nhưng có nhiều kết quả tinh tế đã thu được, có thể kể đến các kết quả của V. V. Grushin, A. Gilioli và F. Treves, A. Menikoff, Nguyễn Minh Trí, ... Năm 1971, V. V. Grushin đã xét một lớp các toán tử elliptic suy biến mà dạng đơn giản nhất của nó là

$$G_{k,\lambda} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^{2k}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + i\lambda x^{k-1}\frac{\partial}{\partial y},$$

trong đó $(x, y) \in \Omega$ là miền trong $\mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, i là đơn vị ảo, k là số nguyên dương. Ông đã đưa ra điều kiện cần và đủ để toán tử $G_{k,\lambda}$ là hypoelliptic, giải tích hypoelliptic trong cả hai trường hợp k lẻ và k chẵn; điều kiện cho hai trường hợp này là khác nhau. Toán tử $G_{k,\lambda}$ là trường hợp đặc biệt của toán tử

$$G_{k,c}^{a,b} = X_2X_1 + icx^{k-1}\frac{\partial}{\partial y},$$

khi $a = -1,\ b = 1$. Trong đó

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x} - iax^k\frac{\partial}{\partial y}, X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - ibx^k\frac{\partial}{\partial y}.$$

Năm 1974, A. Gilioli và F. Treves trong [14] đã xét toán tử elliptic suy biến $G_{k,c}^{a,b}$ với a, b là hai số thực thỏa mãn $ab < 0$. Họ đã đưa ra điều kiện cần và đủ để $G^{a,b}_{k,c}$ hypoelliptic nhưng chỉ với k là số nguyên dương lẻ. Hai năm sau, trường hợp k là số nguyên dương chẵn mới được A. Menikoff xét tới trong [29] (1976), ông cũng đã đưa ra điều kiện cần và đủ để $G^{a,b}_{k,c}$ là hypoelliptic. Trong [33] (1999), Nguyễn Minh Trí cũng xét toán tử $G_{k,\lambda}$ và đã xây dựng được công thức hiển cho nghiệm cơ bản không đều ở tại gốc tọa độ và nghiệm không trơn tại các điểm suy biến của toán tử này. Dùng các nghiệm này Nguyễn Minh Trí đã đưa ra điều kiện cần để $G_{k,\lambda}$ là hypoeliptic như là kết quả của Grushin nhưng bằng cánh khác. Kết quả này được Nguyễn Minh Trí mở rộng cho toán tử $G^{a,b}_{k,c}$, trong đó a, b, c là số phức tùy ý với $\mathrm{Re(a)} < 0, \mathrm{Re(b)} > 0$ (xem [34]). Sau đó, trong công trình [37] (2000), Nguyễn Minh Trí đã nghiên cứu phương trình phi tuyến elliptic suy biến

$$G_{k,\lambda} f + \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0,$$

với k là số nguyên dương lẻ. Kết quả đạt được trong công trình này là:

- Xây dựng được công thức hiển của nghiệm cơ bản đều tại mọi điểm của toán tử $G_{k,\lambda}$.
- Chứng minh được điều kiện cần và đủ để toán tử $G_{k,\lambda}$ là hypoelliptic.
- Chứng minh được tính khả vi vô hạn của một lớp các nghiệm suy rộng của phương trình này với điều kiện chấp nhận được của các tham số và tính khả vi vô hạn của hàm hàm ψ.
- Chứng minh được tính chính qui Gevrey của nghiệm với điều kiện chấp nhận được của các tham số và điều kiện Gevrey của hàm ψ.

Xét phương trình

$$G^{a,b}_{k,c} f + \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0. \tag{1}$$

Ta biết rằng với $a = -1, b = 1, c = \lambda + k$ thì $G^{a,b}_{k,c} = G_{k,\lambda}$. Như vậy phương trình (1) đã được xét trong trường hợp đặc biệt $a = -1, b = 1$, k là số nguyên dương lẻ bởi Nguyễn Minh Trí. Từ các công trình của V. V. Grushin, A. Gilioli và F. Treves, A. Menikoff đã cho thấy sự khác nhau của hai trường hợp k chẵn và k lẻ và trường hợp k chẵn phức tạp hơn k lẻ, và cũng từ những công trình của Nguyễn Minh Trí, A. Gilioli và F. Treves chúng ta thấy trường hợp a, b là số phức bất kỳ phức tạp hơn nhiều so với $a = -1, b = 1$, và đương nhiên là việc tìm nghiệm cơ bản đều tại mọi điểm khó khăn hơn tại một điểm, nghiên cứu tính giải tích của nghiệm của một phương trình phi tuyến thì khó khăn hơn phương trình tuyến tính. Vì vậy mở rộng nghiên cứu phương trình (1) cho trường hợp a, b, c là số phức tùy ý, k là số nguyên dương cả lẻ và chẵn là cần thiết.

Bài toán đặt ra cho luận án này là nghiên cứu độ trơn, tính giải tích, tính chính qui Gevrey với nghiệm của phương trình đạo hàm riêng elliptic suy biến phi tuyến sau:

$$G^{a,b}_{k,c} f + \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0.$$

Ở đây a, b, c là các số phức tùy ý với $\mathrm{Re(a)} < 0, \mathrm{Re(b)} > 0$, k là số nguyên dương, $(x, y) \in \Omega$ là một miền trong $\mathbb{R}^2$.

Luận án gồm phần Mở đầu và 2 chương:

Chương 1: Tính chính qui Gevrey của nghiệm của một lớp phương trình elliptic suy biến phi tuyến cấp hai với bậc suy biến lẻ.

Chương 2: Biến đổi Fourier và tính chính qui Gevrey của nghiệm của một lớp phương trình elliptic suy biến phi tuyến cấp hai với bậc suy biến chẵn .

Sau đây là nội dung cơ bản của phần Mở đầu và từng chương.

Phần Mở đầu, giới thiệu sơ lược lịch sử vấn đề nghiên cứu, phát biểu nội dung nghiên cứu của luận án và trình bày một số kiến thức cơ bản có liên quan.

Trong Chương 1, Mục 1.1 trình bày việc xây dựng nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ trong trường hợp k lẻ (Định lý 1.1.1). Ngoài ra chúng tôi còn thu được hệ quả quan trọng về biểu diễn tích phân của một hàm bất kỳ thuộc $C^2(\bar{\Omega})$ qua nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$. Trong Mục 1.2, chúng tôi chứng minh được Định lý 1.2.1 về tính hypoelliptic yếu của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ và nhờ chứng minh được sự đồng nhất của hai không gian hàm $G_{k,\mathrm{loc}}^{m}(\Omega)$ và $S_{\mathrm{loc}}^{m}(\Omega)$ (Bổ đề 1.2.2) và sử dụng Định lý nhúng Sobolev mà chúng tôi chứng minh được tính khả vi vô hạn của nghiệm của phương trình (1) (Định lí 1.2.2). Mục 1.3 trình bày kết quả về tính chính qui Gevrey của nghiệm của nghiệm của phương trình (1). Định lý chính của mục 1.3 và cũng là của chương này là Định lý 1.3.1 và Định lý 1.3.2. Để chứng minh Định lý 1.3.2 được rõ ràng, chúng tôi đã chứng minh ba bổ đề về đánh giá nghiệm cơ bản và các đạo hàm riêng của nó trên một hình vuông (Bổ đề 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3). Vì kỹ thuật chứng minh nên các bước chứng minh Định lý 1.3.1 được trình bày thông qua các Mệnh đề 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4, 1.3.5. Trong chứng minh các định lý trên sử dụng nhiều kỹ thuật tính toán, vì tác giả mong muốn được giới thiệu chi tiết chứng minh của các định lý nên phần này khá dài, song vẫn trong khuôn khổ cho phép của một luận án. Kết quả của Chương 1 được viết dựa trên bài báo [19].

Chương 2 của luận án trình bày các kết quả về tính giải tích, tính chính qui Gevrey của nghiệm của phương trình (1) với k là số tự nhiên chẵn. Do cấu trúc của nghiệm như ở trường hợp k lẻ không còn dùng được trong trường hợp k chẵn nên trong chương này chúng tôi sử dụng biến đổi Fourier để tìm nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$. Khi xây dựng nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ với k là số tự nhiên chẵn chúng tôi cũng tìm được nghiệm cơ bản trong trường hợp k lẻ. Việc xây dựng nghiệm một cách hình thức được trình bày trong Mục 2.1. Mục 2.2 dành cho việc chứng minh nghiệm tìm được là nghiệm cơ bản. Do phương pháp tìm nghiệm cơ bản trong Chương 2 khác hẳn so với Chương 1, nghiệm cơ bản tìm được không có công thức hiển nên các đánh giá của nghiệm thực chất là đánh giá các tích phân nhưng rất may mắn chúng tôi vẫn thu được các kết quả như Chương 1. Chứng minh nghiệm tìm được là nghiệm cơ bản được trình bày trong Bổ đề 2.2.1, nghiệm này thuộc lớp $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ đối với biến x, y được giới thiệu trong Bổ đề 2.2.2, và các đánh giá với các đạo hàm được trình bày trong Bổ đề 2.2.3. Mục 2.3 của Chương 2 trình bày các kết quả về tính chính qui Gevrey của nghiệm của phương trình (1). Để chứng minh Định lý 2.3.1, 2.3.2 là các định lý chính của mục và cũng là của chương này, chúng tôi phải đánh giá nghiệm cơ bản của $G^{a,b}_{k,c}$ trên hình một hình vuông, kết quả được trình bày ở các Bổ đề 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3. Các kết quả này đạt được tương tự như Bổ đề 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3. Nội dung của Chương 2 được viết dựa trên bài báo [20].

Trong phần Mở đầu, luận án dành một phần cho việc trình bày một số kiến thức cơ bản có liên quan:

Xét toán tử vi phân tuyến tính cấp m trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

với: $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ là các đa chỉ số với $\alpha_i \in \mathbb{N}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega),\ D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|} \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Định nghĩa 1. *Một hàm $F(x) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ được gọi là nghiệm cơ bản tại điểm $x_0 \in \Omega$ của toán tử vi phân $P(x, D)$ nếu $F(x)$ thỏa mãn phương trình sau trong $\mathbb{R}^n$*

$$P(x, D) F(x) = \delta(x - x_0).$$

Định nghĩa 2. *Một hàm $F(x, y)$ với $(x, y) \in (\Omega \times \Omega)$ mà với mỗi $y \in \mathbb{R}^n$ thì $F(x, y) \in L^1_{loc}(\Omega)$ theo biến x được gọi là nghiệm cơ bản đều tại mọi điểm của toán tử vi phân $P(x, D)$ nếu*

$$P(x, D)F(x, y) = \delta(x - y).$$

Định nghĩa 3. *Toán tử vi phân*

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

với $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$ được gọi là hypoelliptic yếu trên Ω nếu với mọi $\Omega' \Subset \Omega$, tồn tại một số nguyên dương M sao cho từ $u \in C^M(\Omega')$ và $P(x, D)u \in C^\infty(\Omega')$ suy ra $u \in C^\infty(\Omega')$.

Định nghĩa 4. *Toán tử vi phân $P(x, D)$ được gọi là hypoelliptic trên Ω nếu với mọi $\Omega' \Subset \Omega$, từ $u \in \mathcal{D}'(\Omega')$ và $P(x, D)u \in C^\infty(\Omega')$ suy ra $u \in C^\infty(\Omega')$.*

Định nghĩa 5. *Toán tử vi phân $P(x, D)$ với $a_\alpha(x) \in A(\Omega)$ được gọi là giải tích hypoelliptic Ω nếu với mọi $\Omega' \Subset \Omega$, từ $u \in \mathcal{D}'(\Omega')$ và $P(x, D)u \in A(\Omega')$ suy ra $u \in A(\Omega')$.*

Định nghĩa 6. *Toán tử vi phân $P(x, D)$ với $a_\alpha(x) \in A(\Omega)$ được gọi là s-hypoelliptic Ω nếu với mọi $\Omega' \Subset \Omega$, từ $u \in \mathcal{D}'(\Omega')$ và $P(x, D)u \in G^s(\Omega')$ thì $u \in G^s(\Omega')$.*

Định nghĩa 7. *Một hàm f(x) được gọi là thuộc lớp $G^s(\Omega)$ ($1 \le s < \infty$) nếu $f(x) \in C^\infty(\Omega)$ và với mọi $K \Subset \Omega$, tồn tại một hằng số dương C sao cho với mọi đa chỉ số α, và với mọi $x \in K$ thì*

$$|\partial^\alpha f(x)| \le C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s.$$

Sau đây chúng tôi xin giới thiệu một số định nghĩa đối với toán tử phi tuyến. Lấy $(x, \tau_\alpha)_{|\alpha| \le m} \in (\Omega' \times \tilde{\Omega})$ và $\Phi(x, \partial^\alpha)_{|\alpha| \le m}$ là toán tử vi phân phi tuyến bậc m được định nghĩa như sau

$$\Phi(x, \partial^{\alpha})_{|\alpha|\leq m} \quad : f(x) \longrightarrow \Phi(x, \partial^{\alpha} f(x))_{|\alpha|\leq m},$$

ở đây $\Phi(x, \tau_{\alpha})_{|\alpha|\leq m} \in C^{\infty}(\Omega \times \tilde{\Omega})$.

Định nghĩa 8. *Toán tử phi tuyến $\Phi(x, \partial^{\alpha})_{|\alpha|\leq m}$ được gọi là hypoelliptic trên Ω nếu với mọi miền con $\Omega' \Subset \Omega$ có một hằng số dương M sao cho từ $f \in C^{M}(\Omega')$ và $\Phi(x, \partial^{\alpha} f)_{|\alpha|\leq m} \in C^{\infty}(\Omega')$ suy ra $f \in C^{\infty}(\Omega')$.*

Định nghĩa 9. *Giả sử $\Phi(x, \tau_{\alpha})_{|\alpha|\leq m} \in A(\Omega \times \tilde{\Omega})(G^{s}(\Omega \times \tilde{\Omega}))$, toán tử phi tuyến $\Phi(x, \partial^{\alpha})_{|\alpha|\leq m}$ được gọi là giải tích hypoelliptic (s-hypoelliptic) trên Ω nếu với mọi miền con $\Omega' \Subset \Omega$, có một hằng số dương M sao cho từ $f \in C^{M}(\Omega')$ và $\Phi(x, \partial^{\alpha} f)_{|\alpha|\leq m} \in A(\Omega')(G^{s}(\Omega'))$ suy ra $f \in A(\Omega')(G^{s}(\Omega'))$.*

Định nghĩa 10. *Giả sử $\Phi(x, \tau_{\alpha})_{|\alpha|\leq m} \in A(\Omega \times \tilde{\Omega})(G^{s}(\Omega \times \tilde{\Omega}))$, toán tử $\Phi(x, \partial^{\alpha})_{|\alpha|\leq m}$ được gọi là giải tích hypoelliptic mở rộng (s-hypoelliptic mở rộng) trên Ω nếu với mọi miền con $\Omega' \Subset \Omega$, sao cho từ $f \in C^{\infty}(\Omega')$ và $\Phi(x, \partial^{\alpha} f)_{|\alpha|\leq m} \in A(\Omega')(G^{s}(\Omega'))$ suy ra $f \in A(\Omega')(G^{s}(\Omega'))$.*

Chương 1

Tính chính quy Gevrey của nghiệm của một lớp phương trình elliptic suy biến phi tuyến cấp hai với bậc suy biến lẻ

1.1 Nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$

Trong mục này chúng tôi giới thiệu việc xây dựng công thức nghiệm cơ bản của toán tử elliptic suy biến $G_{k,c}^{a,b}$. Xét toán tử

$$G_{k,c}^{a,b} = X_2 X_1 + icx^{k-1}\frac{\partial}{\partial y},$$

ở đây: $(x,y) \in \mathbb{R}^2; a,b,c \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(a) < 0;\ \mathrm{Re}(b) > 0;\quad i = \sqrt{-1},\ k$ là số nguyên dương,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - ibx^k\frac{\partial}{\partial y}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x} - iax^k\frac{\partial}{\partial y}.$$

Với hàm $f(x,y)$ định nghĩa trên miền Ω, chúng ta ký hiệu

$$\frac{\partial^\alpha f(x,y)}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^\beta f(x,y)}{\partial y^\beta}, \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}, \frac{x^\gamma \partial^{\alpha+\beta} f(x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta},$$

là $\partial_1^\alpha f, \partial_2^\beta f, \partial_{1,2}^{\alpha,\beta} f, {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} f$. Trong luận án này chúng ta chỉ xét trường hợp $\mathrm{Re}(a) < 0$, vì trường hợp $\mathrm{Re}(a) > 0$ ta có thể làm tương tự. Những biểu thức sau đây được dùng nhiều trong quá trình tính toán nên ta kí hiệu chúng như sau:

$$
\begin{aligned}
&A_+ = -ax^{k+1} + bu^{k+1} + i(k+1)(y-v),\\
&A_- = \ bx^{k+1} - au^{k+1} - i(k+1)(y-v),\\
&\widetilde{R} \ = (x^{k+1} + u^{k+1})^2 + (k+1)^2(y-v)^2,\\
&R_1 = (x^{k+1} - u^{k+1})^2 + (k+1)^2(y-v)^2,\\
&R = A_+A_- = -ab(x^{2k+2} + u^{2k+2}) + (a^2+b^2)(x^{k+1}u^{k+1})\\
&\qquad\qquad + (k+1)^2(y-v)^2 + i(k+1)(y-v)(a+b)(x^{k+1} - u^{k+1}),\\
&p = \begin{cases} (a-b)^2 x^{k+1}u^{k+1}R^{-1} & \text{nếu } xu \neq 0,\\ 0 & \text{nếu } xu = 0,\end{cases}\\
&M = A_+^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}} A_-^{-\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}}. \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

Bổ đề 1.1.1 *Giả sử rằng k là số lẻ,* $\mathrm{Re}(a) < 0$ *và* $\mathrm{Re}(b) > 0$. *Khi đó*

i) $p \notin (1, +\infty)$.

ii) $p = 1 \Leftrightarrow y = v, x = \pm\, u$ *với* $u \neq 0$.

Chứng minh. Giả sử $A, B, C, D \in \mathbb{R}, C^2 + D^2 \neq 0$. Ta có nhận xét sau:

$$p = \frac{A+iB}{C+iD} = \frac{(A+iB)(C-iD)}{C^2+D^2} = \frac{AC+BD+i(-AD+BC)}{C^2+D^2}.$$

Vậy p là số thực khi và chỉ khi và $AD = BC$. Ta có thể dễ dàng suy ra được p là số thực nếu hoặc $p = 0$ hoặc $p = \dfrac{A}{C}$ hoặc $p = \dfrac{B}{D}$.

Bây giờ ta quay lại xét

$$
\begin{aligned}
p = (a-b)^2x^{k+1}u^{k+1}\big[&-ab(x^{2k+2}+u^{2k+2}) + (a^2+b^2)x^{k+1}u^{k+1}\\
&+ (k+1)^2(y-v)^2 + i(b+a)(x^{k+1}-u^{k+1})(k+1)(y-v)\big]^{-1}.
\end{aligned}
$$

Nếu $u = 0$ thì $p = 0$ thoả mãn điều kiện phải chứng minh.

Nếu $u \neq 0$:

Xét trường hợp 1: $y = v$ ta có

$$p = \frac{(a^2-b^2)X}{-ab(X^2+1) + (a^2+b^2)X}$$

với $X = \dfrac{x^{k+1}}{u^{k+1}}$. Đặt $a = m+in,$ với $m, n \in \mathbb{R}, m < 0; b = c+id,$ với $c, d \in \mathbb{R}, c > 0$, khi đó dễ dàng nhận được

$$p = \Big\{\big[(m-c)^2-(n-d)^2\big]X+2i(m-c)(n-d)X\Big\}\Big\{\big[(-mc+nd)(X^2+1)$$
$$+(m^2+c^2-n^2-d^2)X\big]+i\big[(-md-nc)(X^2+1)+2(mn+cd)X\big]\Big\}^{-1}.$$

Như đã nói ở trên ta có p là số thực khi và chỉ khi

$$p = \frac{[(m-c)^2-(n-d)^2]X}{(-mc+nd)(X^2+1)+(m^2+c^2-n^2-d^2)X},$$

hoặc

$$p = \frac{2(m-c)(n-d)X}{(-md-nc)(X^2+1)+2(mn+cd)X}.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}&\big[(m-c)^2-(n-d)^2\big]X\big[(-md-nc)(X^2+1)+2(mn+cd)X\big]\\ &=2(m-c)(n-d)X\big[(-mc+nd)(X^2+1)+(m^2+c^2-n^2-d^2)X\big].\end{aligned} \tag{1.2}$$

Nếu $X = 0$ thì $p = 0 \notin (1, +\infty)$.

Nếu $X \neq 0$ thì chúng ta có (1.2) khi và chỉ khi

$$(md-nc)(c^2+d^2-m^2-n^2)(X-1)^2 = 0,$$

hay nói cách khác (1.2) xảy ra khi và chỉ khi có một trong các trường hợp sau: hoặc $md-nc = 0$, hoặc $c^2+d^2-m^2-n^2 = 0$, hoặc $X^2-2X+1 = 0$.

Xét trường hợp 1.1: $md - nc = 0$.

Khi đó

$$p = \frac{(a-b)^2X}{-ab(X^2+1)+(a^2+b^2)X}.$$

Do $\mathrm{Re}(b) > 0$ nên $b \neq 0$, ta viết lại p như sau:

$$p = \frac{\left(\dfrac{a}{b}-1\right)^2X}{-\dfrac{a}{b}(X^2+1)+\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+1\right)X}.$$

Do số phức a, b thoả mãn $md - nc = 0$ nên $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{c}$. Vì vậy ta có

$$p = \frac{\left(\frac{m}{c} - 1\right)^2 X}{-\frac{m}{c}\left(X^2 + 1\right) + \left(\left(\frac{m}{c}\right)^2 + 1\right)X}.$$

Do $X > 0, -\dfrac{m}{c} > 0$ nên có thể đánh giá p như sau:

$$p \leq \frac{\left(\frac{m}{c} - 1\right)^2 X}{-\frac{m}{c}2X + \left(\left(\frac{m}{c}\right)^2 + 1\right)X} = 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $X = 1$ hay $x^{k+1} = u^{k+1}$ hay $x = \pm u$.

Trường hợp 1.2: $c^2 + d^2 - m^2 - n^2 = 0$. Khi đó $c^2 + d^2 = m^2 + n^2$, hay nói cách khác $|a| = |b| = r > 0$. Khi đó ta lại viết a, b dưới dạng sau:

$$a = re^{i\varphi_1},\ b = re^{i\varphi_2},\quad \frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \varphi_2 < \frac{\pi}{2},$$
$$p = \frac{r^2(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2})^2 X}{-r^2 e^{i\varphi_1 + i\varphi_2}(X^2 + 1) + r^2(e^{2i\varphi_1} + e^{2i\varphi_2})X}.$$

Nhưng do p là số thực nên

$$p = \frac{-2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)(1 - \cos(\varphi_1 + \varphi_2))X}{-\cos(\varphi_1 + \varphi_2)((X^2 + 1) - 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)X)},$$

hoặc

$$p = \frac{[\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 - 2\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]X}{-\sin(\varphi_1 + \varphi_2)(X^2 + 1) + (\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2)X}.$$

Sau khi rút gọn chúng ta đều có

$$p = \frac{2[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]X}{(X^2 + 1) - 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)X}.$$

Do $X > 0$ nên ta có thể đánh giá

$$p \leq \frac{2[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]X}{2X - 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)X} = 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $X = 1$ hay $x = \pm u$.

Vậy khi $y = v$ thì $p \le 1$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \pm u$.

Trường hợp 1.3: $X = 1$ (hay $x = \pm u$) thì $p = 1$.

Trường hợp 2: $y \neq v$. Khi đó

$$p = \frac{(a-b)^2 XU}{(-ab)(U^2+X^2)+(a^2+b^2)XU+1+2i(a+b)(X-U)}.$$

với

$$X = \frac{x^{k+1}}{(k+1)(y-v)}, U = \frac{u^{k+1}}{(k+1)(y-v)}, XU \ge 0.$$

Đặt $a = m + in, b = c + id$, khi đó ta có p là số thực khi và chỉ khi

$$p = \frac{[(m-c)^2-(n-d)^2]XU}{(-md+nc)(X^2+U^2)+(m^2+c^2-n^2-d^2)XU-1-(n+d)(X-U)}$$

hoặc

$$p = \frac{2(m-c)(n-d)XU}{(-md+nc)(X^2+U^2)+2(mn+cd)XU+(m+c)(X-U)}.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned}(cn-md)(m^2+n^2-c^2-d^2)(X-U)^2+\big[(m-c)(m^2+n^2-c^2-d^2)\\ -2(n-d)(nc-md)\big](X-U)-2(m-c)(n-d)=0. \qquad (1.3)\end{aligned}$$

Với $(m^2+n^2-c^2-d^2)(nc-md) \neq 0$ thì từ (1.3) ta rút ra

hoặc

$$X - U = \frac{c-m}{nc-md}$$

hoặc

$$X - U = \frac{2(n-d)}{m^2+n^2-c^2-d^2}.$$

Nếu $nc - md = 0$, nhưng $m^2+n^2-c^2-d^2 \neq 0$, thì

$$X - U = \frac{2(n-d)}{m^2+n^2-c^2-d^2}.$$

Nếu $m^2+n^2-c^2-d^2=0$, nhưng $nc-md\neq 0$ thì

$$X-U=\frac{c-m}{(nc-md)}.$$

Nếu $(nc-md)=m^2+n^2-c^2-d^2=0$, thì từ (1.3) suy ra

$$-2(m-c)(n-d)=0.$$

Nhưng $-2(m-c)(n-d)=0$, do $m\neq c$ nên ta suy ra được $n=d=0$ và $m=-c$. Khi đó ta có $a=-b\in\mathbb{R}$. Trong trường hợp này chúng ta thấy rằng,

$$p=\frac{4b^2XU}{b^2(X+U)^2+1}<1.$$

Với

$$X-U=\frac{2(n-d)}{m^2+n^2-c^2-d^2}$$

thì

$$p=\frac{XU}{XU+\dfrac{(m+c)^2+(n-d)^2}{(m^2+n^2-c^2-d^2)^2}}\leq 1,\quad \text{do}\ \ XU\geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi $m=-c$ và $n=d$. Suy ra $m^2+n^2-c^2-d^2=0$, điều này vô lý.

Với

$$X-U=\frac{c-m}{nc-md},$$

thì

$$p=\frac{XU}{XU+\dfrac{-mc}{(nc-md)^2}}.$$

Do $-mc>0, XU\geq 0,$ cho nên $p\leq 1$. Dấu bằng xảy ra nếu $m=0$, hoặc $c=0$. Điều này không thể có được, do mâu thuẫn với giả thiết ban đầu. Do đó, chúng ta kết luận nếu p là số thực thì $p\leq 1; p=1$ khi và chỉ khi $y=v, x=\pm u, u\neq 0$. Vậy Bổ đề 1.1.1 đã được chứng minh. $\square$

Bây giờ chúng ta tìm $E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)$ là nghiệm cơ bản của $G^{a,b}_{k,c}$.
Ký hiệu

$$M = M(x,y,u,v), F(p) = F^{a,b}_{k,c}(p(x,y,u,v)),$$
$$E^{a,b}_{k,c} = E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) = MF(p).$$

Chúng ta tìm $E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)$ sao cho

$$G^{a,b}_{k,c}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) = \delta(x-u, y-v).$$

Trước hết ta tìm $E^{a,b}_{k,c}$ thoả mãn $G^{a,b}_{k,c}E^{a,b}_{k,c} = 0$.
Một cách hình thức $G^{a,b}_{k,c}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}&(a-b)^2u^{k+1}x^{k+1}R^{-2}\Big[-ab(u^{k+1}-x^{k+1})^2+\\ &+(k+1)^2(y-v)^2+i(k+1)(y-v)(x^{k+1}-u^{k+1})(a+b)\Big]F''(p)\\ &+\frac{1}{k+1}\Big[-(a-b)^2(2k+1)x^{k+1}u^{k+1}R^{-1}+k\Big]F'(p)\\ &+\frac{c(c-k(b-a)}{(k+1)^2(b-a)^2}F(p)=0.\end{aligned}$$

Điều này tương đương với

$$p(1-p)F''(p)+\Big(\frac{k}{k+1}-\frac{2k+1}{k+1}p\Big)F'(p)+\frac{c(c-k(b-a))}{(k+1)^2(b-a)^2}F(p)=0, \tag{1.4}$$

hay $F(p)$ phải thoả mãn phương trình hypergeometric

$$p(1-p)F''(p)+\big(\gamma-(1+\alpha+\beta)p\big)F'(p)-\ \alpha\beta F(p)=0,$$

trong đó: $\alpha = \dfrac{c}{(k+1)(b-a)},\ \beta = \dfrac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)},\ \gamma = \dfrac{k}{k+1}.$

Khi đó nghiệm của (1.4) là:

$$\begin{aligned}F(p) &= C_1F\Big(\frac{c}{(k+1)(b-a)},\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)},\frac{k}{k+1},p\Big)\\ &\quad+\ C_2\,p^{\frac{1}{k+1}}F\Big(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)},\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)},\frac{k+2}{k+1},p\Big)\\ &\quad:= C_1F^{a,b}_{k,c;1}(p)+C_2F^{a,b}_{k,c;2}(p).\end{aligned}$$

Ở đây $F(\alpha,\beta,\gamma,p)$ là các hàm Gauss hypergeometric với C_1, C_2 là các hằng số phức (xem [9]-trang 74). Chú ý rằng, với k là số lẻ thì $F^{a,b}_{k,c}(p)$ được xác định với $p \notin (1,+\infty)$. Nếu $u=0$, thì $p=0$, từ kết quả trong [34]:

$$\begin{aligned} G^{a,b}_{k,c}E(x,y,0,0) &= G^{a,b}_{k,c}C_1M(x,y,0,0) = C_1G^{a,b}_{k,c}M(x,y,0,0) \\ &= -\frac{4(b-a)^{\frac{1}{k+1}}\pi\Gamma(\frac{1}{k+1})C_1}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\,\delta(x,y), \end{aligned}$$

nên chúng ta chọn

$$C_1 = -\frac{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}{4(b-a)^{\frac{1}{k+1}}\pi\Gamma(\frac{1}{k+1})} \;:= C^{a,b}_{k,c}.$$

Nếu $u \neq 0$, thì $E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)$ trơn khi và chỉ khi $F^{a,b}_{k,c}(p)$ trơn. Mặt khác, $F^{a,b}_{k,c}(p)$ với $p \notin (1,+\infty)$ có kỳ dị khi và chỉ khi $p \to 1$. Nhưng khi $p \to 1$ chúng ta có khai triển tiệm cận (xem [9]-Trang 74):

$$\begin{aligned} F^{a,b}_{k,c;1}(p) &= -\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\log(1-p) + O(1), \\ F^{a,b}_{k,c;2}(p) &= -\frac{\Gamma(\frac{k+2}{k+1})}{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\log(1-p) + O(1). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Chúng ta hy vọng rằng, $E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)$ chỉ có kỳ dị khi $x=u, y=v$. Từ $p^{\frac{1}{k+1}} = ((b-a)^2R^{-1})^{\frac{1}{k+1}}xu \to -1$ khi $(x,y) \to (-u,v)$, chúng ta phải chọn

$$C_2 = -\frac{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}{4(b-a)^{\frac{1}{k+1}}\pi\Gamma(\frac{k+2}{k+1})} \;:= D^{a,b}_{k,c},$$

và như vậy $F^{a,b}_{k,c}(p)$ không có kỳ dị tại $x=-u, y=v$.

Chú ý rằng, với điều kiện:

$$c \neq \pm[N(k+1)(b-a)], \quad c \neq \pm[N(k+1)+k](b-a), \tag{1.6}$$

N là số nguyên, thì $|C^{a,b}_{k,c}|, |D^{a,b}_{k,c}|$ là hữu hạn và từ đó $F^{a,b}_{k,c}(p)$ có độ tăng logarit (nếu $u \neq 0$) tại $(x,y)=(u,v)$.

Định nghĩa 1.1.1 *Giả sử rằng k là số lẻ. Khi đó a, b, c, k được gọi là chấp nhận được nếu chúng thoả mãn* (1.6).

Từ đó, nếu k là số lẻ và a, b, c, k là chấp nhận được, ta hy vọng rằng,

$$\begin{aligned}
E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) &= M(C^{a,b}_{k,c}F^{a,b}_{k,c;1}(p) + D^{a,b}_{k,c}F^{a,b}_{k,c;2}(p)) \\
&= -\frac{\Gamma\big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\big)\Gamma\big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\big)F\big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k}{k+1}, p\big)}{4(b-a)^{\frac{1}{k+1}}\pi\Gamma\big(\frac{k}{k+1}\big)A_+^{\frac{c}{(k+1)(b-a)}}A_-^{\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}}} \\
&\quad - \frac{xu\Gamma\big(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)}\big)\Gamma\big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\big)F\big(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)}\big), \frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k+2}{k+1}, p\big)}{4(b-a)^{-\frac{1}{k+1}}\pi\Gamma\big(\frac{k+2}{k+1}\big)A_+^{\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)}}A_-^{\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}}}
\end{aligned}$$

sẽ trở thành nghiệm cơ bản của toán tử $G^{a,b}_{k,c}$.

Định lí 1.1.1 *Giả sử rằng k là số lẻ. Nếu a, b, c, k là chấp nhận được, thì*

$$G^{a,b}_{k,c}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) = \delta(x-u, y-v).$$

Chứng minh. Cố định $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Trường hợp 1: Với $u \neq 0$, chúng ta dùng hệ tọa độ cực sau:

$$x = u + r\cos\varphi;\ \ y = v + r\sin\varphi.$$

Ta đặt

$$B_\varepsilon(u,v) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad r < \varepsilon\big\},$$

và

$$\mathbb{R}^2_\varepsilon(u,v) = \mathbb{R}^2 \backslash B_\varepsilon(u,v) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad r \geq \varepsilon\big\}.$$

Đầu tiên chúng ta chứng minh rằng, $E^{a,b}_{k,c} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2(x,y))$.

