ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGÔ THỊ KIM QUY

ĐỊNH LÝ THÁC TRIỂN HARTOGS ĐỐI VỚI CÁC ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH TÁCH BIẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGÔ THỊ KIM QUY

ĐỊNH LÝ THÁC TRIỂN HARTOGS ĐỐI VỚI CÁC ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH TÁCH BIẾN

Chuyên ngành : Giải tích
Mã số: 60. 46. 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai

THÁI NGUYÊN – 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGÔ THỊ KIM QUY

ĐỊNH LÝ THÁC TRIỂN HARTOGS ĐỐI VỚI CÁC ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH TÁCH BIẾN

Chuyên ngành : Giải tích
Mã số : 60. 46. 01

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2009

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm
Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: **TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai**

Phản biện 1: PGS.TS. Tạ Thị Hoài An

Phản biện 2: PGS.TS. Phạm Hiến Bằng

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn
họp tại: Trường Đại học Sư phạm - ĐHTN
Ngày 22 tháng 11 năm 2009

Có thể tìm hiểu luận văn tại thư viện Trường ĐHSP Thái Nguyên

THAI NGUYEN UNIVERSITY
THAI NGUYEN UNIVERSITY OF EDUCATION

NGO THI KIM QUY

THE HARTOGS EXTENSION THEOREM FOR SEPARATELY HOLOMORPHIC MAPPINGS

Major : Analytical Mathematics
Code : 60. 46. 01

SUMMARIZE OF MASTER THESIS IN MATHEMATIC

Scientific Supervisor: **Dr. NGUYEN THI TUYET MAI**

THAI NGUYEN – 2009

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Thác triển ánh xạ chỉnh hình là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của giải tích phức. Những kết quả cơ bản trong lĩnh vực này gắn liền với các tên tuổi như Riemann, Hartogs, Cartan, Oka, … Ngày nay, nhiều nhà toán học trên thế giới vẫn tiếp tục quan tâm đến vấn đề trên bằng những cách tiếp cận khác nhau nhằm giải quyết được những bài toán cụ thể đặt ra trong lĩnh vực đó.

Như chúng ta đã biết định lý cổ điển của Hartogs khẳng định rằng mỗi hàm chỉnh hình tách biến trên một miền D trong [redacted] là chỉnh hình. Đây là một trong số những kết quả quan trọng của giải tích phức nhiều biến. Vì thế, việc mở rộng định lý Hartogs đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Hướng nghiên cứu này đã phát triển trong lý thuyết của các ánh xạ chỉnh hình tách và đạt được nhiều kết quả đẹp. Có một thời gian hướng nghiên cứu này bị gián đoạn, sau đó được khôi phục vào những năm 50, 60 của thế kỷ 20. Siciak đã có đóng góp đáng kể trong sự phát triển của hướng nghiên cứu này. Ông đã đưa ra một tổng quát hoá quan trọng mà để chứng minh được thì vấn đề mấu chốt là phải xác định bao chỉnh hình của các hàm chỉnh hình tách biến trên các tập chữ thập. Sử dụng hàm cực trị tương đối, Siciak đã chứng minh được định lý trong trường hợp tập chữ thập gồm tích các miền trong [redacted]. Các bước nghiên cứu tiếp theo đã được khởi đầu bởi Zahariuta năm 1976, sau đó là Nguyễn Thanh Vân và Zeriahi. Shiffman đã là người đầu tiên tổng quát hoá một số kết quả của Siciak đối với các ánh xạ chỉnh hình tách với các giá trị trong không gian giải tích phức (xem [15]) . Trong bài báo của Alehyane và Zeriahi (xem [3]) có thể xác định bao chỉnh hình của tập chữ thập bất kỳ là tích các miền con của các đa tạp Stein của độ đo đa điều hoà dưới.

Nguyễn Việt Anh tổng quát hoá kết quả của Alehyane – Zeriahi cho tập chữ thập là tích các đa tạp phức tuỳ ý. Chủ yếu ông sử dụng lý thuyết

Poletsky về các đĩa (xem [12], [13]), định lý của Rosay trên các đĩa chỉnh hình (xem[14]) và định lý Alehyane – Zeriahi (xem[3]). Kỹ thuật quan trọng khác là sử dụng các tập mức của độ đo đa điều hoà dưới. Kỹ thuật này được giới thiệu lần đầu tiên trong thời gian gần đây bởi sự kết hợp của Plug và Nguyễn Việt Anh. Hơn nữa, nhờ kỹ thuật này người ta đã giải quyết được các vấn đề phát sinh từ lý thuyết của các ánh xạ chỉnh hình tách và các ánh xạ phân hình.

Mục đích chính của luận văn là nghiên cứu định lý thác triển Hartogs đối với các ánh xạ chỉnh hình tách biến, mà cụ thể là thác triển lên bao chỉnh hình của các tập chữ thập là tích các đa tạp phức tuỳ ý. Luận văn trình bày lại kết quả nghiên cứu của Nguyễn Việt Anh trong bài báo [1].

Nội dung chính của luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Đề cập chủ yếu đến các khái niệm đa tạp phức, hàm đa điều hoà dưới, không gian phức có tính chất thác triển Hartogs, tập đa cực địa phương, độ đo đa điều hoà dưới, chỉnh hình tách.

Sau đó, chúng tôi trình bày các kết quả bổ trợ và một số kiến thức của lý thuyết đa thế vị như: Lý thuyết Poletsky về các đĩa và định lý của Rosay trên các đĩa chỉnh hình; các kết quả về độ đo đa điều hoà dưới và các tập mức của nó, ba định lý tính duy nhất và định lý hai hằng số.

Chương 2: Định lý thác triển Hartogs đối với các ánh xạ chỉnh hình tách biến.

