ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN TRƯỜNG GIANG

VỀ DẠNG ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ HAI KIỂU CARTAN CHO CÁC ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2008

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN TRƯỜNG GIANG

VỀ DẠNG ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ HAI KIỂU CARTAN CHO CÁC ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH

Chuyên ngành: **GIẢI TÍCH**

Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

TS. TẠ THỊ HOÀI AN

THÁI NGUYÊN – 2008

Mục lục

Mở đầu

Lý thuyết phân bố giá trị của Nevanlinna được đánh giá là một trong những thành tựu đẹp đẽ và sâu sắc của toán học trong thế kỷ hai mươi. Được hình thành từ những năm đầu của của thế kỷ, lý thuyết Nevanlinna có nguồn gốc từ những công trình của Hadamard, Borel và ngày càng có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học. Lý thuyết phân bố giá trị cổ điển là sự tổng quát hóa định lý cơ bản của đại số, chính xác hơn, lý thuyết nghiên cứu sự phân bố giá trị của các hàm phân hình từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Trung tâm của lý thuyết này gồm hai định lý cơ bản của Nevanlinna. Định lý cơ bản thứ nhất là một cách viết khác của công thức Poisson - Jensen, định lý này nói rằng hàm đặc trưng $T(r, a, f)$ không phụ thuộc vào a nếu tính sai khác một đại lượng bị chặn, trong đó a là một số phức tùy ý. Định lý cơ bản thứ hai thể hiện những kết quả đẹp nhất, sâu sắc nhất của lý thuyết phân bố giá trị, định lý này đưa ra mối quan hệ giữa hàm đặc trưng và hàm xấp xỉ.

Năm 1933, H. Cartan [3] đã chứng minh định lý sau đây:

Cho $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính,* H_i, $i = 1, ..., q$, *là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Với* *mỗi* $\varepsilon > 0$ *ta có*

$$\sum_{j=1}^{q} m(r, H_j, f) \leq (n+1+\varepsilon)T(r, f),$$

trong đó bất đẳng thức đúng với mọi $r > 0$ *nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.*

Kết quả trên của H. Cartan là công trình đầu tiên về mở rộng lý thuyết Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình. Sử dụng kết quả đó ông đã đưa ra các ước lượng số khuyết cho các đường cong chỉnh hình giao với các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Công trình này của ông đã được đánh giá là hết sức quan trọng và mở ra một hướng nghiên cứu mới cho việc phát triển lý thuyết Nevanlinna. Bởi vậy, lý thuyết Nevanlinna cho các đường cong chỉnh hình sau này được mang tên hai nhà toán học nổi tiếng của thế kỷ 20, đó là "Lý thuyết Nevanlinna - Cartan".

Những năm gần đây, việc mở rộng kết quả của Cartan cho trường hợp các siêu mặt thu hút được sự chú ý của nhiều nhà toán học. Năm 2004, M. Ru [12] đã chứng minh giả thuyết của B. Shiffman [14] đặt ra vào năm 1979. Cụ thể, ông đã chứng minh rằng: *Cho* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là đường cong chỉnh hình không suy biến đại số,* $D_j, j = 1, ..., q,$ *là các siêu mặt bậc* d_j *ở vị trí tổng quát. Khi đó*

$$(q-(n+1)-\varepsilon)T(r, f) \leq \sum_{j=1}^{q} d_j^{-1} N(r, D_j, f) + o(T(r, f)),$$

trong đó bất đẳng thức trên đúng với mọi r *đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.* Kết quả trên đã được Q. Yan và

Z. Chen [4] mở rộng cho trường hợp hàm đếm tính đến bội chặn (hay còn gọi là hàm đếm cụt). Kết quả được phát biểu như sau:

Giả sử $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là một ánh xạ chỉnh hình không suy biến đại số và* D_j, $1 \leq j \leq q$ *là* q *siêu mặt trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *có bậc* d_j *tương ứng, ở vị trí tổng quát. Khi đó với mỗi* $\varepsilon > 0$, *tồn tại một số nguyên dương* M *sao cho*

$$q - (n+1) - \varepsilon)T(r, f) \leq \sum_{j=1}^{q} d_j^{-1} N^M(r, D_j, f) + o\left(T(r, f)\right),$$

trong đó bất đẳng thức trên đúng với mọi r *đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.*

Cho đến nay, khi nghiên cứu sự tồn tại của các ánh xạ chỉnh hình thông qua ảnh ngược của các siêu mặt, người ta thường sử dụng định lý cơ bản thứ hai kiểu Nevanlinna - Cartan thông qua hàm đếm tính đến bội chặn. Ngoài ra định lý Nevanlinna - Cartan còn cho ta hiểu thêm về tính suy biến của đường cong chỉnh hình.

Mục tiêu chính của luận văn là trình bày lại các kết quả đã được đưa ra của Q. Yan và Z. Chen với công cụ nghiên cứu chủ yếu là Lý thuyết Nevanlinna - Cartan cho các ánh xạ chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Luận văn được chia thành 2 chương cùng với phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ sở về hàm phân hình, các định nghĩa và tính chất của các hàm Nevanlinna. Trình bày chứng minh định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna cho hàm phân hình.

Chương 2 trình bày chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai cho ánh xạ chỉnh hình cắt các siêu mặt ở vị trí tổng quát. Chương này được viết dựa trên công trình của Q. Yan, Z. Chen [4].

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của **TS. Tạ Thị Hoài An**. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến TS về sự giúp đỡ khoa học mà TS đã dành cho tác giả và đã tạo những điều kiện thuận lợi nhất để tác giả hoàn thành luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giáo trường Đại học Sư phạm thuộc Đại học Thái Nguyên, đặc biệt là Thày **Hà Trần Phương** và các thầy cô giáo trường Đại học Sư phạm Hà Nội và các thầy cô giáo Viện Toán học đã giảng dạy và giúp đỡ tác giả hoàn thành khóa học và luận văn.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu trường Cao đẳng Công nghệ và Kinh tế Công nghiệp, gia đình, bạn bè đã tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho tác giả trong quá trình học tập.

Chương 1

Lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình

Trong chương này chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản sẽ được sử dụng trong các phần sau. Các kiến thức của chương này được trích dẫn từ [1], [5], [7], [9], ...

1.1 Hàm phân hình

1.1.1 Định nghĩa. Cho D là một miền trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, hàm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ được gọi là $\mathbb{C}$-*khả vi* tại $z_0 \in \mathbb{C}$ nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$.
Giá trị đó được gọi là *đạo hàm phức* của hàm $f(z)$ tại z_0.
Hàm $f(z)$ được gọi là $\mathbb{C}$-*khả vi* trong D nếu nó $\mathbb{C}$ - khả vi tại mọi $z_0 \in D$.

1.1.2 Định nghĩa. Hàm $f(z)$ được gọi là *chỉnh hình tại* $z_0 \in \mathbb{C}$ nếu nó $\mathbb{C}$ - khả vi trong một lân cận nào đó của z_0.
Hàm $f(z)$ được gọi là *chỉnh hình trên* D nếu nó chỉnh hình tại mọi

điểm z thuộc D.

Tập các hàm chỉnh hình trên miền D, kí hiệu là $H(D)$.

1.1.3 Định nghĩa. Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong toàn mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ được gọi là *hàm nguyên*.

1.1.4 Định lý. *Hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ chỉnh hình trên D nếu các hàm $u(x,y)$ và $v(x,y)$ là $\mathbb{R}^2$ - khả vi trên D và trên đó các hàm $u(x,y)$, $v(x,y)$ thỏa mãn điều kiện Cauchy - Riemann, tức là*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \forall\,(x,y) \in D.$$

1.1.5 Định lý. *Giả sử $f(z)$ là một hàm chỉnh hình trong miền hữu hạn $D \subset \mathbb{C}$. Khi đó trong mỗi lân cận của mỗi điểm $z \in D$, hàm $f(z)$ được khai triển thành chuỗi*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1!}f'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!}f''(z_0) + \ldots \qquad (1.1)$$

Hơn nữa, chuỗi trên hội tụ đều đến hàm $f(z)$ trong hình tròn $|z - z_0| \leq \rho$ tùy ý nằm trong D.

Chuỗi (1.1) được gọi là *chuỗi Taylo* của hàm $f(z)$ trong lân cận của điểm z_0.

1.1.6 Định nghĩa. Điểm $z_0 \in \mathbb{C}$ được gọi là *không điểm bậc $m > 0$* (hay không-điểm cấp $m > 0$) của hàm $f(z)$ nếu $f^{(n)}(z_0) = 0$, cho mọi $n = 1,...,m-1$ và $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

1.1.7 Định nghĩa. Hàm $f(z)$ được gọi là *hàm phân hình* trong $D \subset \mathbb{C}$ nếu $f = \dfrac{g}{h}$ trong đó g, h là các hàm chỉnh hình trong D.