Trên $\mathbb{R}^2_\varepsilon(u,v)$, $E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)$ là hàm liên tục nên

$$E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_\varepsilon(u,v)). \tag{1.7}$$

Bây giờ chúng ta còn phải xét $\displaystyle\int\limits_{B_\varepsilon(u,v)} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Khi (x,y) dần tới (u,v) (với $u \neq 0$), chúng ta có:

$$\begin{aligned}
&x^l = u^l + (lu^{l-1}\cos\varphi)r + \frac{l(l-1)u^{l-2}\cos^2\varphi}{2}r^2 + o(r^2),\\
&A_+ = (b-a)u^{k+1} + (k+1)(-au^k\cos\varphi + i\sin\varphi)r\\
&\quad - \frac{a(k+1)ku^{k-1}\cos^2\varphi}{2}r^2 + o(r^2),\\
&A_- = (b-a)u^{k+1} + (k+1)(bu^k\cos\varphi - i\sin\varphi)r\\
&\quad + \frac{b(k+1)ku^{k-1}\cos^2\varphi}{2}r^2 + o(r^2),\\
&M = (b-a)^{-\frac{k}{k+1}}u^{-k} + o(1),\\
&X_1p = \frac{(k+1)^2(-bu^k\cos\varphi + i\sin\varphi)}{(b-a)u^{k+2}}r + o(r),\\
&R = (b-a)^2u^{2k+2} + [(b-a)^2(k+1)u^{2k+1}\cos\varphi]r\\
&\quad + \Big\{\frac{(b-a)^2(k+1)ku^{2k}\cos^2\varphi}{2} + (k+1)^2\big(-abu^{2k}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\\
&\quad + i(b-a)u^k\cos\varphi\sin\varphi\big)\Big\}r^2 + o(r^2),\\
&1-p = \frac{(k+1)^2(-au^k\cos\varphi + i\sin\varphi)(bu^k\cos\varphi - i\sin\varphi)r^2}{(b-a)^2u^{2k+2}} + o(r^2).
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\int\limits_{B_\varepsilon(u,v)} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \Big((b-a)^{-\frac{1}{k+1}}u^{-k} + o(1)\Big)\Big(\frac{C}{2(b-a)^{\frac{1}{k+1}}\pi}\log r + O(1)\Big)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi < \infty.$$

Từ đó

$$\int\limits_{B_\varepsilon(u,v)} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty. \tag{1.8}$$

Trường hợp 2: $u = 0$, khi đó $p = 0$. Suy ra

$$F(p) = 1, \text{ và } E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) = M(x,y,u,v).$$

Khi $(x, y) \to (0, v)$ chúng ta có

$$x^{k+1} = r^{k+1} \cos^{k+1}\varphi,$$

$$A_+ = -ar^{k+1} \cos^{k+1}\varphi + i(k+1)r \sin\varphi = r[i(k+1)\sin\varphi - ar^k \cos^{k+1}\varphi],$$

$$A_- = br^{k+1} \cos^{k+1}\varphi - i(k+1)r \sin\varphi = r[-i(k+1)\sin\varphi + br^k \cos^{k+1}\varphi],$$

$$M = r^{-\frac{k}{k+1}} \Big[\big((k+1)^2 \sin^2\varphi \big)^{-\frac{k}{k+1}} + o(1) \Big].$$

Khi đó

$$\int\limits_{B_\varepsilon(u,v)} E^{a,b}_{k,c}(x, y, u, v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\varepsilon} r^{-\frac{k}{k+1}} \big(\sin^{-\frac{k}{k+1}}\varphi + o(1) \big) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$
$$= C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^{\varepsilon} r^{-\frac{k}{k+1}} r \Big(\frac{2t}{1+t^2} \Big)^{-\frac{k}{k+1}} \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}r\mathrm{d}t < \infty.$$

Vì vậy, trong trường hợp này chúng ta cũng có

$$\int\limits_{B_\varepsilon(u,v)} E^{a,b}_{k,c}(x, y, u, v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty. \tag{1.9}$$

Từ (1.7), (1.8) và (1.9) chúng ta kết luận rằng, $E^{a,b}_{k,c}(x, y, u, v) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2(x, y))$. Chúng ta tiếp tục chứng minh Định lý 1.1.1: $E^{a,b}_{k,c}$ là nghiệm cơ bản của $G^{a,b}_{k,c}$. Tức là

$$G^{a,b}_{k,c} E^{a,b}_{k,c}(x, y, u, v) = \delta(x - u, y - v),$$

theo nghĩa phân bố. Hay

$$(G^{a,b}_{k,c} E^{a,b}_{k,c}, \omega(x, y)) = \omega(u, v) \quad \forall \omega(x, y) \in C^\infty_0(\mathbb{R}^2).$$

Đầu tiên chúng ta có

$$(G^{a,b}_{k,c} E^{a,b}_{k,c}, \omega(x, y)) = (E^{a,b}_{k,c}, G^{\,b,a}_{k,-c}\, \omega(x, y)).$$

Tiếp theo ta có

$$(E^{a,b}_{k,c}(x, y, u, v), G^{\,b,a}_{k,-c}\, \omega(x, y)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^2_\varepsilon(u,v)} E^{a,b}_{k,c}(x, y, u, v) G^{\,b,a}_{k,-c}\, \omega(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Bây giờ ta tính $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^2_\varepsilon(u,v)} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)G^{\,b,a}_{k,-c}\,\omega(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^2_\varepsilon(u,v)} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)G^{\,b,a}_{k,-c}\omega(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2_\varepsilon(u,v)} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\Big(X_1X_2 - icx^{k-1}\frac{\partial}{\partial y}\Big)\omega(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2_\varepsilon(u,v)} \omega(x,y)G^{a,b}_{k,c}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+ \int\limits_{r=\varepsilon} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\big(X_2\,\omega(x,y)(\nu_1 - ibx^k\nu_2) - icx^{k-1}\nu_2\,\omega(x,y)\big)\mathrm{d}s\\
&- \int\limits_{r=\varepsilon} (\nu_1 - iax^k\nu_2)X_1E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\omega(x,y)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Đặt:

$$\begin{aligned}
&B_1(\omega(x,y),a,b,c,k) = X_2\,\omega(x,y)(\nu_1 - ibx^k\nu_2) - icx^{k-1}\nu_2\,\omega(x,y),\\
&B_2(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),a,b,c,k) = (\nu_1 - iax^k\nu_2)X_1E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v).
\end{aligned}$$

Khi đó chúng ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^2_\varepsilon(u,v)} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)G^{b,a}_{k,-c}\,\omega(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\limits_{\mathbb{R}^2_\varepsilon(u,v)} \omega(x,y)G^{a,b}_{k,c}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+ \int\limits_{r=\varepsilon} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)B_1(\omega(x,y),a,b,c,k)\mathrm{d}s\\
&- \int\limits_{r=\varepsilon} \omega(x,y)B_2(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),a,b,c,k)\mathrm{d}s\\
&:= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Chúng ta thấy rằng, $G^{a,b}_{k,c}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) = 0$ trên $\mathbb{R}^2_\varepsilon(u,v)$, nên ta có $I_1 = 0$.

Chúng ta sẽ chứng minh:

$$I_2 = \int\limits_{r=\varepsilon} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)B_1\big(\omega(x,y),a,b,c,k\big)\mathrm{d}s \to 0 \ \text{ khi } \ \varepsilon \to 0$$

và $I_3 = -\int\limits_{r=\varepsilon} B_2\big(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),a,b,c,k\big)\omega(x,y)\mathrm{d}s \to \omega(u,v)$ khi $\varepsilon \to 0.$

Bây giờ ta tính I_2.

Trên đường cong $r = \varepsilon$ thì $\begin{cases} x = u + \varepsilon\cos\varphi \\ y = v + \varepsilon\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(\varphi) = -\varepsilon\sin\varphi \\ y'(\varphi) = \ \ \varepsilon\cos\varphi. \end{cases}$

Vì vậy

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{(-\varepsilon\sin\varphi)^2 + (\varepsilon\cos\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi = \varepsilon\mathrm{d}\varphi.$$

Trên đường cong

$$\begin{cases} x = u + \varepsilon\cos\varphi \\ y = v + \varepsilon\sin\varphi, \end{cases}$$

véc tơ pháp tuyến đơn vị tại (ε,φ) là $\nu = (-\cos\varphi, -\sin\varphi)$.

Khi $(x,y) \longrightarrow (u,v)$, ta có:

$$\begin{aligned}
&\nu_1\Big|_{\partial B_\varepsilon(u,v)} = -\cos\varphi,\\
&ix^k\nu_2 = i(u+\varepsilon\cos\varphi)^k(-\sin\varphi) = -iu^k\sin\varphi + o(1),\\
&M = (b-a)^{-\frac{k}{k+1}}u^{-k} + o(1),\\
&-icx^{k-1}\nu_2\,\omega(x,y) = icu^k\omega(x,y)\sin\varphi + o(1),\\
&F^{a,b}_{k,c} = \Big(\frac{1}{2\pi(b-a)^{-\frac{k}{k+1}}}\log(1-p) + O(1)\Big).
\end{aligned}$$

Trên $r = \varepsilon$ có $(1-p) \sim \varepsilon^2 \Rightarrow \log(1-\mathrm{p}) \sim \log\varepsilon$.

Do đó $I_2 \sim \int\limits_0^{2\pi} \varepsilon\log\varepsilon\mathrm{d}\varphi \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$. Vậy ta có tích phân $I_2 \to 0$.

Tiếp theo, ta tính tích phân I_3. Chúng ta thấy

$$I_3 = \int\limits_{r=\varepsilon} \big(iau^k \sin\varphi - \cos\varphi + o(1)\big)\big(X_1 M F^{a,b}_{k,c} + M X_1 F^{a,b}_{k,c}\big)\omega(u,v)\mathrm{d}s$$

$$:= \int\limits_{r=\varepsilon} \big(iau^k \sin\varphi - \cos\varphi + o(1)\big) X_1 M F^{a,b}_{k,c}\omega(u,v)\mathrm{d}s + I_3^0.$$

Nhưng ta có

$$\int\limits_{r=\varepsilon} \big(iau^k \sin\varphi - \cos\varphi + o(1)\big) X_1 M F^{a,b}_{k,c}\omega(u,v)\mathrm{d}s \to 0,$$

giống như tích phân I_2.

Tính I_3^0, ta có:

$$I_3^0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(iau^k \sin\varphi - \cos\varphi + o(1)\big)\big((b-a)^{-\frac{k}{k+1}}\, u^{-k} + o(1)\big)$$

$$\times\Big(-\frac{1}{2(b-a)^{\frac{1}{k+1}}\,\pi}\frac{1}{1-p} + o\Big(\frac{1}{1-p}\Big)\Big)\frac{(k+1)^2(-bu^k\cos\varphi + i\sin\varphi)}{(b-a)u^{k+2}}\,\varepsilon^2\mathrm{d}\varphi,$$

vì vậy

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_3 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{au^k}{2\pi(a^2u^{2k}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}\,\omega(u,v)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{au^k}{(a^2u^{2k}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}\,\omega(u,v)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,2\pi\,\omega(u,v) = \omega(u,v).$$

Cuối cùng ta có

$$(G^{a,b}_{k,c}E^{a,b}_{k,c}, \omega(x,y)) = \omega(u,v).$$

Chúng ta hoàn thành chứng minh Định lý 1.1.1. □

Với các ký hiệu

$$\widetilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial u} - ibu^k\frac{\partial}{\partial v},\ \widetilde{X}_2 = \frac{\partial}{\partial u} - iau^k\frac{\partial}{\partial v}, \widetilde{G}^{a,b}_{k,c} = \widetilde{X}_2\widetilde{X}_1 + icu^{k-1}\frac{\partial}{\partial v}$$

và nhận xét $E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) = E^{b,a}_{k,-c}(u,v,x,y)$, chúng ta có hệ quả sau đây:

Hệ quả 1.1.1 *Cho k là số lẻ. Giả sử rằng, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ là một miền bị chặn cùng với biên trơn từng khúc, $f \in C^2(\overline{\Omega})$ và a, b, c, k chấp nhận được. Khi đó*

$$f(x,y) = \int\limits_{\partial\Omega} f(u,v)\widetilde{B}_2(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),a,b,c,k)\mathrm{d}s$$
$$-\int\limits_{\partial\Omega} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1(f(u,v),a,b,c,k)\mathrm{d}s + \int\limits_{\Omega} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{G}^{a,b}_{k,c}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1.10}$$

với mỗi điểm (x,y) cố định thuộc Ω.

Ở đây, $\widetilde{B}_1(f(u,v),a,b,c,k) = (\nu_1 - iau^k\nu_2)\widetilde{X}_1 f(u,v) + icu^{k-1}\nu_2 f(u,v)$,

$$\widetilde{B}_2(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),a,b,c,k) = (\nu_1 - ibu^k\nu_2)\widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)$$

và $\nu = (\nu_1,\nu_2)$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài trên $\partial\Omega$.

Chứng minh. Chú ý rằng, $E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) = E^{\,b,a}_{k,-c}(u,v,x,y)$. Lấy (x,y) cố định, $B_\varepsilon(x,y)$ là hình tròn tâm (x,y), bán kính ε, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x,y)$.

Ta tính

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \widetilde{G}^{\,b,a}_{k,-c}E^{\,b,a}_{k,-c}(u,v,x,y)f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \widetilde{G}^{\,b,a}_{k,-c}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \int\limits_{\Omega_\varepsilon} E^{a,b}_{k,c}\widetilde{G}^{a,b}_{k,c}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int\limits_{\partial\Omega}(\nu_1 - ibu^k\nu_2)\widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}f(u,v)\mathrm{d}s$$
$$-\int\limits_{\partial\Omega}(\nu_1 - iau^k\nu_2)E^{a,b}_{k,c}\widetilde{X}_1 f(u,v)\mathrm{d}s - \int\limits_{\partial\Omega} icu^{k-1}\nu_2 E^{a,b}_{k,c}f(u,v)\mathrm{d}s$$
$$-\int\limits_{\partial B_\varepsilon}(\nu_1 - ibu^k\nu_2)\widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}f(u,v)\mathrm{d}s + \int\limits_{\partial B_\varepsilon}(\nu_1 - iau^k\nu_2)E^{a,b}_{k,c}\widetilde{X}_1 f(u,v)\mathrm{d}s$$
$$+\int\limits_{\partial B_\varepsilon} icu^{k-1}\nu_2 E^{a,b}_{k,c}f(u,v)\mathrm{d}s.$$

Vì thế chúng ta có

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \widetilde{G}^{\,b,a}_{k,-c}E^{\,b,a}_{k,-c}(u,v,x,y)f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{G}^{a,b}_{k,c}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega} f(u,v)\widetilde{B}_2\big(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),a,b,c,k\big)\mathrm{d}s$$
$$-\int\limits_{\partial\Omega} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1\big(f(u,v),a,b,c,k\big)\mathrm{d}s$$
$$-\int\limits_{\partial B_\varepsilon} f(u,v)\widetilde{B}_2\big(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),a,b,c,k\big)\mathrm{d}s$$
$$+\int\limits_{\partial B_\varepsilon} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1\big(f(u,v),a,b,c,k\big)\mathrm{d}s.$$

Ta thấy rằng, $\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\widetilde{G}^{\,b,a}_{k,-c}E^{\,b,a}_{k,-c}(u,v,x,y)f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0$. Mặt khác khi cho $\varepsilon \to 0$, tương tự như chứng minh Định lý 1.1.1 chúng ta có

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon} f(u,v)\widetilde{B}_2\big(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),a,b,c,k\big)\mathrm{d}s \to f(x,y),$$
$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1\big(f(u,v),a,b,c,k\big)\mathrm{d}s \to 0,$$
$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{G}^{a,b}_{k,c}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \to \int\limits_{\Omega} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{G}^{a,b}_{k,c}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Vậy Hệ quả 1.1.1 được chứng minh. □

1.2 Tính khả vi vô cùng của nghiệm

Trong mục này chúng tôi muốn khảo sát tính khả vi vô cùng của nghiệm của phương trình (1), với các điều kiện nào đó của hàm ψ.

Định lí 1.2.1 *Giả sử rằng k là số lẻ. Khi đó toán tử vi phân $G^{a,b}_{k,c}$ là hypoelliptic yếu nếu và chỉ nếu a,b,c,k chấp nhận được.*

Chứng minh. Nếu a,b,c,k không chấp nhận được, thì trong [34] Nguyễn Minh Trí đã chỉ ra rằng, $G^{a,b}_{k,c}$ không hypoelliptic bằng cách tìm được tất cả các nghiệm không bị chặn của phương trình $G^{a,b}_{k,c}f = 0$. Từ đó chúng ta chỉ cần chứng minh nếu a, b, c, k chấp nhận được, thì $G^{a,b}_{k,c}$ là hypoelliptic yếu. Giả sử rằng, $f \in C^2(\bar{\Omega})$ và $G^{a,b}_{k,c}f(x,y) = h(x,y)$, ở đây $h \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Chúng ta phải chứng minh $f \in C^\infty(\Omega)$. Theo công thức (1.10), với (x, y) cố định bất kỳ thuộc Ω, ta có:

$$f(x,y) = \int\limits_{\partial\Omega} f(u,v)\widetilde{B}_2(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v), a, b, c, k)\mathrm{d}s$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1(f(u,v), a, b, c, k)\mathrm{d}s + \int\limits_{\Omega} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{G}^{a,b}_{k,c}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Trong công thức này, thay $\widetilde{G}^{a,b}_{k,c}f(u,v)$ bằng $h(u,v)$, khi đó ta có:

$$f(x,y) = \int\limits_{\partial\Omega} f(u,v)\widetilde{B}_2(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v), a, b, c, k)\mathrm{d}s$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1(f(u,v), a, b, c, k)\mathrm{d}s + \int\limits_{\Omega} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Bây giờ ta phải chứng minh $f(x,y)$ khả vi mọi cấp theo x và y. Trong công thức trên, tích phân trên biên là các hàm khả vi mọi cấp theo cả x và y, vậy ta chỉ còn phải xét tích phân trong miền. Đặt

$$W(x,y) = \int\limits_{\Omega} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Chúng ta phải chứng minh $W(x,y) \in C^1(\Omega)$. Trước hết, chúng ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề 1.2.1 *Cho Ω là miền bị chặn có biên trơn, $h(u,v) \in C^1(\Omega)$ và*

$$W(x,y) = \int\limits_{\Omega} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Khi đó $W \in C^1(\Omega)$ và $\forall\ (x,y) \in \Omega$ ta có

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x}\, h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{1.11}$$

và

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial y}\, h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{1.12}$$

Chứng minh. Trước hết chúng ta chứng minh

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x}\, h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v < \infty, \tag{1.13}$$

và

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial y}\, h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v < \infty. \tag{1.14}$$

Đặt $\begin{cases} u = x + r\cos\varphi \\ v = y + r\sin\varphi \end{cases}$ và $B_\varepsilon(x,y) = \{(u,v) \quad : \quad r \leq \varepsilon\}$. Ta chọn ε đủ nhỏ sao cho $B_\varepsilon(x,y) \subset (\Omega)$.

Để chứng minh (1.13), chúng ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức này với miền Ω được thay bằng $B_\varepsilon(x,y)$. Trước tiên, chúng ta chứng minh

$$\int\limits_{B_\varepsilon(x,y)} \frac{\partial E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x}\, h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v < \infty.$$

- Với $x \neq 0$, khi (u,v) dần tới (x,y) chúng ta có

$$\begin{aligned}
&u^k = x^k + (kx^{k-1}\cos\varphi)r + \frac{k(k-1)x^{k-2}\cos^2\varphi}{2}r^2 + o(r^2),\\
&A_+ = (b-a)x^{k+1} + (k+1)(-ax^k\cos\varphi + i\sin\varphi)r\\
&\qquad - \frac{a(k+1)kx^{k-1}\cos^2\varphi}{2}r^2 + o(r^2),\\
&A_- = (b-a)x^{k+1} + (k+1)(bx^k\cos\varphi - i\sin\varphi)r\\
&\qquad + \frac{b(k+1)kx^{k-1}\cos^2\varphi}{2}r^2 + o(r^2),\\
&R = (b-a)x^{2k+2} + [(b-a)^2(k+1)x^{2k+1}\cos\varphi]r\\
&\quad + \Big\{\frac{(b-a)^2(k+1)kx^{2k}\cos^2\varphi}{2}\\
&+ (k+1)^2\big[-abx^{2k}\cos^2\varphi + sin^2\varphi + i(b-a)\cos\varphi\sin\varphi\big]\Big\}r^2 + o(r^2),
\end{aligned}$$

$$M = (b-a)^{-\frac{k}{k+1}} x^{-k} + o(1),$$
$$(1-p) = \frac{(k+1)(-ax^k\cos\varphi + isin\varphi)(bx^k\cos\varphi - isin\varphi)r^2}{(b-a)^2 x^{2k+2}} + o(r^2).$$

Ta thấy rằng

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x}\, h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} C_i \left[\frac{\partial M}{\partial x} F^{a,b}_{k,c;i}(p(x,y,u,v)) + M \frac{dF^{a,b}_{k,c;i}(p(x,y,u,v))}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} \right] h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Tiếp theo tính toán ta có:

$$\Big| \int\limits_{B_\varepsilon(x,y)} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial M}{\partial x} F^{a,b}_{k,c;i}\big(p(x,y,u,v)\big) h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \Big| \sim \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\varepsilon} r\log r \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi < \infty,$$

và

$$\Big| \int\limits_{B_\varepsilon(x,y)} M \frac{dF^{a,b}_{k,c;i}\big(p(x,y,u,v)\big)}{\mathrm{d}p} \frac{\partial p}{\partial x}\, h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \Big| \sim$$
$$\sim \Big| \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\Big((b-a)^{-\frac{k}{k+1}} x^{-k} + o(1)\Big)(b-a)x^{2k+2}(k_1 + o(r))r^2}{r^2(k_2+o(r))\Big((b-a)^2x^{2k+2} + o(1)\Big)} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \Big| < \infty,$$

với k_1, k_2 là các hằng số. Vì vậy ta được

$$\int\limits_{B_\varepsilon(x,y)} \frac{\partial E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x}\, h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v < \infty.$$

Đặt

$$v_1(x,y) = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x} h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Chúng ta phải chứng minh $\dfrac{\partial W(x,y)}{\partial x} = v_1(x,y)$.

Cố định một hàm $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ thoả mãn $0 \le \eta \le 1, 0 \le \eta' \le 2, \eta(t) = 0$ với $t \le 1;\ \eta(t) = 1$ với $t \ge 2$.

Với $\varepsilon > 0$, chúng ta định nghĩa hàm

$$\eta_\varepsilon(x,y,u,v) = \eta\left(\frac{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}{\varepsilon}\right).$$

Ta thấy rằng,

$$\eta_\varepsilon(x,y,u,v) = 0 \ \text{ khi } \ (u,v) \in B_\varepsilon(x,y),$$

và

$$\eta_\varepsilon(x,y,u,v) = 1 \ \text{ khi } \ (u,v) \in \Omega \setminus B_{2\varepsilon}(x,y).$$

Đặt

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(x,y) &= \int\limits_\Omega E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\eta_\varepsilon(x,y,u,v)h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x,y)} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\eta_\varepsilon(x,y,u,v)h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Chúng ta có $W_\varepsilon(x,y) \in C^1(\Omega)$ và

$$\begin{aligned} \left|v_1(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}W_\varepsilon(x,y)\right| &= \left|\int\limits_\Omega \frac{\partial E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial x}h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right. \\ &\qquad \left. - \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\Big(E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\eta_\varepsilon(x,y,u,v)\Big)h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right| \\ &= \left|\int\limits_{B_{2\varepsilon}(x,y)} \frac{\partial}{\partial x}\Big[E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\big(1-\eta_\varepsilon(x,y,u,v)\big)\Big]h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right| \\ &\le \sup_{B_{2\varepsilon}(x,y)}\big|h(u,v)\big|\left|\int\limits_{B_{2\varepsilon}(x,y)} \Big[\frac{\partial}{\partial x}\big(1-\eta_\varepsilon(x,y,u,v)\big)E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial x}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\big(1-\eta_\varepsilon(x,y,u,v)\big)\Big]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right|. \end{aligned}$$

Nhưng

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\big(1-\eta_\varepsilon(x,y,u,v)\big)\right| \le \frac{2}{\varepsilon} \ \text{ với } \ \varepsilon \neq 0,$$

vì vậy

$$\left|v_1(x,y)-\frac{\partial W_\varepsilon(x,y)}{\partial x}\right|\leq \int\limits_{B_{2\varepsilon}(x,y)} \left[\left|\frac{\partial}{\partial x}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\right|+\frac{2}{\varepsilon}\left|E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\right|\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Tiếp theo, khi $(u,v)\to(x,y)$ thì

$$\left|E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\right|< C\big(\log|r|+O(1)\big),$$

và

$$\left|\frac{E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x}\right|<\frac{C}{r(K+o(1))}.$$

Cho nên ta có

$$\left|\int\limits_{B_{2\varepsilon}(x,y)}\frac{2}{\varepsilon}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)dudv\right|\leq C\frac{2}{\varepsilon}\Big(\varepsilon^2\log\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}\Big)=C(\varepsilon\log\varepsilon+\varepsilon),$$

và

$$\left|\int\limits_{B_{2\varepsilon}(x,y)}\frac{\partial E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right|\leq C\varepsilon.$$

Vì vậy

$$\left|v_1(x,y)-\frac{\partial W_\varepsilon(x,y)}{\partial x}\right|\leq C\big(C_1\varepsilon\log\varepsilon+C_2\varepsilon\big)\text{ hội tụ đều đến 0 khi }\varepsilon\to 0.$$

Hay $\dfrac{\partial W_\varepsilon(x,y)}{\partial x}$ hội tụ đều tới $v_1(x,y)$.

• Trường hợp $x=0$: Khi đó $p=0$, theo [9] ta có $F(p)=1$. Do đó

$$E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)=M(x,y,u,v)$$

và

$$\frac{\partial E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x}=\frac{\partial M(x,y,u,v)}{\partial x}=0.$$

Vì vậy (1.11) và (1.13) được chứng minh. Tiếp theo, chúng ta chứng minh (1.12). Để chứng minh (1.12) trước tiên phải chứng minh (1.14), chúng ta có

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial y} h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial y} h(u,v)\mathrm{d}s$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial v} h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= -\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)h(u,v)\nu_2\mathrm{d}s + \int\limits_{\Omega_\varepsilon(x,y)} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\frac{\partial h(u,v)}{\partial v}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Vì vậy $\int\limits_{\Omega} \frac{\partial E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial y} h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ là hội tụ.

Tiếp đến, chúng ta chứng minh

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial y}\, h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Đặt
$$v_2(x,y) = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial y}\, h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Tương tự như đánh giá $\left|v_1(x,y) - \frac{\partial W_\varepsilon(x,y)}{\partial x}\right|$ ta cũng có ta cũng thu được

$$\left|v_2(x,y) - \frac{\partial W_\varepsilon(x,y)}{\partial y}\right| \le D_1(D_2\varepsilon\log\varepsilon + D_3\varepsilon),$$

với D_1, D_2, D_3 là các hằng số.

Từ đó chúng ta có $W_\varepsilon(x,y), \frac{\partial W_\varepsilon(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial W_\varepsilon(x,y)}{\partial y}$ hội tụ đều đến $W(x,y)$, $v_1(x,y), v_2(x,y)$ trên Ω.
Do đó:

$$W(x,y) \in C^1(\Omega) \text{ và } \frac{\partial W(x,y)}{\partial x} = v_1(x,y), \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} = v_2(x,y).$$

Vì vậy, với tích phân $\int\limits_{\Omega} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)h(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, chúng ta có thể lấy đạo hàm vào trong dấu tích phân một lần theo biến x và một lần theo theo biến y mà vẫn có được hàm số liên tục.

Chúng ta hoàn thành chứng minh Bổ đề 1.2.1 $\square$

Nếu trong Bổ đề 1.2.1, thay giả thiết $h \in C^1(\Omega)$ bằng $h \in C^\infty(\Omega)$, thì chúng ta có kết luận là có thể lấy được đạo hàm theo biến y bậc tùy ý vào trong dấu tích phân. Ta phải chứng minh có thể lấy đạo hàm mọi cấp của $f(x,y)$ theo x, y. Giả sử rằng $f \in C^{n-1}(\Omega)$, ta phải chứng minh $f \in C^n(\Omega) \quad \forall\ n$. Theo nhận xét trên và giả thiết quy nạp, ta có $\dfrac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}$, $\dfrac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^{n-1}\partial x}$ và $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta} f(x,y)}{\partial y^\alpha \partial x^\beta}$, $\alpha+\beta \le n-1$ thuộc $C(\Omega)$, chúng ta phải chứng minh rằng $\dfrac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^{n-2}\partial x^2}, \cdots, \dfrac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}$ thuộc $C(\Omega)$. Hay nói cách khác, từ $\dfrac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}, \dfrac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^{n-1}\partial x}, \cdots, \dfrac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^{n-j}\partial x^j}$ thuộc $C(\Omega)$, với $1 \le j \le n-1$, chúng ta chứng minh rằng $\dfrac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^{n-j-1}\partial x^{j+1}} \in C(\Omega)$.

Từ phương trình (1) ta suy ra

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= h(x,y) + i(a+b)x^k \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} + abx^{2k}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \\ &\quad - i(c-kb)x^{k-1}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Đạo hàm $\dfrac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-j-1}\partial x^{j+1}}$ cả hai vế của (1.15) ta được:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^{n-j-1}\partial x^{j+1}} &= \frac{\partial^{n-2} h(x,y)}{\partial y^{n-j-1}\partial x^{j-1}} \\ &+ i(a+b)\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}k(k-1)\cdots(k-i+1)x^{k-i}\frac{\partial^{n-i} f(x,y)}{\partial y^{n-j}\partial x^{j-i}} \\ &+ ab\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}2k(2k-1)\cdots(2k-i+1)x^{2k-i}\frac{\partial^{n-i} f(x,y)}{\partial y^{n-j+1}\partial x^{j-i-1}} \\ &- i(c-kb)\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}(k-1)(k-2)\cdots(k-i)x^{k-i-1}\frac{\partial^{n-i-1} f(x,y)}{\partial y^{n-j}\partial x^{j-i-1}}\end{aligned}$$

thuộc $C(\Omega)$ theo giả thiết quy nạp.

Như vậy, chúng ta hoàn thành chứng minh Định lý 1.2.1. $\square$

Sau đây, chúng tôi xin giới thiệu một số không gian hàm quan trọng.
Trước tiên là không gian

$$\mathbb{G}^m_{k,\text{loc}}(\Omega) = \Big\{ f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) : \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi^m_k} ||_\gamma\partial_{\alpha,\beta} f||_{L^2(K)} < \infty \Big\}.$$

Ở đây, K là tập compact nào đó trong Ω và

$$\Xi^m_k = \left\{ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^3_+ : \alpha + \beta \le m,\ km \ge \gamma \ge \alpha + (1+k)\beta - m \right\}.$$

Định nghĩa không gian này được Grushin đưa ra.
Tiếp theo là không gian

$$S^m_{\text{loc}}(\Omega) = \Big\{ f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) : \sum_{|l|\le m} ||\mathfrak{Z}^l f||_{L^2(K)} < \infty \Big\},$$

với K là tập compact nào đó trong Ω và $\mathfrak{Z}_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\mathfrak{Z}_2 = x^k\dfrac{\partial}{\partial y}$, $l-$ đa bậc, $l = (l_1, l_2, \cdots, l_r)$, $l_s = 1, 2; s = 1 \cdots r; |l| = r$ và $\mathfrak{Z}^l = \mathfrak{Z}_{l_1} \cdots \mathfrak{Z}_{l_r}$. Không gian $S^m_{\text{loc}}(\Omega)$ được Stein định nghĩa. Nó có các tính chất thú vị sau:

- $C^m(\Omega) \subset S^m_{\text{loc}}(\Omega);\ \forall m \ge 0.$ (1.16)
- Nếu $f \in S^m_{\text{loc}}(\Omega)$ và $|l| \le m$, thì $\mathfrak{Z}^l f \in S^{m-|l|}_{\text{loc}}(\Omega)$. (1.17)
- Nếu $m \le \tilde{m}$, thì $S^{\tilde{m}}_{\text{loc}}(\Omega) \subset S^m_{\text{loc}}(\Omega)$. (1.18)
- $S^m_{\text{loc}}(\Omega) \subset H^{\frac{m}{k}}_{\text{loc}}(\Omega)$ (xem [31]). (1.19)
- Đặt $S^\infty_{\text{loc}}(\Omega) = \displaystyle\bigcap_{m=0}^{\infty} S^m_{\text{loc}}(\Omega)$, thì $S^\infty_{\text{loc}}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$. (1.20)

Bổ đề 1.2.2 *Ta có đồng nhất thức sau:* $\mathbb{G}^m_{k,loc}(\Omega) = S^m_{loc}(\Omega)$.

Chứng minh. Đầu tiên, chúng ta chứng minh rằng, $\mathbb{G}^m_{k,\text{loc}}(\Omega) \subset S^m_{\text{loc}}(\Omega)$.
Lấy $f \in \mathbb{G}^m_{k,\text{loc}}(\Omega)$, với mọi đa bậc l mà $|l| = m$, tồn tại số $\alpha_j, \beta_j \in \bar{\mathbb{Z}}^+, j = 1, ..., p$, sao cho $\mathfrak{Z}^l = \mathfrak{Z}_1^{\alpha_1}\mathfrak{Z}_2^{\beta_1} \cdots \mathfrak{Z}_1^{\alpha_p}\mathfrak{Z}_2^{\beta_p}$ và từ đó, $\mathfrak{Z}^l f$ là tổ hợp tuyến tính của các số hạng dạng $x^{k|\beta|-|\vartheta|}\dfrac{\partial^{|\beta|+|\alpha|-|\vartheta|} f}{\partial x^{|\alpha|-|\vartheta|}\partial y^{|\beta|}}$, ở đây $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_p), \beta = (\beta_1, ..., \beta_p), \vartheta = (\vartheta_1, ..., \vartheta_p)$ là các đa chỉ số, sao cho $\vartheta_j \le \min\{\alpha_j, k\beta_j\}, j =$

$1, ..., p$. Hơn nữa chúng ta có các bộ

$$(|\alpha| - |\vartheta|, |\beta|, k|\beta| - |\vartheta|) \in \Xi_k^m,$$

nên

$$\left\| x^{k|\beta|-|\vartheta|} \frac{\partial^{|\beta|+|\alpha|-|\vartheta|} f}{\partial x^{|\alpha|-|\vartheta|} \partial y^{|\beta|}} \right\|_{L^2(K)} < \infty$$

và do đó $\sum\limits_{|l| \le m} ||\mathfrak{Z}^l f||_{L^2(K)} < \infty$. Vậy $f \in S^m_{\text{loc}}(\Omega)$.

Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh bao hàm thức ngược lại $S^m_{\text{loc}}(\Omega) \subset \mathbb{G}^m_{k,\text{loc}}(\Omega)$. Lấy $f \in S^m_{\text{loc}}(\Omega)$, chúng ta chứng minh $f \in \mathbb{G}^m_{k,\text{loc}}(\Omega)$ hay ${}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ với mọi $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Xi^m_k$.