Trình bày kết quả chính: Nêu và chứng minh một tổng quát của định lý thác triển Hartogs (định lý A). Chứng minh với trường hợp chữ thập hai lá và trong trường hợp tổng quát.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của cô giáo T.S Nguyễn Thị Tuyết Mai. Nhân dịp này, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với cô.

Em xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tận tình giảng dạy chúng em trong suốt khoá học.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu Trường Đại học Kinh tế và Quản trị kinh doanh Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm Khoa Khoa học cơ bản và Bộ môn Toán đã hết sức quan tâm, tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, đồng nghiệp và bạn bè đã động viên khích lệ tôi trong suốt quá trình hoàn thành, bảo vệ luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 28 tháng 9 năm 2009

Ngô Thị Kim Quy

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Đa tạp phức

1.1.1. Ánh xạ chỉnh hình

Giả sử *X* là một tập mở trong [redacted] và $f: X \to$ [redacted] là một hàm số.

Hàm f được gọi là *khả vi phức tại* $x_0 \in X$ nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính λ: [redacted] sao cho $\lim\limits_{|h| \to 0} \dfrac{\left| f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda(h) \right|}{|h|} = 0,$

trong đó $h = (h_1, \ldots, h_n) \in$ [redacted] và $|h| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |h_i|^2 \right)^{1/2}$.

Hàm f được gọi là *chỉnh hình tại* $x_0 \in X$ nếu f khả vi phức trong một lân cận nào đó của x_0 và được gọi là *chỉnh hình trên X* nếu f chỉnh hình tại mọi điểm thuộc *X*.

Một ánh xạ $f: X \to$ [redacted] có thể viết dưới dạng $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, trong đó $f_i = \pi_i$ [redacted] là các hàm toạ độ. Khi đó f được gọi là chỉnh hình trên *X* nếu f_i chỉnh hình trên *X* với mọi $i = 1, \ldots, m$.

Ánh xạ $f: X \to f(X) \subset$ [redacted] được gọi là song chỉnh hình nếu f là song ánh, chỉnh hình và f^{-1} cũng là ánh xạ chỉnh hình.

1.1.2. Đa tạp phức

Giả sử *X* là một không gian tô pô Hausdorff.

\+ Cặp (U, φ) được gọi là một bản đồ địa phương của *X*, trong đó *U* là tập mở trong *X* và $\varphi: U \to$ [redacted] là ánh xạ, nếu các điều kiện sau được thoả mãn:

i) $\varphi(U)$ là tập mở trong [redacted].

ii) $\varphi : U \to \varphi(U)$ là một đồng phôi.

+ Họ $\mathrm{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ các bản đồ địa phương của *X* được gọi là một *tập bản đồ giải tích (atlas)* của *X* nếu các điều kiện sau được thoả mãn:

i) $\{U_i\}_{i\in I}$ là một phủ mở của *X*.

ii) Với mọi U_i, U_j mà U_i [redacted], ánh xạ

φ_j [redacted] là ánh xạ chỉnh hình.

Xét họ các atlas trên *X*. Hai atlas $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ được gọi là tương đương nếu A_1 [redacted] là một atlas. Đây là một quan hệ tương đương trên tập các atlas. Mỗi lớp tương đương xác định một cấu trúc khả vi phức trên *X*, và *X* cùng với một cấu trúc khả vi phức trên nó được gọi là một *đa tạp phức n* chiều.

1.2. Hàm đa điều hoà dưới, tập đa cực, đa chính quy địa phương

1.2.1. Hàm điều hoà dưới

Giả sử *D* là một tập con mở trong [redacted]. Hàm $u : D \to [-\infty, +\infty)$, $u \neq -\infty$ trên mọi thành phần liên thông của *D* được gọi là *điều hoà dưới* trong *D* nếu u thoả mãn hai điều kiện sau:

i) u là nửa liên tục trên trong *D*, tức là $\limsup_{z\to z_0} u(z) \leq u(z_0)$ với $\forall z_0 \in D$.

ii) Với mỗi tập con mở compact tương đối *G* của *D*, với mỗi hàm $h : G \to$ [redacted] điều hoà trong *G* và liên tục trên $\overline{G}$: nếu $u \leq h$ trên ∂G thì $u \leq h$ trên G.

1.2.2. Hàm đa điều hoà dưới

Giả sử Ω là một tập con mở trong [redacted]. Hàm $\varphi : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ được gọi là *đa điều hoà dưới* trong Ω nếu:

i) φ là nửa liên tục trên trong Ω và $\varphi \neq -\infty$ trên mọi thành phần liên thông của Ω.

ii) Với mỗi điểm $z_0 \in \Omega$ và mỗi đường thẳng phức $l(\xi) = z_0 + \omega.\xi$ đi qua z_0 (ở đó $\omega \in$ [redacted]), hạn chế φ trên đường thẳng này, tức là hàm φ [redacted] hoặc là điều hoà dưới hoặc đồng nhất bằng $-\infty$ trên mọi thành phần liên thông của tập mở $\{\xi \in$ [redacted] $\Omega\}$.

1.2.3. Hàm đa điều hoà dưới trên không gian phức

Giả sử X là không gian phức. Một hàm đa điều hoà dưới trên X là hàm $\varphi : X \to [-\infty, +\infty)$ thoả mãn: Với mỗi $x \in X$ tồn tại lân cận U của x và một ánh xạ song chỉnh hình $h : U \to V$, với V là một không gian con phức đóng của một miền G nào đó trong [redacted] và tồn tại một hàm đa điều hoà dưới [redacted] $\infty, +\infty)$ sao cho $\varphi|U =$ [redacted]

1.2.4. Tập đa cực

Ta giả thiết tất cả các đa tạp phức là hữu hạn chiều địa phương (tức là chiều của mỗi thành phần liên thông của đa tạp là hữu hạn) và tất cả các không gian giải tích phức xét trong luận văn đều giả thiết là được thu gọn, bất khả quy và hữu hạn chiều.