Nếu $D = \mathbb{C}$ thì ta nói $f(z)$ phân hình trên $\mathbb{C}$ hay đơn giản là $f(z)$ là *hàm phân hình.*

1.1.8 Định nghĩa. Điểm z_0 được gọi là *cực điểm cấp* $m > 0$ của hàm $f(z)$ nếu trong lân cận của z_0 hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^m}.h(z)$, trong đó $h(z)$ là hàm chỉnh hình trong lân cận của z_0 và $h(z_0) \neq 0$.

1.1.9 Định lý (Công thức Poiison - Jensen). *Giả sử* $f(z) \not\equiv 0$ *là một hàm phân hình trong hình tròn* $\{|z| \leq R\}$ *với* $0 < R < \infty$. *Giả sử* a_μ, $\mu = 1, ..., M$, *là các không điểm kể cả bội,* b_ν, $\nu = 1, 2, ..., N$, *là các cực điểm của* f *trong hình tròn đó, cũng kể cả bội. Khi đó, nếu* $z = re^{i\theta}(0 < r < R)$, $f(z) \neq 0, f(z) \neq \infty$ *thì*

$$\begin{aligned} \log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\phi})\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \\ + \sum_{\mu=1}^{M} \log\left|\frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \overline{a}_\mu z}\right| - \sum_{\nu=1}^{N} \log\left|\frac{R(z - b_\nu)}{R^2 - \overline{b}_\nu z}\right|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.2 Lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình

1.2.1 Các hàm Nevanlinna cho hàm phân hình

Giả sử f là hàm phân hình trong đĩa bán kính R và $r < R$.

Ký hiệu $n(r, \infty, f)$ (tương ứng, $\overline{n}(r, \infty, f)$, là số các cực điểm tính cả bội, (tương ứng, không tính bội)), của hàm f trong đĩa đóng bán kính r. Giả sử $a \in \mathbb{C}$, ta định nghĩa

$$n(r, a, f) = n\Big(r, \infty, \frac{1}{f - a}\Big),$$

$$\overline{n}(r,a,f) = \overline{n}\Big(r,\infty,\frac{1}{f-a}\Big).$$

1.2.1 Định nghĩa. *Hàm đếm tính cả bội* $N(r,a,f)$, (tương ứng, không tính bội $\overline{N}(r,a,f)$), của hàm f tại giá trị a được định nghĩa như sau

$$N(r,a,f) = n(0,a,f)\log r + \int_0^r \Big(n(t,a,f) - n(0,a,f)\Big)\frac{dt}{t},$$

(tương ứng,

$$\overline{N}(r,a,f) = \overline{n}(0,a,f)\log r + \int_0^r \Big(\overline{n}(t,a,f) - \overline{n}(0,a,f)\Big)\frac{dt}{t}).$$

Vì thế, nếu $a = 0$ ta có

$$N(r,0,f) = (\mathrm{ord}_0^+ f)\log r + \sum_{\substack{z\in\mathbf{D}(r)\\ z\neq 0}} (\mathrm{ord}_z^+ f)\log \mid \frac{r}{z} \mid,$$

trong đó $\mathbf{D}(r)$ là đĩa bán kính r và $\mathrm{ord}_z^+ f = \max\{0, \mathrm{ord}_z f\}$ là bội của không điểm.

1.2.2 Định nghĩa. *Hàm xấp xỉ* $m(r,a,f)$ của hàm f tại giá trị $a \in \mathbb{C}$ được định nghĩa như sau

$$m(r,a,f) = \int_0^{2\pi} \log^+ \Big|\frac{1}{f(re^{i\theta}) - a}\Big|\frac{d\theta}{2\pi},$$

và

$$m(r,\infty,f) = \int_0^{2\pi} \log^+ \mid f(re^{i\theta}) \mid \frac{d\theta}{2\pi},$$

trong đó $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$.

Hàm $m_f(r,\infty)$ đo độ lớn trung bình của $\log|f|$ trên đường tròn $|z| = r$.

1.2.3 Định nghĩa. *Hàm đặc trưng* $T(r, a, f)$ của hàm f tại giá trị $a \in \mathbb{C}$ được định nghĩa như sau

$$T(r, a, f) = m(r, a, f) + N_f(r, a, f),$$
$$T(r, f) = m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f). \quad (1.3)$$

Xét về mặt nào đó, hàm đặc trưng Nevanlinna đối với lý thuyết hàm phân hình có vai trò tương tự như bậc của đa thức trong lý thuyết đa thức. Từ định nghĩa hàm đặc trưng ta có

$$T(r, a, f) \geq N(r, a, f) + O(1),$$

trong đó $O(1)$ là đại lượng bị chặn khi $r \to \infty$.

Với cách định nghĩa này thì công thức Poiison-Jensen (Định lý 1.1.9) được viết lại như sau

$$T(r, f) = T(r, a, f) + \log |f(0)|. \quad (1.4)$$

1.2.2 Một số ví dụ về các hàm Nevanlinna

1.2.4 Ví dụ. Xét hàm hữu tỉ

$$f(z) = c\frac{z^p + ... + a_p}{z^q + ... + b_p},$$

trong đó $c \neq 0$.

Đầu tiên giả sử $p > q$. Khi đó $f(z) \to \infty$, khi $z \to \infty$. Như vậy $m(r, a, f) = 0(1)$ khi $z \to \infty$ cho a hữu hạn. Phương trình $f(z) = a$ có p nghiệm tính cả bội, do đó

$$N(r, a, f) = \int_a^r n(t, a)\frac{dt}{t} = p \log r + O(1)$$

khi $r \to \infty$. Như vậy,

$$T(r, f) = p \log r + O(1),$$

và $N(r, a, f) = p \log r + O(1)$, $m(r, a) = O(1)$ với $a \neq \infty$. Phương trình $f(z) = \infty$ có q nghiệm, vì thế

$$N(r, \infty, f) = q \log r + O(1),$$

và bởi Định lý cơ bản thứ nhất

$$m(r, \infty, f) = (p - q) \log r + O(1).$$

Nếu $p < q$, thì tương tự ta có

$$T(r, f) = q \log r + O(1), \qquad N(r, a, f) = q \log r + O(1),$$
$$m(r, a, f) = O(1), \quad \text{với } a \neq 0.$$

Khi $a = 0$,

$$N(r, 0, f) = p \log r + O(1), \quad m(r, a, f) = (q - p) \log r + O(1).$$

Cuối cùng, nếu $p = q$,

$$T(r, f) = q \log r + O(1),$$

và $N(r, a) = q \log r + O(1)$, với $a \neq c$. Hơn nữa, nếu ký hiệu k là bậc triệt tiêu của $f - c$ tại ∞, khi đó

$$m(r, c, f) = k \log r + O(1), \quad N(r, c, f) = (q - k) \log r + O(1).$$

Vậy trong mọi trường hợp

$$T(r, f) = d \log r + O(1),$$

trong đó $d = \max(p, q)$.

1.2.5 Ví dụ. Xét hàm $f(z) = e^z$.

Trong trường hợp này,

$$m(r,f) = \int_0^{2\pi} \log^+ \left| e^{re^{i\theta}} \right| \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{r}{\pi}.$$

Do f là hàm nguyên nên $N(r,\infty,f) = 0$ và do đó $T(r,f) = r/\pi$.

Với $a \neq 0, \infty$, thì $f(z) = a$ có nghiệm với chu kỳ $2\pi i$. Do vậy, có $\frac{2t}{2\pi}$ nghiệm trong đĩa có bán kính t, và do đó

$$N(r,a,f) = \int_o^r \frac{t}{\pi}\frac{dt}{t} + O(\log r) = \frac{r}{\pi} + O(\log r).$$

Do vậy, $m(r,a,f) = O(\log r)$.