Nếu $\alpha + (k+1)\beta - m \ge 0$, chúng ta có thể giả sử rằng $\gamma = \alpha + (k+1)\beta - m$. Đặt $\alpha' = m - (\alpha + \beta)$. Chúng ta có

$$x^\gamma \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \sim \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} \cdots \right.}_{\alpha'-\text{lần}} \left[\frac{\partial}{\partial x}, x^{k\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right] \cdots \Big] f$$

$$= \underbrace{\big[\mathfrak{Z}_1 \cdots \big[}_{\alpha'-\text{lần}} \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2^\beta \mathfrak{Z}_1^\alpha \big] \cdots \big] f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega).$$

Nếu $\alpha + (k+1)\beta - m < 0$, chúng ta có thể giả sử rằng $\gamma = 0$. Đặt $\alpha' = m - (\alpha + (k+1)\beta)$. Khi đó

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \sim \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} \cdots \right.}_{k\beta-\text{lần}} \left[\frac{\partial}{\partial x}, x^{k\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right] \cdots \Big] f$$

$$= \underbrace{\big[\mathfrak{Z}_1 \cdots \big[}_{k\beta-\text{lần}} \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2^\beta \mathfrak{Z}_1^\alpha \big] \cdots \big] f \in S^{m-\alpha'}_{\text{loc}}(\Omega) \subset L^2_{\text{loc}}(\Omega). \qquad \square$$

Mệnh đề 1.2.1 *Lấy* $m \ge 2k + 3$ *và* $\psi(x, y, \tau_0, \tau_1, \tau_2) \in C^\infty$. *Giả sử rằng* $f \in S^m_{loc}(\Omega)$. *Khi đó* $\psi(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}) \in S^{m-1}_{loc}(\Omega)$.

Chứng minh. Ta phải chứng minh với mọi đa bậc $|l| \le m - 1$ thì

$$\mathfrak{Z}^l \psi(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}) \in L^2_{\text{loc}}(\Omega).$$

Đầu tiên chúng ta thấy $\mathfrak{Z}^l\psi(x,y,f,\dfrac{\partial f}{\partial x},x^k\dfrac{\partial f}{\partial y})$ được viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các số hạng dạng

$$a_{\alpha_1,\alpha_2}(x)\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\psi(x,y,f,\dfrac{\partial f}{\partial x},x^k\dfrac{\partial f}{\partial y})}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}} \tag{1.21}$$

và

$$a_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_0,\beta_1,\beta_2}(x)\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}\psi(x,y,f,\dfrac{\partial f}{\partial x},x^k\dfrac{\partial f}{\partial y})}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial\tau_0^{\beta_0}\partial\tau_1^{\beta_1}\partial\tau_2^{\beta_2}}\big(\mathfrak{Z}^{l_1}f\big)^{m_1}\cdots\big(\mathfrak{Z}^{l_p}f\big)^{m_p}, \tag{1.22}$$

ở đây

$$\begin{aligned}&|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2,\quad |\beta|=\beta_0+\beta_1+\beta_2, |l_1|,\cdots,|l_p|, m_1,\cdots,m_p\geq 1,\\ &|l_1|m_1+\cdots+|l_p|m_p\leq m;\quad a_\alpha(x),\quad a_{\alpha,\beta}(x)\in C^\infty(\Omega).\end{aligned} \tag{1.23}$$

Mệnh đề 1.2.1 sẽ được hoàn thành nếu ta chứng minh được các số hạng (1.21) và (1.22) thuộc $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

Trước tiên, chúng ta thấy $a_{\alpha_1,\alpha_2}(x)\in C^\infty(\Omega)$ nên cũng thuộc $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Tiếp đó, do $m\geq 2k+3$ nên theo (1.18) chúng ta có $S^m_{\text{loc}}\subset S^{2k+3}_{\text{loc}}$.Mặt khác do giả thiết $f\in S^m_{\text{loc}}(\Omega)$ nên, $f\in S^{2k+3}_{\text{loc}}(\Omega)$. Áp dụng (1.19) chúng ta được $f\in H^{2+\frac{3}{k}}_{\text{loc}}(\Omega)$. Do $2+\dfrac{3}{k}>1$ nên theo định lý nhúng thì $f\in C(\Omega)$.

Tiếp theo, chúng ta kiểm tra $\mathfrak{Z}_1 f,\mathfrak{Z}_2 f$. Do $f\in S^m_{\text{loc}}(\Omega)$, nên theo (1.19) ta có $\mathfrak{Z}_1 f\in S^{m-1}_{\text{loc}}(\Omega)$ hay $\mathfrak{Z}_1 f\in S^{2k+2}_{\text{loc}}(\Omega)$. Sau đó, áp dụng (1.19) ta có $\mathfrak{Z}_1 f\in H^{2+\frac{2}{k}}_{\text{loc}}(\Omega)\subset C(\Omega)$. Tương tự chúng ta có $\mathfrak{Z}_2 f\in C(\Omega)$, cùng với $\psi(x,y,\tau_0,\tau_1,\tau_2)\in C^\infty(\Omega)$ nên $\psi(x,y,f,\dfrac{\partial f}{\partial x},x^k\dfrac{\partial f}{\partial y})\in C(\Omega)$. Vì vậy, số hạng dạng (1.21) thuộc $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

Sau cùng, ta chứng minh các số hạng dạng (1.22) thuộc $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Đặt $r=\max\{|l_1|,\cdots,|l_p|\}\geq 1$. Chọn j_0 sao cho $r=|l_{j_0}|$, tức là l_{j_0} là đa bậc có độ dài lớn nhất. Khi đó:

A. Nếu $m_{j_0}\geq 2$, chúng ta thấy $l_j\leq\left[\dfrac{m}{2}\right]$ $\forall j=1,\cdots,p$. Thật vậy, với

$j \neq j_0$ nếu $l_j > \left[\dfrac{m}{2}\right]$ thì $|l_{j_0}| > |l_j| > \left[\dfrac{m}{2}\right] \Rightarrow |l_{j_0}| + |l_j| > m$ mâu thuẫn với (1.23); với $j = j_0$ và $|l_{j_0}| > \left[\dfrac{m}{2}\right]$ thì $|l_{j_0}|m_{j_0} \geq 2|l_{j_0}| > m$ cũng mâu thuẫn với (1.23). Vậy $l_j \leq \left[\dfrac{m}{2}\right]$ $\forall j = 1, \cdots, p$.

Do $f \in S^m(\Omega)$ nên theo (1.16) $\mathfrak{Z}^{l_j} f \in S^{m-|l_j|}_{\text{loc}}(\Omega)$, mà $m - |l_j| \geq \left[\dfrac{m}{2}\right]$, suy ra $\mathfrak{Z}^{l_j} f \in S^{[\frac{m}{2}]}_{\text{loc}}(\Omega)$ hay $\mathfrak{Z}^{l_j} f \in S^{k+1}_{\text{loc}}(\Omega)$. Áp dụng (1.19) chúng ta có $\mathfrak{Z}^{l_j} f \in H^{1+\frac{1}{k}}_{\text{loc}}(\Omega)$. Vì vậy $\mathfrak{Z}^{l_j} f \in C(\Omega)$. Từ đó chúng ta thấy các số hạng dạng (1.22) thuộc $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

B. Nếu $m_{j_0} = 1$ và không có chỉ số j nào mà $j \neq j_0$. Khi đó (1.22) có dạng như sau:

$$a_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_0,\beta_1,\beta_2}(x) \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}\psi(x, y, f, \dfrac{\partial f}{\partial x}, x^k \dfrac{\partial f}{\partial y})}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial \tau_0^{\beta_0} \partial \tau_1^{\beta_1} \partial \tau_2^{\beta_2}} (\mathfrak{Z}^{l_{j_0}} f).$$

Do $a_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_0,\beta_1,\beta_2}(x) \in C(\Omega)$, $\dfrac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}\psi(x, y, f, \dfrac{\partial f}{\partial x}, x^k \dfrac{\partial f}{\partial y})}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial \tau_0^{\beta_0} \partial \tau_1^{\beta_1} \partial \tau_2^{\beta_2}} \in C(\Omega)$, mặt khác $|l_{j_0}| \leq m$ nên $\mathfrak{Z}^{l_{j_0}} f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Vì vậy số hạng (1.22) thuộc $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

C. Nếu $m_{j_0} = 1$ và có ít nhất một chỉ số j mà $j \neq j_0$. Khi đó (1.22) có dạng

$$a_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_0,\beta_1,\beta_2}(x) \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}\psi(x, y, f, \dfrac{\partial f}{\partial x}, x^k \dfrac{\partial f}{\partial y})}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial \tau_0^{\beta_0} \partial \tau_1^{\beta_1} \partial \tau_2^{\beta_2}} \left(\mathfrak{Z}^{l_{j_0}} f\right)^1 \cdots \left(\mathfrak{Z}^{l_j} f\right)^{m_j} \cdots \left(\mathfrak{Z}^{l_p} f\right)^{m_p}.$$

Như ở phần (A), ta có $|l_j| \leq \left[\dfrac{m}{2}\right]$ với mọi j, vì nếu có một l_j có độ dài $|l_j| > \left[\dfrac{m}{2}\right]$ thì $|l_{j_0}| > \left[\dfrac{m}{2}\right]$. Từ đó suy ra $|l_{j_0}|m_{j_0} + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{p} |l_j|m_j > m$, mâu thuẫn với (1.23). Do vậy chúng ta có $\mathfrak{Z}^{l_j} f \in C(\Omega)$ như ở phần A. Như vậy, chúng ta thấy rằng tất cả các số hạng của (1.22) đều thuộc $C(\Omega)$ trừ $\mathfrak{Z}^{j_0} f$ thuộc $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Cuối cùng, chúng ta lại được số hạng dạng (1.22) thuộc $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Mệnh đề 1.2.1 được chứng minh. $\square$

Định lí 1.2.2 *Cho ψ là một hàm thuộc C^∞ với các đối số của nó và $m \geq 2k+3$. Giả sử rằng, k là số lẻ và a, b, c, k là chấp nhận được. Khi đó mọi $\mathbb{G}^m_{k,loc}(\Omega)$- nghiệm của phương trình (1) thuộc $C^\infty(\Omega)$, và toán tử phi tuyến $\Psi^{a,b}_{k,c}$ là hypoelliptic.*

Chứng minh. Do giả thiết $f \in G^m_{k,\text{loc}}(\Omega)$, nên theo Bổ đề 1.2.2 $f \in S^m_{\text{loc}}(\Omega)$. Do vậy, áp dụng Mệnh đề 1.2.1 ta nhận được

$$\psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) \in S^{m-1}_{\text{loc}}(\Omega). \tag{1.24}$$

Nhưng do f là nghiệm của phương trình

$$G^{a,b}_{k,c} f + \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0,$$

nên

$$G^{a,b}_{k,c} f = -\psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Theo (1.24) chúng ta có $G^{a,b}_{k,c} f \in S^{m-1}_{\text{loc}}(\Omega)$. Mặt khác do $\mathbb{G}^{m-1}_{k,\text{loc}}(\Omega) = S^{m-1}_{\text{loc}}(\Omega)$ nên $G^{a,b}_{k,c} f \in \mathbb{G}^{m-1}_{k,\text{loc}}(\Omega)$. Khi đó, áp dụng Định lý của Grushin [16] chúng ta có $f \in \mathbb{G}^{m-1+2}_{k,\text{loc}}(\Omega)$ hay $f \in S^{m+1}_{\text{loc}}(\Omega)$. Chúng ta thấy rằng, từ $f \in S^m_{\text{loc}}(\Omega)$ suy ra $f \in S^{m+1}_{\text{loc}}(\Omega)$, nên $f \in S^m_{\text{loc}}(\Omega)$ $\forall m$, hay $f \in \bigcap\limits_m S^m_{\text{loc}}(\Omega)$. Theo (1.20) thì $f \in C^\infty(\Omega)$. Chúng ta hoàn thành chứng minh Định lý 1.2.2. $\square$

1.3 Tính chính qui Gevrey của nghiệm

Trong mục này, chúng tôi trình bày các kết quả về tính chính qui Gevrey của nghiệm của phương trình (1). Đặt $r_0 = 2k+2$. Với mỗi $r \in \mathbb{Z}_+$, ký hiệu Γ_r là tập đa chỉ số (α, β) sao cho $\Gamma_r = \Gamma^1_r \cup \Gamma^2_r$. Ở đây:

$\Gamma^1_r = \{(\alpha, \beta) : \alpha \leq r_0, 2\alpha + \beta \leq r\}$,

$\Gamma^2_r = \{(\alpha, \beta) : \alpha \geq r_0, \alpha + \beta \leq r - r_0\}$.

Đặt

$$|f,\Omega|_r = \max_{(\alpha,\beta)\in\Gamma_r} |\partial_1^\alpha \partial_2^\beta f, \Omega| + \max_{\substack{(\alpha,\beta)\in\Gamma_r\\ \alpha\geq 1,\beta\geq 1}} \max_{(x,y)\in\bar{\Omega}} |\partial_1^{\alpha+2}\partial_2^\beta f|,$$

ở đây

$$|f,\Omega| = \max_{(x,y)\in\bar{\Omega}} \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi_k^1} |_\gamma \partial_{\alpha,\beta} f|,$$

hay

$$|f,\Omega| = \max_{(x,y)\in\bar{\Omega}} \Big(|f| + \Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big| + \Big|x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big|\Big).$$

Định lí 1.3.1 *Cho k là số lẻ và các tham số a, b, c, k chấp nhận được. Khi đó:*

i) Nếu $\psi \in G^s$ $(s \geq 1)$, thì mọi $C^\infty(\Omega)$- nghiệm của phương trình (1) thuộc $G^s(\Omega)$; toán tử phi tuyến $\Psi_{k,c}^{a,b}$ là s-hypoelliptic mở rộng.

ii) Trường hợp đặc biệt, nếu ψ là giải tích, thì mọi $C^\infty(\Omega)$- nghiệm của phương trình (1) là hàm giải tích trên Ω; toán tử $\Psi_{k,c}^{a,b}$ là giải tích hypoelliptic mở rộng.

Chứng minh. Chúng ta đã biết rằng, toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ là elliptic suy biến. Chỉ tại điểm (x, y) mà $x \neq 0$ thì nó là elliptic. Vậy chúng ta chỉ cần chứng minh định lý trên miền Ω, với Ω là miền bị chặn chứa $(0, 0)$. Xét metric sau:

$$\rho((u,v),(x,y)) = \begin{cases} \max\{|x^{k+1} - u^{k+1}|, (k+1)|(y-v)|\} & \text{với } xu \geq 0,\\ \max\{x^{k+1} + u^{k+1}, (k+1)|(y-v)|\} & \text{với } xu \leq 0.\end{cases}$$

Với hai tập S_1 và S_2, khoảng cách giữa chúng được định nghĩa như sau:

$$\rho(S_1, S_2) = \inf_{(x,y)\in S_1,(u,v)\in S_2} \rho((x,y),(u,v)).$$

Chúng ta phải chứng minh, nếu $\psi \in G^s$ với các đối số của nó, thì $f \in G^s(\Omega)$. Tức là, với mọi $(x, y) \in \Omega$ tồn tại một lân cận của (x, y) sao cho tồn tại C_0, C_1 là các hằng số dương để với mọi đa chỉ số (α_1, α_2) thì

$$\Big|\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} f}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}\Big| \leq C_0 C_1^{\alpha_1+\alpha_2}((\alpha_1+\alpha_2-2)!)^s, \tag{1.25}$$

trong lân cận đó.

Lấy V^T $(T \leq 1)$ là hình vuông có tâm $(0,0)$, các cạnh song song với các trục toạ độ và có độ dài bằng $2T$ (độ dài với metric ρ). Ký hiệu V_δ^T là hình vuông con đồng dạng với V^T, sao cho khoảng cách giữa biên của nó và biên của V^T là δ. Chúng ta phải chứng minh rằng, với T và δ đủ nhỏ, tồn tại các hằng số H_0, H_1 với $H_1 \geq CH_0^{2k+3}$ sao cho

$$|f, V_\delta^T|_n \leq H_0 \quad \text{với} \quad 0 \leq n \leq 6k+4, \tag{1.26}$$

và

$$|f, V_\delta^T|_n \leq H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{n-r_0-2}((n-r_0-2)!)^s \quad \text{với} \quad n \geq 6k+4. \tag{1.27}$$

Như vậy thì (1.25) sẽ được thoả mãn. Chúng ta luôn có (1.26) vì $f \in C^\infty(\Omega)$. Chúng ta chứng minh (1.27) bằng qui nạp. Giả sử (1.27) được thoả mãn với $n = N$. Khi đó ta có

$$\mid f, V_\delta^T \mid_N \leq H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-2}((N-r_0-2)!)^s. \tag{1.28}$$

Ta phải chứng minh (1.27) đúng với $n = N+1$, tức là

$$\mid f, V_\delta^T \mid_{N+1} \leq H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s. \tag{1.29}$$

Đặt $\delta' = \delta\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)$, $\delta" = \delta(1 - \dfrac{4}{N})$. Tại $(x,y) \in V_\delta^T$ ta định nghĩa $\sigma(x,y) = \rho((x,y), \partial V^T)$, $\sigma_N(x,y) = \dfrac{\sigma(x,y)}{N}$. Lấy $V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ là hình vuông có tâm tại (x,y), các cạnh có độ dài $2\sigma_N(x,y)$ và song song với các trục toạ độ, $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ là biên của $V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$. Như vậy $V_{\sigma_N(x,y)}(x,y) \subset V_{\delta'}^T$. Để chứng minh (1.29) chúng ta cần phải đánh giá

$$\max_{(x,y)\in V_\delta^T} |_\gamma \partial_{\alpha,\beta}(\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1} f)| \text{ với } (\alpha_1, \beta_1) \in \Gamma_{N+1}, (\alpha,\beta,\gamma) \in \Xi_k^1 \tag{1.30}$$

và

$$\max_{(x,y)\in V_\delta^T} |\partial_1^{2+\alpha_1}\partial_2^{\beta_1} f| \text{ với } (\alpha_1,\beta_1)\in\Gamma_{N+1}, \alpha_1\geq 1, \beta_1\geq 1. \tag{1.31}$$

Đánh giá (1.30) được làm rõ qua các Mệnh đề 1.3.2, 1.3.3 và 1.3.4, đánh giá (1.31) được làm rõ qua Mệnh đề 1.3.5. Để chứng minh các mệnh đề này, chúng tôi xin trích dẫn một mệnh đề của N. M. Tri [37]:

Mệnh đề 1.3.1 *Cho ψ là hàm thuộc lớp G^s với các đối số của nó. Khi đó tồn tại các hằng số C, D sao cho với mọi $H_0, H_1 \geq CH_0^{2k+3}$ nếu*

$$|f,\Omega|_d \leq H_0 H_1^{d-r_0-2}((d-r_0-2)!)^s, 0\leq d\leq N, r_0+2\leq N,$$

thì

$$\max_{(x,y)\in\bar\Omega}\left|\partial_1^\alpha\partial_2^\beta\psi\big(x,y,f,\frac{\partial f}{\partial x},x^k\frac{\partial f}{\partial y}\big)\right|\leq D\big(|f,\Omega|_{N+1}+H_0H_1^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s\big)$$

với mọi $(\alpha,\beta)\in\Gamma_{N+1}$.

Đây là mệnh đề rất quan trọng, khi chứng minh các Mệnh đề 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4 và 1.3.5 ta dùng nó để đánh giá phần phi tuyến. Trong chứng minh các mệnh đề này, chúng ta phải sử dụng đánh giá $E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)$ và các đạo hàm của nó. Các đánh giá này được trình bày qua các Bổ đề 1.3.1, 1.3.2 và 1.3.3 sau đây.

Bổ đề 1.3.1 *Trên hình vuông V^T*

$$\left|\ x^\gamma\frac{\partial^{\alpha+\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial x^\alpha\partial y^\beta}\ \right|\leq CR_1^{-\frac{1}{2}},\quad \forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi_k^1. \tag{1.32}$$

Chứng minh. Để chứng minh Bổ đề 1.3.1, chúng tôi có một số kết luận sau. Chứng minh các kết luận sau trên hình vuông V^T là các biến đổi sơ cấp nên chúng tôi không trình bày chi tiết các chứng minh này.

1. Tồn tại hằng số C để: $|R| \geq C\widetilde{R}$.

2. Tồn tại hằng số C_1, C_2 để trên V^T: $C_2 R \leq \widetilde{R} \leq C_1 R$.

3. Trên hình vuông V^T, tồn tại hằng số C sao cho: $0 \leq R_1 \leq \widetilde{R} \leq C$.

4. Tồn tại hằng số C sao cho trên V^T: $|M| \leq C\widetilde{R}^{-\frac{k}{k+2}}$.

5. Trên V^T tồn tại C để:

$$\max\left\{\left|\frac{\partial M}{\partial x}\right|, \left|x^k \frac{\partial M}{\partial y}\right|\right\} < C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}}.$$

6. Trên V_T tồn tại hằng số C để: $|1-p|^{-1} \leq C\widetilde{R}R_1^{-1}$.

7. Trên hình vuông V^T tồn tại hằng số C sao cho $|F^{a,b}_{k,c;i}| \leq C\ \widetilde{R}^{\frac{1}{4}} R_1^{-\frac{1}{4}}$.

Chứng minh. Chúng ta thấy hàm $F^{a,b}_{k,c;i}$ chỉ không xác định khi $p = 1$. Khi $p \to 1$, chúng ta có khai triển tiệm cận của $F^{a,b}_{k,c;i}$ là

$$\left|F^{a,b}_{k,c;1}(p)\right| = -\frac{\Gamma(\frac{k}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\log(1-p) + O(1),$$

và

$$\left|F^{a,b}_{k,c;2}(p)\right| = -\frac{\Gamma(\frac{k+2}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\log(1-p) + O(1),$$

$\Big($xem [9]$\Big)$. Cho nên tồn tại C để

$$\left|F^{a,b}_{k,c;i}(p)\right| \leq C_1|\log(1-p)| \leq C_2\Big(\frac{1}{1-p}\Big)^{\frac{1}{4}} = C_3\widetilde{R}^{\frac{1}{4}} R_1^{\frac{-1}{4}}.$$

Như vậy ta cũng có kết luận, tồn tại hằng số C sao cho

$$\left|F^{a,b}_{k,c;i}(p)\right| \leq C\widetilde{R}^{\frac{1}{4}} R_1^{\frac{-1}{4}} \quad (i = 1, 2).$$

8. Trên hình vuông V^T tồn tại hằng số C sao cho

$$\left|\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}(p)}{dp}\right| \leq C\frac{1}{(1-p)} \leq C\widetilde{R}R_1^{-1} \quad (i = 1, 2).$$

Chứng minh. Chúng ta có:

$$\left|\frac{dF^{a,b}_{k,c;1}(p)}{dp}\right| = \frac{\Gamma(\frac{k}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})(1-p)} + o\Big(\frac{1}{1-p}\Big),$$

$$\left|\frac{dF^{a,b}_{k,c;2}(p)}{dp}\right| = \frac{\Gamma(\frac{k+2}{k+1})}{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})(1-p)} + o\big(\frac{1}{1-p}\big),$$

cho nên tồn tại C sao cho

$$\left|\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}(p)}{dp}\right| \leq \frac{C}{(1-p)} \leq C\widetilde{R}R_1^{-1} \quad (i=1,2).$$

9. Trên hình vuông V^T tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$\max\left\{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|, \left|x^k\frac{\partial p}{\partial y}\right|\right\} < C\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2k+2}}R_1^{\frac{1}{2}}.$$

10. Trên hình vuông V^T tồn tại hằng số C thoả mãn

$$\left|\frac{\partial p^{\frac{1}{k+1}}}{\partial x}\right| \leq C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2k+2}}, \left|\frac{x^k\partial p^{\frac{1}{k+1}}}{\partial y}\right| \leq C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2k+2}}.$$

Bây giờ chúng ta trở lại chứng minh Bổ đề 1.3.1. Để chứng minh

$$\left| x^{\gamma}\frac{\partial^{\alpha+\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}} \right| \leq CR_1^{-\frac{1}{2}}; \quad \forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \Xi^1_k,$$

chúng ta phải chứng minh các kết luận sau:

$$\left|E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\right| \leq CR_1^{-\frac{1}{2}}, \tag{1.33}$$

$$\left|\frac{\partial E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x}\right| \leq CR_1^{-\frac{1}{2}}, \tag{1.34}$$

$$\left| x^k\frac{\partial E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial y}\right| \leq CR_1^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.35}$$

a. Chứng minh $\left|E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\right| \leq CR_1^{-\frac{1}{2}}$:

Chúng ta có

$$\begin{aligned}\left|E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\right| &\leq C|M|\left|\left(F^{a,b}_{k,c;1} + F^{a,b}_{k,c;2}\right)\right| \\ &\leq C|M|\left(\left|F^{a,b}_{k,c;1}\right| + \left|F^{a,b}_{k,c;2}\right|\right) \\ &\leq C\widetilde{R}^{-\frac{k}{2k+2}}\widetilde{R}^{\frac{1}{4}}R_1^{-\frac{1}{4}},\end{aligned}$$

ta chỉ cần chứng minh có hằng số C để

$$\widetilde{R}^{-\frac{k}{2k+2}}\widetilde{R}^{\frac{1}{4}}R_1^{-\frac{1}{4}} \leq CR_1^{-\frac{1}{2}}.$$

Điều này tương đương với $\widetilde{R}^{\frac{-k+1}{4(k+1)}} \leq CR^{-\frac{1}{4}}$ hay $R_1^{\frac{1}{4}}\widetilde{R}^{\frac{1}{2k+2)}} \leq C\widetilde{R}^{\frac{1}{4}}$. Do $R_1 \leq \widetilde{R}$ nên chỉ cần chọn $C = \max\limits_{V^T} \widetilde{R}^{\frac{1}{2k+2}}$ là thỏa mãn. Như vậy (1.33) được chứng minh.

b. Chứng minh $\left|\dfrac{\partial E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial x}\right| \leq CR_1^{-\frac{1}{2}}$:

Chúng ta có

$$\left|\frac{\partial E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial M\big(C_1F_{k,c;1}^{a,b} + C_2F_{k,c;2}^{a,b}\big)}{\partial x}\right|$$

$$= \left|\frac{\partial M}{\partial x}\big(C_1F_{k,c;1}^{a,b} + C_2F_{k,c;2}^{a,b}\big) + M\Big(C_1\frac{dF_{k,c;1}^{a,b}}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} + C_2\frac{dF_{k,c;2}^{a,b}}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}\Big)\right|,$$

$$\left|\frac{\partial M}{\partial x}F_{k,c;i}^{a,b}\right| = \left|\frac{\partial M}{\partial x}\right|\left|F_{k,c;i}^{a,b}\right| \leq C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{R}^{\frac{1}{4}}R_1^{-\frac{1}{4}} = C\widetilde{R}^{-\frac{1}{4}}R_1^{-\frac{1}{4}}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh $\widetilde{R}^{-\frac{1}{4}}R_1^{-\frac{1}{4}} \leq R_1^{-\frac{1}{2}}$. Điều này đúng, vì nó tương đương với $R_1 \leq \widetilde{R}$.

Tiếp theo chúng ta có

$$\left|M\frac{dF_{k,c;i}^{a,b}}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}\right| \leq C\widetilde{R}^{-\frac{k}{2k+2}}\widetilde{R}R_1^{-1}\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2(k+1)}}R_1^{\frac{1}{2}} = CR_1^{-\frac{1}{2}}.$$

Vậy (1.34) được chứng minh.

c. $\left|x^k\dfrac{\partial E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial y}\right| \leq CR_1^{-\frac{1}{2}}$ cũng được chứng minh tương tự.

Chúng ta hoàn thành chứng minh Bổ đề 1.3.1. □

Bổ đề 1.3.2 *Trên biên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$, nếu $|x| \leq \big(2\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ thì*

$$\left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{X}_2E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\right| \leq \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}. \qquad (1.36)$$

Chứng minh. Đầu tiên chúng ta có khẳng định, nếu $|x| \leq \big(2\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ thì $|u| \leq \big(3\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$. Để chứng minh Bổ đề 1.3.2, đầu tiên chúng ta có các kết luận sau:

1. Trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ chúng ta có

$$0 \leq R_1 \leq \widetilde{R} \leq C.$$

2. Tồn tại hằng số C để

$$C^{-1} \leq |1-p| \leq C.$$

3. Trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ tồn tại hằng số C sao cho

$$\max\left\{|F^{a,b}_{k,c;i}(p)|, \left|\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}(p)}{dp}\right|, \left|\frac{d^2F^{a,b}_{k,c;i}(p)}{dp^2}\right|\right\} \leq C; \quad (i=1,2). \qquad (1.37)$$

Chứng minh. Điều này luôn đúng, vì chúng ta đang xét trên biên của hình vuông $V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ trong trường hợp $|x| < (2\sigma_N(x,y))^{\frac{1}{k+1}}$, khi đó $|u| < (3\sigma_N(x,y))^{\frac{1}{k+1}}$. Vì vậy, trong trường hợp này $p \neq 1$ và đủ gần 0 nên $F^{a,b}_{k,c;i}(p)$ và các đạo hàm của nó là liên tục và bị chặn.

4. Trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ tồn tại hằng số C sao cho $C\sigma_N^2(x,y) \leq \widetilde{R}$.

5. Trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$0 \leq R_1 \leq \widetilde{R} \leq C\sigma_N^2(x,y).$$

6. Trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ tồn tại hằng số C sao cho $|M| \leq C\widetilde{R}^{-\frac{k}{2k+2}}$.

7. Trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ tồn tại hằng số C sao cho

$$\max\left\{\left|\frac{\partial M}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial M}{\partial u}\right|, \left|x^k\frac{\partial M}{\partial y}\right|, \left|u^k\frac{\partial M}{\partial v}\right|\right\} \leq C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\max\left\{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial p}{\partial u}\right|, \left|x^k\frac{\partial p}{\partial y}\right|, \left|u^k\frac{\partial p}{\partial v}\right|\right\} \leq C\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2k+2}}R_1^{\frac{1}{2}}.$$

8. Trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ tồn tại hằng số C sao cho

$$\max\left\{\left|\frac{\partial^2 M}{\partial x\partial u}\right|, \left|u^k\frac{\partial^2 M}{\partial x\partial v}\right|, \left|x^k\frac{\partial^2 M}{\partial y\partial u}\right|, \left|x^k u^k\frac{\partial^2 M}{\partial y\partial v}\right|\right\} \le C\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2k+2}}.$$

9. Trên $S_{\sigma_N(x,y)(x,y)}$ tồn tại các hằng số C sao cho

$$\max\left\{\left|\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial u}\right|, \left|u^k\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial v}\right|, \left|x^k\frac{\partial^2 p}{\partial y\partial u}\right|, \left|x^k u^k\frac{\partial^2 p}{\partial y\partial v}\right|\right\} \le C\widetilde{R}^{-\frac{1}{k+1}}.$$

Chúng ta trở lại chứng minh kết luận (1.36) của Bổ đề 1.3.2. Để chứng minh (1.36) chúng ta cần phải chứng minh tồn tại các hằng số C sao cho trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$

$$\left|\widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\right| \le \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}, \tag{1.38}$$

$$\left|\frac{\partial \widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x}\right| \le \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}, \tag{1.39}$$

$$\left|x^k\frac{\partial \widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial y}\right| \le \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}. \tag{1.40}$$

a. Đầu tiên chúng ta chứng minh (1.38). Chúng ta có

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\right| &= \left|\left(\frac{\partial}{\partial u} - iau^k\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(M\left(C_1F^{a,b}_{k,c;1} + C_2F^{a,b}_{k,c;2}\right)\right)\right| \\
&= \left|C_1\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;1} + C_1M\frac{dF^{a,b}_{k,c;1}}{dp}\frac{\partial p}{\partial u} + C_2\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;2}\right. \\
&+ C_2M\frac{dF^{a,b}_{k,c;2}}{dp}\frac{\partial p}{\partial u} - iaC_1u^k\frac{\partial M}{\partial v}F^{a,b}_{k,c;1} - iaC_1u^kM\frac{dF^{a,b}_{k,c;1}}{dp}\frac{\partial p}{\partial v} \\
&\left. - iaC_2u^k\frac{\partial M}{\partial v}F^{a,b}_{k,c;2} - iaC_2u^kM\frac{dF^{a,b}_{k,c;2}}{dp}\frac{\partial p}{\partial v}\right|.
\end{aligned}$$

Ta thấy rằng,

$$\left|\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;1}\right| \le C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}}\left|F^{a,b}_{k,c;i}\right| \le \frac{C}{\sigma_N(x,y)} \le \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)} \quad \text{do} \quad \sigma_N(x,y) < 1,$$

$$\left|M\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial u}\right| \leq C\widetilde{R}^{-\frac{k}{2k+2}}\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2k+2}}R_1^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sigma_N(x,y)} \leq \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)},$$

$$\left|u^k M\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial v}\right| \leq \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)},$$

cho nên (1.38) được chứng minh.

b. Tiếp theo chúng ta chứng minh (1.39). Để chứng minh (1.39) chúng ta chỉ cần đánh giá các số hạng sau đây:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\Big)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial x}\Big(M\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial u}\Big)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial x}\Big(u^k M\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial v}\Big)\right|,\\ &\text{và } \left|\frac{\partial}{\partial x}\Big(u^k\frac{\partial M}{\partial v}F^{a,b}_{k,c;i}\Big)\right|.\end{aligned} \tag{1.41}$$

Đánh giá số hạng thứ nhất trong (1.41), chúng ta có

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\Big)\right| = \left|\frac{\partial^2 M}{\partial x\partial u}F^{a,b}_{k,c;i} + \frac{\partial M}{\partial u}\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}\right|,$$

trong đó

$$\left|\frac{\partial^2 M}{\partial x\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\right| \leq C\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2k+2}} \leq C\sigma_N^{-\frac{k+2}{k+1}}(x,y) \leq \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)} ,$$

và

$$\left|\frac{\partial M}{\partial u}\right|\left|\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\right|\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| \leq C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2k+2}}R_1^{\frac{1}{2}} \leq C\sigma_N^{-\frac{2k+3}{k+1}+1}(x,y) \leq \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}.$$

Đánh giá số hạng thứ hai, thứ ba, thứ tư trong (1.41), chúng ta làm tương tự. Như vậy chúng ta chứng minh được (1.39).

c. Chứng minh (1.40). Để chứng minh (1.40), chúng ta phải đánh giá các số hạng sau đây:

$$\begin{aligned}&\left|x^k\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\Big)\right|, \left|x^k\frac{\partial}{\partial y}\Big(M\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial u}\Big)\right|,\\ &\left|x^k\frac{\partial}{\partial y}\Big(u^k\frac{\partial M}{\partial v}F^{a,b}_{k,c;i}\Big)\right|, \left|x^k\frac{\partial}{\partial y}\Big(u^k M\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial v}\Big)\right|.\end{aligned} \tag{1.42}$$

Đánh giá số hạng thứ nhất trong (1.42), chúng ta có

$$\left|x^k\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\Big)\right| = \left|x^k\frac{\partial^2 M}{\partial y\partial u}F^{a,b}_{k,c;i} + x^k\frac{\partial M}{\partial u}\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial y}\right|,$$

trong đó

$$\left|x^k\frac{\partial^2 M}{\partial y\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\right| \le \left|x^k\frac{\partial^2 M}{\partial y\partial u}\right|\left|F^{a,b}_{k,c;i}\right| \le C\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2k+2}} \le \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)},$$

và

$$\left|x^k\frac{\partial M}{\partial u}\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial y}\right| \le \left|\frac{\partial M}{\partial u}\right|\left|\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\right|\left|x^k\frac{\partial p}{\partial y}\right|$$

$$\le C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2k+2}}R_1^{\frac{1}{2}} \le \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}.$$

Đánh giá số hạng thứ hai, thứ ba, thứ tư trong (1.42) chúng ta làm tương tự. Vì vậy

$$\left|x^k\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{X}_2E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\right| \le \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)},$$

Bổ đề 1.3.2 được chứng minh. □

Bổ đề 1.3.3 *Trên* $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$, *nếu* $|x| \ge \big(2\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ *thì*

$$\left|\frac{{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{X}_2E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{u^k}\right| \le \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}\ ;\quad \forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi^1_k.$$

Chứng minh. Nếu $|x| \ge \big(2\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ thì $xu>0$ và $|u| \ge \big(\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$. Trong trường hợp này đánh giá của $\left|F^{a,b}_{k,c;i}(p)\right|$, $\left|\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}(p)}{dp}\right|$, $\left|\frac{d^2F^{a,b}_{k,c;i}(p)}{dp^2}\right|$ trong (1.37) không còn đúng, nhưng chúng ta có các kết luận sau:

1. Với $|x| \ge \big(2\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ thì trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ tồn tại hằng số dương C sao cho $C^{-1}\widetilde{R}^{\frac{1}{2(k+1)}} \le |u| \le C\widetilde{R}^{\frac{1}{2(k+1)}}$.