Giả sử M là đa tạp phức và A là tập con của M. Đặt

$$h_{A,M} := \sup\{u : u \in PSH(M), u \le 1 \text{ trên M}, \; u \le 0 \text{ trên A}\}$$

trong đó $PSH(M)$ là kí hiệu nón của tất cả các hàm đa điều hoà dưới trên M.

+) Tập A được gọi là *đa cực* trong M nếu có $u \in PSH(M)$ sao cho u không đồng nhất bằng $-\infty$ trên mọi thành phần liên thông của M và $A \subset \{z \in M : u(z) = -\infty\}$.

+) Tập A được gọi là *đa cực địa phương* trong M nếu với mỗi $z \in A$, có một lân cận mở V của z sao cho A [redacted] là đa cực trong V.

+) Tập A được gọi là *không đa cực* (tương ứng *không đa cực địa phương*) nếu nó không phải là tập đa cực (tương ứng không phải là tập đa cực địa phương).

Theo một kết quả cổ điển của Josefson và Bedford (xem [4], [8]), nếu M là miền Riemann trên một đa tạp Stein thì $A \subset \mathrm{M}$ là đa cực địa phương nếu và chỉ nếu nó đa cực.

1.2.5. Tập đa chính quy địa phương

+) Cho hàm $h : \mathrm{M} \to$ [redacted], hàm $h^* : \mathrm{M} \to$ [redacted] được xác định bởi:

$$h^*(z) := \limsup_{w \to z} h(w), \quad z \in \mathrm{M}$$

được gọi là *hàm chính quy hoá nửa liên tục trên* của h.

+) Tập hợp $A \subset \mathrm{M}$ là *đa chính quy địa phương tại một điểm* $a \in \overline{A}$ nếu h^*_{A} [redacted] $(a) = 0$ với mọi lân cận mở U của a.

+) Tập A được gọi là *đa chính quy địa phương* nếu nó đa chính quy địa phương tại mọi điểm $a \in A$.

Ta kí hiệu $A^* = A^*_{\mathrm{M}}$ là tập hợp tất cả các điểm $a \in \overline{A}$ mà tại đó A là đa chính quy địa phương. Nếu A không đa cực địa phương thì một kết quả cổ điển của Bedford và Taylor (xem [4], [5]) chỉ ra A^* không đa cực địa phương và $A \setminus A^*$ là đa cực địa phương. Hơn nữa, A^* là địa phương kiểu G_δ (tức là với mỗi $a \in A^*$, có một lân cận mở U của a thoả mãn A^* [redacted] là giao đếm được của các tập mở) và A^* là đa chính địa phương (tức là $(A^*)^* = A^*$).

Cho đa tạp phức M và không gian giải tích phức Z, kí hiệu $\mathrm{O}(\mathrm{M}, Z)$ là tập tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ M vào Z.

1.3. Tính chất thác triển Hartogs

Định nghĩa 1.3.1. Cho số nguyên $p \geq 2$. Với $0 < r < 1$, tập hợp

$$H_p(r) := \{(z', z_p) \in E^p : \|z'\| < r \text{ hoặc } |z_p| > 1 - r\}$$

được gọi là *lược đồ Hartogs p chiều*.

Trong đó E là đĩa đơn vị trong [redacted] và $z' = (z_1, \ldots, z_{p-1}), \|z'\| := \max_{1 \leq j \leq p-1} |z_j|$.

Định nghĩa 1.3.2. Không gian giải tích phức *Z* được gọi là *có tính chất thác triển Hartogs với p chiều* nếu mọi ánh xạ $f \in \mathcal{O}\left(H_p(r), Z\right)$ đều thác triển tới ánh xạ $f \in \mathcal{O}\left(E^p, Z\right)$. Hơn nữa, *Z* được gọi là có tính chất thác triển Hartogs nếu nó có tính chất thác triển Hartogs với mọi chiều $p \geq 2$.

Kết quả cổ điển của Ivashkovich (xem [6]) nói rằng nếu *Z* có tính chất thác triển Hartogs trong 2 chiều thì nó sẽ đúng với mọi số chiều $p \geq 2$. Shiffman [15] đã chứng minh được một đặc trưng quan trọng của không gian có tính chất thác triển Hartogs sau:

Định lý 1.3.3. *Không gian giải tích phức Z có tính chất thác triển Hartogs nếu và chỉ nếu với mọi miền D của đa tạp Stein M, mọi ánh xạ* $f \in \mathcal{O}\left(D, Z\right)$ *đều thác triển được thành ánh xạ* $f \in \mathcal{O}\left(D, Z\right)$, *trong đó* D *là bao chỉnh hình của D.*

1.4. Lý thuyết Poletsky về các đĩa và định lý của Rosay trên các đĩa chỉnh hình

Kí hiệu E là đĩa đơn vị trong ■. Với một đa tạp phức M, kí hiệu $\mathcal{O}\left(\overline{E}, \mathrm{M}\right)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ chỉnh hình $\phi : E \to \mathrm{M}$ thác triển chỉnh hình được tới lân cận của $\overline{E}$. Ánh xạ ϕ như vậy được gọi là *đĩa chỉnh hình* trên M. Hơn nữa, với tập con *A* của M, đặt:

$$1_A(\mathrm{z}) := \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad z \in A \\ 0 & \text{khi} \quad z \in \mathrm{M} \setminus A \end{cases}$$

Rosay đã chứng minh được một kết quả đáng chú ý sau [14]:

Định lý 1.4.1. *Giả sử u là hàm nửa liên tục trên trên đa tạp phức* M. *Khi đó phiếm hàm Poission của u xác định bởi*

$$P[u](z) := \inf\left\{ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(\phi\left(e^{i\theta}\right)\right)d\theta : \phi \in \mathcal{O}(\overline{E}, M), \phi(0) = z \right\}$$

là đa điều hoà dưới trên M.