1.2.6 Ví dụ. Xét hàm $\sin z$ và hàm $\cos z$.

Với mọi a hữu hạn

$$N(r,a,\sin z) + O(1) = N(r,a,\cos z) + O(1) = \frac{2r}{\pi} + O(1).$$

Từ $\sin z$ và $\cos z$ được biểu diễn bằng tổ hợp tuyến tính của e^{iz} và e^{-iz}, ta có

$$T(r,\sin z) + O(1) = T(r,\cos z) + O(1) \leq \frac{2r}{\pi} + O(1).$$

Điều này kéo theo

$$T(r,\sin z) + O(1) = T(r,\cos z) + O(1) = \frac{2r}{\pi} + O(1)$$

và

$$m(r,a,\sin z) + O(1) = m(r,a,\cos z) + O(1) = O(1).$$

1.2.3 Một số tính chất của các hàm Nevanlinna

Chúng ta tiếp tục nghiên cứu một số tính chất đơn giản của các hàm Nevanlinna. Chú ý rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_p$ là các số phức thì $\log^+ \left|\prod\limits_{\nu=1}^{p} a_\nu\right| \leq \sum\limits_{\nu=1}^{p} \log^+ |a_\nu|$ và

$\log^+ \left|\sum\limits_{\nu=1}^{p} a_\nu\right| \leq \log^+ \left(p \max\limits_{\nu=1,..,p} |a_\nu|\right) \leq \sum\limits_{\nu=1}^{q} \log^+ |a_\nu| + \log p.$

Áp dụng các bất đẳng thức trên cho p hàm phân hình $f_1(z), f_2(z), ..., f_p(z)$ và sử dụng định nghĩa của các hàm Nevanlinna, chúng ta thu được các bất đẳng thức sau

1. $m\left(r, \sum\limits_{\nu=1}^{p} f_\nu(z)\right) \leq \sum\limits_{\nu=1}^{p} m\left(r, f_\nu(z)\right) + \log p.$

2. $m\left(r, \prod\limits_{\nu=1}^{p} f_\nu(z)\right) \leq \sum\limits_{\nu=1}^{p} m\left(r, f_\nu(z)\right).$

3. $N\left(r, \sum\limits_{\nu=1}^{p} f_\nu(z)\right) \leq \sum\limits_{\nu=1}^{p} N\left(r, f_\nu(z)\right).$

4. $N\left(r, \prod\limits_{\nu=1}^{p} f_\nu(z)\right) \leq \sum\limits_{\nu=1}^{p} N\left(r, f_\nu(z)\right).$

   Sử dụng (1.3) ta thu được

5. $T\left(r, \sum\limits_{\nu=1}^{p} f_\nu(z)\right) \leq \sum\limits_{\nu=1}^{p} T\left(r, f_\nu(z)\right) + \log p.$

6. $T\left(r, \prod\limits_{\nu=1}^{p} f_\nu(z)\right) \leq \sum\limits_{\nu=1}^{p} T\left(r, f_\nu(z)\right).$

Trong trường hợp đặc biệt khi $p = 2$, $f_1(x) = f(z), f_2(z) = a(a$ là hằng số), ta suy ra $T(r, f + a) \leq T(r, f) + \log^+ |a| + \log 2$. Và từ đó chúng ta có thể thay thế $f+a, f$ bởi $f, f-a$ và a bởi $-a$, suy ra

$$|T(r,f) - T(r,f-a)| \leq \log^+|a| + \log 2. \tag{1.5}$$

1.2.4 Định lý cơ bản thứ nhất của Nevanlinna

1.2.7 Định lý. *Giả sử f là hàm phân hình, a là một số phức tùy ý. Khi đó ta có*

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \log|f(0)-a| + \varepsilon(a,r),$$

trong đó $|\varepsilon(a,r)| \leq \log^+|a| + \log 2.$

Ta thường dùng định lý cơ bản thứ nhất dưới dạng

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1),$$

trong đó O(1) là một đại lượng giới nội.

Ý nghĩa

Vế trái trong công thức của định lý đo số lần $f-a$ và f gần a. Vế phải là hàm $T(r,f)$ không phụ thuộc a, sai khác một đại lượng giới nội.

Chứng minh. Theo (1.3) và (1.4) ta có:

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\ &= T(r, f-a) + \log|f(0)-a|. \end{aligned}$$

Từ (1.5) ta suy ra

$$T(r, f-a) = T(r,f) + \varepsilon(a,r),$$

với

$$|\varepsilon(a,r)| \leq \log^+|a| + \log 2.$$

Từ đó ta có

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + \log|f(0)-a| + \varepsilon(a,r),$$

trong đó $|\varepsilon(a,r)| \leq \log^+|a| + \log 2$. Định lý được chứng minh xong.

□

1.2.5 Định lý cơ bản thứ hai

Để đơn giản, chúng ta sẽ viết $m(r,a)$ thay cho $m\left(r, \dfrac{1}{f-a}\right)$ và $m(r,\infty)$ thay cho $m(r,f)$.

1.2.8 Định lý. *Giả sử f(z) là hàm phân hình khác hằng số trong $|z| \leq r$. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_q$ với $q > 2$ là các số phức hữu hạn, riêng biệt, $\delta > 0$ và giả sử rằng $|a_\mu - a_\nu| \geq \delta$ với $1 \leq \mu < \nu \leq q$. Khi đó*

$$m(r,\infty) + \sum_{\nu=1}^{q} m(r,a_\nu) \leq 2T(r,f) - N_1(r) + S(r),$$

trong đó $N_1(r)$ là dương và được xác định bởi
$N_1(r) = N\left(r, \dfrac{1}{f'}\right) + 2N(r,f) - N(r,f')$ *và*

$$S(r) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{\nu=1}^{q} \frac{f'}{f-a_\nu}\right) + q\log^+\frac{3q}{\delta} + \log 2 + \log\frac{1}{|f'(0)|}.$$

Lượng $S(r)$ trong trường hợp tổng quát sẽ đóng vai trò là sai số không đáng kể. Sự tổng hợp các vấn đề đó trong định lý trên sẽ mang lại định lý cơ bản thứ hai. Điều đó cho thấy rằng, trong trường hợp tổng quát tổng của các số hạng $m(r,a_\nu)$ tại mỗi số không thể lớn hơn $2T(r)$.

Bây giờ chúng ta bắt đầu chứng minh trong trường hợp tương đối đơn giản của định lý trước khi xử lý với ước lượng phức tạp hơn của $S(r)$.

Chứng minh. Với các số phân biệt a_ν, $(1 \le \nu \le q)$, ta xét hàm

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{q} \frac{1}{f(z) - a_\nu}.$$

1. Giả sử rằng với một vài ν nào đó, $|f(z) - a_\nu| < \dfrac{\delta}{3q}$. Khi đó với $\mu \neq \nu$, ta có

$$|f(z) - a_\mu| \ge |a_\mu - a_\nu| - |f(z) - a_\nu| \ge \delta - \frac{\delta}{3q} \ge \frac{2}{3}\delta,$$

bởi vậy, với $\mu \neq \nu$ thì

$$\frac{1}{|f(z) - a_\mu|} \le \frac{3}{2\delta} \le \frac{1}{|f(z) - a_\nu|}.$$

Như vậy

$$\begin{aligned} |F(z)| &\ge \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} - \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{|f(z) - a_\mu|} \\ &\ge \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} \left(1 - \frac{q-1}{2q}\right) \\ &\ge \frac{1}{2\,|f(z) - a_\nu|}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \log^+ |F(z)| &\ge \sum_{\mu=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_\mu|} - q \log^+ \frac{2}{\delta} - \log 2 \\ &\ge \sum_{\mu=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_\mu|} - q \log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 2. \qquad (1.6) \end{aligned}$$

Bởi vì, với $\mu \neq \nu$: $\log^+ \dfrac{1}{|f(z) - a_\mu|} \leq \log^+ \dfrac{3}{2\delta} \leq \log^+ \dfrac{2}{\delta}$ nên ta có

$$\sum_{\mu=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_\mu|} = \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} + \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{|f(z) - a_\mu|}$$
$$\leq \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} + (q-1) \log^+ \frac{2}{\delta}.$$

Suy ra,

$$\sum_{\mu \neq \nu} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_\mu|} \leq (q-1) \log^+ \frac{2}{\delta}.$$

Do đó,

$$\log^+ |F(z)| \geq \sum_{\mu=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_\mu|} - q \log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 2.$$

Vậy (1.6) được chứng minh.

Như vậy, nếu tồn tại một vài giá trị $\nu \leq q$ để $|f(z) - a_\nu| < \dfrac{\delta}{3q}$ thì (1.6) là hiển nhiên đúng.

2. Ngược lại, giả sử $|f(z) - a_\nu| \geq \dfrac{\delta}{3q}$, với mọi ν. Khi đó ta có một điều hiển nhiên là

$$\log^+ |F(z)| \geq \sum_{\nu=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} - q \log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 2.$$

Do $|f(z) - a_\nu| \geq \dfrac{\delta}{3q}$, với mọi ν nên $\dfrac{1}{|f(z) - a_\nu|} \leq \dfrac{3q}{\delta}$, với mọi ν. Vậy

$$\sum_{\nu=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} \leq q \log^+ \frac{3q}{\delta} + \log 2.$$

Từ đó

$$\log^+ |F(z)| \geq 0 \geq \sum_{\nu=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} - q \log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 2.$$

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có được

$$\log^+ |F(z)| \geq \sum_{\nu=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} - q \log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 2.$$

Với $z = re^{i\theta}$, lấy tích phân hai vế chúng ta suy ra

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \left|F(re^{i\theta})\right| d\theta$$

$$\geq \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_\nu|} - q \log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 2 \right) d\theta.$$

nên

$$m(r, F) \leq \sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu) - q \log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 2. \tag{1.7}$$

Mặt khác, ta xét

$$m(r, F) = m\left(r, \frac{1}{f}.\frac{f}{f'}.f'F\right) \leq \left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, f'F\right). \tag{1.8}$$

Theo công thức Jensen (1.4), ta có

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log|f(0)|,$$

$$T\left(r, \frac{f}{f'}\right) = T\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|.$$