2. Với $|x| \ge \big(2\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ thì trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ tồn tại hằng số dương C sao cho $C^{-1}\sigma_N^2(x,y) \le R_1 \le C\sigma_N^2(x,y)$.

3. Với $|x| \geq \left(2\sigma_N(x,y)\right)^{\frac{1}{k+1}}$ thì trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ tồn tại hằng số C sao cho

$$\left|F^{a,b}_{k,c;i}(p)\right| \leq C\widetilde{R}^{\frac{1}{2}}R_1^{-\frac{1}{2}}, \left|\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}(p)}{dp}\right| \leq C\widetilde{R}R_1^{-1}, \left|\frac{d^2F^{a,b}_{k,c;i}(p)}{dp^2}\right| \leq C\widetilde{R}^2R_1^{-2},$$

với i = 1; 2.

Bây giờ chúng ta trở lại chứng minh Bổ đề 1.3.3. Để chứng minh

$$\left|\frac{{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{X}_2E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{u^k}\right| \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}; \quad \forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \Xi^1_k,$$

thì chúng ta phải chứng minh:

$$\left|\frac{\widetilde{X}_2E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{|u|^k}\right| \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}, \tag{1.43}$$

$$\left|\frac{\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{X}_2E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{|u|^k}\right| \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}, \tag{1.44}$$

$$\left|\frac{x^k\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{X}_2E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{|u|^k}\right| \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}. \tag{1.45}$$

a. Trước tiên, ta chứng minh (1.43):

$$\left|\frac{\left(\frac{\partial}{\partial u} - iau^k\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(M\left(C_1F^{a,b}_{k,c;1} + C_2F^{a,b}_{k,c;2}\right)\right)}{|u|^k}\right| \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}.$$

Để chứng minh điều này, ta phải đánh giá các số hạng sau:

$$\left|\frac{1}{|u|^k}\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\right|, \left|\frac{1}{|u|^k}M\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial M}{\partial v}F^{a,b}_{k,c;i}\right|, \left|M\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial v}\right|. \tag{1.46}$$

Đánh giá số hạng thứ nhất trong (1.46), ta có

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|u|^k}\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\right| &\leq C\widetilde{R}^{-\frac{k}{2k+2}}\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{R}^{\frac{1}{2}}R_1^{-\frac{1}{2}} \leq C\sigma_N^{-\frac{k}{k+1}}(x,y)\sigma_N^{-1}(x,y)\\ &= \frac{C}{\sigma_N^{\frac{2k+1}{k+1}}(x,y)} \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}, \quad \text{do } |\sigma_N(x,y)| \leq 1.\end{aligned}$$

Đánh giá số hạng thứ hai, thứ ba trong (1.46) ta làm tương tự.

b. Tiếp theo, để chứng minh (1.44) ta phải đánh giá các số hạng sau:

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{|u|^k}\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\Big)\Big|, \Big|\frac{\partial}{\partial x}\Big(M\frac{1}{|u|^k}\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial u}\Big)\Big|,$$
$$\Big|\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial M}{\partial v}F^{a,b}_{k,c;i}\Big)\Big|, \ \Big|\frac{\partial}{\partial x}\Big(M\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial v}\Big)\Big|. \tag{1.47}$$

Đánh giá số hạng thứ nhất trong (1.47), ta có

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{|u|^k}\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\Big)\Big| = \Big|\frac{1}{|u|^k}\frac{\partial^2 M}{\partial x\partial u}F^{a,b}_{k,c;i} + \frac{1}{|u|^k}\frac{\partial M}{\partial u}\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}\Big|,$$

trong đó:

$$\Big|\frac{1}{|u|^k}\frac{\partial^2 M}{\partial x\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\Big| \le C\widetilde{R}^{-\frac{k}{2k+2}}\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2k+2}}\widetilde{R}^{\frac{1}{2}}R_1^{-\frac{1}{2}} \le C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}}R_1^{-\frac{1}{2}} \le \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)},$$

$$\Big|\frac{1}{|u|^k}\frac{\partial M}{\partial u}\frac{F^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}\Big| \le C\widetilde{R}^{-\frac{k}{2k+2}}\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{R}R_1^{-1}\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2k+2}}R_1^{\frac{1}{2}} =$$
$$= C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}}R_1^{-\frac{1}{2}} \le \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}\ .$$

Đánh giá số hạng thứ hai, thứ ba, thứ tư trong (1.47) ta cũng có kết quả như vậy.

3. Sau cùng, chúng ta chứng minh (1.45):

$$\Big|\frac{x^k\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{X}_2E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{|u|^k}\Big| \le \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}.$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, chúng ta phải đánh giá:

$$\Big|\frac{|x|^k}{|u|^k}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\Big)\Big|, \Big|\frac{|x|^k}{|u|^k}\frac{\partial}{\partial y}\Big(M\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial u}\Big)\Big|,$$
$$\Big||x|^k\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial M}{\partial v}F^{a,b}_{k,c;i}\Big)\Big|, \Big||x|^k\frac{\partial}{\partial y}\Big(M\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial v}\Big)\Big|. \tag{1.48}$$

Đánh giá số hạng đầu tiên trong (1.49) ta có

$$\Big|\frac{|x|^k}{|u|^k}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial M}{\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\Big)\Big| = \Big|\frac{|x|^k}{|u|^k}\frac{\partial^2 M}{\partial y\partial u}F^{a,b}_{k,c;i} + \frac{|x|^k}{|u|^k}\frac{\partial M}{\partial u}\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial y}\Big|,$$

trong đó:

$$\left|\frac{|x|^k}{|u|^k}\frac{\partial^2 M}{\partial y\partial u}F^{a,b}_{k,c;i}\right| = \frac{1}{|u|^k}\left|x^k\frac{\partial^2 M}{\partial y\partial u}\right|\left|F^{a,b}_{k,c;i}\right| \leq C\widetilde{R}^{-\frac{k}{2k+2}}\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2k+2}}\widetilde{R}^{\frac{1}{2}}R_1^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}}R_1^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)},$$

$$\left|\frac{|x|^k}{|u|^k}\frac{\partial M}{\partial u}\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\frac{\partial p}{\partial y}\right| = \frac{1}{|u|^k}\left|\frac{\partial M}{\partial u}\right|\left|\frac{dF^{a,b}_{k,c;i}}{dp}\right|\left|x^k\frac{\partial p}{\partial y}\right| \leq$$
$$\leq C\widetilde{R}^{-\frac{k}{2k+2}}\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{R}R_1^{-1}\widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2k+2}}R_1^{\frac{1}{2}} = C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}}R_1^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}.$$

Các số hạng tiếp theo cũng được đánh giá tương tự như vậy. Chúng ta hoàn thành chứng minh Bổ đề 1.3.3. □

Như vậy, chúng ta đã chứng minh xong các bổ đề bổ trợ để chứng Định lý 1.3.1. Các bước chứng minh định lý này được trình bày thông qua các mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 1.3.2 *Giả sử* $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi^1_k, (\alpha_1,\beta_1)\in\Gamma_{N+1}, \alpha_1\geq 1, \beta_1\geq 1$. *Khi đó tồn tại hằng số dương* C_{61} *sao cho*

$$\max_{(x,y)\in V^T_\delta}\left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}f(x,y)\right|$$
$$\leq C_{61}\left(T^{\frac{1}{k+1}}|f,V^T_{\delta'}|_{N+1}+H_0\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}(N-r_0-1)!^s\left(T^{\frac{1}{k+1}}+\frac{1}{H_1}\right)\right).$$

Chứng minh. Phương trình (1) có dạng

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}-abx^{2k}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}-i(a+b)x^k\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$$
$$-i(kb-c)x^{k-1}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\psi\left(x,y,f,\frac{\partial f}{\partial x},x^k\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0. \quad (1.49)$$

Lấy đạo hàm hai vế của phương trình (1.49) β_1 lần theo biến y và α_1 lần theo biến x ta có

$$\partial_1^{\alpha_1+2}\partial_2^{\beta_1}f(x,y)-abx^{2k}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y)-i(a+b)x^k\partial_1^{\alpha_1+1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)$$
$$-i(kb-c)x^{k-1}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)$$

$$= ab \sum_{m=1}^{\min\{\alpha_1,2k\}} \binom{\alpha_1}{m} 2k(2k-1)...(2k-m+1)x^{2k-m}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y)$$
$$+ i(a+b) \sum_{m=1}^{\min\{\alpha_1,k\}} \binom{\alpha_1}{m} k(k-1)...(k-m+1)x^{k-m}\partial_1^{\alpha_1+1-m}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)$$
$$+ i(kb-c) \sum_{m=1}^{\min\{\alpha_1,k-1\}} \binom{\alpha_1}{m} (k-1)...(k-m)x^{k-m-1}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)$$
$$- \ \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}\psi(x,y,f,\frac{\partial f}{\partial x}, x^k\frac{\partial f}{\partial y}).$$

Đặt

$$A(x,y) = ab \sum_{m=1}^{\min\{\alpha_1,2k\}} \binom{\alpha_1}{m} 2k(2k-1)...(2k-m+1)x^{2k-m}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y)$$
$$+i(a+b) \sum_{m=1}^{\min\{\alpha_1,k\}} \binom{\alpha_1}{m} k(k-1)...(k-m+1)x^{k-m}\partial_1^{\alpha_1+1-m}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)$$
$$+i(kb-c) \sum_{m=1}^{\min\{\alpha_1,k-1\}} \binom{\alpha_1}{m} (k-1)...(k-m)x^{k-m-1}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y),$$

và

$$B(x,y) = - \ \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}\psi\Big(x,y,f,\frac{\partial f}{\partial x}, x^k\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Ta có

$$G_{k,c}^{a,b}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}f(x,y) = A(x,y) + B(x,y).$$

Áp dụng công thức (1.10) với miền Ω thay bằng $V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ chúng ta có

$$\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}f(x,y) = \int\limits_{V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\widetilde{G}_{k,c}^{a,b}\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$- \int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1\big(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1}f(u,v),a,b,c,k\big)\mathrm{d}s$$
$$+ \int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1}f(u,v)\widetilde{B}_2(E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v),a,b,c,k)\mathrm{d}s. \qquad (1.50)$$

Ở đây:

$$\widetilde{B}_1\big(f(u,v),a,b,c,k\big) = (\nu_1 - iau^k\nu_2)\widetilde{X}_1 f(u,v) + icu^{k-1}\nu_2 f(u,v),$$

$$\widetilde{B}_2\big(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),a,b,c,k\big) = (\nu_1 - ibu^k\nu_2)\widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),$$

$\nu = (\nu_1,\nu_2)$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$.

Vậy ta có

$$\begin{aligned}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1} f(x,y) = &\int\limits_{V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\big(A(u,v)+B(u,v)\big)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &- \int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1\big(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v),a,b,c,k\big)\mathrm{d}s\\ &+ \int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v)\widetilde{B}_2\big(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),a,b,c,k\big)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Tiếp theo, lấy đạo hàm ${}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}$ chúng ta được:

$$\begin{aligned}{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\big(\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1} f(x,y)\big) = &\int\limits_{V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)(A(u,v)+B(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &- \int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1\big(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v),a,b,c,k\big)\mathrm{d}s\\ &+ \int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v){}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{B}_2\big(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),a,b,c,k\big)\mathrm{d}s\\ &:= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Chúng ta sẽ dùng các Bổ đề 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 để đánh giá các tích phân I_1, I_2, I_3 trong (1.51).

A. Đánh giá tích phân I_1:

Áp dụng Bổ đề 1.3.1 chúng ta có

$$\Big|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\Big|\Big|_{V^T} \le CR_1^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{với}(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi_k^1.$$

Sau đây, chúng ta đánh giá $A(u,v)$ trên $V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$:

I. Nếu $\alpha_1 = 1$ thì $m = 1$.

Để đánh giá $A(u,v)$ trong trường hợp này ta phải đánh giá các số hạng sau:

$$|u^{2k-1}\partial_v^{\beta_1+2}f|, \left|x^{k-1}\partial_u^1\partial_v^{\beta_1+1}f\right| \ , |u^{2k-2}\partial_v^{\beta_1+1}f|.$$

Trên $V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ ta có

• $\left|u^{2k-1}\partial_v^{\beta_1+2}f\right| \le C_1\left|u^k\partial_v\partial_v^{\beta_1+1}f\right| \le C_2|f,V_{\delta'}^T|_N,$

• $|u^{k-1}\partial_u^1\partial_v^{\beta_1+1}f| \le C_3\left|\partial_u^1\partial_v^{\beta_1+1}f\right| \le C_4|f,V_{\delta'}^T|_N,$

• $\left|x^{k-2}\partial_v^{\beta_1+1}f\right| \le C_5\left|\partial_v^{\beta_1+1}f\right| \le C_6|f,V_{\delta'}^T|_N,$

do $(0,\beta_1+1)\in\Gamma_N$.

II. Nếu $2\le\alpha_1\le 4k+4$, khi đó ta có $\beta_1\le N-3$.

1. Xét trường hợp $m=\alpha_1$, để đánh giá $A(u,v)$ chúng ta đánh giá:

• $\left|u^{2k-m}\partial_v^{\beta_1+2}f\right| \le C_7|f,V_{\delta'}^T|_N,$

• $\left|u^{k-m}\partial_u^1\partial_v^{\beta_1+1}f\right| \le C_8|\partial_u^1\partial_v^{\beta_1+1}f| \le C_9|f,V_{\delta'}^T|_N,$

• $\left|u^{k-m-1}\partial_v^{\beta_1+1}f\right| \le C_{10}|f,V_{\delta'}^T|_N$

do $(0,\beta_1+2),(0,\beta_1+1)\in\Gamma_{N-1}$.

2. Nếu $2\le\alpha_1\le 2k+2$ và $m<\alpha_1$, để đánh giá $A(u,v)$ chúng ta đánh giá

$$\left|u^{2k-m}\partial_u^{\alpha_1-m}\partial_v^{\beta_1+2}f\right| \le \left|\partial_u^1(\partial_u^{\alpha_1-m-1}\partial_v^{\beta_1+2}f)\right|.$$

Khi đó ta phải chứng minh $(\alpha_1-m-1,\beta_1-2)\in\Gamma_N$. Thật vậy, do $\alpha_1\le 2k+2=r_0$ suy ra $\alpha_1-m-1\le 2k+2=r_0$.
Vậy $(\alpha_1-m-1,\beta_1-2)\in\Gamma_N$ nếu và chỉ nếu $2\alpha_1-2m-2+\beta_1+2\le N$, hay $2\alpha_1+\beta_1\le N+4m$. Điều này đúng do $\alpha_1\le r_0$ và $(\alpha_1,\beta_1)\in\Gamma_N$.
Từ đó

$$\bullet \left|u^{2k-m}\partial_u^{\alpha_1-m}\partial_v^{\beta_1+2}f\right| \le \left|\partial_u^1(\partial_u^{\alpha_1-m-1}\partial_v^{\beta_1+2}f)\right| \le C_{11}|f,V_{\delta'}^T|_N$$
$$\le C_{11}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s.$$

$$\bullet \left|u^{k-m}\partial_u^{\alpha_1+1-m}\partial_v^{\beta_1+1}f\right| \le C_{12}\left|\partial_u^1(\partial_u^{\alpha_1-m}\partial_v^{\beta_1+1}f)\right| \le C_{13}|f,V_{\delta'}^T|_N$$
$$\le C_{14}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s,$$

do $(\alpha_1-m,\beta_1+1)\in\Gamma_N$.

$$\bullet \left|u^{k-m-1}\partial_u^{\alpha_1-m}\partial_v^{\beta_1+1}f\right| \le C_{15}\left|\partial_u^1(\partial_u^{\alpha_1-m-1}\partial_v^{\beta_1+1}f)\right| \le C_{16}|f,V_{\delta'}^T|_N$$
$$\le C_{17}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s,$$

do $(\alpha_1-m-1,\beta_1+1)\in\Gamma_N$.

3. Nếu $2k+3\le\alpha_1\le 4k+4$ và $1<m<\alpha_1$, để đánh giá $A(u,v)$ chúng ta đánh giá:

$$\bullet|u^{2k-m}\partial_u^{\alpha_1-m}\partial_v^{\beta_1+2}f| \le C_{18}|\partial_u\partial_u^{\alpha_1-m-1}\partial_v^{\beta_1+2}f| \le C_{19}|f,V_{\delta'}^T|_N$$
$$\le C_{19}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s,$$

do $(\alpha_1-m-1,\beta_1+2)\in\Gamma_N$.

$$\bullet|u^{k-m}\partial_u^{\alpha_1+1-m}\partial_v^{\beta_1+1}f| \le C_{20}|u^k\partial_v(\partial_u^{\alpha_1-m+1}\partial_v^{\beta_1}f)| \le C_{21}|f,V_{\delta'}^T|_N$$
$$\le C_{21}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s,$$

do $(\alpha_1-m-1,\beta_1)\in\Gamma_N$.

$$\bullet|u^{k-m-1}\partial_u^{\alpha_1-1-m}\partial_v^{\beta_1+1}f| \le C_{22}|\partial_u^{\alpha_1-1-m}\partial_v^{\beta_1+1}f| \le C_{23}|f,V_{\delta'}^T|_N$$
$$\le C_{23}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s,$$

do $(\alpha_1-m-1,\beta_1+1)\in\Gamma_N$.

4. Nếu $2k+3 \le \alpha_1 \le 4k+4$ mà $m=1, \alpha_1 - m \ge 4$, để đánh giá $A(u,v)$ chúng ta đánh giá:

$\bullet |u^{2k-1}\partial_u^{\alpha_1-1}\partial_v^{\beta_1+2}f| \le C_{24}|\partial_u^2(\partial_u^{\alpha_1-3}\partial_v^{\beta_1+2}f)| \le C_{25}|f, V_{\delta'}^T|_N$

$$\le C_{25}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s,$$

do $(\alpha_1-3, \beta_1+2) \in \Gamma_N$ và $\alpha_1 - 3 \ge 1, \beta_1 + 2 \ge 1$

$\bullet \left|u^{k-1}\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1}f(u,v)\right| \le C_{26}\left|\partial_u^2(\partial_u^{\alpha_1-2}\partial_v^{\beta_1+1}f)\right| \le C_{27}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N$

$$\le C_{27}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s,$$

do $\alpha_1 - 2 \ge 1, \beta_1 + 1 \ge 1$ và $(\alpha_1 - 2, \beta_1 + 1) \in \Gamma_N$.

$\bullet \left|u^{k-2}\partial_u^{\alpha_1-1}\partial_v^{\beta_1+1}f(u,v)\right| \le C_{28}\left|\partial_u^2(\partial_u^{\alpha_1-3}\partial_v^{\beta_1+2}f)\right| \le C_{29}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N$

$$\le C_{29}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s,$$

do $\alpha_1 - 3 \ge 1, \beta_1 + 2 \ge 1$và $(\alpha_1 - 3, \beta_1 + 2) \in \Gamma_N$.

Vì vậy trên $V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ ta có

$$|A(u,v)|\Big|_{V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \le C_{28}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s.$$

III. Trường hợp $\alpha_1 \ge 4k+5$. Trong trường hợp này để đánh giá $A(u,v)$ chúng ta đánh giá:

$\bullet\left|u^{2k-m}\partial_u^{\alpha_1-m}\partial_v^{\beta_1+2}f(u,v)\right| \le C_{30}\left|\partial_u^2\big(\partial_u^{\alpha_1-m-2}\partial_v^{\beta_1+2}f(u,v)\big)\right|$

$$\le C_{31}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N,$$

do $\alpha_1 - m - 2 \ge 1, \beta_1 + 2 \ge 1$ và $(\alpha_1 - m - 2, \beta_1 + 2) \in \Gamma_{N+1-m}$.

$\bullet\left|u^{k-m-1}\partial_u^{\alpha_1-m}\partial_v^{\beta_1+1}f(u,v)\right| \le C_{32}\left|\partial_u^2\big(\partial_u^{\alpha_1-m-2}\partial_v^{\beta_1+1}f(u,v)\big)\right|$

$$\le C_{33}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N,$$

do $\alpha_1 - m - 2 \ge 1, \beta_1 + 1 \ge 1$ và $(\alpha_1 - m - 2, \beta_1 + 1) \in \Gamma_{N+1-m}$.

$$\bullet\left|u^{k-m}\partial_u^{\alpha_1+1-m}\partial_v^{\beta_1+1}f(u,v)\right| \le C_{34}\left|\partial_u^2\big(\partial_u^{\alpha_1-m-1}\partial_v^{\beta_1+1}f(u,v)\big)\right|$$

$$\le C_{35}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N,$$

do $\alpha_1 - m - 1 \ge 1, \beta_1 + 1 \ge 1$ và $(\alpha_1 - m - 1, \beta_1 + 1) \in \Gamma_{N+1-m}$.

Vì vậy

$$|A(u,v)| \le C_{36}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s.$$

Từ tất cả các trường hợp I, II, III ta có

$$|A(u,v)| \le C_{37}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-1)!^s.$$

Tiếp theo ta xét

$$B(u,v) = -\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1}\psi\Big(u,v,f,\frac{\partial f}{\partial u},u^k\frac{\partial f}{\partial v}\Big).$$

Theo Mệnh đề 1.3.1 và giả thiết quy nạp thì

$$\left|B(u,v)\right| \le C\bigg(\left|f, V_{\delta'}^T\right|_{N+1} + H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s\bigg).$$

Tóm lại, chúng ta được

$$|I_1| \le C\bigg(\left|f, V_{\delta'}^T\right|_{N+1} + H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}(N-r_0-1)!^s\bigg)$$
$$\times \int\limits_{V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \Big[\big(x^{k+1}-u^{k+1}\big)^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Bây giờ ta đánh giá

$$I_1^0 = \int\limits_{V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \Big[\big(x^{k+1}-u^{k+1}\big)^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Ta có

$$I_1^0 \le \int\limits_{V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \Big[C(x-u)^{k+1} + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{\frac{-1}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Đặt $\begin{cases} u - x = r^{\frac{1}{k+1}} \cos^{\frac{1}{k+1}} \varphi, \\ v - y = r \sin \varphi, \end{cases}$ hay $\begin{cases} u = x + r^{\frac{1}{k+1}} \cos^{\frac{1}{k+1}} \varphi, \\ v = y + r \sin \varphi. \end{cases}$

Ta có Jacobian $J = \dfrac{r^{\frac{1}{k+1}}}{k+1} \cos^{\frac{-k}{k+1}} \varphi$.

Với $(u, v) \in V_{\sigma_N(x,y)}(x, y)$ thì $\rho\big((u, v), (x, y)\big) \le \sigma_N(x, y)$ nên $r \le \sigma_N(x, y)$. Do đó ta có

$$
\begin{aligned}
|I_1^0| &\le C \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{0}^{\sigma_N(x,y)} r^{-1} r^{\frac{1}{k+1}} \, cos^{\frac{-k}{k+1}} \varphi \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{\sigma_N(x,y)} r^{-1} r^{\frac{1}{k+1}} \Big(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \Big)^{\frac{-k}{k+1}} \frac{1}{1 + t^2} \, \mathrm{d}t \mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

Tích phân này có kỳ dị tại $r = 0,\ t = \pm 1$, và khi $t \to \pm\infty$, nhưng vẫn hội tụ và ta có

$$
|I_1^0| \le C_{36} \sigma_N^{\frac{1}{k+1}}(x, y) \le C T^{\frac{1}{k+1}}.
$$

Do đó

$$
|I_1| \le C_{37} \Big(\big| f, V_{\delta'}^T \big|_{N+1} + H_0 \Big(\frac{H_1}{\delta'} \Big)^{N - r_0 - 1} (N - r_0 - 1)!^s \Big) T^{\frac{1}{k+1}}. \quad (1.52)
$$

B. Đánh giá tích phân I_3 trong (1.51).

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \partial_u^{\alpha_1} \partial_v^{\beta_1} f(u, v)_\gamma \partial_{\alpha,\beta} \widetilde{B}_2(E_{k,c}^{a,b}(x, y, u, v), a, b, k, c) \mathrm{d}s \\
&= \int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \partial_u^{\alpha_1} \partial_v^{\beta_1} f(u, v)(\nu_1 - ibu^k \nu_2)_\gamma \partial_{\alpha,\beta} \widetilde{X}_2 E_{k,c}^{a,b}(x, y, u, v) \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Đặt I_3 trên $E_1 \cup E_3$ là I_3^0, với E_1, E_3 là hai cạnh của hình vuông, các cạnh này song song với Ox. Trên E_1 và E_3 thì $\nu_1 = 0, \nu_2 = 1$ nên chúng ta có

$$
I_3^0 = \int\limits_{E_1 \cup E_3} \partial_u^{\alpha_1} \partial_v^{\beta_1} f(u, v)(-ibu^k) \widetilde{X}_2 E_{k,c}^{a,b}(x, y, u, v) \mathrm{d}u.
$$

1. Ta xét trường hợp 1: $|x| \le (2\sigma_N(x, y))^{\frac{k}{k+1}}$.

Khi đó trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ theo Bổ đề 1.3.2 ta có

$$\Big|{}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\Big| \leq \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)} \ \ \forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi^1_k.$$

Mặt khác

$$\left|\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v)\right| = \left|\partial_u^1(\partial_u^{\alpha_1-1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v))\right| \leq C_{38}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N,$$

do $(\alpha_1-1,\beta_1)\in\Gamma_N$.

Vì vậy

$$|I_3^0| = \Big|\int\limits_{E_1\cup E_3} \partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v)(-ibu^k)\widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}\mathrm{d}u\Big| \leq \frac{C_{38}\left|f,V_{\delta'}^T\right|_N}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}\Big|\int\limits_{E_1} -ibu^k\mathrm{d}u\Big|$$

$$= \frac{C_{38}\left|f,V_{\delta'}^T\right|_N}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}\frac{u^{k+1}}{k+1}\Bigg|_{u_1}^{u_2} = \frac{C_{38}\left|f,V_{\delta'}^T\right|_N}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}\frac{1}{k+1}(u_2^{k+1}-u_1^{k+1}).$$

Nhưng (u_1,v_1) và (u_2,v_2) (với $u_1\leq u_2$) là hai đỉnh thuộc cạnh E_1 của hình vuông, nên chúng ta có

$$\rho\big((u_1,v_1),(x,y)\big) = \sigma_N(x,y) \text{ và } \rho\big((u_2,v_2),(x,y)\big) = \sigma_N(x,y),$$

hay $\qquad x^{k+1}-u_1^{k+1} = \sigma_N(x,y)$ và $u_2^{k+1}-x^{k+1} = \sigma_N(x,y)$.

Vì vậy $\qquad u_2^{k+1}-u_1^{k+1} = \sigma_N(x,y)$.

Từ đó ta có

$$|I_3^0| \leq \frac{C_{38}\left|f,V_{\delta'}^T\right|_N}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}\sigma_N(x,y) = \frac{C_{38}\left|f,V_{\delta'}^T\right|_N}{\sigma_N^{\frac{1}{k+1}}(x,y)} \leq \frac{C_{38}\left|f,V_{\delta'}^T\right|_N}{\sigma_N(x,y)}$$

do $\sigma_N(x,y)<1$.

Sử dụng giả thiết qui nạp chúng ta có

$$\left|f,V_{\delta'}^T\right|_N \leq H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s,$$

nên $\qquad |I_3| \leq C_{39}\dfrac{H_0}{H_1}\Big(\dfrac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}(N-r_0-1)!^s.$

Xét I_3 trên $E_2 \cup E_4$, gọi tích phân này là I_3^1, ta có

$$|I_3^1| = \Big| \int\limits_{E_2\cup E_4} \partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v)\widetilde{X}_2 E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\mathrm{d}v \Big| \le \frac{C_{40}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)} \Big| \int\limits_{E_2\cup E_4} \mathrm{d}v \Big|.$$

Gọi (u_1,v_1) và (u_2,v_2) (với $v_1 \le v_2$) là hai đỉnh thuộc E_2 của hình vuông thì

$$|I_3^1| \le \frac{C_{41}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)} |v_2 - v_1|.$$

Nhưng do $\rho\big((u_1,v_1),(x,y)\big) = \sigma_N(x,y)$ và $\rho\big((u_2,v_2),(x,y)\big) = \sigma_N(x,y)$, nên $(k+1)(y-v_1) = \sigma_N(x,y)$ và $(k+1)(v_2-y) = \sigma_N(x,y)$.

Từ đó ta có $\quad v_2 - v_1 = \dfrac{2\sigma_N(x,y)}{k+1}$,

vì vậy
$$|I_3^1| \le \frac{C_{41}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)} \frac{2\sigma_N(x,y)}{k+1} \le \frac{C_{42}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N}{\sigma_N(x,y)}.$$

Cuối cùng ta có

$$|I_3| \le C_{43}\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s.$$

2. Trường hợp 2.

Khi $|x| > (2\sigma_N(x,y))^{\frac{1}{k+1}}$ thì theo Bổ đề 1.3.3 trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ chúng ta có

$$\Big|\frac{{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{X}_2 E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{u^k}\Big| \le \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)} \quad \forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \Xi_1^k.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
&\Big|\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v)\,{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{X}_2 E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\Big| \\
&\qquad = \Big|u^k \partial_v^1(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1} f(u,v))\frac{{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{X}_2 E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{u^k}\Big| \\
&\qquad \le \frac{C}{\big(\sigma_N(x,y)\big)^2} \times \Big|u^k \partial_v^1(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1} f(u,v))\Big|.
\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra

$$|I_3| \leq C_{44}\frac{|f, V_{\delta'}^T|_N}{\sigma_N^2(x,y)} \times \Big|\int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} (\nu_1 - iu^k\nu_2)\mathrm{d}s\Big|.$$

Nhưng ta có

$$\Big|\int\limits_{E_2\cup E_4} (\nu_1 - iu^k\nu_2)\mathrm{d}s\Big| = \Big|\int\limits_{E_2\cup E_4} \mathrm{d}v\Big| \leq \frac{C}{\sigma_N(x,y)},$$

và

$$\Big|\int\limits_{E_1\cup E_3} (\nu_1 - iu^k\nu_2)\mathrm{d}s\Big| \leq C\Big|\int\limits_{E_1\cup E_3} u^k\mathrm{d}u\Big| \leq \frac{C}{\sigma_N(x,y)},$$

nên ta thu được

$$|I_3| \leq C_{45}\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}(N-r_0-1)!^s.$$

Chúng ta cần so sánh $\dfrac{H_1}{\delta}$ và $\dfrac{H_1}{\delta'}$, vì thế ta dùng bổ đề sau:

Bổ đề 1.3.4 *Cho* $\delta > 0,\ \delta' = \delta(1 - \dfrac{1}{N})$*. Khi đó tồn tại hằng số C để*

$$\Big(\frac{1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1} < C\Big(\frac{1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}.$$

Chứng minh. Thật vậy, biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$\Big(\frac{\delta}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1} < C \Leftrightarrow \left(\frac{\delta}{\delta\big(1-\dfrac{1}{N}\big)}\right)^{N-r_0-1} < C$$

$$\Leftrightarrow \Big(1+\frac{1}{-N}\Big)^{-N+r_0+1} < C \Leftrightarrow \Big(1+\frac{1}{-N}\Big)^{-N}\Big(1+\frac{1}{-N}\Big)^{r_0+1} < C.$$

Do đó, ta chọn được hằng số C thỏa mãn bất đẳng thức trên với mọi N. Cụ thể hơn là chọn $C > e$.

Vì vậy áp dụng Bổ đề 1.3.4 ta có

$$|I_3| \leq C_{45}\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}(N-r_0-1)!^s. \tag{1.53}$$

Bây giờ chúng ta đánh giá tích phân I_2 trong (1.51):

Đầu tiên chúng ta đánh giá tích phân đường theo hai cạnh E_2 và E_4. Ta đặt

$$|I_2^0| = \Big|\int\limits_{E_2\cup E_4} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1}f(u,v))\mathrm{d}v\Big|.$$

Viết lại $\widetilde{B}_1(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1}f,k,c,a,b) = \partial_v^1\widetilde{B}_1\big(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1}f(u,v)\big)$, ta có

$$|I_2^0| \le \Big|\int\limits_{E_2\cup E_4} \partial_v^1\big({}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\big)\widetilde{B}_1(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1}f,a,b,c,k)\mathrm{d}v\Big| +$$

$$+\Big|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1}f,a,b,c,k)\Big|_{\partial E_2\cup\partial E_4}\Big| := K_1 + K_2.$$

Xét tích phân K_1, ta đánh giá $\partial_v^1\big({}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\big)$ trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ giống như đánh giá $\Big|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{X}_2E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\Big|$.