Định lý của Rosay mở ra một sự phát triển quan trọng trong lý thuyết Poletsky về các đĩa. Các trường hợp đặc biệt của định lý này đã được xét đến trong các công trình nghiên cứu của Poletsky, Larusson – Sigurdsson và Edigarian.

Bổ đề 1.4.2. *Giả sử M là đa tạp phức và A là tập con mở khác rỗng của M. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$ và mỗi $z_0 \in M$ luôn có một lân cận mở U của z_0, một tập con mở T trong* [redacted] *và họ các đĩa chỉnh hình $\left(\phi_z\right)_{z\in U} \subset \mathcal{O}\left(\overline{E}, M\right)$ thoả mãn các tính chất sau:*

(i) $\Phi \in \mathcal{O}\left(U \times E, M\right)$, *trong đó* $\Phi(z,t) := \phi_z(t)$, $(z,t) \in U \times E$;

(ii) $\phi_z(0) = z, \quad z \in U$;

(iii) $\phi_z(t) \in A, \quad t \in T$ [redacted];

(iv) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{\partial E\setminus T}(e^{i\theta})d\theta < P\left[1_{M\setminus A}\right](z_0) + \varepsilon.$

Chứng minh

Với mỗi $\rho > 0$, kí hiệu E_ρ là đĩa $\{t \in$ [redacted]. Cố định một điểm tuỳ ý $z_0 \in M$. Áp dụng định lý 1.4.1 đối với hàm nửa liên tục trên $1_{M\setminus A}$. Do đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, ta có thể tìm được *r* > 1 và ánh xạ chỉnh hình $\phi \in \mathcal{O}\left(E_r, M\right)$ sao cho:

$$\phi(0) = z_0 \ \text{ và } \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{M\setminus A}\left(\phi(e^{i\theta})\right)d\theta < P\left[1_{M\setminus A}\right](z_0) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.1)$$

Xét phép nhúng $\tau : E_r \to$ [redacted] cho bởi $\tau(t) := \left(t, \phi(t)\right)$, $t \in E_r$.

Khi đó, ảnh $\tau\left(E_r\right)$ là một đa tạp con Stein của [redacted].

Cố định mỗi [redacted] sao cho $1<$ [redacted] và giả sử d là số chiều của thành phần liên thông của M chứa z_0. Khi đó, tồn tại ánh xạ chỉnh hình nội xạ [redacted] sao cho [redacted] Kí hiệu Π là phép chiếu chính tắc từ [redacted] vào M. Khi đó có lân cận đủ nhỏ U của z_0 và một số thực ρ: $1<\rho<$ [redacted] sao cho với mọi $z \in U$, ánh xạ $\phi_z : E_\rho \to \mathrm{M}$ xác định bởi:

$$\phi_z(t) := \Pi \text{ [redacted]}, \quad t \in E_\rho \tag{1.2}$$

là chỉnh hình.

Theo (1.2), ta có khẳng định (i). Ngoài ra, $\phi_z(0) = \Pi(0,z) = z$ với $z \in U$, từ đó cho ta khẳng định (ii).

Hơn nữa: $$\phi_{z_0}(t) = (\Pi \text{ [redacted]}(t). \tag{1.3}$$

Theo (1.2) khi z dần đến z_0 trong U thì ϕ_z hội tụ đều tới ϕ_{z_0} trên $\overline{E}$.

Do đó, bằng cách co U nếu cần thiết, ta có thể tìm được một tập con mở T của tập mở $\{t \in E_\rho : \phi_{z_0}(t) \in A\}$ sao cho khẳng định (iii) thoả mãn và

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{\partial E \setminus T}\left(e^{i\theta}\right) d\theta < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{\mathrm{M} \setminus A}\left(\phi_{z_0}\left(e^{i\theta}\right)\right) d\theta + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kết hợp với (1.1) và (1.3) suy ra khẳng định (iv). Do đó, bổ đề được chứng minh.

1.5. Độ đo đa điều hoà dưới và chỉnh hình tách

Định nghĩa 1.5.1. *Độ đo đa điều hoà dưới* của A tương đối với M là hàm được xác định bởi:

$$\text{[redacted]} := h^*_{A^*,\mathrm{M}}(z), \quad z \in \mathrm{M}.$$

Chú ý rằng [redacted] $\in PSH(\mathrm{M})$ và $0 \le$ [redacted] $\le 1, \quad z \in \mathrm{M}$.

Định nghĩa 1.5.2.

Giả sử $N \in$ [redacted] và $\varnothing \neq A_j \subset D_j$, trong đó D_j là đa tạp phức, $j = 1,...,N$. Ta định nghĩa *chữ thập N lá*:

$$X := \mathrm{X}(A_1,...,A_N;D_1,...,D_N) := \bigcup_{j=1}^{N} [redacted]_{-1} \times D_j \times A_{j+1} \times ... \times A_N .$$

Theo Alehyane - Zeriachi [3], ta định nghĩa *phần chính quy* X^* của X như sau:

$$X^* = \mathrm{X}^*\left(A_1,...,A_N;D_1,...,D_N\right) := \mathrm{X}\left(A_1^*,..,A_N^*;D_1,...,D_N\right)$$

$$= \bigcup_{j=1}^{N} [redacted]^*_{j-1} \times D_j \times A_{j+1}^* \times ... \times A_N^* .$$

Hơn nữa, đặt:

$$\omega(z) := \sum_{j=1}^{N} [redacted]_j), \quad z = (z_1,...,z_N) \in D_1 \times ... \times D_N .$$

Với chữ thập N lá $X := \mathrm{X}\left(A_1,...,A_N;D_1,...,D_N\right)$, đặt:

$$X = \mathrm{X}\left(A_1,...,A_N;D_1,...,D_N\right) := \left\{(z_1,...,z_N) \in D_1 \times ... \times D_N : \omega(z) < 1\right\}.$$

Khi đó, ta có $X^* \subset X$.