Nói cách khác

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + N\left(r, \frac{f}{f'}\right) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|.$$

Suy ra

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f}\right) -$$

$$- N\left(r, \frac{f}{f'}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|. \tag{1.9}$$

và ngoài ra ta có

$$T\left(r,f\right) = m\left(r,\frac{1}{f}\right) + N\left(r,\frac{1}{f}\right) + \log\left|f(0)\right|.$$

do đó

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right) = T\left(r,f\right) - N\left(r,\frac{1}{f}\right) + \log\frac{1}{|f(0)|}. \tag{1.10}$$

Kết hợp (1.9) và (1.10) và thay vào bất đẳng thức (1.8), ta có

$$m(r,F) \leq T(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right) + \log\frac{1}{|f(0)|} + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) +$$
$$+ N\left(r,\frac{f'}{f}\right) - N\left(r,\frac{f}{f'}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right| + m(r,f'F). \tag{1.11}$$

Kết hợp (1.7) với (1.11) ta có

$$\sum_{\nu=1}^{q} m(r,a_\nu) + m(r,\infty) \leq m(r,F) + m(r,f) + q\log^+\frac{3q}{\delta} + \log 2.$$
$$\leq T(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right) + N\left(r,\frac{f'}{f}\right) - N\left(r,\frac{f}{f'}\right) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$$
$$+m(r,f'F) + \log\frac{1}{|f'(0)|} + T(r,f) - N(r,f) + q\log^+\frac{3q}{\delta} + \log 2.$$

Sử dụng công thức Jensen cho hàm $\frac{f}{f'}$, ta có

$$\log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f(re^{i\phi})}{f'(re^{i\phi})}\right|d\phi + N\left(r,\frac{f}{f'}\right) - N\left(r,\frac{f'}{f}\right).$$

Suy ra

$$N\left(r,\frac{f'}{f}\right) - N\left(r,\frac{f}{f'}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f(re^{i\phi})}{f'(re^{i\phi})}\right|d\phi - \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\phi})\right|d\phi - \log|f(0)| - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f'(re^{i\phi})\right|d\phi - \log|f'(0)|$$

$$= N\left(r, \frac{1}{f}\right) - N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N(r, f').$$

Cuối cùng ta nhận được

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu) + m(r, \infty) \\
&\leq 2T(r, f) - \left\{2N(r, f) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right\} + \\
&+ m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m(r, f'F) + \log\frac{1}{|f'(0)|} + q\log^+\frac{3q}{\delta} + \log 2.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$m(r, f'F) = m\left(r, \sum_{\nu=1}^{q} \frac{f'}{f - a_\nu}\right)$$

và đặt

$$\begin{aligned}
N_1(r) &= N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + 2N(r, f) - N(r, f'), \\
S(r) &= m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{\nu=1}^{q} \frac{f'}{f - a_\nu}\right) \\
&\quad + q\log^+\frac{3q}{\delta} + \log 2 + \log\frac{1}{|f'(0)|}.
\end{aligned}$$

Khi đó, ta có

$$m(r, \infty) + \sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu) \leq 2T(r, f) - N_1(r) + S(r).$$

Đó là điều cần chứng minh.

$\square$

Nhận xét. $N_1(r)$ trong định lý trên là dương vì $N(r, f) = \sum_{\nu=1}^{q} \log\left|\frac{R}{b_\nu}\right|$, trong tổng trên nếu b_v là cực điểm bội k thì được tính

k lần.

Giả sử $b_1, b_2, ..., b_N$ là các cực điểm phân biệt của $f(z)$ với cấp lần lượt là $k_1, k_2, ..., k_N$. Xét tại điểm b_v, ta thấy khai triển của $f(z)$ sẽ có dạng $f(z) = \dfrac{c_{k_\nu}}{(z-b_\nu)^{k_\nu}} + ...$

Khi đó $f'(z)$ sẽ có khai triển là $f(z) = \dfrac{c_{-k_\nu}}{(z-b_\nu)^{k_\nu+1}} + ...$, tức là b_v sẽ là cực điểm cấp k_v+1 của hàm $f'(z)$. Như vậy $b_1, b_2, ..., b_N$ là các cực điểm của $f'(z)$ với cấp lần lượt là $k_1+1, k_2+1, ..., k_N+1$. Như vậy $N(r,f) = \sum\limits_{\nu=1}^{N} k_\nu \log|\dfrac{r}{b_\nu}|$ và $N(r,f') = \sum\limits_{\nu=1}^{N} (k_\nu+1)\log|\dfrac{r}{b_\nu}|$ nên

$2N(r,f) - N(r,f') = \sum\limits_{\nu=1}^{N} 2k_\nu \log|\dfrac{r}{b_\nu}| - \sum\limits_{\nu=1}^{N} (k_\nu+1)\log|\dfrac{r}{b_\nu}| =$

$\sum\limits_{\nu=1}^{N} (2k_\nu - (k_\nu+1))\log|\dfrac{R}{b_\nu}| = \sum\limits_{\nu=1}^{N} (2k_\nu - 1))\log|\dfrac{r}{b_\nu}| \geq 0.$

Ta có định lý sau đây.

1.2.9 Định lý (Định lý cơ bản thứ hai). *Nếu f là hàm phân hình, khác hằng số trên $\mathbb{C}$ và $a_1, a_2, ..., a_q$ là $q > 2$ điểm phân biệt. Khi đó*

$$\begin{aligned}(q-1)T(r,f) &\leq N(r,f) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N_1(r,f) + S(r,f)\\ &\leq \overline{N}(r,f) + \sum_{j=1}^{q} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N_0(r,f) + S(r,f).\end{aligned}$$

trong đó $S(r,f) = o(T(r,f))$ khi $r \to \infty$ nằm ngoài một tập có độ đo hữu hạn,

$$N_1(r,f) = N\left(r\frac{1}{f'}\right) + 2N(r,f) - N(r,f') + S(r,f)$$

và $N_0\left(r, \dfrac{1}{f'}\right)$ là hàm đếm tại các không điểm của f' mà không phải *là không điểm của* $f - a_j, j = 1, ..., q.$

Chương 2

Định lý cơ bản thứ hai kiểu Nevanlinna-Cartan cho các đường cong chỉnh hình

2.1 Các hàm Nevanlinna-Cartan cho đường cong chỉnh hình

Chúng tôi sẽ nhắc lại một số khái niệm, kí hiệu chuẩn của Lý thuyết Nevanlinna - Cartan cho các đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

2.1.1 Định nghĩa. Ánh xạ $f := (f_0 : ... : f_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là *đường cong chỉnh hình* trên $\mathbb{C}$ nếu $f_0, ..., f_n$ là các hàm nguyên trên $\mathbb{C}$.

Ta có thể viết $f = (\widetilde{f_0} : \widetilde{f_1} : \cdots : \widetilde{f_n})$ trong đó $\widetilde{f_i}$ là các hàm nguyên không có không điểm chung trên $\mathbb{C}$. Khi đó $\widetilde{f} = (\widetilde{f_0}, \widetilde{f_1}, \ldots, \widetilde{f_n})$ được gọi là biểu diễn rút gọn của đường cong chỉnh hình f.

Giả sử D là một siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có bậc d. Giả sử Q là đa thức thuần nhất $n+1$ biến với các hệ số trong $\mathbb{C}$ có bậc d xác định siêu mặt D.

Gọi $n(r, D, f)$ là số các không điểm của hàm $Q \circ \widetilde{f}$ trong đĩa $|z| < r$, $n^M(r, D, f)$ là số các không điểm của hàm $Q \circ \widetilde{f}$ trong đĩa $|z| < r$ bội chặn bởi một số nguyên dương M.

2.1.2 Định nghĩa. Hàm

$$N_f(r, D) = \int\limits_0^r (n_f(t, D) - n_f(0, D)) \frac{dt}{t} + n_f(0, D) \log r$$

được gọi là *hàm đếm* của đường cong chỉnh hình f ứng với siêu mặt D.

Hàm

$$N_f^M(r, D) = \int\limits_0^r \left(n_f^M(t, D) - n_f^M(0, D)\right) \frac{dt}{t} + n_f^M(0, D) \log r$$

được gọi là *hàm đếm cụt* của đường cong chỉnh hình f ứng với siêu mặt D.

2.1.3 Định nghĩa. *Hàm xấp xỉ* của hàm f ứng với siêu mặt D được định nghĩa bởi

$$m(r, D, f) = \int\limits_0^{2\pi} \log \frac{\|\widetilde{f}(re^{i\theta})\|^d}{\left|Q(\widetilde{f})(re^{i\theta})\right|} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

2.1.4 Định nghĩa. Giả sử $f := (f_0 : ... : f_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một ánh xạ chỉnh hình. *Hàm đặc trưng Nevanlinna - Cartan* $T(r, f)$ của hàm f được định nghĩa như sau

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left\|\widetilde{f}(re^{i\theta})\right\| d\theta,$$

trong đó $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, ..., |f_n(z)|\}$.