Tiếp theo ta xét $\Big|\widetilde{B}_1(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1}f,a,b,c,k)\Big|$. Trên $E_2\cup E_4$ thì $\nu_2 = 0$ nên chúng ta có

$$\begin{aligned}\Big|\widetilde{B}_1(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1}f,k,c,a,b)\Big| &= \Big|\Big(\frac{\partial}{\partial u} + ibu^k\frac{\partial}{\partial v}\Big)\big(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1}f(u,v)\big)\Big| \\ &= \Big|\partial_u^1\big(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1}f(u,v)\big) + ibu^k\partial_v^1\big(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1}f(u,v)\big)\Big| \\ &\le C_{46}H_0\Big(\frac{H_0}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s,\end{aligned}$$

do $(\alpha_1,\beta_1-1)\in\Gamma_N$.

Vì vậy đánh giá K_1 cũng giống đánh giá E_3^1, và ta có

$$\begin{aligned}K_1 &= \Big|\int\limits_{E_2\cup E_4}\partial_v^1({}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v))\widetilde{B}_1(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1}f,a,b,c,k)\mathrm{d}v\Big| \\ &\le C_{47}\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}(N-r_0-1)!^s.\end{aligned}$$

Tiếp đến xét tích phân K_2, ta có

$$\begin{aligned}\left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\Big|_{\partial E_2\cup\partial E_4}\right| &\le \Big[|x^{k+1}-u^{k+1}|^2+(k+1)^2|y-v|^2\Big]^{-\frac12}\\ &\le \Big[|\sigma_N(x,y)|^2+\big(\sigma_N(x,y)\big)^2\Big]^{-\frac12}=\frac{1}{\sigma_N(x,y)}.\end{aligned}$$

và

$$\left|\widetilde{B}_1(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1}f,a,b,c,k)\Big|_{\partial E_2\cup\partial E_4}\right| \le C_{48}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-2}(N-r_0-2)!^s.$$

Vậy

$$\begin{aligned}K_2&=\left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1\big(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1}f(u,v),a,b,k,c\big)\right|\Big|_{\partial E_2\cup\partial E_4}\\ &\le C_{49}\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}(N-r_0-1)!^s,\end{aligned}$$

cho nên ta có

$$|I_2^0|\le C_{50}\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}(N-r_0-1)!^s. \tag{1.54}$$

Bây giờ chúng ta đánh giá tích phân đường trên cạnh E_1 và E_3.

Đặt $I_2^1=\displaystyle\int\limits_{E_1\cup E_3}{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1}f,a,b,c,k)\mathrm{d}u.$

$$\begin{aligned}&=\int\limits_{E_1\cup E_3}\partial_u^1({}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v))\\ &\qquad\qquad\times\big(iau^k\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1}f(u,v)+abu^{2k}\partial_u^{\alpha_1-1}\partial_v^{\beta_1+1}f(u,v)\big)\,\mathrm{d}u\\ &+\int\limits_{E_1\cup E_3}{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\\ &\qquad\times\big((iaku^k+icu^{k-1})\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1}f(u,v)+2abku^{2k-1}\partial_u^{\alpha_1-1}\partial_v^{\beta_1+1}f(u,v)\big)\,\mathrm{d}u\\ &-\big({}_\gamma\partial_{\alpha\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)iau^k\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1}f(u,v)+abu^{2k}\partial_u^{\alpha_1-1}\partial_v^{\beta_1+1}f(u,v)\big)\Big|_{\partial E_1\cup\partial E_3}.\end{aligned}$$

Ta có

$\bullet\left|u^k\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1}f(u,v)\right|\Big|_{E_1\cup E_3}=\left|u^k\partial_v^1\big(\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1-1}f(u,v)\big)\right|\Big|_{E_1\cup E_3}\le C_{51}\left|f,V^T_{\delta'}\right|_N,$

do $(\alpha_1, \beta_1 - 1) \in \Gamma_N$.

$$\bullet |u^{2k}\partial_u^{\alpha_1-1}\partial_v^{\beta_1+1} f(u,v)|\Big|_{E_1\cup E_3} \le C_{52}\big|u^k\partial_v^1\big(\partial_u^{\alpha_1-1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v)\big)\big| \le C_{53}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N,$$

do $(\alpha_1 - 1, \beta_1) \in \Gamma_N$.

$$\bullet |u^{k-1}\partial_u^{\alpha_1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v)| \le C_{55}\left|\partial_u^1\big(\partial_u^{\alpha_1-1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v)\big)\right|,$$

$$\bullet |u^{2k-1}\partial_u^{\alpha_1-1}\partial_v^{\beta_1+1} f(u,v)| \le C_{57}\left|u^k\partial_v^1\big(\partial_u^{\alpha_1-1}\partial_v^{\beta_1} f(u,v)\big)\right| \le C_{58}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N,$$

do $(\alpha_1 - 1, \beta_1) \in \Gamma_N$.

Do đó:

$$|I_2^1| \le C_{59}\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}(N-r_0-1)!^s. \tag{1.55}$$

Từ (1.54) và (1.55) chúng ta có

$$|I_2| \le C_{60}\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}(N-r_0-1)!^s. \tag{1.56}$$

Vậy từ (1.51), (1.52), (1.53), (1.56) ta có

$$\max_{(x,y)\in V_\delta^T}\left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1} f(x,y)\right|$$

$$\le C_{61}\Bigg(T^{\frac{1}{k+1}}|f, V_{\delta'}^T|_{N+1} + H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s\Big(T^{\frac{1}{k+1}} + \frac{1}{H_1}\Big)\Bigg).$$

Chúng ta hoàn thành chứng minh Mệnh đề 1.3.2. □

Mệnh đề 1.3.3 *Giả sử rằng,* $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Xi_k^1$. *Khi đó tồn tại một hằng số* C_{73} *sao cho*

$$\max_{(x,y)\in V_\delta^T}\left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_2^{N+1} f(x,y)\right| \le C_{73}\Bigg[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f, V_{\delta"}^T\right|_{N+1} + \\ + H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s\left(T^{\frac{1}{k+1}} + \frac{1}{H_1}\right)\Bigg].$$

Chứng minh. Lấy đạo hàm hai vế hàm hai vế của phương trình (1):

$$\Psi_{k,c}^{a,b} f(x,y) = G_{k,c}^{a,b} f(x,y) + \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0 \tag{1}$$

$(N+1)$ lần theo biến y chúng ta có

$$\partial_2^{N+1} G_{k,c}^{a,b} f(x,y) + \partial_2^{N+1} \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0.$$

Từ đó chúng ta viết được

$$G_{k,c}^{a,b}\left(\partial_2^{N+1} f(x,y)\right) = -\partial_2^{N+1} \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) := B(x,y).$$

Gọi $V_{4\sigma_N(x,y)}(x,y)$ là hình vuông tâm (x,y) cạnh $8\sigma_N(x,y)$, ta có

$$V_{4\sigma_N(x,y)}(x,y) \subset V_{\delta''}^T.$$

Áp dụng công thức (1.10) ta được:

$$\begin{aligned}
\partial_2^{N+1} f(x,y) = &\int\limits_{V_{4\sigma_N(x,y)}(x,y)} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) B(u,v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&- \int\limits_{S_{4\sigma_N(x,y)}(x,y)} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) \widetilde{B}_1\big(\partial_v^{N+1} f(u,v), a, b, c, k\big) \mathrm{d}s \\
&+ \int\limits_{S_{4\sigma_N(x,y)}(x,y)} \partial_v^{N+1} f(u,v) \widetilde{B}_2\big(E_{k,c}^{a,b}, a, b, c, k\big) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Lấy đạo hàm ${}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}$:

$$\begin{aligned}
{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_2^{N+1} f(x,y) = &\int\limits_{V_{4\sigma_N(x,y)}(x,y)} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) B(u,v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&- \int\limits_{S_{4\sigma_N(x,y)}(x,y)} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) \widetilde{B}_1\big(\partial_v^{N+1} f(u,v), a, b, c, k\big) \mathrm{d}s \\
&+ \int\limits_{S_{4\sigma_N(x,y)}(x,y)} \partial_v^{N+1} f(u,v) {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} \widetilde{B}_2\big(E_{k,c}^{a,b}, a, b, c, k\big) \mathrm{d}s \\
&:= I_4 + I_5 + I_6.
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Từ $V_{4\sigma_N(x,y)} \subset V_{\delta''}^T$, tương tự như đánh giá I_1, chúng ta có:

$$|I_4| \leq C T^{\frac{1}{k+1}} \left(\big|f, V_{\delta''}^T\big|_{N+1} + H_0 \Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1} ((N-r_0-1)!)^s \right). \tag{1.58}$$

Bây giờ chúng ta đánh giá I_5, I_6 trong (1.58).

I. Khi $|x| \le \big(2\,\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$.

A. Đầu tiên chúng ta quan tâm tới tích phân đường trên cạnh $\widetilde{E}_2$ và $\widetilde{E}_4$; ở đây $\widetilde{E}_2$ và $\widetilde{E}_4$ là cạnh của $S_{4\sigma_N(x,y)}(x,y)$, các cạnh này song song với Oy. Chú ý rằng trên $\widetilde{E}_2 \cup \widetilde{E}_4$ thì $|u| \ge \big(2\,\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$.

1. Đánh giá I_6:

$$\text{Đặt} \quad I_6^0 = \Big| \int\limits_{\widetilde{E}_2 \cup \widetilde{E}_4} \partial_v^{N+1} f(u,v)\,{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} \widetilde{B}_2\big(E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v), a, b, c, k\big)\mathrm{d}v \Big|.$$

Ta nhớ là khi $|u| \ge \big(2\,\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ theo Bổ đề 1.3.3, thì

$$\left| \frac{{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} \widetilde{X}_2 E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{u^k} \right|_{\widetilde{E}_2 \cup \widetilde{E}_4} < \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}.$$

Vì vậy

$$\big|\partial_v^{N+1} f(x,y)\,{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} \widetilde{B}_2\big(E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v), a, b, c, k\big)\big|\Big|_{\widetilde{E}_2 \cup \widetilde{E}_4}$$

$$\le \frac{C_{63}}{\sigma_N^2(x,y)} \big|u^k \partial_v \left(\partial_v^N f(u,v)\right)\big|\Big|_{\widetilde{E}_2 \cup \widetilde{E}_4} \le \frac{C_{64}}{\sigma_N^2(x,y)} \Big|f, V_{\delta'}^T\Big|_N,$$

do $(0,1,k) \in \Xi_k^1$ và $(0,N) \in \Gamma_N$.

Cho nên

$$I_6^0 \le C_{69} \frac{H_0}{H_1} \left(\frac{H_1}{\delta''}\right)^{N-r_0-1} ((N-r_0-1)!)^s.$$

2. Chúng ta tiếp tục đánh giá tích phân I_5 trên $\widetilde{E}_2 \cup \widetilde{E}_4$.

Đặt

$$I_5^0 = \int\limits_{\widetilde{E}_2 \cup \widetilde{E}_4} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) \widetilde{B}_1\big(\partial_v^{N+1} f(u,v), a, b, c, k\big)\mathrm{d}v,$$

trong đó

$$\widetilde{B}_1\big(\partial_v^{N+1} f(u,v), a, b, c, k\big) = \partial_v^1 \widetilde{B}_1\big(\partial_v^N f(u,v), a, b, c, k\big).$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}|I_5^0| &\le \left| \int\limits_{\widetilde{E}_2 \cup \widetilde{E}_4} \partial_v^1\big({}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\big)\widetilde{B}_1\big(\partial_v^N f(u,v), a, b, c, k\big)\mathrm{d}v \right| \\ &\quad + \left| {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1\big(\partial_v^N f(u,v), a, b, c, k\big)\right|\Big|_{\partial\widetilde{E}_2 \cup \partial\widetilde{E}_4} \\ &\quad := K_3 + K_4.\end{aligned}$$

Do trên $\widetilde{E}_2$ và $\widetilde{E}_4$, véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ có $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$, nên chúng ta có

$$\begin{aligned}K_3 &= \left| \int\limits_{\widetilde{E}_2 \cup \widetilde{E}_4} \partial_v^1\Big({}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\Big)\widetilde{B}_1\big(\partial_v^N f(u,v), a, b, c, k\big)dv \right| \\ &= \left| \int\limits_{\widetilde{E}_2 \cup \widetilde{E}_4} \partial_v^1\Big({}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\Big)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial u} - ibu^k \frac{\partial}{\partial v}\Big)\partial_v^N f(u,v)\Big]\mathrm{d}v \right|.\end{aligned}$$

Nhưng

$$\left|\partial_v^1\Big({}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\Big)\right|\Big|_{\partial\widetilde{E}_2 \cup \partial\widetilde{E}_4} \le \frac{C_{70}}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)} \quad \text{(do Bổ đề 1.3.1)},$$

và

$$\begin{aligned}\left|\Big(\frac{\partial}{\partial u} - ibu^k\frac{\partial}{\partial v}\Big)\partial_v^N f(u,v)\right| &\le \left|\frac{\partial}{\partial u}\,\partial_v^N f(u,v)\right| + \left|u^k \frac{\partial}{\partial v}\,\partial_v^N f(u,v)\right| \\ &\le C_{71}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N \le C_{71}\left(\frac{H_0}{\delta'}\right)^{N-r_0-2}((N-r_0-2)!)^s,\end{aligned}$$

do $(0,N) \in \Gamma_N$.

Vì vậy

$$K_3 \le C_{73}\,\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta'}\right)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s. \tag{1.59}$$

Tiếp theo xét:

$$K_4 = \left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1\big(\partial_v^N f(u,v), a, b, c, k\big)\right|\Big|_{\partial\widetilde{E}_2 \cup \partial\widetilde{E}_4}.$$

Chúng ta có

$$\Big|\widetilde{B}_1\big(\partial_v^N f(u,v),a,b,c,k\big)\Big| = \Big|\Big(\frac{\partial}{\partial u} - ibu^k\frac{\partial}{\partial v}\Big)\partial_v^N f(u,v)\Big|\Big|_{\partial\widetilde{E}_2\cup\partial\widetilde{E}_4}$$

$$\leq \Big[\Big|\frac{\partial}{\partial u}\,\partial_v^N f(u,v)\Big| + \Big|u^k\frac{\partial}{\partial v}\,\partial_v^N f(u,v)\Big|\Big]\Big|_{\partial\widetilde{E}_2\cup\partial\widetilde{E}_4} \leq C_{74}\Big|f,V_{\delta'}^T\Big|_N \quad (1.60)$$

do $(0,N)\in\Gamma_N$.

Mặt khác ta có

$$\Big|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\Big| \leq \frac{C}{\sigma_N(x,y)}. \quad (1.61)$$

Do đó từ (1.60) và (1.61) chúng ta có

$$K_4 \leq C_{76}\,\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta'}\right)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s. \quad (1.62)$$

Vì vậy trên $\widetilde{E}_2\cup\widetilde{E}_4$:

$$|I_5^0| \leq C_{77}\,\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta'}\right)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s. \quad (1.63)$$

B. Bây giờ ta quan tâm tới tích phân đường trên $\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_3$, ở đây $\widetilde{E}_1$ và $\widetilde{E}_3$ là ký hiệu các cạnh của hình vuông $S_{4\sigma_N(x,y)}(x,y)$ - các cạnh song song với Ox; trên $\widetilde{E}_1,\widetilde{E}_3$, véc tơ pháp tuyến $\vec{\nu}=(\nu_1,\nu_2)$ có $\nu_1=0,\nu_2=1$.

1. Trước hết chúng ta đánh giá I_6 trên $\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_3$.

Đặt $$I_6^1 = \int\limits_{\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_3}\partial_v^{N+1}f(u,v)\,{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{B}_2\big(E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v),a,b,c,k\big)\mathrm{d}u.$$

Theo Bổ đề 1.3.2, khi $|x|\leq(2\sigma_N(x,y))^{\frac{1}{k+1}}$ thì:

$$\big|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{X}_2E_{k,c}^{a,b}(a,b,c,k)\big|\Big|_{\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_3} \leq \frac{C_{78}}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)} \text{ và } |u|\big|_{\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_3} \leq C_{79}\sigma_N^{\frac{1}{k+1}}(x,y).$$

Vì vậy

$$I_6^1 \leq C_{81}\left(\frac{H_0}{H1}\right)\left(\frac{H1}{\delta''}\right)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s.$$

2. Bây giờ ta đánh giá I_5, để đánh giá tích phân I_5 trên $\widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_3$, ta cũng chú ý rằng véc tơ pháp tuyến đơn vị $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ có $\nu_1 = 0, \nu_2 = 1$. Từ đó chúng ta có:

$$\begin{aligned} I_5^1 &= \int\limits_{\widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_3} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b} \widetilde{B}_1(\partial_v^{N+1} f(u,v), a, b, c, k) \mathrm{d}u \\ &= \int\limits_{\widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_3} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b} \left(-iau^k \partial_u^1 \partial_v^{N+1} f - abu^{2k} \partial_v^{N+2} f + icu^{k-1} \partial_v^{N+1} f\right) \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Xét

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_{k,c}^{a,b}(\partial_v^N f) = \partial_u^2 \partial_v^N f - abu^{2k} \partial_v^{N+2} f - i(a+b) u^k \partial_u^1 \partial_v^{N+1} f(u,v) \\ - i(kb - c) u^{k-1} \partial_v^{N+1} f(u,v). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} -abu^{2k} \partial_v^{N+2} f = + \partial_v^N \psi\Big(u, v, f, \frac{\partial f}{\partial u}, u^k \frac{\partial f}{\partial v}\Big) - \partial_u^2 \partial_v^N f + i(a+b) u^k \partial_u^1 \partial_v^{N+1} f \\ + i(kb - c) u^{k-1} \partial_v^{N+1} f. \end{aligned}$$

Vậy chúng ta có

$$\begin{aligned} |I_5^1| \le & \Big| \int\limits_{\widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_3} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) \partial_v^N \psi\Big(u, v, f, \frac{\partial f}{\partial u}, u^k \frac{\partial f}{\partial v}\Big) \mathrm{d}u \Big| \\ & + \Big| \int\limits_{\widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_3} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) \partial_u^2 \partial_v^N f(u,v) \mathrm{d}u \Big| \\ & + \Big| \int\limits_{\widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_3} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) ib \partial_u^1 \big(u^k \partial_v^{N+1} f(u,v)\big) \mathrm{d}u \Big|. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Lấy tích phân từng phần tích phân thứ ba trong (1.64) ta có

$$\begin{aligned} & \Big| \int\limits_{\widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_3} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) ib \partial_u^1 \big(u^k \partial_v^{N+1} f(u,v)\big) \mathrm{d}u \Big| \\ \le & \Big| \int\limits_{\widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_3} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} \partial_u^1 \big(E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\big) u^k \partial_v^1 \partial_v^N f(u,v) \mathrm{d}u \Big| \end{aligned}$$

$$+\left|{}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)u^k\partial^1_v\partial^N_v f(u,v)\right|\Big|_{\partial\widetilde{E}_1\cup\partial\widetilde{E}_3}$$

$$\leq \frac{C_{82}|f,V^T_{\delta''}|_N}{\sigma_N(x,y)} \ \leq C_{83}\frac{H_0}{H1}\Big(\frac{H1}{\delta"}\Big)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s.$$

Tiếp theo, ta đánh giá tích phân đầu tiên trong (1.64). Do giả thiết quy nạp và theo Mệnh đề 1.3.1 chúng ta có

$$\left|\partial^N_v\psi\Big(u,v,f,\frac{\partial f}{\partial u},\frac{u^k\partial f}{\partial v}\Big)\right|\leq C_{84}H_0\Big(\frac{H1}{\delta"}\Big)^{N-r_0-2}((N-r_0-2)!)^s$$

với $(0,N)\in\Gamma_N$.

Mặt khác ta có

$$\left|\int\limits_{\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_3} {}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{c,k}(x,y,u,v)\mathrm{d}u\right|\leq\frac{C_{85}}{\sigma_N(x,y)}\,|u_1-u_2|$$

$$\leq\frac{C_{86}}{\sigma_N(x,y)}\,\sigma_N^{\frac{1}{k+1}}(x,y).$$

Vì vậy

$$\Big|\int\limits_{\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_3}\partial^N_v\psi\Big(u,v,f,\frac{\partial f}{\partial u},u^k\frac{\partial f}{\partial v}\Big)\ {}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\mathrm{d}u\Big|$$

$$\leq C_{90}\left(\frac{H_0}{H_1}\right)\left(\frac{H_1}{\delta''}\right)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s.$$

Bây giờ chúng ta đánh giá tích phân thứ hai trong (1.64). Ta có

$$\Big|\int\limits_{\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_3}\partial^1_u(\partial^1_u\partial^N_v f(u,v))_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\mathrm{d}u\Big|$$

$$=\Big|-\int\limits_{\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_3}\partial^1_u\partial^N_v f\partial^1_u\big({}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\big)\mathrm{d}u$$

$$+\ {}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{c,k}(x,y,u,v)\partial^1_u\partial^N_v f(u,v)\Big|_{\partial\widetilde{E}_1\cup\partial\widetilde{E}_3}\Big|$$

$$\leq\Big|\int\limits_{\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_3}{}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}\partial^1_u E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\partial^1_u\partial^N_v f(u,v)\mathrm{d}u\Big|$$

$$+\left|{}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{c,k}(x,y,u,v)\partial^1_u\partial^N_v f(u,v)\right|\Big|_{\partial\widetilde{E}_1\cup\partial\widetilde{E}_3},$$

trong đó

$$\left|{}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{c,k}(x,y,u,v)\partial^1_u\partial^N_v f(u,v)\Big|\Big|_{\partial\widetilde{E}_1\cup\partial\widetilde{E}_3}\right| \le C_{91}\left|f,V^T_{\delta''}\right|_N\left(\frac{1}{\sigma_N(x,y)}\right)$$
$$\le C_{92}\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta"}\right)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s,$$

và

$$\Big|\int\limits_{\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_3}{}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}\partial^1_u E^{a,b}_{c,k}(x,y,u,v)\partial^1_u\partial^N_v f(u,v)\mathrm{d}u\Big|$$
$$\le C_{93}\left|f,V^T_{\delta''}\right|_N\frac{1}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}\sigma_N^{\frac{1}{k+1}}(x,y)\le C_{94}\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta"}\right)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s.$$

Như vậy

$$\left|I^1_5\right| \le C_{95}\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s.$$

II. Khi $|x| > \big(2\,\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$

Trên hình vuông $V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ chúng ta có $|u| > \big(\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$. Khi đó, để đánh giá $\partial^{N+1}_v f(u,v)$ chúng ta lại dùng biểu diễn tích phân trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$:

$$\begin{aligned}\partial^{N+1}_v f(x,y) &= \int\limits_{V_{\sigma_N(x,y)}}{}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)B(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &-\int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}}{}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1(\partial^{N+1}_v f(u,v),a,b,c,k)\mathrm{d}s\\ &+\int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}}\partial^{N+1}_v f(u,v)_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{B}_2(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v),a,b,c,k)\mathrm{d}s\\ &= I^2_4+I^2_5+I^2_6.\end{aligned}$$

Đánh giá I^2_4 giống như đánh giá tích phân I_1 trong Mệnh đề 1.3.2:

$$\left|I^2_4\right| \le C_{96}T^{\frac{1}{k+1}}\Big(\left|f,V^T_{\delta'}\right|_{N+1}+H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s\Big).$$

Đánh giá I^2_6 giống như đánh giá I_3 với trường hợp **2** và chúng ta cũng có

$$\left|I_6^2\right| \leq C_{96} H_0 \Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s.$$

Đánh giá I_5^2 giống như đánh giá I_2 và chúng ta cũng có

$$\left|I_5^2\right| \leq C_{97} H_0 \Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s.$$

Cuối cùng chúng ta kết luận, tồn tại một hằng số C_{97} sao cho

$$\max_{(x,y)\in V_\delta^T} \left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_2^{N+1} f(x,y)\right| \leq C_{97}\Big[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_{N+1} + \\ + H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s\Big(T^{\frac{1}{k+1}} + \frac{1}{H_1}\Big)\Big].$$

Như vậy chúng ta hoàn thành chứng minh Mệnh đề 1.3.3.

Mệnh đề 1.3.4 *Giả sử rằng,* $(\alpha,\beta,\gamma) \in \Xi_k^1$. *Khi đó tồn tại một hằng số* C_{98} *sao cho*

$$\max_{(x,y)\in V_\delta^T} \left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_1^{N-r_0+1} f(x,y)\right| \leq C_{98}\Big[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_{N+1} + \\ + H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s\Big(T^{\frac{1}{k+1}} + \frac{1}{H_1}\Big)\Big].$$

Chứng minh. Lấy đạo hàm hai vế của phương trình (1) $(N-r_0+1)$ lần theo biến x, ta nhận được

$$G_{k,c}^{a,b}\partial_1^{N-r_0+1} f(x,y) - A(x,y) - B(x,y) = 0,$$

trong đó

$A(x,y) =$

$$= ab \sum_{m=1}^{\min\{N-r_0+1,2k\}} \binom{N-r_0+1}{m} 2k\cdots(2k-m+1)x^{2k-m}\partial_1^{N-r_0+1-m}\partial_2^2 f$$

$$+ i(a+b) \sum_{m=1}^{\min\{N-r_0+1,k\}} \binom{N-r_0+1}{m} k\cdots(k-m+1)x^{k-m}\partial_1^{N-r_0+2-m}\partial_2^1 f$$

$$+ i(kb-c) \sum_{m=1}^{\min\{N-r_0+1,k-1\}} \binom{N-r_0+1}{m} k\cdots(k-m)x^{k-m-1}\partial_1^{N-r_0+1-m}\partial_2^1 f$$

và $$B(x,y) = -\partial_1^{N-r_0+1}\psi\Big(x,y,f,\frac{\partial f}{\partial x},x^k\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Khi đó, áp dụng công thức (1.10) ta có:

$$\begin{aligned}\partial_1^{N-r_0+1}f(x,y) = &\int\limits_{V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\widetilde{G}_{k,c}^{a,b}\partial_u^{N-r_0+1}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &-\int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1(\partial_u^{N-r_0+1}f(u,v),a,b,c,k)\mathrm{d}s\\ &+\int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \partial_u^{N-r_0+1}f(u,v)\widetilde{B}_2(E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)a,b,c,k)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Lấy đạo hàm ${}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}$ hai vế của đẳng thức trên, đồng thời thay

$$\widetilde{G}_{k,c}^{a,b}\partial_u^{N-r_0+1}f(u,v) = A(u,v)+B(u,v)$$

chúng ta có

$$\begin{aligned}{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_1^{N-r_0+1}f(x,y) = &\int\limits_{V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\big(A(u,v)+B(u,v)\big)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &-\int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\widetilde{B}_1(\partial_u^{N-r_0+1}f(u,v),a,b,c,k)\mathrm{d}s\\ &+\int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \partial_u^{N-r_0+1}f(u,v){}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{B}_2(E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)a,b,c,k)\mathrm{d}s\\ &= I_7+I_8+I_9.\end{aligned}$$

Xét tích phân I_7:

$$I_7 = \int\limits_{V_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\big(A(u,v)+B(u,v)\big)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$A(u,v)+B(u,v)$ được đánh giá tương tự trong Mệnh đề 1.3.2, nên chúng thu được ngay kết quả

$$|I_7| \le C_{99}T^{\frac{1}{k+1}}\bigg(\big|f,V_{\delta'}^T\big|_{N+1} + H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s\bigg). \quad (1.65)$$

Tiếp theo chúng ta xét đến tích phân I_9

$$I_9 = \int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \partial_u^{N-r_0+1} f(u,v)_\gamma \partial_{\alpha\beta} \widetilde{B}_2(E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)a,b,c,k)\mathrm{d}s.$$

Chú ý rằng, chúng ta chỉ có $(N-r_0,0) \in \Gamma_N$ mà chưa có $(N-r_0+m,0) \in \Gamma_N$ với $m \geq 1$.

Vì vậy ta viết

$$|\partial_u^{N-r_0+1} f(u,v)| = |\partial_u^1 \partial_u^{N-r_0} f(u,v)| \leq \left|f, V_{\delta'}^T\right|_N.$$

Cho nên ta có

$$\begin{aligned} |I_9| &\leq \left| \int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \partial_u^{N-r_0+1} f(u,v)_\gamma \partial_{\alpha,\beta} \widetilde{B}_2(E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)a,b,c,k)\mathrm{d}s \right| \\ &\leq C_{100} \frac{H_0}{H_1} \Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1} ((N-r_0-1)!)^s. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Bây giờ đánh giá I_8:

$$\begin{aligned} |I_8| =& \left| \int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} {}_\gamma \partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) \widetilde{B}_1(\partial_u^{N-r_0+1} f(u,v), a,b,c,k)\mathrm{d}s \right| \\ =& \Bigg| \int\limits_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} {}_\gamma \partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) \times \\ & \times \Big[(\nu_1 - iau^k\nu_2)(\partial_u^1 - ibu^k \partial_v^1)(\partial_u^{N-r_0+1} f(u,v) + icu^{k-1}\nu_2 \partial_u^{N-r_0+1} f(u,v)\Big]\mathrm{d}s \Bigg|. \end{aligned}$$

A. Trước hết chúng ta xét I_8 trên $E_2 \cup E_4$, tích phân này ký hiệu là I_8^0. Như đã nói ở phần trước, véc tơ pháp tuyến đơn vị trên $E_2 \cup E_4$ là $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ có $\nu_1 = 1, \nu_2 = 0$.

Khi đó

$$I_8^0 = \int\limits_{\widetilde{E}_2 \cup \widetilde{E}_4} {}_\gamma \partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)(\partial_u^1 - ibu^k \partial_v^1)(\partial_u^{N-r_0+1} f)\mathrm{d}s.$$

Nhưng

$$(\partial_u^1 - ibu^k\partial_v^1)\partial_u^1\partial_u^{N-r_0} f = \widetilde{G}_{k,c}^{a,b}\partial_u^{N-r_0} f + (iau^k\partial_v^1)\partial_u^{N-r_0+1} f$$
$$+\, abu^{2k}\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}\partial_v^1 f +\, i(kb-c)u^{k-1}\partial_v^1\partial_u^{N-r_0} f$$

và

$$\widetilde{G}_{k,c}^{a,b}\partial_u^{N-r_0} f(u,v) =$$
$$=\ ab \sum_{m=1}^{\min\{N-r_0,2k\}} \binom{N-r_0}{m} 2k...(2k-m+1)\ u^{2k-m}\partial_u^{N-r_0-m}\partial_v^2 f(u,v)$$
$$+\, i(a+b) \sum_{m=1}^{\min\{N-r_0,k\}} \binom{N-r_0}{m} k...(k-m+1) u^{k-m}\partial_u^{N-r_0+1-m}\partial_v^1 f(u,v)$$
$$+\, i(kb-c) \sum_{m=1}^{\min\{N-r_0,k-1\}} \binom{N-r_0}{m} k...(k-m) u^{k-m-1}\partial_1^{N-r_0+1-m}\partial_v^1 f(u,v)$$
$$-\partial_u^{N-r_0}\psi(u,v,f,\frac{\partial f}{\partial u}, u^k\frac{\partial f}{\partial v}) = 0,$$

nên ta có

$$(\partial_u^1 - ibu^k\partial_v^1)\partial_u^1\partial_u^{N-r_0} f(u,v) = -\,\partial_u^{N-r_0}\psi\Big(u,v,f,\frac{\partial f}{\partial u}, u^k\frac{\partial f}{\partial v}\Big)$$
$$+\, ab \sum_{m=1}^{\min\{N-r_0,2k\}} \binom{N-r_0}{m} 2k...(2k-m+1) u^{2k-m}\partial_u^{N-r_0-m}\partial_v^2 f(u,v)$$
$$+\, i(a+b) \sum_{m=1}^{\min\{N-r_0,k\}} \binom{N-r_0}{m} k...(k-m+1) u^{k-m}\partial_u^{N-r_0+1-m}\partial_v^1 f(u,v)$$
$$+\, i(kb-c) \sum_{m=1}^{\min\{N-r_0,k-1\}} \binom{N-r_0}{m} k...(k-m) u^{k-m-1}\partial_1^{N-r_0+1-m}\partial_2^1 f(u,v)$$
$$+\, iau^k\partial_v^1\partial_u^{N-r_0+1} f +\, abu^{2k}\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}\partial_v^1 f +\, i(kb-c)u^{k-1}\partial_v^1\partial_u^{N-r_0} f$$
$$:= -\,\partial_u^{N-r_0}\psi(u,v,f,\frac{\partial f}{\partial u}, u^k\frac{\partial f}{\partial v}) + D(u,v)$$
$$+\, \partial_v^1(iau^k\partial_u^{N-r_0+1} f +\, abu^{2k}\partial_v^1\partial_u^{N-r_0} f).$$

Từ đó chúng ta viết lại I_8^0:

$$\begin{aligned}
I_8^0 = &- \int\limits_{E_2\cup E_4} {}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\partial_u^{N-r_0}\psi\Big(u,v,f,\frac{\partial f}{\partial u},u^k\frac{\partial f}{\partial v}\Big)\mathrm{d}v \\
&+ \int\limits_{E_2\cup E_4} {}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)D(u,v)\mathrm{d}v \\
&+ \int\limits_{E_2\cup E_4} {}_{\gamma}\partial_{\alpha,\beta} E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\partial_v^1(iau^k\partial_u^{N-r_0+1}f + abu^{2k}\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}f(u,v))\mathrm{d}v \\
&:= I_{10} + I_{11} + I_{12}\,.
\end{aligned}$$

Từ giả thiết quy nạp ta có $\big|f, V_\delta^T\big|_N \le H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-2}((N-r_0-2)!)^s$ và $(N-r_0,0)\in\Gamma_N$. Áp dụng Mệnh đề 1.3.2 ta nhận được

$$\Big|\partial_u^{N-r_0}\psi\Big(u,v,f,\frac{\partial f}{\partial u},u^k\frac{\partial f}{\partial v}\Big)\Big| \le H_0H_1^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s.$$

Vì vậy làm tương tự như tích phân I_1 ta thu được

$$|I_{10}| \le C_{101}T^{\frac{1}{k+1}}\bigg(\big|f, V_{\delta'}^T\big|_{N+1} + H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s\bigg).$$

Bây giờ chúng ta tiếp tục xét tích phân I_{11}. Do $N \ge 6k+4$ nên $(N-r_0-m,1)\in\Gamma_N$, $(N-r_0+1-m,1)\in\Gamma_N$, $(N-r_0,0)\in\Gamma_N$. Do vậy ta có:

$$\begin{aligned}
\Big|u^{2k-m}\partial_u^{N-r_0-m}\partial_v^2 f(u,v)\Big| &\le C_{102}\Big|u^k\partial_v^1\partial_u^{N-r_0-m}\partial_v^1 f(u,v)\Big| \\
&\le C_{103}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-2}((N-r_0-2)!)^s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big|u^{k-m}\partial_u^{N-r_0+1-m}\partial_v^1 f(u,v)\Big| &\le C_{104}\Big|u^k\partial_v^1\partial_u^{N-r_0+1-m}f(u,v)\Big| \\
&\le C_{105}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-2}((N-r_0-2)!)^s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big|u^{k-m-1}\partial_u^{N-r_0+1-m}\partial_v^1 f(u,v)\Big| &\le C_{106}\Big|u^k\partial_v^1\partial_u^{N-r_0+1-m}f(u,v)\Big| \\
&\le C_{107}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-2}((N-r_0-2)!)^s,
\end{aligned}$$

$$\left|u^{k-1}\partial_u^{N-r_0}\partial_v^1 f(u,v)\right| \le C_{108}\left|u^k\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}f(u,v)\right|$$
$$\le C_{109}H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-2}((N-r_0-2)!)^s.$$

Vậy

$$|I_{11}| \le C_{110}\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s.$$

Tiếp theo ta xét đến tích phân I_{12}, áp dụng tích phân từng phần chúng ta có

$$|I_{12}| =$$
$$=\Big|\int\limits_{E_2\cup E_4} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\partial_v^1(iau^k\partial_u^{N-r_0+1}f(u,v)+abu^{2k}\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}f(u,v))\mathrm{d}v\Big|$$
$$\le \Big|\int\limits_{E_2\cup E_4}\partial_v^1\big({}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\big)(iau^k\partial_u^{N-r_0+1}f+abu^{2k}\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}f)\mathrm{d}v\Big|$$
$$+\Big|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\partial_v^1(iau^k\partial_u^{N-r_0+1}f+\ abu^{2k}\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}f)\Big|\Big|_{\partial E_2\cup\partial E_4}$$
$$\le C\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s.$$

Từ đó ta có

$$|I_8^0| \le C_{111}\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s. \tag{1.67}$$

B. Đánh giá I_8 trên $\widetilde{E}_1$ và $\widetilde{E}_3$, tích phân này được ký hiệu là I_8^1.

Trên $\widetilde{E}_1$ và $\widetilde{E}_3$ ta luôn có $\nu_1 = 1, \nu_2 = 0$. Vì vậy

$$I_8^1 = \int\limits_{E_1\cup E_3} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\partial_u^1\big(\partial_u^{N-r_0+1}f - ibu^k\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}f\big)\mathrm{d}u$$
$$+\int\limits_{E_1\cup E_3} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)ibku^{k-1}\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}f(u,v)\mathrm{d}u.$$

Từ đó ta có

$$|I_8^1| \le \left| \int\limits_{E_1\cup E_3} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_u^1 E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\big(\partial_u^{N-r_0+1}f(u,v) - ibu^k\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}f(u,v)\big)\mathrm{d}u \right|$$

$$+ \left| \left| {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\big(\partial_u^{N-r_0+1}f(u,v) - ibu^k\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}f(u,v)\big) \right| \right|_{\partial E_1\cup\partial E_3}$$

$$+ \left| \int\limits_{E_1\cup E_3} {}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_u^1 E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)u^{k-1}\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}f(u,v)\mathrm{d}u \right|.$$

Do

$$\left|\partial_u^{N-r_0+1}f\right| = \left|\partial_u^1\partial_u^{N-r_0}f\right| \le C_{112}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N,$$

và

$$\left|u^k\partial_v^1\partial_u^{N-r_0}f\right| \le C_{113}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_N,$$

cho nên chúng ta cũng có

$$|I_8^1| \le C_{114}\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s. \tag{1.68}$$

Vậy

$$|I_8| \le C_{115}\frac{H_0}{H_1}\Big(\frac{H_1}{\delta'}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s. \tag{1.69}$$

Từ (1.65), (1.66), (1.69) ta có

$$\max_{(x,y)\in V_\delta^T}\left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_1^{N-r_0+1}f(x,y)\right| \le C_{116}\Bigg[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f, V_{\delta'}^T\right|_{N+1} + $$
$$+ H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s\left(T^{\frac{1}{k+1}} + \frac{1}{H_1}\right)\Bigg].$$

Như vậy chúng ta hoàn thành chứng minh Mệnh đề 1.3.4.