Định nghĩa 1.5.3. Giả sử Z là không gian giải tích phức.

Ta nói rằng ánh xạ $f : X \to Z$ là *chỉnh hình tách* và viết $f \in \mathcal{O}_s\left(X,Z\right)$ nếu với mỗi $j \in \{1,...,N\}$ và $\left(a',a''\right) \in \left(A_1 \times ... \times A_{j-1}\right) \times \left(A_{j+1} \times ... \times A_N\right)$ ánh xạ thu hẹp $f(a',.,a'')\big|_{D_j}$ là chỉnh hình trên D_j.

Với hàm $f : M \to$ [redacted], kí hiệu $|f|_M$ là $\sup_M |f|$.

Bổ đề 1.5.4. *Giả sử T là tập con mở của $\overline{E}$. Khi đó*

$$[redacted] \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{\partial E \setminus T}\left(e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Chứng minh

Theo định nghĩa

$$[redacted],$$

trong đó $\omega_E(t,T$ [redacted] là độ đo điều hoà của *E*. Vì

$$\omega_E(0,T \text{ [redacted] } \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{\partial E\setminus T}\left(e^{i\theta}\right)d\theta$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Mệnh đề 1.5.5. *Giả sử M là đa tạp phức và A là tập con mở, khác rỗng của M thì* [redacted]$) = \mathrm{P}\left[1_{\mathrm{M}\setminus A}\right](z), \quad z \in \mathrm{M}$.

Chứng minh

Trước tiên, vì *A* là tập mở nên ta có $A^*=A$.

Áp dụng định lý 1.4.1 với $1_{\mathrm{M}\setminus A}$ và sử dụng công thức của $\mathrm{P}\left[1_{\mathrm{M}\setminus A}\right]$ ta có: $\mathrm{P}\left[1_{\mathrm{M}\setminus A}\right] \in \mathrm{PSH}(\mathrm{M})$, $\mathrm{P}\left[1_{\mathrm{M}\setminus A}\right] \le 1$ và $\mathrm{P}\left[1_{\mathrm{M}\setminus A}\right](z) = 0,\ z \in A$.

Do đó: $\mathrm{P}\left[1_{\mathrm{M}\setminus A}\right](z) \le$ [redacted]$), \quad z \in \mathrm{M}$.

Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại, ta chọn $u \in \mathrm{PSH}(\mathrm{M})$ sao cho $u \le 1$ và $u(z) \le 0,\ z \in A$. Với mỗi điểm $z_0 \in \mathrm{M}$ và mỗi $\varepsilon > 0$, theo định lý 1.4.1 tồn tại một đĩa chỉnh hình $\phi \in \mathcal{O}\left(\overline{E},\mathrm{M}\right)$ sao cho:

$$\phi(0) = z_0 \quad \text{và} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{\mathrm{M}\setminus A}\left(\phi\left(e^{i\theta}\right)\right)d\theta < \mathrm{P}\left[1_{\mathrm{M}\setminus A}\right](z_0) + \varepsilon. \qquad (1.4)$$

Do đó, bằng cách đặt $\phi^{-1}(A) := \left\{t \in \overline{E} : \phi(t) \in A\right\}$ ta được:

$$u(z_0) = (u \text{ [redacted] }), E) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{\mathrm{M}\setminus A}\left(\phi\left(e^{i\theta}\right)\right)d\theta.$$

Kết hợp với (1.4) suy ra $u(z_0) < \mathcal{P}\left[1_{\mathrm{M}\setminus A}\right](z_0) + \varepsilon$.

Vì u, ε và z_0 được chọn tuỳ ý nên ta được [redacted]$) \le \mathrm{P}\left[1_{\mathrm{M}\setminus A}\right](z), z \in \mathrm{M}$ ..

Từ đó mệnh đề được chứng minh.

Mệnh đề 1.5.6. *Giả sử M là đa tạp phức và A là tập con không đa cực địa phương của M. Với* $0 < \varepsilon < 1$*, định nghĩa ''tập* ε *-mức của M tương đối với A'' như sau:*

$$\mathrm{M}_{\varepsilon,A} := \{z \in \mathrm{M} : \text{[redacted]}) < 1 - \varepsilon\}.$$

Khi đó:

i) Với mỗi tập con đa cực địa phương P của M ta có $(A$[redacted]*,* [redacted] *và* $(A^*)^* = A^*$*. Hơn nữa, nếu A là tập mở thì* $A^* = A$*.*

ii) Với N là tập con mở của M và $B \subset A \subset \mathrm{N}$ *ta có:*

[redacted] N .

iii) Nếu N là thành phần liên thông của M thì:

[redacted] .

iv) [redacted]$) = \dfrac{\text{[redacted]})}{1-\varepsilon}, \quad z \in \mathrm{M}_{\varepsilon,A}$.

v) Mọi thành phần liên thông của $\mathrm{M}_{\varepsilon,A}$ *đều chứa một tập con không đa cực địa phương của* A[redacted]*. Hơn nữa, nếu A là tập mở thì mọi thành phần liên thông của* $\mathrm{M}_{\varepsilon,A}$ *đều chứa một tập con mở khác rỗng của A.*

Chứng minh

Khẳng định i) là hệ quả trực tiếp của đồng nhất thức (xem bổ đề 3.5.3 trong [7]) h^*_A[redacted]$= h^*_{A,U}$, trong đó U là tập con mở bị chặn của [redacted], A và P là các tập con của U và P là đa cực.