Chú ý rằng các hàm $m(r,D,f)$, $T(r,f)$ độc lập với việc chọn biểu diễn của đường cong chỉnh hình f, sai khác một hằng số.

2.1.5 Định nghĩa. Họ các siêu phẳng $H_j, j = 1, ..., q$ trong không gian xạ ảnh n chiều được gọi là *ở vị trí tổng quát* đối với $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ nếu $q > n$ và $(n+1)$ siêu phẳng bất kỳ trong chúng đều độc lập tuyến tính.

Tổng quát hơn, ta có khái niệm về họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ như sau:

Giả sử $D_1, ..., D_q$ là các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, gọi Q_j là các đa thức thuần nhất định nghĩa D_j tương ứng.

2.1.6 Định nghĩa. Các siêu mặt $D_1, ..., D_q, q \geq n+1$ được gọi là *ở vị trí tổng quát* trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ nếu với mỗi bộ $n+1$ chỉ số phân biệt $i_1, ..., i_{n+1} \in \{1, ..., q\}$, ta có

$$\{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : Q_{i_j}(x) = 0, j = 1, ..., n\} = \emptyset.$$

2.1.7 Chú ý. *Các siêu mặt $D_1, ..., D_q$, $(q > n)$ ở vị trí tổng quát đối với $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ nếu $n+1$ siêu mặt bất kỳ trong chúng đều có giao bằng rỗng.*

2.1.8 Định lý (Định lý cơ bản thứ nhất). *Giả sử* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là một ánh xạ chỉnh hình và* D *là một siêu mặt bậc* d *trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. *Nếu* $f(\mathbb{C}) \nsubseteq D$ *thì với mỗi số thực* r *với* $0 < r < \infty$, *ta có*

$$m(r, D, f) + N(r, D, f) = dT(r, f) + O(1),$$

trong đó $O(1)$ *là một hằng số độc lập với* r.

2.2 Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình cắt các siêu mặt

2.2.1 Một số bổ đề quan trọng

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số bổ đề đại số được sử dụng trong các chứng minh của định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan cho các ánh xạ chỉnh hình.

2.2.1 Định nghĩa. Chúng ta định nghĩa *thứ tự từ điển* cho m-bộ $(\mathbf{i}) = (i_1, ..., i_m) \in \mathbf{N}^m$ của các số nguyên. Nghĩa là, $(j_1, ..., j_m) > (i_1, ..., i_m)$ nếu và chỉ nếu tồn tại $b \in \{1, ..., m\}$ ta có $j_l = i_l$ với mọi $l < b$ và $j_b > i_b$.

Với n bộ $(\mathbf{i}) = (i_1, ..., i_n)$ các số nguyên không âm, ta kí hiệu

$$\sigma(\mathbf{i}) := \sum_j i_j.$$

Với một số nguyên dương lớn N, ta kí hiệu V_N là không gian các đa thức thuần nhất bậc N trong $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$.

2.2.2 Bổ đề (Xem Bổ đề 2.3 [6]). *Giả sử $r_1, ..., r_n$ là các đa thức thuần nhất trong $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ và giả sử rằng chúng định nghĩa một đa tạp con trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có số chiều bằng 0. Khi đó với một số nguyên dương N đủ lớn, ta có*

$$\dim \frac{V_N}{(r_1, ..., r_n) \cap V_N} = \deg r_1 ... \deg r_n.$$

Giả sử $r_1, ..., r_n \in \{Q_1, ..., Q_q\}$ là các đa thức thuần nhất bậc d, sao cho chúng định nghĩa một đa tạp con trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có số chiều bằng 0. Ta xây dựng một cái lọc của V_N như sau: sắp xếp lại theo trật tự từ điển n bộ $(\mathbf{i}) = (i_1, ..., i_n)$ các số nguyên không âm sao cho $\sigma(\mathbf{i}) \leq \dfrac{N}{d}$. Định nghĩa không gian $W_{(\mathbf{i})} = W_{N,(\mathbf{i})}$ bởi

$$W_{(\mathbf{i})} = \sum_{(\mathbf{e}) \geq (\mathbf{i})} r_1^{e_1} ... r_n^{e_n} V_{N - d\sigma(\mathbf{e})}.$$

Hiển nhiên, $W_{(0,...,0)} = V_N$ và $W_{(\mathbf{i})} \supset W_{(\mathbf{i}')}$ nếu $(\mathbf{i}') > (\mathbf{i})$. Như vậy $W_{(\mathbf{i})}$ là một cái lọc của V_N.

Chúng ta tiếp tục nghiên cứu các không gian thương của hai không gian liên tiếp trong lọc. Giả sử rằng $(\mathbf{i}')$ đứng ngay sau $(\mathbf{i})$ theo thứ tự từ điển trong lọc vừa xây dựng ở trên. Khi đó ta có bổ đề sau đây.

2.2.3 Bổ đề. *Tồn tại một đẳng cấu*

$$\frac{W_{(\boldsymbol{i})}}{W_{(\boldsymbol{i}')}} \cong \frac{V_{N - d\sigma(\boldsymbol{i})}}{(r_1, ..., r_n) \cap V_{N - d\sigma(\boldsymbol{i})}}.$$

Ngoài ra chúng ta có thể chọn được một cơ sở của $\dfrac{W_{(\boldsymbol{i})}}{W_{(\boldsymbol{i}')}}$ từ tập hợp của tất cả các lớp tương đương có dạng $r_1^{i_1} ... r_n^{i_n} \eta$ modulo $W_{(\boldsymbol{i}')}$ với η là một đơn thức của các biến $x_0, ..., x_n$ với bậc $N - d\sigma(\boldsymbol{i})$.

Chứng minh. Trước tiên ta xác định một đồng cấu giữa các không gian véc tơ

$$\phi : V_{N-d\sigma(\mathbf{i})} \rightarrow \frac{W_{(\mathbf{i})}}{W_{(\mathbf{i}')}}$$

như sau: với một đa thức η trong $V_{N-d\sigma(\mathbf{i})}$, ta định nghĩa $\phi(\eta)$ là lớp tương đương của $r_1...r_n\eta$ (thuộc $W_{(\mathbf{i})}$) modulo $W_{(\mathbf{i}')}$. Theo định nghĩa của không gian $V_{N-d\sigma(i)}$, đồng cấu trên là một toàn ánh. Để kết thúc ta chỉ cần chứng minh

$$\ker\phi = (r_1, ..., r_n) \cap V_{N-d\sigma(i)}.$$

Từ cấu trúc của đồng cấu ϕ ta có thể chọn được một cơ sở của $\dfrac{W_{(\mathbf{i})}}{W_{(\mathbf{i}')}}$ từ tập tất cả các lớp tương đương có dạng $r_1...r_n\eta$ module $W_{(\mathbf{i}')}$ với η là một đơn thức trong $x_0, ..., x_n$ với bậc tổng cộng bằng $N - d\sigma(\mathbf{i})$ là một cơ sở của $V_{N-d\sigma(\mathbf{i})}$ ta có điều cần chứng minh. □

Bây giờ chúng ta tiếp tục sử dụng bổ đề trên để đánh giá số chiều của không gian thương của hai không gian liên tiếp trong lọc.
Ta kí hiệu số chiều đó là $\delta_{(\mathbf{i})}$.
Kết hợp Bổ đề 2.2.2 và 2.2.3 ta có bổ đề sau

2.2.4 Bổ đề. *Tồn tại một số nguyên dương N_0 chỉ phụ thuộc vào $r_1, ..., r_n$ sao cho*

$$\delta_{(\boldsymbol{i})} := \dim\frac{W_{(\boldsymbol{i})}}{W_{(\boldsymbol{i}')}} = d^n,$$

với điều kiện $d\sigma(\boldsymbol{i}) < N - N_0$. Hơn nữa, với các bộ $(\boldsymbol{i})$ còn lại ta có $\dim\dfrac{W_{(\boldsymbol{i})}}{W_{(\boldsymbol{i})}}$ *là bị chặn bởi* $\dim V_{N_0}$.

2.2.5 Bổ đề. *Với $\delta_{(\boldsymbol{i})}$ được định nghĩa như trong Bổ đề 2.2.4. Ta có*

$$\theta := \sum_{(\boldsymbol{i})} \delta_{(\boldsymbol{i})} i_j \geq \frac{N^{n+1}}{d(n+1)!},$$

trong đó tổng $\sum_{(i)}$ được lấy trên tất cả $(n+1)$ bộ số nguyên không âm với tổng đúng bằng N/d.