Mệnh đề 1.3.5 *Giả sử* $(\alpha_1,\beta_1) \in \Gamma_{N+1}\setminus\Gamma_N$, $\alpha_1 \ge 1, \beta_1 \ge 1$. *Khi đó tồn tại một hằng số* C_{117} *sao cho*

$$\max_{(x,y)\in V_\delta^T}\left|\partial_1^{\alpha_1+2}\partial_2^{\beta_1}f(x,y)\right| \le C_{117}\Bigg[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f, V_{\delta''}^T\right|_{N+1}$$
$$+ H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\Big(T^{\frac{1}{k+1}} + \frac{1}{H_1}\Big)\Bigg].$$

Chứng minh. Xét phương trình

$$G^{a,b}_{k,c} f(x,y) + \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0. \tag{1}$$

Lấy đạo hàm $\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}$ của phương trình (1) chúng ta được

$$\partial_1^{\alpha_1+2}\partial_2^{\beta_1} f(x,y) = -\ \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}\psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big)$$

$$+ ab \sum_{m=0}^{\min\{\alpha_1,\, 2k\}} \binom{\alpha_1}{m} 2k \cdots (2k - m + 1) x^{2k-m} \partial_1^{\alpha_1 - m}\partial_2^{\beta_1+2} f(x,y)$$

$$+ i(a+b) \sum_{m=0}^{\min\{\alpha_1,\, k\}} \binom{\alpha_1}{m} k \cdots (k - m + 1) x^{k-m} \partial_1^{\alpha_1+1-m}\partial_1^{\beta_1+1} f(x,y)$$

$$+ i(kb - c) \sum_{k=0}^{\min\{\alpha_1,\, k-1\}} \binom{\alpha_1}{m} (k-1) ... (k-m) x^{k-m-1} \partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_2+1} f(x,y)$$

$$:= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Đầu tiên chúng ta xét

$$|J_1| = \Big|\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}.\psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Big|.$$

Do giả thiết quy nạp $\big|f, V_\delta^T\big|_N \le H_0\Big(\dfrac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-2}\big((N–r_0–2)!\big)^s$ với $N \ge 6k+4$, nên áp dụng Mệnh đề 1.3.1 chúng ta có

$$\max_{x \in V_\delta^T} \Big|\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}\psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Big|$$

$$\le C_{118}\Big(\big|f, V_\delta^T\big|_{N+1} + H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}\big((N - r_0 - 2)\big)^s\Big). \tag{1.70}$$

Chúng ta thấy rằng, trong $\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}\psi\Big(x, y, f, \dfrac{\partial f}{\partial x}, x^k \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)$, đạo hàm cao nhất của f chỉ có thể là các số hạng $x^\gamma \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1+1} f(x,y)$, $x^\gamma \partial_1^{\alpha_1+1}\partial_2^{\beta_1} f(x,y)$ mà các số hạng này viết được thành $D\Big|x^k \partial_2^1\big(\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1} f(x,y)\big)\Big|$, $E\Big|\partial_1\big(\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1} f(x,y)\big)\Big|$ với $(\alpha_1, \beta_1) \in \Gamma_{N+1}, D, E,$ là hằng số. Vì vậy, áp dụng các Mệnh đề 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4 chúng ta có thể đánh giá được $\big|f, V_\delta^T\big|_{N+1}$. Trong trường hợp này, ta có

$$\max_{(x,y)\in V_\delta^T}\left|\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}\psi\Big(x,y,f,\frac{\partial f}{\partial x},x^k\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\right|$$

$$\leq C_{119}\left[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f,V_{\delta''}^T\right|_{N+1}+H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\Big(T^{\frac{1}{k+1}}+\frac{1}{H_1}\Big)\right]. \tag{1.71}$$

Để đánh giá J_2, J_3, J_4 chúng ta chia làm hai trường hợp sau đây:

1. Trường hợp 1: $\alpha_1 \leq r_0$

a) Với $m < \alpha_1$, chúng ta biểu diễn

$$x^{2k-m}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y),\ x^{k-m-1}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y),$$
$$x^{k-m}\partial_1^{\alpha_1-m+1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y),$$

thành $x^{2k-m}\partial_1^1\big(\partial_1^{\alpha_1-m-1}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y)\big)$, $x^{k-m-1}\partial_1^1\big(\partial_1^{\alpha_1-m-1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\big)$, $x^{k-m}\partial_1^1\big(\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\big)$.

Ta thấy $(\alpha_1-m-1,\beta_1+2), (\alpha_1-m-1,\beta_1+1), (\alpha_1-m,\beta_1+1)\in\Gamma_{N+1}$.

Do đó, áp dụng các Mệnh đề 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4 chúng ta có

$$|J_2|+|J_3|+|J_4|\leq C_{120}\left[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f,V_{\delta''}^T\right|_{N+1}+\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\right]. \tag{1.72}$$

b) Với $m=\alpha_1$, để đánh giá J_2, J_3, J_4 chúng ta phải đánh giá

$$\left|x^{2k-m}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y)\right|,\left|x^{k-m}\partial_1^{\alpha_1-m+1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\right|,$$
$$\left|x^{k-m-1}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\right|.$$

Chúng ta có:

$$\bullet\left|x^{2k-m}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y)\right|=\left|x^{2k-m}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y)\right|\leq C_{121}\left|x^k\partial_2^1\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y)\right|$$
$$\leq C_{122}\left[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f,V_{\delta''}^T\right|_{N+1}+\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\right],$$

do $(0,\beta_1+1)\in\Gamma_{N+1}$ và Mệnh đề 1.3.4.

$$\bullet\left|x^{k-m}\partial_1^{\alpha_1-m+1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\right| = \left|x^{k-m}\partial_1^{1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\right|$$
$$\le C_{123}\left[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f,V_{\delta''}^T\right|_{N+1} + \frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\right],$$

do $(0,\beta_1+1)\in\Gamma_{N+1}$ và Mệnh đề 1.3.4.

$$\bullet\left|x^{k-m-1}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\right| = \left|x^{k-m-1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\right|$$
$$\le C_{124}\left[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f,V_{\delta''}^T\right|_{N+1} + \frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\right],$$

do $(0,\beta_1+1)\in\Gamma_{N+1}$ và Mệnh đề 1.3.4.
Từ đó chúng ta có

$$|J_2|+|J_3|+|J_4|$$
$$\le C_{125}\left[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f,V_{\delta''}^T\right|_{N+1} + \frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\right]. \quad (1.73)$$

2. Trường hợp 2: $\alpha_1\ge 2k+1$
Trong trường hợp này chúng ta có $\alpha_1-m\ge 3$.
a) $m=0$: để đánh giá J_2, J_3, J_4 chúng ta phải đánh giá

$$\left|x^{2k}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y)\right|, \left|x^{k-1}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\right|, \left|x^{k}\partial_1^{\alpha_1+1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\right|.$$

Ta có:

$$\bullet\left|x^{2k}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y)\right| \le C_{126}\left|x^{k}\partial_1^{2}(\partial_1^{\alpha_1-2}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y))\right|$$
$$\le C_{127}T^{\frac{1}{k+1}}\left|\partial_1^{2}(\partial_1^{\alpha_1-2}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y)\right|,$$

do $(\alpha_1-2,\beta_1+2)\in\Gamma_{N+1}$, $\alpha_1-2\ge 1, \beta_1+2\ge 1$.

$$\bullet\left|x^{k-1}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\right| \le C_{128}\left|\partial_1^{2}(\partial_1^{\alpha_1-2}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y))\right|$$
$$\le C_{129}\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s,$$

do $(\alpha_1-2,\beta_1+1)\in\Gamma_{N}$, $\alpha_1-2\ge 1, \beta_1+1\ge 1$.

$$\bullet\left|x^{k}\partial_1^{\alpha_1+1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\right| = \left|x^{k}\partial_1^{2}(\partial_1^{\alpha_1-1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y))\right|$$
$$\le C_{130}T^{\frac{1}{k+1}}\left|\partial_1^{2}(\partial_1^{\alpha_1-2}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y))\right|,$$

do $(\alpha_1-1,\beta_1+1)\in\Gamma_{N+1}$, $\alpha_1-1\ge 1, \beta_1+1\ge 1$.

Vậy khi $m = 0$ ta có

$$\begin{aligned}|J_1| + |J_2| + |J_3| \le C_{131} T^{\frac{1}{k+1}} &\left|\partial_1^2(\partial_1^{\alpha_1 - 1}\partial_2^{\beta_1+1} f(x,y))\right| \\ &+ C_{132} T^{\frac{1}{k+1}} \left|\partial_1^2(\partial_1^{\alpha_1-2}\partial_2^{\beta_1+2} f(x,y))\right| \\ &+ C_{133}\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s,\end{aligned}$$

b) $m \ge 1, \alpha_1 \le 4k+3$. Để đánh giá J_1, J_2, J_3 chúng ta đánh giá:

$$\left|x^{2k-m}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+2} f(x,y)\right|, \left|x^{k-m}\partial_1^{\alpha_1-m+1}\partial_2^{\beta_1+1} f(x,y)\right|,$$
$$\left|x^{k-m-1}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+1} f(x,y)\right|.$$

Ta có

$\bullet \left|x^{2k-m}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+2} f(x,y)\right| = \left|x^{2k-m}\partial_1^2(\partial_1^{\alpha_1-m-2}\partial_2^{\beta_1+2} f(x,y))\right|$

$$\le C_{134}\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s,$$

do $(\alpha_1 - m - 2, \beta_1 + 2) \in \Gamma_N$ và $\alpha_1 - m - 2 \ge 1, \beta_1 + 2 \ge 1$.

$\bullet \left|x^{k-m-1}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+1} f(x,y)\right| = \left|x^{k-m-1}\partial_1^2(\partial_1^{\alpha_1-m-2}\partial_2^{\beta_1+1} f(x,y))\right|$

$$\le C_{135}\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s,$$

do $(\alpha_1 - m - 2, \beta_1 + 1) \in \Gamma_N$) và $\alpha_1 - m - 2 \ge 1, \beta_1 + 1 \ge 1$.

$\bullet \left|x^{k-m}\partial_1^{\alpha_1-m+1}\partial_2^{\beta_1+1} f(x,y)\right| = \left|x^{k-m}\partial_1^2(\partial_1^{\alpha_1-m-1}\partial_2^{\beta_1+1} f(x,y))\right|$

$$\le C_{136}\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s,$$

do $(\alpha_1 - m - 1, \beta_1 + 1) \in \Gamma_N$ và $\alpha_1 - m - 1 \ge 1, \beta_1 + 1 \ge 1$.

c) $m \ge 1, \alpha_1 \le 4k+4$. Khi đó

$\bullet \left|x^{2k-m}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+2} f(x,y)\right| = \left|x^{2k-m}\partial_1^2(\partial_1^{\alpha_1-m-2}\partial_2^{\beta_1+2} f(x,y))\right|$

$$\le C_{137}\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s,$$

do $(\alpha_1 - m - 2, \beta_1 + 2) \in \Gamma_{N+1-m}$ và $\alpha_1 - m - 2 \ge 1, \beta_1 + 2 \ge 1$.

$$\bullet\Big|x^{k-m-1}\partial_1^{\alpha_1-m}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\Big| = \Big|x^{k-m-1}\partial_1^2(\partial_1^{\alpha_1-m-2}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y))\Big|$$
$$\leq C_{138}\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s,$$

do $(\alpha_1-m-2,\beta_1+1)\in\Gamma_{N+1-m}$ và $\alpha_1-m-2\geq 1,\beta_1+1\geq 1$.

$$\bullet\Big|x^{k-m}\partial_1^{\alpha_1-m+1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\Big| = \Big|x^{k-m}\partial_1^2(\partial_1^{\alpha_1-m-1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y))\Big|$$
$$\leq C_{139}\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s,$$

do $(\alpha_1-m-1,\beta_1+1)\in\Gamma_{N+1-m}$ và $\alpha_1-m-1\geq 1,\beta_1+1\geq 1$.

Từ hai trường hợp trên chúng nhận ta được

$$|J_2|+|J_3|+|J_4|\leq\Bigg[C_{141}T^{\frac{1}{k+1}}\Big|\partial_1^2\big(\partial_1^{\alpha_1-2}\partial_2^{\beta_1+2}f(x,y)\big)\Big|$$
$$+C_{142}T^{\frac{1}{k+1}}\Big|\partial_1^2\big(\partial_1^{\alpha_1-1}\partial_2^{\beta_1+1}f(x,y)\big)\Big|+C_{143}\frac{H_0}{H_1}\left(\frac{H_1}{\delta}\right)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\Bigg]. \tag{1.74}$$

Vậy từ (1.70), (1.72), (1.73) và (1.74) chúng ta có

$$\max_{(\alpha_1,\beta_1)\in\Gamma_{N+1}\setminus\Gamma_N}\ \max_{(x,y)\in V_\delta^T}\Big|\partial_1^2\big(\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}f(x,y)\big)\Big|$$
$$\leq C_{144}T^{\frac{1}{k+1}}\max_{(\alpha_1,\beta_1)\in\Gamma_{N+1}\setminus\Gamma_N}\ \max_{(x,y)\in V_\delta^T}\Big|\partial_1^2\big(\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}f(x,y)\big)\Big|$$
$$+C_{146}\Bigg[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f,V_{\delta''}^T\right|_{N+1}+H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\Big(T^{\frac{1}{k+1}}+\frac{1}{H_1}\Big)\Bigg].$$

Đầu tiên chúng ta chọn T sao cho $C_{144}T^{\frac{1}{k+1}}<\dfrac{1}{2}$ hay $T<\Big(\dfrac{1}{2C_{144}}\Big)$. Khi đó chúng ta được

$$\max_{\substack{(\alpha_1,\beta_1)\in\Gamma_{N+1}\setminus\Gamma_N\\ \alpha_1\geq 1,\beta_1\geq 1}}\ \max_{(x,y)\in V_\delta^T}\Big|\partial_1^2\big(\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}f(x,y)\big)\Big|$$
$$\leq C_{146}\Bigg[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f,V_{\delta''}^T\right|_{N+1}+H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\Big(T^{\frac{1}{k+1}}+\frac{1}{H_1}\Big)\Bigg].$$

Như vậy, chúng ta hoàn thành chứng minh Mệnh đề 1.3.5. Sau đây chúng tôi trích dẫn một bổ đề sơ cấp do Friemand trình bày trong [12].

Bổ đề 1.3.5 *Tồn tại một hằng số E sao cho nếu $g(z)$ là một hàm dương đơn điệu giảm, được định nghĩa trên đoạn $(0,1]$, và thoả mãn*

$$g(z) \leq \frac{1}{10^2}\, g\Big(z\Big(1-\frac{4}{n}\Big)\Big) + \frac{C}{z^{n-r_0-1}};\ (\,n > r_0+2, C>0)$$

thì $g(z) \leq \dfrac{CE}{z^{n-r_0-1}}$.

Bây giờ chúng ta quay lại chứng minh Định lý 1.3.1. Định lý 1.3.1 được chứng minh nếu chúng ta chứng minh được

$$\big|f, V_\delta^T\big|_{N+1} \leq H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s.$$

Nhưng chúng ta đã biết

$$\big|f, V_\delta^T\big|_{N+1} = \max_{(\alpha,\beta)\in\Gamma_{N+1}} \Big|\partial_1^\alpha\partial_2^\beta f, V_\delta^T\Big| + \max_{\substack{(\alpha,\beta)\in\Gamma_{N+1}\\ \alpha\geq 1,\beta\geq 1}} \max_{(x,y)\in V_\delta^T} \Big|\partial_1^2\big(\partial_1^\alpha\partial_2^\beta f(x,y)\big)\Big|.$$

Đánh giá $\max\limits_{(\alpha,\beta)\in\Gamma_{N+1}} \Big|\partial_1^\alpha\partial_2^\beta f, V_\delta^T\Big|$ được trình bày trong các Mệnh đề 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4; đánh giá $\max\limits_{\substack{(\alpha,\beta)\in\Gamma_{N+1}\\ \alpha\geq 1,\beta\geq 1}} \max\limits_{(x,y)\in V_\delta^T} \Big|\partial_1^2\big(\partial_1^\alpha\partial_2^\beta f(x,y)\big)\Big|$ được trình bày trong Mệnh đề 1.3.5. Từ các mệnh đề đó ta có

$$\begin{aligned}&\big|f, V_\delta^T\big|_{N+1}\\ &\leq C_{147}\Big[T^{\frac{1}{k+1}}\,\big|f, V_{\delta''}^T\big|_{N+1} + H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\Big(T^{\frac{1}{k+1}} + \frac{1}{H_1}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Đặt $g(\delta) = \big|f, V_\delta^T\big|_{N+1}$, rõ ràng $g(\delta)$ là một hàm dương, đơn điệu giảm và xác định trên khoảng $(0,1)$. Chọn hình vuông V^T sao cho

$$C_{147}T^{\frac{1}{k+1}} < \frac{1}{10^{12}},\ \text{hay}\ \ T < \Big(\frac{1}{C_{147}10^{12}}\Big)^{k+1},$$

khi đó chúng ta có

$$\begin{aligned}g(\delta) &\leq \frac{1}{10^{12}}\, g\Big(\delta\Big(1-\frac{4}{N}\Big)\Big) + H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\Big(C_{147}T^{\frac{1}{k+1}} + \frac{C_{147}}{H_1}\Big)\\ &= \frac{1}{10^{12}}\, g\Big(\delta\Big(1-\frac{4}{N}\Big)\Big) + \frac{H_0H_1^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)!\big)^s\Big(C_{147}T^{\frac{1}{k+1}} + \dfrac{C_{147}}{H_1}\Big)}{(\delta)^{N-r_0-1}}.\end{aligned}$$

Theo Bổ đề 1.3.5 thì có một hằng số E sao cho

$$g(\delta) \leq E\frac{H_0 H_1^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)\big)^s\Big(C_{147}T^{\frac{1}{k+1}}+\dfrac{C_{147}}{H_1}\Big)}{(\delta)^{N-r_0-1}}$$

$$= EH_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)\big)^s\Big(C_{147}T^{\frac{1}{k+1}}+\frac{C_{147}}{H_1}\Big).$$

Chọn T, H_1 sao cho $EC_{147}T^{\frac{1}{k+1}} < \dfrac{1}{2}$, $EC_{147}\dfrac{1}{H_1} < \dfrac{1}{2}$. Chúng ta có

$$\big|f, V_\delta^T\big|_{N+1} \leq H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}\big((N-r_0-1)\big)^s.$$

Như vậy đánh giá đúng với $n = N+1$, nên cũng đúng với mọi n, chúng ta hoàn thành chứng minh Định lý 1.3.1.

Kết hợp Định lý 1.2.2 và Định lý 1.3.1 chúng ta có Định lý 1.3.2 sau đây:

Định lí 1.3.2 *Giả sử rằng, k là số lẻ, các tham số a, b, c, k là chấp nhận được và $m \geq 2k+3$. Khi đó:*

i) Nếu $\psi \in G^s (s \geq 1)$ thì mọi $G^m_{k,loc}(\Omega)$ - nghiệm của phương trình (1) thuộc $G^s(\Omega)$; toán tử phi tuyến $\Psi^{a,b}_{k,c}$ là s- hypoelliptic.

ii) Trong trường hợp đặc biệt, nếu ψ là hàm giải tích thì mọi $C^m(\Omega)$-nghiệm của phương trình (1) cũng là giải tích trên Ω; toán tử phi tuyến $\Psi^{a,b}_{k,c}$ là giải tích hypoelliptic.

Chương 2

Biến đổi Fourier và tính chính qui Gevrey của nghiệm của một lớp phương trình elliptic suy biến phi tuyến cấp hai với bậc suy biến chẵn

Trong Chương 1, chúng tôi đã trình bày các kết quả về tính trơn C^∞, tính chính qui Gevrey của nghiệm của phương trình (1) với k là số nguyên dương lẻ. Nhưng khi k là số nguyên dương chẵn, phương pháp tìm nghiệm cơ bản của Chương 1 không còn thích hợp nữa, do công thức nghiệm dưới dạng

$$E_{k,c}^{a,b} = A_+^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}} A_-^{-\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}} F(p)$$

không xác định trong trường hợp này. Vì vậy trong Chương 2 này, chúng tôi dùng phương pháp biến đổi Fourier để tìm nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$. Bằng phương pháp này, chúng tôi tìm được nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ cả khi k chẵn và k lẻ. Vì phương pháp tìm nghiệm thay đổi nên các kỹ thuật đánh giá nghiệm cơ bản và các đạo hàm của nó cũng hoàn toàn khác. Tuy nhiên, chúng tôi vẫn thu được toàn bộ các kết quả về tính chính qui Gevrey của nghiệm của phương trình (1) như ở trong Chương 1.

2.1 Nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$

2.1.1 Nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ khi k chẵn

Ta đã có nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ khi k là số tự nhiên lẻ. Bây giờ chúng ta tìm nghiệm cơ bản của $G_{k,c}^{a,b}$ khi k là số tự nhiên chẵn, tức là tìm $E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)$ sao cho

$$G_{k,c}^{a,b}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) = \delta(x-u,y-v) = \delta(x-u)\times\delta(y-v). \tag{2.1}$$

Ở đây δ là toán tử Dirac. Ký hiệu $D_y = -i\dfrac{\partial}{\partial y}$, khi đó phương trình (2.1) được viết lại như sau:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial x^2} + (a+b)x^k D_y\Big(\frac{\partial E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)}{\partial x}\Big)\\
&+ abx^{2k}D_{yy}^2 E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) - (c-kb)x^{k-1}D_y E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)\\
&= \delta(x-u,y-v)\\
&= \delta(x-u)\times\delta(y-v).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Để cho gọn, ta viết $\quad E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) = E(x,y,u,v)$.

Lấy biến đổi Fourier theo biến y cả hai vế của phương trình (2.2), ta nhận được

$$\begin{aligned}
&\widetilde{E}_{xx}(x,\xi,u,v) + (a+b)x^k\xi\widetilde{E}_x(x,\xi,u,v)\\
&\qquad + \big(abx^{2k}\xi^2 + (kb-c)x^{k-1}\xi\big)\widetilde{E}(x,\xi,u,v) = \delta(x-u)e^{-i\xi v}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Trước hết ta giải phương trình

$$\begin{aligned}
&\tilde{E}_{xx}(x,\xi,u,v) + (a+b)x^k\xi\tilde{E}_x(x,\xi,u,v)\\
&\qquad + \big(abx^{2k}\xi^2 + (kb-c)x^{k-1}\xi\big)\tilde{E}(x,\xi,u,v) = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ta đặt

$$F(\tau) = \tilde{E}(x,\xi,u,v), \quad \tau = x\xi^{\frac{1}{k+1}}, \quad x = \xi^{\frac{-1}{k+1}}\tau. \tag{2.5}$$

Phương trình (2.4) trở thành

$$F''(\tau) + (a+b)\tau^k F'(\tau) + \big(ab\,\tau^{2k} + (kb-c)\tau^{k-1}\big)F(\tau) = 0. \qquad (2.6)$$

Để giải phương trình (2.6) này ta xét phương trình sau đây:

$$u_{xx} + Ax^k u_x + (Bx^{2k} + Cx^{k-1})u = 0. \qquad (2.7)$$

Bằng cách đặt $u = f(p)$ với $p = x^{k+1}$ phương trình này có dạng như sau:

$$(k+1)^2 p f''(p) + \big(k(k+1) + A(k+1)p\big)f'(p) + \big(Bp + C\big)f(p) = 0. \qquad (2.8)$$

Phương trình (2.8) thuộc loại

$$(a_o p + b_o)\frac{d^2 f}{dp^2} + (a_1 p + b_1)\frac{df}{dp} + (a_2 p + b_2)p = 0, \qquad (2.9)$$

với $a_o = (k+1)^2, b_o = 0, a_1 = A(k+1), b_1 = k(k+1), a_2 = B, b_2 = C$.
H. Bateman trong [9] (trang 250, 252, 258, 278) đã đưa ra công thức nghiệm, dáng điệu tiệm cận, sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính của các nghiệm của phương trình (2.9). Chúng ta thấy rằng phương trình (2.6) có dạng như (2.7) với

$$A = (a+b),\ B = ab,\ C = (kb-c),$$
$$D^2 = A^2 - 4B = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2.$$

• Khi $\xi > 0$ ta lấy

$$D = a - b, \quad \tilde{a}_1 = \frac{k(-A+D) + 2C}{2(k+1)D} = \frac{c}{(k+1)(b-a)},$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{-(k+1)}{D} = \frac{(k+1)}{(b-a)}, \qquad \tilde{h}_1 = \frac{-b}{k+1}, \quad \tilde{c}_1 = \frac{k}{(k+1)}.$$

Theo [9] nghiệm của phương trình (2.6) là

$$f_1(\tau) = e^{\frac{-(a+b)+(a-b)}{2(k+1)}\tau^{k+1}}\Phi\Big(\tilde{a}_1, \tilde{c}_1, \frac{(b-a)\tau^{k+1}}{k+1}\Big),$$

$$f_2(\tau) = e^{\frac{-(a+b)+(a-b)}{2(k+1)}\tau^{k+1}}\Big(\frac{(b-a)\tau^{k+1}}{k+1}\Big)^{1-\tilde{c}_1}\Phi\Big(\tilde{a}_1 - \tilde{c}_1 + 1, 2 - \tilde{c}_1, \frac{(b-a)\tau^{k+1}}{k+1}\Big).$$

Theo [9] hai nghiệm $f_1(\tau)$ và $f_2(\tau)$ là độc lập tuyến tính, nên ta có hai nghiệm độc lập tuyến tính của (2.4) là

$$e^{\frac{-bx^{k+1}\xi}{k+1}}\,\Phi\Big(\tilde{a}_1, \tilde{c}_1, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big),$$

và

$$e^{\frac{-bx^{k+1}\xi}{k+1}}\,x\Big(\frac{(b-a)\xi}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\Big(\tilde{a}_1-\tilde{c}_1+1, 2-\tilde{c}_1, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big).$$

Ta biểu diễn nghiệm tổng quát của phương trình (2.4) dưới dạng

$$\begin{aligned} F_1(x,\xi,) = e^{\frac{-bx^{k+1}\xi}{k+1}}\Big[&C_1\Phi\Big(\tilde{a}_1, \tilde{c}_1, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big) \\ &+ C_2\,x\Big(\frac{(b-a)\xi}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\Big(\tilde{a}_1-\tilde{c}_1+1, 2-\tilde{c}_1, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Chọn $C_1 = \dfrac{\Gamma(1-\tilde{c}_1)}{\Gamma(\tilde{a}_1-\tilde{c}_1+1)}$, $C_2 = \dfrac{\Gamma(\tilde{c}_1-1)}{\Gamma(\tilde{a}_1)}$, chúng ta thu được một nghiệm riêng của phương trình (2.4):

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(x,\xi) = e^{\frac{-bx^{k+1}\xi}{k+1}}\Big[&\frac{\Gamma(1-\tilde{c}_1)}{\Gamma(\tilde{a}_1-\tilde{c}_1+1)}\,\Phi\Big(\tilde{a}_1, \tilde{c}_1, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big) \\ + x\frac{\Gamma(\tilde{c}_1-1)}{\Gamma(\tilde{a}_1}&\Big(\frac{(b-a)\xi}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\Big(\tilde{a}_1-\tilde{c}_1+1, 2-\tilde{c}_1, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Do ta chọn C_1 và C_2 như vậy nên ta có

$$\tilde{E}_1(x,\xi) = e^{\frac{-bx^{k+1}\xi}{k+1}}\Psi\Big(\tilde{a}_1, \tilde{c}_1, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big),$$

trong đó

$$\Phi(\alpha,\beta,z) = 1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

và

$$\Psi(\alpha,\beta,z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty e^{-zt}t^{\alpha-1}(t+1)^{\beta-\alpha+1}\mathrm{d}t.$$

Chọn: $C_1 = \dfrac{\Gamma(1-\tilde{c}_1)}{\Gamma(1-\tilde{a}_1)}$, $C_2 = \dfrac{-\Gamma(\tilde{c}_1-1)}{\Gamma(\tilde{c}_1-\tilde{a}_1)}$, đồng thời dùng công thức đổi biến

$$\Phi(\alpha,\beta,z) = e^z\Phi(\beta-\alpha,\beta,-z)$$

ta được một nghiệm riêng khác của phương trình (2.4) là

$$\begin{aligned}\tilde{E}_2(x,\xi) = e^{\frac{-ax^{k+1}\xi}{k+1}}\Bigg[&\frac{\Gamma(1-\tilde{c}_1)}{\Gamma(1-\tilde{a}_1)}\,\Phi\Big(\tilde{c}_1-\tilde{a}_1,\tilde{c}_1,\frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\\ -\ x&\frac{\Gamma(\tilde{c}_1-1)}{\Gamma(\tilde{c}_1-\tilde{a}_1)}\Big(\frac{(b-a)\xi}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\,\Phi\Big(1-\tilde{a}_1,2-\tilde{c}_1,\frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\Bigg].\end{aligned}$$

và ta cũng có

$$\tilde{E}_2(x,\xi) = e^{\frac{-ax^{k+1}\xi}{k+1}}\,\Psi\Big(\tilde{c}_1-\tilde{a}_1,\tilde{c}_1,\frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big).$$

Theo H. Bateman ta có $\tilde{E}_1(x,\xi),\tilde{E}_2(x,\xi)$ là các nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (2.3). Hơn thế nữa, dựa vào tính chất của hàm $\Psi(\alpha,\beta,z)$ ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\tilde{E}_1(x,\xi) = 0$$

và

$$\lim_{x\to-\infty}\tilde{E}_2(x,\xi) = 0.$$

Đặt $\tilde{E}(x,\xi,u,v) = \begin{cases} e^{-i\xi v}\dfrac{\tilde{E}_1(x,\xi)\tilde{E}_2(u,\xi)}{W(u,\xi)} & \text{nếu } x\geq u,\\[2ex] e^{-i\xi v}\dfrac{\tilde{E}_1(u,\xi)\tilde{E}_2(x,\xi)}{W(u,\xi)} & \text{nếu } x\leq u,\end{cases}$

trong đó

$$W(u,\xi) = (\tilde{E}_1)_x(u,\xi)\tilde{E}_2(u,\xi) - (\tilde{E}_2)_x(u,\xi)\tilde{E}_1(u,\xi).$$

Khi đó $\tilde{E}^{a,b}_{k,c}(x,\xi,u,v)$ cũng thoả mãn phương trình (2.4).