Chứng minh khẳng định ii) và khẳng định iii) dùng định nghĩa của độ đo đa điều hoà dưới.

Chứng minh khẳng định iv). Chú ý rằng với mỗi $a \in A^*$, ta có:

$$[redacted]0. \tag{1.5}$$

trong đó đẳng thức đầu tiên được suy ra từ định nghĩa của độ đo đa điều hoà dưới, đẳng thức thứ 2 suy ra từ khẳng định ii) và giả thiết rằng $a \in A^*$. Do đó $A^* \subset \mathcal{M}_{\varepsilon,A}$. Hơn nữa, ta có: $\dfrac{[redacted])}{1-\varepsilon} \le 1,\ z \in \mathcal{M}_{\varepsilon,A}$.

Kết hợp với (1.5) ta có:

$$\frac{[redacted])}{1-\varepsilon} \le [redacted]),\quad z \in \mathcal{M}_{\varepsilon,A}. \tag{1.6}$$

Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại của (1.6), ta chọn $u \in PSH\left(\left(\mathcal{M}_{\varepsilon,A}\right)\right)$ sao cho $u \le 1$ trên $\mathcal{M}_{\varepsilon,A}$ và $u \le 0$ trên A^*. Xét hàm sau:

$$\hat{u}(z) := \begin{cases} max\left\{(1-\varepsilon)u(z), [redacted])\right\}, & z \in \mathcal{M}_{\varepsilon,A}, \\ [redacted]) & z \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{\varepsilon,A}. \end{cases}$$

Ta có $u \in PSH(\mathcal{M})$ và $\hat{u} \le 1$.

Hơn nữa, theo giả thiết của u và (1.5) ta có:

$$\hat{u}(a) \le max\left\{(1-\varepsilon)u(a), [redacted])\right\} = 0,\ a \in A^*.$$

Do đó: $\hat{u} \le$ [redacted]

Đặc biệt, ta có: $\quad u(z) \le \dfrac{[redacted])}{1-\varepsilon}, \qquad z \in \mathcal{M}$.

Vì u là tuỳ ý nên từ đánh giá trên ta suy ra được bất đẳng thức ngược lại của (1.6). Khẳng định iv) được chứng minh.

Khẳng định v) là hệ quả trực tiếp của khẳng định iii) và iv).

Do đó mệnh đề được chứng minh.

Mệnh đề 1.5.7. *Giả sử* $\mathcal{M}$ *là đa tạp Stein và U là miền con của* $\mathcal{M}$ *chứa một dãy vét cạn các tập con mở* $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ *nghĩa là* $U_j \Subset U_{j+1}$ *và* [redacted] *thì với mỗi tập con* $A \subset U$ *ta luôn có:* [redacted] $= \lim\limits_{j\to\infty} h^*_{A}$ [redacted] $(z), \quad z \in U.$

Chứng minh

Ta có dãy $(h^*_{A}$ [redacted] $)_{j=1}^{\infty}$ giảm tới hàm $h \in PSH(\mathcal{M})$ khi $j \to \infty$.

Vì $U_j \Subset \mathcal{M}$ và $A \backslash A^*$ là đa cực nên theo bổ đề 2.2 trong [2] và khẳng định i) của mệnh đề 1.5.6 ta có: h^*_{A} [redacted] $= h^*_{A}$ [redacted] $=$ [redacted] với mỗi $j \geq 1$. Do đó, theo khẳng định ii) của mệnh đề 1.5.6 ta có:

[redacted] $\lim\limits_{j\to\infty} h^*_{A}$ [redacted] $(z) = h(z), \quad z \in U. \quad (1.7)$

Mặt khác, dùng định nghĩa của h, ta có $h \leq 1$ trên $\mathcal{M}$ và $h \leq 0$ trên [redacted]

Vì [redacted] nên ta có: $h \leq$ [redacted]

Kết hợp với (1.7) ta có điều phải chứng minh.

Mệnh đề 1.5.8. *Giả sử* $\mathcal{M}_j$ *là đa tạp phức và* A_j *là tập con mở khác rỗng của* $\mathcal{M}_j$*, j = 1, .., N, N ≥ 2. Khi đó:*

i) Với $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathcal{M}_1 \times \ldots \times \mathcal{M}_N$ *ta có:*

[redacted]

ii) Đặt $X := \mathbb{X}(A_1, \ldots, A_N, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_N)$ *thì* $A_1 \times \ldots \times A_N \subset X$ *và*

[redacted] $(z_1, \ldots, z_N) \in X.$

1.6. Ba định lý tính duy nhất và định lý hai hằng số

Định lý 1.6.1. *Giả sử M là đa tạp phức liên thông, A là tập con không đa cực địa phương của M và Z là không gian giải tích phức. Giả sử* $f, g \in \mathcal{O}(M, Z)$ *sao cho* $f(z) = g(z), z \in A$ *thì* $f \equiv g$.

Chứng minh

Vì A không đa cực địa phương nên có tập mở $U \subset M$ song chỉnh hình với một miền Euclidean sao cho A[redacted] không đa cực trong U. Do đó, vì $f(z) = g(z), z \in A$[redacted] nên $f = g$ trên U.

Vì M là liên thông nên từ đó suy ra kết luận của định lý.