Chứng minh. Kết hợp với Bổ đề 2.2.4 ta có,

$$\begin{aligned}
\sum_{(i)} \delta_{(i)} i_j &= \frac{d^n}{n+1} \sum_{(i)} \sum_{j=1}^{n+1} i_j = \frac{d^n}{n+1} \sum_{(i)} \frac{N}{d} \\
&= \frac{d^n}{n+1} \sum_{(i)} \frac{N}{d} = \frac{d^n}{n+1} \begin{pmatrix} N/d+n \\ n \end{pmatrix} \frac{N}{d} \\
&= \frac{N(N+d)+...+(N+nd)}{(n+1)!d} \geq \frac{N^{n+1}}{d(n+1)!}
\end{aligned}$$

Ta có điều cần chứng minh. □

2.2.2 Định lý cơ bản thứ hai cho các đường cong chỉnh hình

Một số phát biểu của định lý cơ bản thứ hai.

Trước hết ta nhắc lại định lý của Cartan như sau.

2.2.6 Định lý. *Giả sử $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính và H_j, $1 \leq j \leq q$, là q siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát. Khi đó với mỗi $\varepsilon > 0$ ta có*

$$\sum_{j=1}^{q} m(r, H_j, f) \leq (n+1+\varepsilon) T(r, f),$$

trong đó bất đẳng thức đúng với mọi $r > 0$ nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.

Định lý trên đã được phát biểu lại dưới dạng khác bởi M. Ru trong [13].

2.2.7 Định lý. *Giả sử $f = (f_0 : ... : f_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một ánh xạ chỉnh hình mà ảnh của nó không bị chứa trong bất kể một không gian con tuyến tính nào. Gọi $H_1, ..., H_q$ là các siêu phẳng phân biệt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, L_j, $1 \leq j \leq q$, là các dạng tuyến tính định nghĩa $H_1, ..., H_q$. Kí hiệu $W(f_0, ..., f_n)$ là Wronskian của $f_0, ..., f_n$. Khi đó với mỗi $\varepsilon > 0$*

$$\int_0^{2\pi} \max_K \log \prod_{j\in K} \frac{\left\|f(re^{i\theta})\right\| \|L_j\|}{|L_j(f)(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} + N_W(r,0) \leq (n+1+\epsilon)T(r,f) + o(T(r,f)),$$

trong đó tổng trên lấy trên tất cả các tập con K của $1, ..., q$ sao cho các dạng tuyến tính L_j, $j \in K$, là độc lập tuyến tính, $\|f(z)\|$ là giá trị lớn nhất của $|f_j(z)|$, $0 \leq j \leq n$ và $\|L_j\|$ là giá trị lớn nhất của giá trị tuyệt đối của các hệ số trong L_j.

Năm 2004, M. Ru đã chứng minh được định lý cở bản thứ hai cắt các siêu mặt ở vị trí tổng quát. Định lý này đã giải quyết trọn vẹn giả thuyết của Shiffman [14].

2.2.8 Định lý. *Giả sử $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một ánh xạ chỉnh hình không suy biến đại số và D_j, $1 \leq j \leq q$ là q siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có bậc d_j tương ứng, ở vị trí tổng quát. Khi đó với mỗi $\varepsilon > 0$, ta có*

$$\sum_{j=1}^{q} d_j^{-1} m(r, D_j, f) \leq (n+1+\varepsilon)T(r,f),$$

trong đó bất đẳng thức đúng với mọi $r > 0$ *nằm ngoài một tập* E *có độ đo Lebesgue hữu hạn.*

Định lý của M. Ru chưa tính đến yếu tố bội của không điểm. Tiếp theo ta sẽ trình bày chứng minh của một dạng định lý cơ bản thứ hai có liên quan đến hàm đếm cụt.

Định lý của Q. Yan và Z. Chen.

2.2.9 Định lý. *Giả sử* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là một ánh xạ chỉnh hình không suy biến đại số và* D_j, $1 \leq j \leq q$ *là* q *siêu mặt trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *có bậc* d_j *tương ứng, ở vị trí tổng quát. Khi đó với mỗi* $\varepsilon > 0$, *tồn tại một số nguyên dương* M *sao cho*

$$(q - (n+1) - \varepsilon)T(r, f) \leq \sum_{j=1}^{q} d_j^{-1} N^M(r, D_j, f) + o(T(r, f)),$$

trong đó bất đẳng thức trên đúng với mọi r *đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.*

Trước khi chứng minh định lý, chúng ta cần chứng minh các bổ đề sau.

2.2.10 Bổ đề. *Giả sử* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là một ánh xạ chỉnh hình không suy biến đại số và* D_j, $1 \leq j \leq q$ *là* q *siêu mặt trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *có bậc như nhau là* d , *ở vị trí tổng quát. Khi đó*

$$\sum_{j=1}^{q} m(r, Q_j, f) \leq \max_{i_1,\ldots,i_n} \left(\prod_{k=1}^{n} \log \frac{\|f(z)\|^d}{|Q_{i_k} \circ f(z)|} \right) + O(1).$$

Chứng minh. Giả sử $Q_1, ..., Q_q$ là các đa thức thuần nhất $(n+1)$ biến với các hệ số trong $\mathbb{C}$ có bậc như nhau là d, định nghĩa các siêu mặt

$D_1, ..., D_q$. Lấy $z \in \mathbb{C}$ bất kì, khi đó tồn tại một cách sắp xếp các chỉ số $i_1, ..., i_q$ của các chỉ số $1, ..., q$ sao cho

$$|Q_{i_1} \circ f(z)| \leq |Q_{i_2} \circ f(z)| \leq ... \leq \left|Q_{i_q} \circ f(z)\right|. \qquad (2.1)$$

Do Q_j, $1 \leq j \leq n$ ở vị trí tổng quát nên theo định lý Hilbert's Nullstelensatz, ta có: với mỗi số nguyên k, $0 \leq k \leq n$, tồn tại một số nguyên dương $m_k \geq d$ sao cho

$$x_k^{m_k} = \sum_{j=1}^{n+1} b_{jk}(x_0, ..., x_n) Q_{i_j}(x_0, ..., x_n),$$

trong đó $b_{jk},\ 1 \leq j \leq n+1$, $0 \leq k \leq n$, là các dạng thuần nhất với hệ số trong $\mathbb{C}$ có bậc $m_k - d$ tương ứng. Như vậy

$$|f_k(z)|^{m_k} \leq c_1 \|f(z)\|^{m_k - d} \max\left\{|Q_{i_1} \circ f(z)|, ..., \left|Q_{i_{n+1}} \circ f(z)\right|\right\}, \qquad (2.2)$$

trong đó $\|f(z)\| := \max\{|f_0(z)|, ..., |f_n(z)|\}$, c_1 là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào các hệ số của b_{jk},$1 \leq j \leq n+1$, $0 \leq k \leq n$, tức là chỉ phụ thuộc vào các hệ số của Q_j, $1 \leq j \leq n+1$.

Chú ý rằng, (2.2) đúng với mọi $k = 0, ..., n$. Như vậy

$$\begin{aligned} \|f(z)\|^{m_k} &= \max_{k=0,...,n} |f(z)|^{m_k} \\ &\leq c_1 \|f(z)\|^{m_k - d} \max\left\{|Q_{i_1} \circ f(z)|, ..., \left|Q_{i_{n+1}} \circ f(z)\right|\right\}, \end{aligned}$$

điều này kéo theo

$$\|f(z)\|^d \leq c_1 \max\left\{|Q_{i_1} \circ f(z)|, ..., \left|Q_{i_{n+1}} \circ f(z)\right|\right\}. \qquad (2.3)$$

Theo (2.1) và (2.3), ta có

$$\prod_{j=1}^{q}\frac{\|f(z)\|^d}{|Q_{i_j}\circ f(z)|}=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\|f(z)\|^d}{|Q_{i_k}\circ f(z)|}\right)\left(\prod_{k=n+1}^{q}\frac{\|f(z)\|^d}{|Q_{i_k}\circ f(z)|}\right)$$
$$\leq c_1^{q-n}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\|f(z)\|^d}{|Q_{i_k}\circ f(z)|}\right).$$

Như vậy, theo định nghĩa hàm xấp xỉ ta suy ra

$$\sum_{j=1}^{q}m\left(r,Q_j,f\right)=\prod_{j=1}^{q}\log\frac{\|f(z)\|_r^d}{|Q_{i_j}\circ f(z)|_r}$$
$$\leq \max_{\{i_1,\dots,i_n\}}\left(\prod_{k=1}^{n}\log\frac{\|f(z)\|^d}{|Q_{i_k}\circ f(z)|}\right)+(q-n)\log c_1,$$

trong đó c_1 là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào các hệ số của b_{jk},$1\leq j\leq n+1$, $0\leq k\leq n$, tức là chỉ phụ thuộc vào các hệ số của Q_j, $1\leq j\leq n+1$.