Bây giờ ta tính $W(x,\xi)$. Do $\tilde{E}_1(x,\xi),\tilde{E}_2(x,\xi)$ là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_{xx}(x,\xi,u,v) + (a+b)x^k\xi\tilde{E}_x(x,\xi,u,v)\\ &+\big(abx^{2k}\xi^2 + (kb-c)x^{k-1}\xi\big)\tilde{E}(x,\xi,u,v) = 0,\end{aligned}$$

cho nên chúng ta có

$$W_x(x,\xi) = -(a+b)x^k \xi W(x,\xi).$$

Giải phương này chúng ta được

$$W(x,\xi) = e^{-\int_0^x (a+b)t^k \xi dt} W(0,\xi) = e^{-\frac{(a+b)x^{k+1}\xi}{k+1}} W(0,\xi), \tag{2.10}$$

với

$$W(0,\xi) = (\tilde{E}_1)_x(0,\xi)\tilde{E}_2(0,\xi) - (\tilde{E}_2)_x(0,\xi)\tilde{E}_1(0,\xi).$$

Chúng ta tính toán được

$$W(0,\xi) = \Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}} A(a,b,k,c),$$

trong đó

$$A(a,b,k,c) = \frac{-(k+1)}{\sin(\frac{\pi}{2(k+1)})} \sin\frac{(b-a+2c)\pi}{2(k+1)(b-a)}.$$

Từ đó chúng ta có

$$W(u,\xi) = e^{-\frac{(a+b)u^{k+1}\xi}{k+1}} \Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}} \frac{-(k+1)}{\sin(\frac{\pi}{2(k+1)})} \sin\frac{(b-a+2c)\pi}{2(k+1)(b-a)}.$$

Với $\xi > 0$ chúng ta thấy $W(u,\xi) \neq 0$ nếu và chỉ nếu

$$c \neq (b-a)\Big(N(k+1) - \frac{1}{2}\Big),$$

ở đây N là số nguyên dương.

Từ đó ta nhận được

$$\tilde{E}(x,\xi,u,v)=\begin{cases} e^{-i\xi v}\; e^{\frac{b\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}} \;\left(\ \frac{\xi(b-a)}{k+1}\ \right)^{\frac{-1}{k+1}}\; (A(a,b,k,c))^{-1} \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})}\Phi\big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{(k+1)}\ ,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\big) \\ +x\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})}\ \Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\big(\frac{b+c-a}{(k+1)}\ ,\frac{k+2}{(k+1)}\ ,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\big)\Big] \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\Phi\big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{(k+1)}\ ,\frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1}\big) \\ -u\ \frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\ \Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k+2}{(k+1)}\ ,\frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1}\big)\Big] \\ \hfill \text{nếu } x\ge u, \\ e^{-i\xi v}e^{\frac{a\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}} \;\left(\ \frac{\xi(b-a)}{k+1}\ \right)^{\frac{-1}{k+1}}\; (A(a,b,k,c))^{-1} \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})}\Phi\big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{(k+1)}\ ,\frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1}\big) \\ +u\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})}\ \Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\big(\frac{b+c-a}{(k+1)}\ ,\frac{k+2}{(k+1)}\ ,\frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1}\big)\Big] \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\Phi\big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{(k+1)}\ ,\frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\big) \\ -x\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\ \Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k+2}{(k+1)}\ ,\frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\big)\Big] \\ \hfill \text{nếu } x\le u. \end{cases}$$

Chú ý rằng, với giả thiết $-\dfrac{\pi}{2} < \arg(b-a)x^{k+1}\xi < \dfrac{\pi}{2}$, thì

$$(b-a)x^{k+1}\xi \to \infty.$$

Theo [9] chúng ta có

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})}\Phi\Big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\,,\frac{k}{(k+1)}\,,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big) \\ &+\ x\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})}\Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\Big(\frac{b+c-a}{(k+1)}\,,\frac{k+2}{(k+1)}\,,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big) \\ &=\Psi\Big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\,,\frac{k}{(k+1)}\,,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big) \\ &\quad=\Big(\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}}+O\Big(\big((b-a)x^{k+1}\xi\big)^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}-1}\Big). \end{aligned}$$

• Khi $\xi < 0$ ta lấy :

$D = b - a,$

$$\tilde{a}_2 = \frac{k(-A+D)+2C}{2(k+1)D} = \frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\ ,\ \tilde{\lambda}_2 = \frac{-(k+1)}{D} = \frac{(k+1)}{(a-b)}\ ,$$

$$\tilde{h}_2 = \frac{-A+D}{2(k+1)} = \frac{-a}{k+1}\ ,\ \tilde{c}_2 = \frac{k}{(k+1)}\ .$$

Khi đó

$$f_1(\tau) = e^{\frac{-a\tau^{k+1}}{(k+1)}}\Phi\Big(\tilde{a}_2, \tilde{c}_2, \frac{(a-b)\tau^{k+1}}{k+1}\Big),$$
$$f_2(\tau) = e^{\frac{-a\tau^{k+1}}{(k+1)}}\Big(\frac{(a-b)\tau^{k+1}}{k+1}\Big)^{1-\tilde{c}_2}\Phi\Big(\tilde{a}_2-\tilde{c}_2+1, 2-\tilde{c}_2, \frac{(a-b)\tau^{k+1}}{k+1}\Big).$$

Chúng ta có hai nghiệm này là độc lập tuyến tính, nên ta có hai nghiệm độc lập tuyến tính của (2.4)

$$e^{\frac{-ax^{k+1}\xi}{k+1}}\Phi\Big(\tilde{a}_2, \tilde{c}_2, \frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big),$$

và

$$e^{\frac{-ax^{k+1}\xi}{k+1}}x\Big(\frac{(a-b)\xi}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\Big(\tilde{a}_2-\tilde{c}_2+1, 2-\tilde{c}_2, \frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big).$$

Khi đó ta được nghiệm của (2.4) là

$$F_1(x,\xi) = e^{\frac{-ax^{k+1}\xi}{k+1}}\Big[C_5\,\Phi\Big(\tilde{a}_2, \tilde{c}_2, \frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)$$
$$+ C_6\,x\Big(\frac{(a-b)\xi}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\Big(\tilde{a}_2-\tilde{c}_2+1, 2-\tilde{c}_2, \frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\Big].$$

Chọn $C_5 = \dfrac{\Gamma(1-\tilde{c}_2)}{\Gamma(\tilde{a}_2-\tilde{c}_2+1)},\ C_6 = \dfrac{\Gamma(\tilde{c}_2-1)}{\Gamma(\tilde{a}_2)}$ chúng ta được nghiệm riêng

$$\tilde{E}_1(x,\xi) = e^{\frac{-ax^{k+1}\xi}{k+1}}\Big[\frac{\Gamma(1-\tilde{c}_2)}{\Gamma(\tilde{a}_2-\tilde{c}_2+1)}\Phi\Big(\tilde{a}_2, \tilde{c}_2, \frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)$$
$$+ x\,\frac{\Gamma(\tilde{c}_2-1)}{\Gamma(\tilde{a}_2}\Big(\frac{(a-b)\xi}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\Big(\tilde{a}_2-\tilde{c}_2+1, 2-\tilde{c}_2, \frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\Big].$$

Ta thấy rằng, $\tilde{E}_1(x,\xi) = e^{\frac{-ax^{k+1}\xi}{k+1}}\Psi\Big(a_2, c_2, \dfrac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big).$

Dùng công thức đổi biến $\Phi(a,c,z) = e^z\,\Phi(c-a,c,-z)$, chúng ta lấy

$$F_2(x,\xi) = C_7\, e^{\frac{-bx^{k+1}\xi}{k+1}}\,\Phi\Big(\tilde{c}_2-\tilde{a}_2, \tilde{c}_2, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)$$
$$+\, C_8\, e^{\frac{-bx^{k+1}\xi}{k+1}}\, x\Big(\frac{(a-b)\xi}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\,\Phi\Big(1-\tilde{a}_2, 2-\tilde{c}_2, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big).$$

Chọn $\quad C_7 = \dfrac{\Gamma(1-\tilde{c}_2)}{\Gamma(1-\tilde{a}_2)},\ C_8 = \dfrac{-\Gamma(\tilde{c}_2-1)}{\Gamma(\tilde{c}_2-\tilde{a}_2)},$

ta được một nghiệm riêng

$$\tilde{E}_2(x,\xi) = e^{\frac{-bx^{k+1}\xi}{k+1}}\Bigg[\frac{\Gamma(1-\tilde{c}_2)}{\Gamma(1-\tilde{a}_2)}\,\Phi\Big(\tilde{c}_2-\tilde{a}_2, \tilde{c}_2, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)$$
$$- x\,\frac{\Gamma(\tilde{c}_2-1)}{\Gamma(\tilde{c}_2-\tilde{a}_2)}\Big(\frac{(a-b)\xi}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\,\Phi\Big(1-\tilde{a}_2, 2-\tilde{c}_2, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\Bigg].$$

Ta cũng có

$$\tilde{E}_2(x,\xi) = e^{\frac{-bx^{k+1}\xi}{k+1}}\,\Psi\Big(\tilde{c}_2-\tilde{a}_2, \tilde{c}_2, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big).$$

Do nhận xét này, ta có $\tilde{E}_1(x,\xi), \tilde{E}_2(x,\xi)$ là độc lập tuyến tính.

Khi đó chúng ta thấy rằng,

$$\widetilde{E}(x,\xi,u,v) = \begin{cases} e^{-i\xi v}\,\dfrac{\widetilde{E}_1(x,\xi)\widetilde{E}_2(u,\xi)}{W(u,\xi)} & \text{nếu } x \geq u,\\[2ex] e^{-i\xi v}\,\dfrac{\widetilde{E}_1(u,\xi)\widetilde{E}_2(x,\xi)}{W(u,\xi)} & \text{nếu } x \leq u,\end{cases}$$

với

$$W(x,\xi) = (\tilde{E}_1)_x(x,\xi)\tilde{E}_2(x,\xi) - (\tilde{E}_2)_x(x,\xi)\tilde{E}_1(x,\xi),$$

cũng là nghiệm của (2.4), và ta cũng có

$$\tilde{E}^{a,b}_{k,c}(x,\xi,u,v) \longrightarrow 0 \ \text{ khi } \ x \to \pm\infty.$$

Theo (2.10) chúng ta có

$$W(x,\xi) = e^{\frac{-(a+b)x^{k+1}\xi}{k+1}}\Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}} A(a,b,k,c)$$

trong đó

$$A(a,b,k,c) = \frac{-(k+1)}{\sin(\frac{\pi}{2(k+1)})} \sin \frac{(b-a+2c)\pi}{2(k+1)(b-a)}.$$

Từ đó chúng ta có

$$W(u,\xi) = e^{-\frac{(a+b)u^{k+1}\xi}{k+1}} \Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}} \frac{-(k+1)}{\sin(\frac{\pi}{2(k+1)})} \sin \frac{(b-a+2c)\pi}{2(k+1)(b-a)}.$$

Với $\xi < 0$, chúng ta thấy $W(u,\xi) \neq 0$ nếu và chỉ nếu

$$c \neq (b-a)\Big(N(k+1) - \frac{1}{2}\Big).$$

Vì vậy, thay $W(u,\xi)$ vào $\tilde{E}(x,\xi,u,v)$ ta nhận được

$$\tilde{E}(x,\xi,u,v) = \begin{cases} e^{-i\xi v} e^{\frac{a\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}} \big(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\big)^{\frac{-1}{k+1}} \big(A(a,b,k,c)\big)^{-1} \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\Phi\big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k}{(k+1)}, \frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\big) \\ + x\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})} \big(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\big)^{\frac{1}{k+1}} \Phi\big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k+2}{(k+1)}, \frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\big)\Big] \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})}\Phi\big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k}{(k+1)}, \frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1}\big) \\ - u\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})} \big(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\big)^{\frac{1}{k+1}} \Phi\big(\frac{b+c-a}{(k+1)}, \frac{k+2}{(k+1)}, \frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1}\big)\Big] \\ \hfill \text{nếu } x \geq u, \\ e^{-i\xi v} e^{\frac{b\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}} \big(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\big)^{\frac{-1}{k+1}} (A(a,b,k,c))^{-1} \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\Phi\big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k}{(k+1)}, \frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1}\big) \\ + u\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})} \big(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\big)^{\frac{1}{k+1}} \Phi\big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k+2}{(k+1)}, \frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1}\big)\Big] \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})}\Phi\big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k}{(k+1)}, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\big) \\ - x\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})} \big(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\big)^{\frac{1}{k+1}} \Phi\big(\frac{b+c-a}{(k+1)}, \frac{k+2}{(k+1)}, \frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\big)\Big] \\ \hfill \text{nếu } x \leq u. \end{cases}$$

Chú ý rằng với giả thiết $-\dfrac{\pi}{2} < \arg(b-a)x^{k+1}\xi < \dfrac{\pi}{2}$ thì $(b-a)x^{k+1}\xi \to \infty$.

Theo [9] ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})}\Phi\Big(\frac{c}{(k+1)(b-a)},\frac{k}{(k+1)},\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\\
&+x\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})}\Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\Big(\frac{b+c-a}{(k+1)},\frac{k+2}{(k+1)},\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\\
&=\Psi\Big(\frac{c}{(k+1)(b-a)},\frac{k}{(k+1)},\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\\
&=\Big(\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}}+O\Big(\big((b-a)x^{k+1}\xi\big)^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}-1}\Big). \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Dùng biến đổi Fourier ngược, chúng ta hy vọng rằng

$$E(x,y,u,v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iy\xi}\tilde{E}(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi,$$

sẽ trở thành nghiệm cơ bản của $G_{k,c}^{a,b}$.

2.1.2 Nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ khi k lẻ.

Khi k là số tự nhiên lẻ, chúng ta đã tìm được nghiệm của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ ở Chương 1 bằng cách chỉ ra cấu trúc của công thức nghiệm. Nhưng bằng cách đó, chúng tôi không tìm được nghiệm cơ bản của $G_{k,c}^{a,b}$ trong trường hợp k chẵn. Để vượt qua khó khăn này chúng tôi phải dùng phương pháp biến đổi Fourier để tìm nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$. Sau khi tìm nghiệm cơ bản của $G_{k,c}^{a,b}$ trong trường hợp k chẵn bằng biến đổi Fourier, chúng tôi cũng tìm được nghiệm cơ bản của $G_{k,c}^{a,b}$ trong trường hợp k lẻ bằng cách tương tự. Trong mục này, chúng tôi trình bày kết quả mà không trình bày chi tiết các bước tìm nghiệm.

Với $\xi>0$, nghiệm của (2.4) là:

$$\tilde{E}(x,\xi,u,v)=\begin{cases} e^{-i\xi v}e^{\frac{au^{k+1}\xi-bx^{k+1}\xi}{k+1}}\ \left(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\right)^{\frac{-1}{k+1}}(B_1(a,b,k,c))^{-1} \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{b+c-a}{(k+1)(b-a)})}\ \Phi(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{k+1}\ ,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}) \\ +\ x\frac{\Gamma(-\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})}\left(\frac{(b-a)\xi}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\ \Phi(\frac{b+c-a}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k+2}{k+1}\ ,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1})\Big] \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{b+c-a}{(k+1)(b-a)})}\ \Phi(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{k+1}\ ,\frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1}) \\ -\ u\frac{\Gamma(-\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})}\left(\frac{(b-a)\xi}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\ \Phi(\frac{b+c-a}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k+2}{k+1}\ ,\frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1})\Big] \\ \hfill \text{nếu } x\geq u, \\ e^{-i\xi v}e^{\frac{au^{k+1}\xi-bx^{k+1}\xi}{k+1}}\ \left(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\right)^{\frac{-1}{k+1}}(B_1(a,b,k,c))^{-1} \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{b+c-a}{(k+1)(b-a)})}\ \Phi(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{k+1}\ ,\frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1}) \\ +\ u\frac{\Gamma(-\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})}\left(\frac{(b-a)\xi}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\ \Phi(\frac{b+c-a}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k+2}{k+1}\ ,\frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1})\Big] \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{b+c-a}{(k+1)(b-a)})}\ \Phi(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{k+1}\ ,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}) \\ -\ x\frac{\Gamma(-\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})}\left(\frac{(b-a)\xi}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\ \Phi(\frac{b+c-a}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k+2}{k+1}\ ,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1})\Big] \\ \hfill \text{nếu } x\leq u, \end{cases}$$

ở đây

$$B_1(a,b,k,c)=\frac{2(k+1)\pi}{\sin\frac{\pi}{k+1}\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{b+c-a}{(k+1)(b-a)})}.$$

Chú ý rằng, nếu

$$c\neq N(k+1)(b-a)$$

và

$$c\neq(b-a)\big(N(k+1)-1\big),$$

với N là số nguyên không âm, thì

$$B_1(a,b,k,c)\neq 0.$$

Còn khi $\xi < 0$, nghiệm của (2.4) là:

$$\tilde{E}(x,\xi,u,v) = \begin{cases} e^{-i\xi v} e^{\frac{bu^{k+1}\xi - ax^{k+1}\xi}{k+1}} \left(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\right)^{\frac{-1}{k+1}} (B_2(a,b,k,c))^{-1} \\ \times \Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})} \Phi\big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k}{k+1}, \frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\big) \\ + x\big(\frac{(a-b)\xi}{k+1}\big)^{\frac{1}{k+1}} \frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})} \Phi\big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k+2}{k+1}, \frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\big) \Big] \\ \times \Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})} \Phi\big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k}{k+1}, \frac{(a-b)(-u)^{k+1}\xi}{k+1}\big) \\ - u\big(\frac{(a-b)\xi}{k+1}\big)^{\frac{1}{k+1}} \frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})} \Phi\big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k+2}{k+1}, \frac{(a-b)(-u)^{k+1}\xi}{k+1}\big) \Big] \\ \hfill \text{nếu } x \geq u, \\ e^{-i\xi v} e^{\frac{bu^{k+1}\xi - ax^{k+1}\xi}{k+1}} \left(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\right)^{\frac{-1}{k+1}} (B_2(a,b,k,c))^{-1} \\ \times \Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})} \Phi\big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k}{k+1}, \frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1}\big) \\ + u\big(\frac{(a-b)\xi}{k+1}\big)^{\frac{1}{k+1}} \frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})} \Phi\big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k+2}{k+1}, \frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1}\big) \Big] \\ \times \Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})} \Phi\big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k}{k+1}, \frac{(a-b)(-x)^{k+1}\xi}{k+1}\big) \\ - x\big(\frac{(a-b)\xi}{k+1}\big)^{\frac{1}{k+1}} \frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})} \Phi\big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k+2}{k+1}, \frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\big) \Big] \\ \hfill \text{nếu } x \leq u. \end{cases}$$

Ở đây

$$B_2(a,b,k,c) = \frac{2(k+1)\pi}{\sin\frac{\pi}{k+1}\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}.$$

Chú ý rằng, nếu $c \neq (1-N)(k+1)(b-a)$ và $c \neq (b-a)\big(-N(k+1)+k\big)$, với N là số nguyên không âm, thì $B_2(a,b,k,c) \neq 0$.

Dùng biến đổi Fourier ngược chúng ta hy vọng rằng

$$E(x,y,u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\xi}\widetilde{E}(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi$$

sẽ trở thành nghiệm cơ bản của $G^{a,b}_{k,c}$.

2.2 Các đánh giá đối với nghiệm cơ bản

Các tham số a, b, k, c gọi là chấp nhận được nếu $A(a, b, k, c) \neq 0$ khi k chẵn và $B_1(a, b, k, c) \neq 0$, $B_2(a, b, k, c) \neq 0$ khi k là lẻ. Bây giờ với a, b, k, c chấp nhận được, với mỗi $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ chúng ta xây dựng ánh xạ:

$$E(u, v) : C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$$

như sau:

$$E(u, v) : \varphi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \widetilde{E}(x, \xi, u, v)\widehat{\varphi}(x, \xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \in \mathbb{C},$$

ở đây $\quad \widehat{\varphi}(x, \xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\xi y}\varphi(x, y)\mathrm{d}y.$

Chúng ta thấy rằng, $E(u, v)$ là một phân bố Schwartz.

Định lí 2.2.1 *Giả sử rằng a, b, k, c chấp nhận được. Khi đó với mọi $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ thì $E(u, v) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (u, v))$ và $G_{k,c}^{a,b}E(x, y, u, v) = \delta(x - u, y - v)$.*

Chứng minh.Đầu tiên chúng ta chứng minh rằng, $E(u, v) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (u, v))$. Lấy $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}^2 \setminus (u, v))$, chúng ta chứng minh tồn tại một lân cận $O(x_0, y_0) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus (u, v))$, sao cho tồn tại $E(x, y, u, v) \in C_{x,y}^\infty(O(x_0, y_0))$ để với mọi $\varphi(x, y) \in C_0^\infty(O(x_0, y_0)$ thì

$$\big(E(u, v), \varphi(x, y)\big) = \big(E(x, y, u, v), \varphi(x, y)\big),$$

hay

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \widetilde{E}(x, \xi, u, v)\widehat{\varphi}(x, \xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^2} E(x, y, u, v)\varphi(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

1. Nếu $x_0 \neq u$, không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng $x_0 > u$, khi đó tồn tại một lân cận $O(x_0, y_0)$ của (x_0, y_0) sao cho

$$x^{k+1} - u^{k+1} > d, \ \forall (x, y) \in O(x_0, y_0).$$

Giả sử rằng ssup$\varphi(x,y) \Subset O(x_0,y_0)$. Trong $O(x_0,y_0)$, dùng công thức khai triển tiệm cận của hàm $\Psi(\alpha,\beta,z)$ khi đối số dần tới vô cùng, (xem [9]-trang 278) chúng ta có:

$$\begin{aligned}\left|e^{iy\xi}\tilde{E}(x,\xi,u,v)\right| &= \Big|e^{i(y-v)\xi+\frac{b\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}\Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{-\frac{1}{k+1}}\\ &\times\Big[\Big(\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}}+O\Big(\big((b-a)x^{k+1}\xi\big)^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}-1}\Big)\Big]\\ &\times\Big[\Big(\frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1}\Big)^{-\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}}+O\Big(\big((b-a)x^{k+1}\xi\big)^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}-1}\Big)\Big]\Big|\end{aligned}$$

khi $\xi > 0$, và

$$\begin{aligned}\left|e^{iy\xi}\tilde{E}(x,\xi,u,v)\right| &= \Big|e^{i(y-v)\xi+\frac{a\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}\Big(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\Big)^{-\frac{1}{k+1}}\\ &\times\Big[\Big(\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)^{-\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}}+O\Big(\big((b-a)x^{k+1}\xi\big)^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}-1}\Big)\Big]\\ &\times\Big[\Big(\frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1}\Big)^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}}+O\Big(\big((b-a)x^{k+1}\xi\big)^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}-1}\Big)\Big]\Big|\end{aligned}$$

khi $\xi < 0$.

Vì vậy

$$\left|e^{iy\xi}\tilde{E}(x,\xi,u,v)\right| \le \frac{|\xi|^{-\frac{1}{k+1}}e^{-\frac{m_0|\xi|d}{2(k+1)}}}{\big(1+|\xi|\big)^{\frac{k}{k+1}}},\quad (\xi \neq 0), \tag{2.12}$$

ở đây $m_0 = \min\{-\mathrm{Re(a)}, \mathrm{Re(b)}\}$.

Từ đó chúng ta có

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |e^{iy\xi}\tilde{E}(x,\xi,u,v)\varphi(x,y)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty.$$

Áp dụng Định lý Fubini chúng ta có

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{iy\xi}\tilde{E}(x,\xi,u,v)\varphi(x,y)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{iy\xi}\widetilde{E}(x,\xi,u,v)d\xi\Big)\varphi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Từ (2.12) chúng ta nhận được

$$E(x,y,u,v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{iy\xi}\tilde{E}(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi.$$

Sau đó, dùng công thức đạo hàm của hàm $\Psi(\alpha,\beta,z)$, chúng ta cũng đánh giá được

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta(e^{iy\xi}\tilde{E}(x,\xi,u,v))\right| \le \frac{e^{-\frac{m_0|\xi|d}{2(k+1)}}|\xi|^{-\frac{1}{k+1}+\alpha+\beta}}{\big(1+|\xi|\big)^{\frac{k}{k+1}}},$$

và chúng ta cũng có

$$\partial_x^\alpha\partial_y^\beta E(x,y,u,v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \partial_x^\alpha\partial_y^\beta(e^{iy\xi}\tilde{E}(x,\xi,u,v))\mathrm{d}\xi < \infty.$$

Vì vậy $E(x,y,u,v)$ như là hàm số đối với (x,y), và $E(x,y,u,v) \in C^\infty\big(O(x_0,y_0)\big)$.

2. $x_0 = u$. Trong trường hợp này $y_0 \neq v$. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $y_0 > v$. Khi đó tồn tại một số $d > 0$ và một lân cận $O(x_0,y_0)$ sao cho

$$y - v > d,\ \forall (x,y) \in O(x_0,y_0).$$

Giả sử rằng $\operatorname{supp}\varphi(x,y) \Subset O(x_0,y_0)$. Khi đó chúng ta biểu diễn

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} h(\xi)\tilde{E}(x,\xi,u,v)\hat{\varphi}(x,\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(1-h(\xi))\tilde{E}(x,\xi,u,v)\hat{\varphi}(x,\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi := E_1(\varphi) + E_2(\varphi), \end{aligned}$$

với $h(\xi)$ là hàm thuộc $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Rõ ràng tích phân

$$E_1(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} h(\xi)\tilde{E}(x,\xi,u,v)\hat{\varphi}(x,\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi$$

hội tụ và chúng ta có thể lấy đạo hàm theo y số lần chúng ta muốn.

Dùng công thức Fubini, ta có

$$E_1(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{iy\xi}h(\xi)\tilde{E}(x,\xi,u,v)d\xi\Big)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Vì vậy tồn tại hàm

$$E_0(x,y,u,v) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iy\xi} h(\xi)\tilde{E}(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$$

và $\quad E_1(\varphi) \equiv E_0(x,y,u,v).$

Bây giờ chúng xét đến $E_2(\varphi)$. Với mọi $N \in \mathbb{Z}_+$ đặt

$$\Upsilon_N(x,y,v) = \frac{\varphi(x,y)}{(y-v)^N}.$$

Chúng ta có

$$e^{-i\xi v}\hat{\varphi}(x,\xi) = D_\xi^N\big(e^{-i\xi v}\hat{\Upsilon}_N(x,\xi,v)\big).$$

Ta viết $\tilde{E}(x,\xi,u,v)$ dưới dạng:

$$\tilde{E}(x,\xi,u,v) := e^{-i\xi v}\tilde{F}(x,\xi,u,v).$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
E_2(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(1-h(\xi))\tilde{E}(x,\xi,u,v)\hat{\varphi}(x,\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(1-h(\xi))\tilde{F}(x,\xi,u,v)D_\xi^N(e^{-i\xi v}\hat{\Upsilon}_N(x,\xi,v))\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi v}(-D_\xi)^N\big((1-h(\xi))\tilde{F}(x,\xi,u,v)\big)\hat{\Upsilon}_N(x,\xi,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi v}(-D_\xi)^N\big((1-h(\xi))\tilde{F}(x,\xi,u,v)\big)\int\limits_{\mathbb{R}} e^{iy\xi}\frac{\varphi(x,y)}{(y-v)^N}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Ta thấy

$$D_\xi^N(1-h(\xi))\tilde{F}(x,\xi,u,v) = \sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}D_\xi^{N-m}(1-h(\xi))D_\xi^m\tilde{F}(x,\xi,u,v),$$

nên khi $m=0$ thì

$$D_\xi^{N-m}(1-h(\xi)) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}),$$

và khi $m \neq 0$ thì

$$D_\xi^m \tilde{F}(x,\xi,u,v) \sim \frac{|\xi|^{-\frac{1}{k+1}}}{\big(1+|\xi|\big)^{\frac{k}{k+1}+m}}.$$

Vì vậy

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi v}(-D_\xi)^N\big((1-h(\xi))\tilde{F}(x,\xi,u,v)\big)\int\limits_{\mathbb{R}} e^{iy\xi}\frac{\varphi(x,y)}{(y-v)^N}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\xi(y-v)}\frac{1}{(y-v)^N}(-D_\xi)^N\big((1-h(\xi))\tilde{F}(x,\xi,u,v)\big)d\xi\Big)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} E(x,y,u,v)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

với

$$E(x,y,u,v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\xi(y-v)}\frac{1}{(y-v)^N}(-D_\xi)^N\big((1-h(\xi))\tilde{F}(x,\xi,u,v)\big)\mathrm{d}\xi < \infty$$

và thuộc $C_y^{N-1}\big(O(x_0,y_0)\big)$. Cho N dần tới vô cùng chúng ta có $E(x,y,u,v)$ thuộc $C_y^\infty\big(O(x_0,y_0)\big)$. Mặt khác, do $\tilde{E}(x,\xi,u,v)$ là nghiệm của phương trình (2.4) nên $\tilde{F}(x,\xi,u,v)$ thuộc $C^\infty\big(O(x_0,y_0)\big)$. Từ đó chúng ta có

$$E(x,y,u,v) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\xi(y-v)}\frac{1}{(y-v)^N}(-D_\xi)^N\big((1-h(\xi))\tilde{F}(x,\xi,u,v)\big)\mathrm{d}\xi$$

thuộc $C^\infty\big(O(x_0,y_0)\big)$. Vậy cuối cùng chúng ta có

$$E_2(\varphi) = E(x,y,u,v)(\varphi) \quad \text{và} \quad E_2 \in C^\infty\big(O(x_0,y_0)\big).$$

Bây giờ chúng ta chứng minh ý sau cùng của Bổ đề này:

$$G_{k,c}^{a,b}E(x,y,u,v) = \delta(x-u,y-v).$$

Lấy $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, chúng ta phải chứng minh

$$\Big(G_{k,c}^{a,b}E(x,y,u,v),\varphi(x,y)\Big) = \Big(\delta(x-u,y-v),\varphi(x,y)\Big) = \varphi(u,v).$$

Nhưng chúng ta có

$$\Big(G_{k,c}^{a,b}E(x,y,u,v),\varphi(x,y)\Big)=\Big(E(x,y,u,v),G_{k,-c}^{b,a}\varphi(x,y)\Big),$$

và

$$\Big(E(x,y,u,v),G_{k,-c}^{b,a}\varphi(x,y)\Big)=E(G_{k,-c}^{b,a}\varphi),$$

nên chúng ta cần chứng minh

$$E(G_{k,-c}^{b,a}\varphi)=\varphi(u,v).$$

Trước hết ta tính được

$$\begin{aligned}G_{k,-c}^{b,a}\varphi(x,y) &= \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2}+abx^{2k}D_{yy}\varphi(x,y)+(a+b)x^kD_y\Big(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\Big)\\ &\quad+(ka+c)D_y\varphi(x,y),\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}&\widehat{G_{k,-c}^{b,a}\varphi}(x,\xi)=\\ &=\widehat{\varphi}_{xx}(x,\xi)-(a+b)x^k\xi\widehat{\varphi}_x(x,\xi)+\big(abx^{2k}\xi^2-(ka+c)x^{k-1}\xi\big)\widehat{\varphi}(x,\xi).\end{aligned}$$

Cho nên ta có

$$\begin{aligned}E(G_{k,-c}^{b,a}\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\tilde{E}(x,\xi,u,v)\widehat{G_{k,-c}^{b,a}\varphi}(x,\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\tilde{E}_{xx}(x,\xi,u,v)+(a+b)x^k\xi\tilde{E}_x(x,\xi,u,v)\\ &\qquad\qquad+\big(abx^{2k}\xi^2-(kb-c)x^{k-1}\xi\big)\Big)\widehat{\varphi}(x,\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\big(e^{-iv\xi}\delta(x-u),\widehat{\varphi}(x,\xi)\big)\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\big(\delta(x-u),e^{-iv\xi}\widehat{\varphi}(x,\xi)\big)\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-iv\xi}\widehat{\varphi}(u,\xi)\mathrm{d}\xi=\varphi(u,v).\end{aligned}$$

Như vậy, chúng ta hoàn thành chứng minh Bổ đề 2.2.1. □

Bổ đề 2.2.1 *Giả sử a, b, k, c chấp nhận được. Khi đó*

$$|E(x,y,u,v)| \le C\big(|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + |y-v|^2\big)^{-\frac{k}{2k+2}} \tag{2.13}$$

với mọi (x,y,u,v) thuộc một tập compac trong $\mathbb{R}^4$. Hơn thế nữa $E(u,v)$ đồng nhất với $E(x,y,u,v) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2(x,y))$ theo nghĩa phân bố.

Chứng minh. Theo [13] chúng ta có

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iy\xi}|\xi|^{\lambda}\mathrm{d}\xi\Big| = -2\Gamma(\lambda+1)\sin\frac{\lambda\pi}{2}|y|^{-\lambda-1},$$

với mọi $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, ...$, vì vậy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iA\xi}}{|\xi|^{\frac{1}{k+1}}}\mathrm{d}\xi \le C|A|^{-\frac{k}{k+1}}. \tag{2.14}$$

Để chứng minh bổ đề này, chúng ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $x \ge u$, còn trường hợp $x \le u$ được chứng minh tương tự.