Định lý 1.6.2. *Giả sử* D_j *là đa tạp phức và* $A_j \subset D_j$ *là tập con không đa cực địa phương, j = 1, .., N, N ≥ 2, Y là không gian giải tích phức,* U_1, U_2 *là hai tập con mở của* D_1. *Với* $k \in \{1, 2\}$, *giả sử* $f_k \in \mathcal{O}(X_k, Y)$ *trong đó*

$$X_k := X(A_1[redacted]., A_N; U_k, D_2, ...D_N).$$

Khi đó:

i) Nếu $f_1 = f_2$ *trên* $(U_1$[redacted] *thì* $f_1 = f_2$ *trên* X_1[redacted]

ii) Nếu $U_1 = U_2$ *và* $f_1 = f_2$ *trên* $(A_1$[redacted] *thì* $f_1 = f_2$ *trên* X_1.

Chứng minh

Để chứng minh khẳng định i), ta cố định một điểm tuỳ ý $z^0 = (z_1^0, ..., z_n^0) \in X_1$[redacted] Ta cần chứng minh rằng $f_1(z^0) = f_2(z^0)$.

Với mỗi $2 \le j \le N$, giả sử G_j là thành phần liên thông chứa z_0 của tập mở sau

$\Big\{ z_j \in D_j :$ [redacted] $\Big\}$

Ta có với $k \in \{1,2\}$ và $\left(a_3,\dots,a_N\right) \in \big(A_3$ [redacted], ánh xạ $z_2 \in G_2$ [redacted] $z_2, a_3, \dots, a_N\big)$ thuộc $O\left(G_2, Y\right)$.

Hơn nữa, từ giả thiết ta có:

$$f_1\left(z_1^0, a_2, \dots, a_N\right) = f_2\left(z_1^0, a_2, \dots, a_N\right), \quad a_2 \in \big(A_2$$ [redacted] (1.8)

Mặt khác, theo phần v) của mệnh đề 1.5.6, G_2 chứa tập con không đa cực địa phương của A_2 [redacted].

Do đó, theo định lý 1.6.1, ta có:

$$f_1\left(z_1^0, z_2, a_3, \dots, a_N\right) = f_2\left(z_1^0, z_2, a_3, \dots, a_N\right),$$

$$\left(z_2, a_3, \dots, a_N\right) \in G_2 \times \big(A_3$$ [redacted]

Vì vậy, $f_1\left(z_1^0, z_2^0, a_3, \dots, a_N\right) = f_2\left(z_1^0, z_2^0, a_3, \dots, a_N\right)$,

$$\left(a_3, \dots, a_N\right) \in \big(A_3$$ [redacted] (1.9)

Lặp lại lý luận trong (1.8), (1.9) (N - 2) lần, ta được:

$$f_1\left(z^0\right) = f_2\left(z^0\right).$$

Khẳng định i) được chứng minh.

Theo khẳng định i), khi đó khẳng định ii) quy về chứng minh rằng:

$$f_1 = f_2 \text{ trên } U_1 \times \big(A_2$$ [redacted]

Thật vậy, ta cố định điểm tuỳ ý

$z^0 = \left(z_1^0, a_2^0, \dots, a_N^0\right) \in U_1 \times \big(A_2$ [redacted] sao cho $z^0 \in X_1$.

Khi đó [redacted] 1.

Giả sử Γ là thành phần liên thông chứa z_1^0 của U_1.

Theo khẳng định i), iii) của mệnh đề 1.5.6 và đánh giá trên, ta được A_1 [redacted] là tập không đa cực địa phương.

Với $k \in \{1,2\}$, ánh xạ $z_1 \in G$ [redacted] $_2^0,...,a_N^0)$ thuộc $O(U_1,Y)$. Hơn nữa, từ giả thiết và phần trên ta có

$$f_1(.,a_2^0,...,a_N^0) = f_2(.,a_2^0,...,a_N^0)$$

trên tập không đa cực địa phương A_1 [redacted]

Theo định lý 1.6.1 ta có:

$$f_1(z_1,a_2^0,...,a_N^0) = f_2(z_1,a_2^0,...,a_N^0), \quad z_1 \in G.$$

Do vậy, $f_1(z^0) = f_2(z^0)$.

Khẳng định ii) được chứng minh.

Định lý 1.6.3. *Giả sử D_j là đa tạp phức, $A_j \subset D_j$ là tập con không đa cực địa phương với j = 1, ..., N và Z là không gian giải tích phức. Ta định nghĩa X, X^* và X như mục 1.5. Giả sử $f \in O_s(X,Z)$ và $f \in O(X,Z)$ sao cho*

$f = f$ trên X [redacted]*. Khi đó $f = f$ trên X* [redacted].

Chứng minh

Giả sử $z^0 = (z_1^0,...,z_N^0)$ là điểm tuỳ ý của X [redacted] và đặt $f_1 := f, f_2 := f$.

Lý luận như chứng minh định lý 1.6.2, ta có: $f(z^0) = f(z^0)$.

Định lý được chứng minh.

Định lý hai hằng số dưới đây với các hàm đa điều hoà dưới có vai trò quan trọng trong việc chứng minh định lý A (Chương 2).

Định lý 1.6.4. *Cho M là đa tạp phức và A là tập con không đa cực địa phương của M. Giả sử m, $M \in$* [redacted] *và $u \in PSH(\mathcal{M})$ sao cho $u(z) \le M$ với $z \in \mathcal{M}$ và $u(z) \le m$ với $z \in A$ thì*

$u(z) \le m(1-$ [redacted] $\mathcal{M}$.

Chứng minh

Đặt $v(z) = \dfrac{u(z)-m}{M-m} \Rightarrow v \in PSH(\mathcal{M})$.

Với $\forall z \in \mathcal{M} : u(z) \le M \Rightarrow v(z) \le \dfrac{M-m}{M-m} = 1.$

Với $\forall z \in A : u(z) \le m \Rightarrow v(z) \le \dfrac{m-m}{M-m} = 0.$

Theo định nghĩa của [redacted]), ta có:

$v(z) \le$ [redacted]), $\quad z \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow \dfrac{u(z)-m}{M-m} \le$ [redacted]), $\quad z \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow u(z) \le m(1-$ [redacted] $\mathcal{M}$.