Từ đó, ta có điều cần chứng minh. $\square$

Giả sử N số nguyên dương nào đó. Ta sẽ xây dựng một cơ sở thích hợp $\psi_1,...,\psi_M$ của V_N như sau, trong đó $M:=\dim V_N$. Ta bắt đầu với một không gian khác hằng đầu tiên $W_{(\mathbf{i}')}$ và lấy một cơ sở bất kỳ của nó. Ta tiếp tục xây dựng bằng quy nạp như sau: giả sử $(\mathbf{i}')>(\mathbf{i})$ là hai n bộ liên tiếp sao cho $d\sigma(\mathbf{i})$, $d\sigma(\mathbf{i}')\leq N$ và giả sử rằng ta đã chọn được một cơ sở của $W_{(\mathbf{i}')}$. Từ định nghĩa ta có thể lấy được biểu diễn trong $W_{(\mathbf{i})}$ của các phần tử trong không gian thương $W_{(i)}/W_{(i')}$ có dạng $r_1^{i_1}...r_n^{i_n}\eta$, trong đó $\eta\in V_{N-d\sigma(i)}$. Ta mở rộng cơ sở đã được xây dựng trước trong $W_{(\mathbf{i}')}$ bằng cách thêm vào các biểu diễn đó và ta sẽ thu được cơ sở cho các không gian $W_{(\mathbf{i})}$ và quá trình quy nạp được tiếp tục cho đến khi $W_{(\mathbf{i})} = V_N$, khi đó ta dừng lại. Bằng cách như vậy, ta sẽ thu được một cơ sở $\psi_1, ..., \psi_M$ của V_N.

2.2.11 Bổ đề. *Với giả thiết trong Định lý 2.2.9. Khi đó*

$$\Big(qd - \frac{MN}{\theta}\Big)T(r,f) \leq \sum_{j=1}^{q} N(r, Q_j, f) - \frac{1}{\theta}N_W(r, 0) + o\left(T(r,f)\right).$$

Chứng minh. Giả sử $\phi_1, ..., \phi_M$ là một cơ sở cố định của V_N. Khi đó $\psi_1, ..., \psi_M$ có thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính $L_1, ..., L_M$ của các $\phi_1, ..., \phi_M$, như vậy $\psi_t(f) = L_t(F)$, trong đó $F = (\phi_1(f) : ... : \phi_M(f)) : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{C})$. Các dạng tuyến tính $L_1, ..., L_M$ là độc lập tuyến tính và biết rằng theo giả thiết, f không suy biến đại số nên F không suy biến tuyến tính.

Với $z \in \mathbb{C}$, ta ước lượng $\log \prod_{t=1}^{M} |L_t(F)(z)| = \log \prod_{t=1}^{M} |\psi_t(f)(z)|$. Gọi ψ là một phần tử trong cơ sở, được xây dựng từ các phần tử trong cơ sở của $W_{(i)}/W_{(i')}$, khi đó $\psi = r_1^{i_1}...r_n^{i_n}\eta$, trong đó $\eta \in V_{N-d\sigma(i)}$. Như vậy ta có một chặn

$$\begin{aligned} |\psi(f)(z)| &\leq |r_1(f)(z)|^{i_1} ... |r_n(f)(z)|^{i_n} |\eta(f)(z)| \\ &\leq c_2 |r_1(f)(z)|^{i_1} ... |r_n(f)(z)|^{i_n} \|f(z)\|^{N-d\sigma(i)}, \end{aligned}$$

trong đó c_2 là một hằng số dương chỉ phụ thuộc vào ψ, không phụ thuộc vào f và z và có đúng $\delta_{(i)}$ hàm ψ như thế. Như vậy

$$\begin{aligned}
\log|\psi_t(f)(z)| &\leq i_1\log|r_1(f)(z)| + ... + i_n\log|r_n(f)(z)| \\
&\quad + (N - d\sigma(i))\log\|f(z)\| + c_3 \\
&\leq i_1\left(\log|r_1(f)(z)| - \log\|f(z)\|^d\right) + ... \\
&\quad + i_n\left(\log|r_n(f)(z)| - \log\|f(z)\|^d\right) \\
&\quad + N\log\|f(z)\| + c_3 \\
&\leq -i_1\log\frac{\|f(z)\|^d}{|r_1(f)(z)|} - ... - i_n\log\frac{\|f(z)\|^d}{|r_n(f)(z)|} \\
&\quad + N\log\|f(z)\| + c_3,
\end{aligned}$$

trong đó c_3 là một hằng số dương chỉ phụ thuộc vào ψ, không phụ thuộc f và z. Kéo theo,

$$\begin{aligned}
&\log\prod_{t=1}^{M}|L_t(F)(z)| = \log\prod_{t=1}^{M}|\psi_t(f)(z)| \\
&\leq -\sum_{(\mathbf{i})}\delta_{(\mathbf{i})}\left(i_1\log\frac{\|f(z)\|^d}{|r_1(f)(z)|} + ... + i_n\log\frac{\|f(z)\|^d}{|r_n(f)(z)|}\right) \\
&+ MN\log\|f(z)\| + Mc_3 \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\log\frac{\|f(z)\|^d}{|r_j(f)(z)|}\left(\sum_{(\mathbf{i})}\delta_{(\mathbf{i})}i_j\right) + MN\log\|f(z)\| + Mc_3.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

trong đó tổng trên được lấy trên tất cả n bộ với $\sigma(\mathbf{i}) \leq N/d$. Với mỗi số j ở trên thì θ không phụ thuộc vào j. Nên (2.3) trở thành

$$\log\prod_{t=1}^{M}|L_t(F)(z)| \leq -\theta\log\prod_{j=1}^{n}\frac{\|f(z)\|^d}{|r_j(f)(z)|} + MN\log\|f(z)\| + Mc_3.$$

Điều đó kéo theo

$$\begin{aligned}\log\prod_{j=1}^{n}\frac{\|f(z)\|^d}{|r_j(f)(z)|}\le\frac{1}{\theta}\log\prod_{t=1}^{M}\frac{\|F(z)\|}{|L_t(F)(z)|}-\frac{M}{\theta}\log\|F(z)\|\\ +\frac{MN}{\theta}\log\|f(z)\|+\frac{Mc_3}{\theta}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Do có một số hữu hạn cách chọn $r_1,...,r_n\in\{Q_1,...,Q_q\}$ nên ta có một họ hữu hạn các dạng tuyến tính $L_1,...,L_u$. Từ (2.4) ta có

$$\begin{aligned}\max_{\{i_1,...,i_n\}}\log\prod_{k=1}^{n}\frac{\|f(z)\|_r^d}{|g_{i_k}(f)(z)|_r}\le\frac{1}{\theta}\max_K\log\prod_{j\in K}\frac{\|F(z)\|_r}{|L_j(F)(z)|_r}-\\ -\frac{M}{\theta}T(r,F)+\frac{MN}{\theta}T(r,f)+c_4,\end{aligned}$$

trong đó $\max\limits_K$ được lấy trên tất cả các tập con K của $1,...,u$ sao cho các dạng L_j, $j\in K$ là độc lập tuyến tính, c_4 là một hằng số dương không phụ thuộc vào r, áp dụng Định lý 2.2.7 cho ánh xạ chỉnh hình $F:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{C})$ và các dạng tuyến tính $L_1,...,L_u$ và kết hợp với (2.3) ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q}m(r,Q_i,f)&\le\max_{\{i_1,...,i_n\}}\log\prod_{k=1}^{n}\frac{\|f(z)\|_r^d}{|r_{i_k}(f)(z)|_r}+(q-c)\log c_1\\ &\le-\frac{1}{\theta}N_W(r,0)+\frac{MN}{\theta}T(r,f)+o(T(r,F)).\end{aligned}$$

trong đó W là Wronskian của $F_1,...,F_M$. □

2.2.12 Bổ đề. *Với giả thiết trong Định lý 2.2.9. Khi đó*

$$\sum_{j=1}^{q}N(r,Q_j,f)-\frac{1}{\theta}N_W(r,0)\le\sum_{j=1}^{q}N^M(r,Q_j,f).$$

Chứng minh. Với mỗi $z\in\mathbb{C}$, không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết rằng $Q_j\circ f$ triệt tiêu tại z với $1\le j\le q_1$ và $Q_j\circ f$ không triệt tiêu tại z với $j > q_1$. Theo giả thiết quy nạp: các Q_j ở vị trí tổng quát nên $q_1 \leq n$. Khi đó tồn tại một số nguyên dương $k_j \geq 0$ và các hàm chỉnh hình γ_j không triệt tiêu trong một lân cận U của z sao cho

$$Q_j \circ f = (\zeta - z)^{k_j} \gamma_j,$$

với $j = 1, ..., q$, trong đó $k_j = 0$ nếu $q_1 < j \leq q$.