Khi $x \ge u$ ta có

$$\begin{aligned}
E(x,y,u,v) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi}\widetilde{E}(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} e^{i(y-v)\xi + \frac{b\,\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}|\xi|^{-\frac{1}{k+1}}\widetilde{F}_1(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi \\
&+ \int\limits_{0}^{+\infty} e^{i(y-v)\xi + \frac{a\,\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}|\xi|^{-\frac{1}{k+1}}\widetilde{F}_2(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_1(x,\xi,u,v) &= \big(A(a,b,k,c)\big)^{-1}\Big|\frac{a-b}{k+1}\Big|^{-\frac{1}{k+1}} \\
&\times \Bigg[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma\big(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)}\big)}\Phi\Big(\tfrac{c}{(k+1)(b-a)}, \tfrac{k}{(k+1)}, \tfrac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big) \\
&+ x\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma\big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\big)}\Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\Big(\tfrac{b+c-a}{(k+1)}, \tfrac{k+2}{(k+1)}, \tfrac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\Bigg]
\end{aligned}$$

$$\times\Bigg[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma\big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\big)}\Phi\Big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)},\frac{k}{(k+1)},\frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1}\Big)$$

$$-u\,\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma\big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\big)}\Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)},\frac{k+2}{(k+1)},\frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1}\big)\Bigg],$$

$$\widetilde{F}_2(x,\xi,u,v)=\Big(A(a,b,k,c)\Big)^{-1}\Big|\frac{a-b}{k+1}\Big|^{-\frac{1}{k+1}}$$

$$\times\Bigg[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma\big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\big)}\Phi\Big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)},\frac{k}{(k+1)},\frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1}\Big)$$

$$+x\,\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma\big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\big)}\Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\Big(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)},\frac{k+2}{(k+1)},\frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\Bigg]$$

$$\times\Bigg[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma\big(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)}\big)}\Phi\Big(\frac{c}{(k+1)(b-a)},\frac{k}{(k+1)},\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)$$

$$-u\,\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma\big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\big)}\Big(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Phi\Big(\frac{b+c-a}{(k+1)},\frac{k+2}{(k+1)},\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}\Big)\Bigg].$$

Chúng ta đã có khai triển tiệm cận của $\tilde{F}_1(x,\xi,u,v)$ và $\tilde{F}_2(x,\xi,u,v)$ khi $\dfrac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}\to\infty$, vì vậy chúng ta có

$$\big|E(x,y,u,v)\big|\leq\Big|\int\limits_{-\infty}^{0}e^{i\xi\big((y-v)+\frac{\mathrm{Im}(a)(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}\big)+\frac{\mathrm{Re}(a)\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}\tilde{F}_1(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi\Big|$$

$$+\Big|\int\limits_{0}^{+\infty}e^{i\xi\big((y-v)+\frac{\mathrm{Im}(b)(u^{k+1}-v^{k+1})}{k+1}\big)+\frac{\mathrm{Re(b)}\xi(\mathrm{u}^{k+1}-\mathrm{x}^{k+1})}{k+1}}\tilde{F}_2(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi\Big|.$$

Do $\mathrm{Re}(a)<0,\mathrm{Re}(b)>0$ cho nên $\dfrac{\mathrm{Re}(a)\;\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}<0$ khi $\xi<0$ và $\dfrac{\mathrm{Re}(b)\;\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}<0$ khi $\xi>0$, theo (2.14) chúng ta có

$$\big|E(x,y,u,v)\big|\leq\Big|\int\limits_{-\infty}^{0}e^{i\xi\big((y-v)+\frac{\mathrm{Im}(a)(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}\big)}|\xi|^{-\frac{1}{k+1}}\mathrm{d}\xi\Big|$$

$$+\Big|\int_0^{+\infty} e^{i\xi\left((y-v)+\frac{\mathrm{Im}(b)(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}\right)}|\xi|^{-\frac{1}{k+1}}\mathrm{d}\xi\Big|$$
$$\leq C\Big|(y-v)+\mathrm{Im}(b)(u^{k+1}-x^{k+1})\Big|^{\frac{1}{k+1}-1}$$
$$\leq C\Big(|y-v|^2+|u^{k+1}-x^{k+1}|^2\Big)^{\frac{-k}{2k+2}}.$$

Như vậy, chúng ta chứng minh xong ý đầu của Bổ đề 2.2.1. Tiếp theo, chúng ta chứng minh ý sau của bổ đề này. Từ Bổ đề 2.2.1 chúng ta suy ra $E \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (u,v))$, bằng đánh giá (2.13), rõ ràng chúng ta có

$$E(u,v) \equiv E(x,y,u,v) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2_{(x,y)} \setminus (u,v))$$

theo nghĩa phân bố. Giả sử rằng, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, ở đây Ω là tập compac tương đối trong $\mathbb{R}^2$ chứa (u,v). Đặt

$$B^r(u,v) = \Big\{(x,y) : |x-u|^2+|y-v|^2 \leq r^2\Big\}.$$

Định nghĩa hàm $\eta(x,y) \in C_0^\infty(\Omega)$ thoả mãn

$$\eta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (x,y) \in B^r(0,0),\\ 0 & \text{nếu } (x,y) \in \Omega \setminus B^{2r}(0,0). \end{cases}$$

Với $0 < \epsilon \leq 1$, chúng ta có $E(\varphi) = E(\varphi-(\eta\varphi)_\epsilon) + E(\eta\varphi)_\epsilon$,

ở đây $(\eta\varphi)_\epsilon = \eta\Big(\dfrac{x-u}{\epsilon}, \dfrac{y-v}{\epsilon}\Big)\varphi(x,y)$. Trước hết ta tính

$$\widehat{(\varphi\eta)}_\epsilon(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{iy\xi}\eta\Big(\frac{x-u}{\epsilon}, \frac{y-v}{\varepsilon}\Big)\varphi(x,y)\mathrm{d}y$$
$$= C\widehat{\eta\Big(\frac{x-u}{\epsilon}, \frac{y-v}{\varepsilon}\Big)} * \widehat{\varphi(x,y)}(\xi)$$
$$= C\int_{\mathbb{R}} \widehat{\eta\Big(\frac{x-u}{\epsilon}, \frac{y-v}{\varepsilon}\Big)}(\xi-\zeta)\widehat{\varphi(x,y)}(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$
$$= C\varepsilon e^{iv(\xi-\zeta)}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\eta}\Big(\frac{x-u}{\epsilon}, \varepsilon(\xi-\zeta)\Big)\widehat{\varphi}(x,\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

Chúng ta có

$$\varepsilon(1+|\xi|) \leq \varepsilon(1+|\xi-\zeta|+|\zeta|) \leq (1+|\xi|)(1+\varepsilon|\xi-\zeta|)$$

cho nên

$$\begin{aligned}&\big(\varepsilon(1+|\xi|)\big)^{\frac{1}{k+1}}\widehat{\eta}\Big(\frac{x-u}{\varepsilon},\varepsilon(\xi-\zeta)\Big)\widehat{\varphi}(x,\zeta)\\&\leq \big(1+\varepsilon|\xi-\zeta|\big)^{\frac{1}{k+1}}\widehat{\eta}\Big(\frac{x-u}{\varepsilon},\varepsilon(\xi-\zeta)\Big)\big(1+|\zeta|\big)^{\frac{1}{k+1}}\widehat{\varphi}(x,\zeta).\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}\Big|E((\eta\varphi)_\varepsilon)\Big| &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\tilde{E}(x,\xi,u,v)\widehat{(\eta\varphi)_\varepsilon}(x,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\tilde{E}(x,\xi,u,v)\int\limits_{\mathbb{R}}\varepsilon e^{iv(\xi-\zeta)}\hat{\eta}\Big(\frac{x-u}{\varepsilon},\varepsilon(\xi-\zeta)\Big)\widehat{\varphi}(x,\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\
&\leq C\varepsilon^{\frac{k}{k+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+\varepsilon|\xi-\zeta|)^{\frac{1}{k+1}}}{|\xi|^{\frac{1}{k+1}}\big(1+|\xi|\big)^{\frac{k}{k+1}}(1+|\xi|)^{\frac{1}{k+1}}}\\
&\qquad\times\hat{\eta}\Big(\frac{x-u}{\varepsilon},\varepsilon(\xi-\zeta)\Big)(1+|\zeta|)^{\frac{1}{k+1}}\widehat{\varphi}(x,\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\\
&= C\varepsilon^{\frac{2k+1}{k+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|\xi|^{\frac{1}{k+1}}(1+|\xi|)}(1+\varepsilon|\xi-\zeta|)^{\frac{1}{k+1}}\hat{\eta}\big(x,\varepsilon(\xi-\zeta)\big)\\
&\qquad\times(1+|\zeta|)^{\frac{1}{k+1}}\widehat{\varphi}(u+\varepsilon x,\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Xét họ các hàm $\varphi(u+\varepsilon x,y)\in C_0^\infty(\Omega)$ với tham số ε, chúng ta có

$$\Big|D_y^2\varphi(u+\varepsilon x,y)\Big| \leq \frac{C}{(1+|u+\varepsilon x|+|y|)^2} \leq \frac{C}{(1+|y|)^2}.$$

Vì vậy

$$\Big|\widehat{D_y^2\varphi}(u+\varepsilon x,\xi)\Big| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}}e^{iy\xi}D_y^2\varphi(u+\varepsilon x,y)\mathrm{d}y\Big| \leq \Big|\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{C}{(1+|y|)^2}\mathrm{d}y \leq C_0.$$

Điều này suy ra, với $\zeta>0$ đủ lớn, tồn tại hằng số C_0 không phụ thuộc ε sao cho

$$\Big|\widehat{\varphi}(u+x\varepsilon,\zeta)\Big| \leq \frac{C_0}{|\zeta|^2},$$

từ đó chúng ta có

$$\Big|E((\eta\varphi)_\varepsilon)\Big| = C\varepsilon^{\frac{2k+1}{k+1}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi|^{\frac{1}{k+1}}(1+|\xi|)^{\frac{2k+1}{2k+2}}}(1+\varepsilon|\xi-\zeta|)^{\frac{2k+1}{2k+2}}$$
$$\times\, \hat{\eta}\Big(\frac{x-u}{\varepsilon}, \varepsilon(\xi-\zeta)\Big)\frac{(1+|\zeta|)^{\frac{2k+1}{2k+2}}}{|\zeta|^2}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \to 0$$

khi $\varepsilon \to 0$. Vì vậy, $E((\eta\varphi)_\varepsilon)$ dần tới 0 khi $\varepsilon \to 0$. Từ đó

$$E(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} E(\varphi - (\eta\varphi)_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega} E(\varphi - (\eta\varphi)_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega\setminus B_{\varepsilon r}} E(x,y,u,v)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

mà tích phân cuối cùng này hội tụ, nên ta có điều phải chứng minh.

Chúng ta hoàn thành chứng minh Bổ đề 2.2.1. □

Hệ quả 2.2.1 *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ là một miền bị chặn với biên trơn từng khúc, $f \in C^2(\bar{\Omega})$ và a, b, k, c là chấp nhận được. Khi đó*

$$f(x,y) = \int\limits_{\partial\Omega} f(u,v)\widetilde{B}_2(E(x,y,u,v), a, b, k, c)\mathrm{d}s$$
$$- \int\limits_{\partial\Omega} E(x,y,u,v)\widetilde{B}_1(f(u,v), a, b, k, c)\mathrm{d}s + \int\limits_{\Omega} E(x,y,u,v)\widetilde{G}^{a,b}_{k,c} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Ở đây:

$$\widetilde{B}_1(f(u,v), a, b, k, c) = (\nu_1 - iau^k\nu_2)\widetilde{X}_1 f(u,v) + icu^{k-1}\nu_2 f(u,v),$$
$$\widetilde{B}_2(E(x,y,u,v), a, b, k, c) = (\nu_1 - ibu^k\nu_2)\widetilde{X}_2 E(x,y,u,v).$$

Bổ đề 2.2.2 *Giả sử rằng, a, b, k, c chấp nhận được. Khi đó với mọi (x, y, u, v) nằm trong một tập compac của $\mathbb{R}^4, (x,y) \neq (u,v)$, và với mọi (α, β) sao cho $0 \le \alpha + \beta \le 1$, ta có*

$$\max\Big\{\Big|x^{k\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x,y,u,v)}{\partial x^\alpha\partial y^\beta}\Big|,\Big|u^{k\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x,y,u,v)}{\partial u^\alpha\partial v^\beta}\Big|,\Big|\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x,y,u,v)}{\partial x^\alpha\partial u^\beta}\Big|,$$
$$\Big|x^{k\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x,y,u,v)}{\partial u^\alpha\partial y^\beta}\Big|,\Big|u^{k\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x,y,u,v)}{\partial x^\alpha\partial v^\beta}\Big|,\Big|(xu)^{k\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x,y,u,v)}{\partial y^\alpha\partial v^\beta}\Big|\Big\}$$
$$\leq C_{\alpha,\beta}\big(|x^{k+1}-u^{k+1}|+|y-v|\big)^{-\frac{k+\alpha+\beta}{k+1}}.$$

Chứng minh.

* Với $\alpha+\beta=0$, theo Bổ đề 2.2.1 ta có điều phải chứng minh.

* Với $\alpha=1,\beta=0$

$$\Big|\frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial x}\Big|=\Big|\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{iy\xi}\widetilde{E}(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi\Big|=\Big|\int\limits_{\mathbb{R}}e^{iy\xi}\frac{\partial\widetilde{E}(x,\xi,u,v)}{\partial x}\mathrm{d}\xi\Big|.$$

Khi $\xi>0, x>u$

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial\widetilde{E}(x,\xi,u,v)}{\partial x}\Big| &\leq \Big[\Big|e^{i(y-v)\xi+\frac{b\,\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}|\xi|^{-\frac{1}{k+1}}\widetilde{F}_1(x,\xi,u,v)|x|^k\xi\Big|\\
&+\Big|e^{i(y-v)\xi+\frac{a\,\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}|\xi|^{-\frac{1}{k+1}}\frac{\partial\widetilde{F}_1(x,\xi,u,v)}{\partial x}\Big|\Big]\\
&\leq\Big|e^{i\xi(|y-v|+\frac{\mathrm{Im}(b)\xi|u^{k+1}-x^{k+1}|}{k+1})}e^{\frac{\mathrm{Re}(b)\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}\xi^{\frac{k}{k+1}}\widetilde{F}_1(x,\xi,u,v)|x|^k\Big|\\
&+\Big|e^{i(y-v)\xi+\frac{\mathrm{Im}(b)\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}e^{\frac{\mathrm{Re}(b)\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}\xi^{\frac{k}{k+1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\widetilde{F}_1(\widetilde{a}_1,\widetilde{c}_1,z)|x|^k\Big|.\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial x}\Big| &= \Big|\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{R}e^{iy\xi}\widetilde{E}(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi\Big|\\
&\leq C|x|^k\int\limits_{R}e^{i\xi(|y-v|+\frac{\mathrm{Im}(b)\,\xi|u^{k+1}-x^{k+1}|}{k+1})}|\xi|^{\frac{k}{k+1}}\mathrm{d}\xi\\
&\leq C\big(|y-v|+|u^{k+1}-x^{k+1}|\big)^{-\frac{k}{k+1}-1}|x|^k\\
&\leq C\big(|y-v|+|u^{k+1}-x^{k+1}|\big)^{-\frac{k}{k+1}-1}\big(|y-v|+|u^{k+1}-x^{k+1}|\big)^{\frac{k}{k+1}}\\
&= C\big(|y-v|+|u^{k+1}-x^{k+1}|\big)^{-1}.\end{aligned}$$

Chúng ta có điều phải chứng minh.

* Với $\alpha = 0, \beta = 1$

$$\Big|\frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial y}\Big| = \Big|\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{R} e^{iy\xi}\widetilde{E}(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi\Big| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}} e^{iy\xi}\xi\widetilde{E}(x,\xi,u,v)\mathrm{d}\xi\Big|$$

$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\xi((y-v)+\mathrm{Im}(b)(u^{k+1}-x^{k+1}))}|\xi|^{\frac{k}{k+1}}\mathrm{d}\xi$$

$$\leq C\big|(y-v)+(u^{k+1}-x^{k+1})\big|^{-\frac{k}{k+1}-1}.$$

Vì vậy

$$\Big||x|^k\frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial y}\Big| \leq C\big(|y-v|+|u^{k+1}-x^{k+1}|\big)^{-\frac{k}{k+1}-1+\frac{k}{k+1}}$$

$$\leq C\big(|y-v|+|u^{k+1}-x^{k+1}|\big)^{-1}.$$

Với các trường hợp khác, chúng ta cũng chứng minh tương tự.

Chúng ta hoàn thành chứng minh Bổ đề 2.2.2. □

2.3 Tính chính quy Gevrey của nghiệm

Định lí 2.3.1 *Cho k là số chẵn và các tham số a, b, c, k chấp nhận được. Khi đó:*

i) Nếu $\psi \in G^s$ ($s \geq 1$) thì, mọi $C^\infty(\Omega)$- nghiệm của phương trình (1) thuộc $G^s(\Omega)$; toán tử phi tuyến $\Psi^{a,b}_{k,c}$ là s-hypoelliptic mở rộng.

ii) Trường hợp đặc biệt, nếu ψ là giải tích thì, mọi $C^\infty(\Omega)$- nghiệm của phương trình (1) cũng là hàm giải tích trên Ω; toán tử $\Psi^{a,b}_{k,c}$ là giải tích hypoelliptic mở rộng.

Chứng minh. Để chứng minh định lý này chúng ta chỉ cần chứng minh các bổ đề về đánh giá nghiệm cơ bản trên hình vuông V^T.

Bổ đề 2.3.1 *Trong hình vuông V^T với a, b, k, c là chấp nhận được, k là số nguyên dương chẵn, chúng ta có*

$$\left|x^\gamma \frac{\partial^{\alpha+\beta} E(x,y,u,v)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right| \leq C\Big[|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}$$

với mọi $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Xi_k^1$.

Chứng minh.

* Nếu $\alpha + \beta = 0$, thì $0 \leq \gamma \leq k$,

$$\left|x^\gamma \frac{\partial^{\alpha+\beta} E(x,y,u,v)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right|_{V^T} \leq C\big|E(x,y,u,v)\big|_{V^T} \leq C\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big)^{\frac{-k}{k+1}}.$$

Bây giờ chúng ta chứng minh tồn tại $C > 0$ để

$$\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big)^{\frac{-k}{k+1}} \leq C\Big[|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}.$$

Nếu $x \neq u$ và $y \neq v$ thì điều này tương đương với

$$\Big[|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leq C\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big)^{\frac{k}{k+1}}.$$

Nhưng chúng ta có

$$\Big[|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big] \leq (k+1)^2\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big)^2,$$

cho nên

$$\Big[|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leq (k+1)\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big).$$

Nhưng

$$\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big) \leq C\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big)^{\frac{k}{k+1}},$$

vì $\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big) \leq 1$.

Do đó

$$\Big[|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leq C\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big)^{\frac{k}{k+1}}.$$

Như vậy, trường hợp $\alpha + \beta = 0$ được chứng minh.

* Nếu $\alpha = 1, \beta = 0$, chúng ta phải chứng minh

$$\Big|x^\gamma \frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial x}\Big|_{V^T} \le C\Big[|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}.$$

Theo Bổ đề 2.2.2

$$\Big|x^\gamma \frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial x}\Big|_{V^T} \le C\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big)^{-1},$$

nên chúng ta chỉ cần chứng minh

$$\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big)^{-1} \le C\Big[|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{-\frac{1}{2}},$$

hay

$$\Big[|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \le C\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big).$$

Điều này luôn được thỏa mãn.

* Nếu $\alpha = 0, \beta = 1$, chúng ta phải chứng minh

$$\Big|x^\gamma \frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial y}\Big|_{V^T} \le C\Big[|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}.$$

Theo Bổ đề 2.2.2 chúng ta có

$$\begin{aligned}\Big|x^\gamma \frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial y}\Big|_{V^T} &\le \Big|x^k \frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial y}\Big| \\ &\le C\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big)^{-1} \\ &\le C'\Big[|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Chúng ta hoàn thành chứng minh Bổ đề 2.3.1. □

Bổ đề 2.3.2 *Trên* $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ *nếu* $|x| \le \big(2\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ *thì* $|u| \le 3\big(\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ *và*

$$\Big|x^\gamma \frac{\partial^{\alpha+\beta}\widetilde{X}_2 E(x,y,u,v)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\Big| \le \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)} \quad \forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \Xi_k^1.$$

Chứng minh. Ý đầu của Bổ đề 2.3.2 đã được chứng minh trong Bổ đề 1.3.2, bây giờ chúng ta chứng minh ý sau của bổ đề này.

* Trước tiên, chúng ta xét trường hợp $\alpha + \beta = 0$.

$$\begin{aligned}\Big|x^{\gamma}\frac{\partial^{\alpha+\beta}\widetilde{X}_2E(x,y,u,v)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\Big| &\leq \Big|x^{k}\Big(\frac{\partial}{\partial u} - iau^{k}\frac{\partial}{\partial v}\Big)E(x,y,u,v)\Big|\\ &\leq \Big|x^{\gamma}\frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial u}\Big| + |a|\Big|u^{k}\frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial v}\Big|.\end{aligned}$$

Theo Bổ đề 2.2.2

$$\begin{aligned}\Big|x^{\gamma}\frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial u}\Big|_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} &\leq \Big|\frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial u}\Big|_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)}\\ &\leq C\Big((x^{k+1}-u^{k+1}) + |y-v|\Big)^{-\frac{k+1}{k+1}}\\ &= C\Big((x^{k+1}-u^{k+1}) + |y-v|\Big)^{-1}\\ &\leq C'\Big[(x^{k+1}-u^{k+1})^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Nhưng trên biên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ tồn tại C để

$$\begin{aligned}&\Big[|x^{k+1}-u^{k+1}|^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}\\ &\leq C\Big[(x^{k+1}+u^{k+1})^2 + (k+1)^2(y-v)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}\\ &= C\widetilde{R}^{-\frac{1}{2}} \ \leq C\sigma_N^{-1}(x,y) \ \leq C\sigma_N^{-\frac{k+2}{k+1}}(x,y),\end{aligned}$$

do $0 < \sigma_N(x,y) \leq 1$.

Vì vậy

$$\big|x^{\gamma}\widetilde{X}_2E(x,y,u,v)\big| \leq \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}.$$

* Với $\alpha = 1, \beta = 0$ thì

$$
\begin{aligned}
\left|x^\gamma \frac{\partial \widetilde{X}_2 E(x,y,u,v)}{\partial x}\right| &\le \left|x^\gamma \frac{\partial^2 E(x,y,u,v)}{\partial x \partial u}\right| + \left|u^k \frac{\partial^2 E(x,y,u,v)}{\partial x \partial v}\right| \\
&\le C\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y - v|\Big)^{-\frac{k+2}{k+1}} \\
&\le C'\Big[|x^{k+1} + u^{k+1}|^2 + (k+1)^2 (y-v)^2\Big]^{-\frac{k+2}{2(k+1)}} \\
&\le C' \widetilde{R}^{-\frac{k+2}{2(k+1)}} \ \le C\sigma_N^{-\frac{k+2}{k+1}}(x,y).
\end{aligned}
$$

* Với $\alpha = 0, \beta = 1$, áp dụng Bổ đề 2.2.2 chúng ta có

$$
\begin{aligned}
\left|x^\gamma \frac{\partial \widetilde{X}_2 E(x,y,u,v)}{\partial y}\right| &\le \left|x^\gamma \frac{\partial^2 E(x,y,u,v)}{\partial y \partial u}\right| + |a|\left|x^\gamma u^k \frac{\partial^2 E(x,y,u,v)}{\partial y \partial v}\right| \\
&\le C\left(\left|x^\gamma \frac{\partial^2 E(x,y,u,v)}{\partial y \partial u}\right| + \left|x^\gamma u^k \frac{\partial^2 E(x,y,u,v)}{\partial y \partial v}\right|\right) \\
&\le C\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y - v|\Big)^{-\frac{k+2}{k+1}} \\
&\le C\sigma_N^{-\frac{k+2}{k+1}}(x,y).
\end{aligned}
$$

Chúng ta hoàn thành chứng minh Bổ đề 2.3.2. □

Bổ đề 2.3.3 *Trên biên* $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ *nếu* $|x| \le (2\sigma_N(x,y))^{\frac{1}{k+1}}$ *thì*

$$
\left|\frac{x^\gamma}{|u|^k} \frac{\partial^{\alpha+\beta} \widetilde{X}_2 E(x,y,u,v)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right| \le \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)} \quad \forall (\alpha,\beta,\gamma) \in \Xi_k^1.
$$

Chứng minh. Do $(\alpha,\beta,\gamma) \in \Xi_k^1$ nên $0 \le \alpha + \beta \le 1$.

* Với $\alpha = \beta = 0$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x^\gamma}{|u|^k} \frac{\partial^{\alpha+\beta} \widetilde{X}_2 E(x,y,u,v)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right| &\le \frac{C}{|u|^k}\left[\left|\frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial u}\right| + |a||u|^k \left|\frac{\partial E(x,y,u,v)}{\partial v}\right|\right] \\
&\le \frac{C}{|u|^k}\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y - v|\Big)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Nhưng trong trường hợp này, áp dụng Bổ đề 1.3.3 ta nhận được

$$
C^{-1} \widetilde{R}^{-\frac{k}{2k+2}} \ \le |u|^k \ \le C\widetilde{R}^{-\frac{k}{2k+2}}.
$$

Mặt khác do $\widetilde{R} \geq \sigma_N^2(x,y)$, nên

$$|u|^k \geq C\sigma_N^{\frac{k}{k+1}}(x,y) \Leftrightarrow \frac{1}{|u|^k} \leq \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k}{k+1}}(x,y)}.$$

Sau cùng, chúng ta có với $\alpha = \beta = 0$

$$\left|\frac{x^\gamma}{|u|^k}\frac{\partial^{\alpha+\beta}\widetilde{X}_2E(x,y,u,v)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right| \leq \frac{C}{\sigma_N^{\frac{2k+1}{2k+2}}(x,y)} \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}.$$

* Với $\alpha = 1, \beta = 0$, ta có

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x^\gamma}{|u|^k}\frac{\partial^{\alpha+\beta}\widetilde{X}_2E(x,y,u,v)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right| = \left|\frac{x^\gamma}{|u|^k}\frac{\partial\big(\frac{\partial}{\partial u} - iau^k\frac{\partial}{\partial v}\big)E(x,y,u,v)}{\partial x}\right| \\
&\leq C\frac{|x^\gamma|}{|u|^k}\left(\left|\frac{\partial^2 E(x,y,u,v)}{\partial x \partial u}\right| + |u^k|\left|\frac{\partial^2 E(x,y,u,v)}{\partial x \partial v}\right|\right) \\
&\leq C\frac{1}{|u|^k}\left(\left|\frac{\partial^2 E(x,y,u,v)}{\partial x \partial u}\right| + |a||u^k|\left|\frac{\partial^2 E(x,y,u,v)}{\partial x \partial v}\right|\right) \\
&\leq C\sigma_N^{-\frac{k}{k+1}}(x,y)\Big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y-v|\Big)^{-\frac{k+2}{k+1}} \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}.
\end{aligned}$$

* Với $\alpha = 0, \beta = 1$, ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x^\gamma}{|u|^k}\frac{\partial\widetilde{X}_2E(x,y,u,v)}{\partial y}\right| \\
&\leq C\frac{1}{|u|^k}\left(\left|x^k\frac{\partial^2 E(x,y,u,v)}{\partial y \partial u}\right| + |a||x^k||u^k|\left|\frac{\partial^2 E(x,y,u,v)}{\partial y \partial v}\right|\right) \\
&\leq C\sigma_N^{-\frac{k}{k+1}}(x,y)\,\sigma_N^{-\frac{k+2}{k+1}}(x,y) \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}.
\end{aligned}$$

Chúng ta hoàn thành chứng minh Bổ đề 2.3.3. □

Với các Bổ đề 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, chúng ta đánh giá được $E(x,y,u,v)$ và các kết quả đạt được ở đây cũng như ở Chương 1. Như vậy Định lý 2.3.1 được chứng minh. □

Định lí 2.3.2 *Giả sử rằng, k là số chẵn, các tham số a, b, c, k là chấp nhận được và $m \geq 2k+3$. Khi đó* *i) Nếu $\psi \in G^s$ thì, mọi $G^m_{k,loc}(\Omega)$ - nghiệm của phương trình (1) là thuộc $G^s(\Omega)$; toán tử phi tuyến $\Psi^{a,b}_{k,c}$ là s-hypoelliptic.*

ii) Trong trường hợp đặc biệt, nếu ψ là hàm giải tích thì, mọi $C^m(\Omega)$-nghiệm của phương trình (1) cũng là giải tích trên Ω; toán tử phi tuyến $\Psi^{a,b}_{k,c}$ là giải tích hypoelliptic.

Chứng minh. Theo Định lý 1.2.2 nếu f là một nghiệm thuộc $G^m_{k,\mathrm{loc}}(\Omega)$ của phương trình (1), $\psi \in C^\infty$ thì $f \in C^\infty(\Omega)$. Kết hợp với Định lý 2.3.1 ta có điều phải chứng minh.

Kết luận và kiến nghị

Những kết quả chính của luận án

1. Tìm được nghiệm cơ bản của toán tử elliptic suy biến

$$G_{k,c}^{a,b} = \Big(\frac{\partial}{\partial x} - iax^k \frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} - ibx^k \frac{\partial}{\partial y}\Big) + icx^{k-1}\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

với a, b, c là số phức bất kỳ mà $Re(a) < 0, Re(b) > 0$, k là số nguyên dương cả lẻ và chẵn.

2. Đánh giá được tính trơn của nghiệm của phương trình nửa tuyến tính elliptic suy biến

$$\Psi_{k,c}^{a,b} f = G_{k,c}^{a,b} f + \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0. \qquad (1)$$

3. Chứng minh được tính giải tích, tính chính quy Gevrey của nghiệm của phương trình (1).

4. Chứng minh được tính hypoelliptic, giải tích hypoelliptic, s-hypoelliptic của toán tử phi tuyến $\Psi_{k,c}^{a,b}$.

Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

Nghiên cứu tính chính quy Gevrey cho các phương trình nửa tuyến tính elliptic với bậc suy biến cấp vô hạn.

Danh mục công trình công bố của tác giả

1. V. T. T. Hien, N. M. Tri (2008), "Analiticity of solutions of semi-linear equations with double characteristics ", *J. Math. Anal. Appl.*, (337), pp. 1249-1260.
2. V. T. T. Hien, N. M. Tri (2010), "Fourier transform and smoothness of solutions of a class of semilinear elliptic degenerate equations with double characteristics ",
Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 17, No. 2, pp. 162-178.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại

- Xemina Phòng Phương trình vi phân - Viện Toán học.
- Xemina Bộ môn Giải tích, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội I.
- Hội nghị Nghiên cứu sinh các năm 2007, 2008, 2009 của Viện Toán học.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Minh Chương, Hà Tiến Ngoạn, Nguyễn Minh Trí, Lê Quang Trung (2000) *Phương trình đạo hàm riêng*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[2] Nguyễn Thừa Hợp (1985) *Phương trình đạo hàm riêng* tập 1, 2, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[3] Nguyễn Mạnh Hùng (2006) *Phương trình đạo hàm riêng* phần I, II, NXB Đại học Sư phạm.

[4] Hoàng Tụy (2003) *Hàm thực và giải tích hàm*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

[5] Trần Đức Vân (2004) *Lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

Tiếng Anh

[6] Barros-Neto J. and Gel'fand I. M. (1999), "Fundamental solutions of the Tricomi operator III", *Duke Math. J.*, (98), pp. 465-483.

[7] Barros-Neto J. and Gel'fand I. M. (2003), "Fundamental solutions of the Tricomi operator II", *Duke Math. J.*, (117), pp. 365-387.

[8] Barros-Neto J. and Gel'fand I. M. (2005), "Fundamentel solutions of the Tricomi operator III", *Duke Math. J.*, (128), pp. 119-140.

[9] Bateman H. (1953), *Higher Transcendental Function*, Vol. I, Mc Graw-Hill, New York, pp. 302.

[10] Cattabriga L., Rodino L., Zanghirati L. (1990), "Analytic - Gevrey hypoellipticity for a class of pseudodifferential operators with multiple characteristics", *Commun. Partial Diff. Eq.,* (15), pp. 81-96.

[11] Egorov V. Yu. (1975), "On subelliptic operators", *Uspechi Mat. Nayk.*, (2), pp. 57-114.

[12] Friedman A. (1958), "On the regularity of the solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems of parial differential equations", *J. Math. Mech.*, (7), pp. 43-59.

[13] Gel'fand I. M. and Shilov G. E. (1964), *Generalized Functions*, Vol. I, Academic Press, New York and London.

[14] Gilioli A. and Treves F. (1974), "An example in the solvability theory of linear FDE's", *Amer. J. Math.*, (96), pp. 367-385.

[15] Gramchev T. and Rodino L. (1999), "Gevrey solvability for partial diffrential operators with multiple characteritstics", *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B 2*, (8) 2 (1), pp. 65-120.

[16] Grushin V. V. (1971), "On a class of elliptic pseudo-differential operators degenerate on a submanifold", *Math. USSR. Sbornik*, (13), pp. 155-183.

[17] Hanges N. and Himonas A. (1996), "Singular solutions for a class of Grushin type operators", *Proc. Amer. Math. Soc.*, (124), pp. 1549-1557.

[18] Helffer B. (1982), "Necessary conditions of hypoanalyticity for homogeneous left - invariant operators on a grade nilpotent group ", *J. Differential Equations* 44, (3), pp. 460-481.

[19] V. T. T. Hien, N. M. Tri (2008), "Analiticity of solutions of semi-linear equations with double characteristics ", *J. Math. Anal. Appl.*, (337), pp. 1249-1260.

[20] V. T. T. Hien, N. M. Tri (2010), "Fourier transform and smoothness of solutions of a class of semilinear elliptic degenerate equations with double characteristics ", *Russian Journal of Mathematical Physics*, Vol. 17, No. 2, pp. 162-178.

[21] Hörmander L. (1967), "Hypoelliptic second - order differential operators", *Acta Math.*, (119), pp. 147-171.

[22] Hörmander L. (1976), *Linear Partial Differential Operators*, Springer -Verlag, Berlin Heidelberg New York.

[23] Hörmander L. (1983), *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer -Verlag, Berlin Heidelberg NewYork Tokyo.

[24] Hörmander L. (1979), "Subelliptic operators", Seminar on Singularities of Solutions of Linear Partial Differential Equations", *Ann. Math. Studies*, (91), pp. 127-207, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[25] Hörmander L. (1995), "On the theory of general partial differential equations", *Acta Math.*, (94), pp. 161-248.

[26] John F. (1982), *Partial Differential Equation*, Springer -Verlag, New York Heidelberg Berlin.

[27] Kolmogorov N. A. (1934), "Zufällige Bewegungen", *Ann. of Math.*, (35), pp. 116-117.

[28] Matsuzawa T. (1997), "Gevrey hypoellipticity for Grushin operators", *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* , (33), pp. 775-799.

[29] Menikoff A. (1976), "Some example of hypoelliptic partial differential equations", *Math. Ann.*, (221), pp. 176-181.

[30] Rodino L. (1993), *Linear partial differential operators in Gevrey spaces*, World Scientific, Singapore.

[31] Roth Child L. P., Stein E. M. (1976), "Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups", *Acta Math.*, (137), pp. 247-320.

[32] Schwartz L. (1950, 1951), *Thérie des Distributions*, Vol. I, II, Hermann.

[33] N. M. Tri (1999), "Remark on non-uniform fundamental solutions and non-smooth solutions of some classes of differential operators with double characteristics", *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, (6), pp. 437-452.

[34] N. M. Tri (2000), "A note on necessary conditions of hypoelliticity for some classes of differential operators with double characteristics", *Kodai Math. J.*, (23), pp. 281-297.

[35] N. M. Tri (1999), "Semilinear perturbations of powers of the Mizohata operator", *Comm. Part. Diff. Equat.*, (24), pp. 325-354.

[36] N. M. Tri (1999), "On the Gevrey analyticity of solutions of semilinear perturbations of powers of the Mizohata operator", *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, (57), pp. 37-57.

[37] N. M. Tri (2002), "On the Gevrey regularity of solutions of a class of semilinear elliptic degenerate equations on the plane", *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, (9), pp. 217-255.

[38] N. M. Tri (2004), "On the Gevrey analyticity of solutions of semilinear Kohn-Laplacian on the Heisenberg group", *Abstract and Applied Analysis, World Sci. Publ.*, pp. 335-353.

[39] N. M. Tri (2008), "Semilinear hypoelliptic operators with multiple characteristics", *Trans. Amer. Math. Soc.*, (360), pp. 3875-3907.

[40] Weyl H. (1940), "The method of orthogonal projection in potential theory", *Duke Math. J.*, (7), pp. 411-444.

[41] Yagdjian K. (2004), "A note on the fundamental solution for the Tricomi - type equation in the hyperbolic domain", *J. Differential Equations, 206*(1), pp. 227-252.