Với $\{Q_1, ..., Q_n\} \in \{Q_1, ..., Q_q\}$ ta có thể thu được một cơ sở $\psi_1, ..., \psi_M$ của V_N và các dạng độc lập tuyến tính $L_1, ..., L_M$ sao cho $\psi_t(f) = L_t(F)$. Theo tính chất của định thức Wronskian, ta có

$$W = W(F_1, ..., F_M) = CW(L_1(F), ..., L_M(F))$$
$$= C \begin{vmatrix} \psi_1(f) & \cdots & \psi_M(f) \\ (\psi_1(f))' & \cdots & (\psi_M(f))' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\psi_1(f))^{(M-1)} & \cdots & (\psi_M(f))^{(M-1)} \end{vmatrix}.$$

Gọi ψ là một phần tử trong cơ sở, được xây dựng từ cơ sở của $W_{(\mathbf{i})}/W_{(\mathbf{i}')}$, ta có thể viết $\psi = Q_1^{i_1}...Q_n^{i_n}\eta, \eta \in V_{N-d\sigma(i)}$. Ta có

$$\psi(f) = (Q_1(f))^{i_1} ... (Q_n(f))^{i_n} \eta(f),$$

trong đó $(Q_j(f))^{i_j} = (\zeta - z)^{i_j k_j} \gamma_j^{i_j}, j = 1, ..., n$. Hơn nữa ta có thể giả thiết rằng $k_j \geq M$ nếu $1 \leq j \leq q_0$ và $1 \leq k_j < M$ nếu $q_0 < j \leq q_1$. Ta thấy rằng có $\delta_{(i)}$ phần tử dạng ψ trong cơ sở. Như vậy W triệu tiêu tại z với bội ít nhất là

$$\sum_{(i)} \left(\sum_{j=1}^{q_0} i_j \left(k_j - M\right) \right) \delta_{(i)} = \sum_{(i)} i_j \delta_{(i)} \sum_{j=1}^{q_0} \left(k_j - M\right)$$
$$= \theta \sum_{j=1}^{q_0} (k_j - M).$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

Tiếp theo ta sẽ chứng minh Định lý 2.2.9.

Chứng minh Định lý 2.2.9. Giả sử $f = (f_0 : ... : f_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một ánh xạ chỉnh hình không suy biến đại số. Gọi $D_1, ..., D_q$ là các siêu mặt ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có bậc d_j và Q_j, $1 \le j \le q$, là các đa thức thuần nhất trong $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ bậc d_j tương ứng, định nghĩa các D_j. Ta thay thế Q_j bởi Q_j^{d/d_j}, trong đó d là bội số chung nhỏ nhất của các d_j. Ta sẽ chứng minh với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số nguyên dương M, sao cho

$$(q - (n+1) - \varepsilon) T(r, f) \le \sum_{j=1}^{q} d_j^{-1} N^M(r, Q_j^{d/d_j}, f) + o(T(r, f).$$

Chú ý rằng, nếu $z \in \mathbb{C}$ là một không điểm của $Q_j^{d/d_j} \circ f$ với bội α thì z là không điểm của $Q_j \circ f$ với bội $\alpha d_j/d$. Điều đó kéo theo

$$N^M(r, Q_j^{d/d_j}, f) \le \frac{d}{d_j} N^{[Md/d_j]}(r, Q_j, f) \le \frac{d}{d_j} N^M(r, Q_j, f).$$

Như vậy

$$(q - (n+1) - \varepsilon) T(r, f) \le \sum_{j=1}^{q} d_j^{-1} N^M(r, Q_j^{d/d_j}, f) + o(T(r, f)).$$

Bởi vậy, không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết rằng các đa thức $Q_1, ..., Q_q$ có bậc như nhau và bằng d. Theo Bổ đề 2.2.10 ta suy ra

$$\sum_{j=1}^{q} m\left(r, Q_j, f\right) \leq \max_{\{i_1,...,i_n\}} \left(\prod_{k=1}^{n} \log \frac{\|f(z)\|^d}{|Q_{i_k} \circ f(z)|} \right) + (q-n) \log c_1.$$

Lấy n đa thức phân biệt $r_1, ..., r_n \in \{Q_1, ..., Q_q\}$. Theo giả thiết ở vị trí tổng quát, chúng định nghĩa một đa tạp con có số chiều bằng 0 trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Ta cố định một số nguyên lớn N (sẽ chọn sau), gọi V_N là không gian các đa thức thuần nhất bậc N trong $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$. Ta sẽ có một cấu trúc lọc $W_{(\mathbf{i})}$ của V_N và

$$\delta_{(\mathbf{i})} := \dim \frac{W_{(\mathbf{i})}}{W_{(\mathbf{i}')}} = d^n,$$

với mỗi cặp n bộ liên tiếp $(\mathbf{i}') > (\mathbf{i})$.

Đặt $M := \dim V_N$. Như vậy theo Bổ đề 2.2.11, ta có

$$\left(qd - \frac{MN}{\theta}\right) T(r,f) \leq \sum_{j=1}^{q} N(r, Q_j, f) - \frac{1}{\theta} N_W(r, 0) + o\left(T(r,f)\right). \tag{2.5}$$

Mặt khác Bổ đề 2.2.12 cho ta

$$\sum_{j=1}^{q} N(r, Q_j, f) - \frac{1}{\theta} N_W(r, 0) \leq \sum_{j=1}^{q} N^M(r, Q_j, f). \tag{2.6}$$

Tiếp tục ta sẽ ước lượng vế trái của (2.5). Giả sử N chia hết cho d. Khi đó

$$M = \begin{pmatrix} N+n \\ n \end{pmatrix} = \frac{(N+n)!}{N!n!} = \frac{N^n}{n!} + O\left(N^{n-1}\right). \tag{2.7}$$

Bằng cách khác, vì m bộ số nguyên không âm với tổng $\leq T$ đúng bằng với $(m+1)$ bộ số nguyên không âm với tổng đúng bằng $T \in \mathbb{Z}$ và bằng $\begin{pmatrix} T+m \\ m \end{pmatrix}$. Theo Bổ đề 2.2.5, ta có

$$\frac{MN}{\theta} \leq \frac{\dfrac{N^{n+1}}{n!} + O(N^n)}{\dfrac{N^{n+1}}{d(n+1)!}} = d(n+1) + O(N^{-1}).$$

tức là,

$$(qd - \frac{MN}{\theta})T(r,f) \geq d(q-(n+1) - O(N^{-1}))T(r,f).$$

Điều đó suy ra, với mỗi $\varepsilon > 0$ trong Định lý 2.2.9

$$(qd - \frac{MN}{\theta})T(r,f) \geq d(q-(n+1) - \varepsilon)T(r,f), \qquad (2.8)$$

nếu ta lấy N đủ lớn sao cho $O(N^{-1}) \leq \varepsilon$ và N chia hết cho d.

Kết hợp các công thức (2.5), (2.6) và (2.8) ta có, với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại số M sao cho

$$(q-(n+1)-\varepsilon)T(r,f) \leq \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{d} N^M(r, Q_j, f) + o(T(r,f)).$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Kết luận

Luận văn trình bày một số khái niệm, tính chất của lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình và cho đường cong chỉnh hình. Mục đích chính của luận văn là chứng minh kết quả của Q. Yan và Z. Chen về Định lý cơ bản thứ hai cho các đường cong chỉnh hình cắt các siêu mặt ở vị trí tổng quát, có tính đến yếu tố hàm đếm bội chặn.

Tài liệu tham khảo

[1] Hà Huy Khoái(2000), *Giáo trình giải tích phức*, Viện Toán học.

[2] Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải (1997), *Hàm biến phức*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] Cartan.H(1933), *Sur les zeros des combinaisions linearires de p fonctions holomorpes donnees,* Mathematica (Cluj). 7, 80-103.

[4] Chen Z. and Yan Q. , *Weak Cartan-type Main Theorem for Holomorphic Curves*, National Natural Science Foundation of China, No. 10571135.

[5] Cherry W. and Ye z(2005)., *Nevanlinna's Theory of Value Distribution. The Second Main Theorem and its Error Terms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2001.

[6] Corvaja P. and Zannier (2004) U.M., *On a general Thue's equation,* Amer. J. Math. 126, no. 5, 1033–1055.

[7] Hartshorne R., *Algebraic Geometry 1997* Grad. Texts in Math. vol. 52,Springer-Verlag, New York.

[8] Hayman W. K. (1964), *Meromorphic functions*, Clarendo Press, Oxford.

[9] Nevanlinna R. (1926), Einige Eindeutigkeitssatze in der Theorie der meromorphen Function, Acta. Math. **48** , 367-391.

[10] Nochka E. I. (1983) , *On the theory of meromorphic curves*, Soviet Math. Dokl. 27 , no. 2, 377–381.

[11] Kobayashi S. (1970), *Hyperbolic manifolds and holomophic mappings,* Marcel Dekker.

[12] Ru M. (2004),*A defect relation for holmorphic curves intersecting hypersurfaces*, Amer. Journal of Math.**126** , 215-226.

[13] Ru M.(1997),*On a general form of the second main theorem*, Trans. Amer. Math. Soc.**349** , 5093-5105.

[14] Shiffman B. (1979), *On holomorphic curves and meromorphic maps in projective space,* Indiana Univ. Math. J. 28, no. 4, 627–641.