Định lý được chứng minh.

CHƯƠNG 2

ĐỊNH LÝ THÁC TRIỂN HARTOGS ĐỐI VỚI CÁC ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH TÁCH BIẾN

2.1. Mở đầu

Năm 2001, Alehyane – Zeriahi đã đưa ra dạng tổng quát của định lý thác triển Hartogs đối với các hàm chỉnh hình tách, trong trường hợp bao chỉnh hình của tập chữ thập bất kỳ là tích các miền con của các đa tạp Stein của độ đo đa điều hoà dưới như sau:

Định lý 2.1.1. (Alehyane – Zeriahi [3, định lý 2.2.4])

Giả sử X_j là đa tạp Stein, $D_j \subset X_j$ là một miền, $A_j \subset D_j$ là tập con không đa cực, j = 1, ..., N và Z là không gian giải tích phức có tính chất thác triển Hartogs. Khi đó, với mỗi ánh xạ $f \in O_s(X, Z)$ đều tồn tại duy nhất ánh xạ $f \in O(X, Z)$ sao cho $f = f$ trên X [redacted].

Ví dụ sau (xem[3]) chỉ ra rằng giả thiết *Z* là không gian giải tích phức có tính chất thác triển Hartogs là cần thiết. Xét ánh xạ f : [redacted] cho bởi:

$$f(z,w) := \begin{cases} \left[(z+w)^2 : (z-w)^2\right] & khi\ (z,w) \neq (0,0) \\ [1:1], & khi\ (z,w) = (0,0) \end{cases}$$

thì $f \in O_s($X([redacted] nhưng f không liên tục tại (0,0).

Câu hỏi nảy sinh một cách tự nhiên rằng định lý trên còn đúng không nếu D_j không nhất thiết là miền con của đa tạp Stein, *j* = 1, …., *N*. Để trả lời câu hỏi trên chúng tôi trình bày lại kết quả nghiên cứu của Nguyễn Việt Anh về tổng quát hoá định lý của Alehyane – Zeriahi cho tập chữ thập là tích các đa tạp phức tuỳ ý. Trong chứng minh kết quả này, ông chủ yếu sử dụng lý thuyết Poletsky về các đĩa (xem [12], [13]), định lý của Rosay trên các đĩa chỉnh hình (xem [14]). Ngoài ra, kỹ thuật quan trọng khác là sử dụng các tập mức của độ đo đa điều hoà dưới.

2.2. Các kết quả chính

Định lý A. *Giả sử* D_j *là đa tạp phức và* $A_j \subset D_j$ *là tập con không đa cực địa phương, j = 1, ..., N; Z là không gian giải tích phức có tính chất thác triển Hartogs. Khi đó, với mỗi ánh xạ* $f \in O_s(X,Z)$ *có duy nhất ánh xạ* $f \in O(X,Z)$ *sao cho* $f = f$ *trên* X [redacted]. *Hơn nữa, nếu* $Z =$ [redacted] *và* $|f|_X < \infty$ *thì*

$$|f(z)| \le |f|_A^{1-\omega(z)} |f|_X^{\omega(z)}, \qquad z \in X.$$

Định lý A có một hệ quả quan trọng. Trước khi đưa ra tính chất này, ta cần giới thiệu một thuật ngữ. Đa tạp phức M được gọi là đa tạp Liouville nếu $PSH(M)$ không chứa bất kì hàm bị chặn trên khác hằng nào.

Ta thấy lớp đa tạp Liouville chứa lớp các đa tạp compact liên thông.

Hệ quả B. *Giả sử* D_j *là đa tạp phức và* $A_j \subset D_j$ *là tập con không đa cực địa phương, j = 1, ..., N; Z là không gian giải tích phức có tính chất thác triển Hartogs. Giả sử thêm rằng* D_j *là đa tạp Liouville, j = 2, ..., N thì với mỗi ánh xạ* $f \in O_s(X,Z)$ *có duy nhất ánh xạ* $f \in O(D_1 \times \ldots \times D_N, Z)$ *sao cho* $f = f$ *trên* X.

Hệ quả B : suy ra trực tiếp từ định lý A vì [redacted] $\equiv 0, j = 2, \ldots, N$.

Hướng chứng minh định lý A như sau:

Bước một, ta chứng minh các trường hợp đặc biệt mà mỗi A_j là một tập mở $j = 1$[redacted]. Bước hai, ta chứng minh định lý A trong trường hợp tổng quát.

Trong bước một, để chứng minh định lý A ta áp dụng lý thuyết Poletsky với các đĩa và định lý của Rosay trên các đĩa chỉnh hình (xem định lý 1.4.1). Vì vậy, ta có thể xây dựng ánh xạ thác triển f trên X. Để chứng minh f là chỉnh hình, ta dùng định lý chữ thập cổ điển (định lý 2.1.1).

Trong bước hai ta quy trường hợp tổng quát về trường hợp đặc biệt trên. Kĩ thuật quan trọng là sử dụng các tập mức của độ đo đa điều hoà dưới. Chính xác hơn, ta thay mỗi D_j bởi các tập mức của độ đo đa điều hoà dưới

[redacted] tức là bởi

$$D_{i,\delta} := \{z_j \in D_j : \text{[redacted]} < 1-\delta\} \quad (0<\delta<1).$$

Với phương pháp như vậy, ta thay thế tập hợp A_j bởi tập hợp $A_{j,\delta}$ sao cho trong một số trường hợp coi [redacted] như [redacted] khi $\delta \to 0^+$.

Áp dụng định lý 2.1.1 và định lý 1.4.1, ta có thể mở rộng chỉnh hình tách của f tới ánh xạ [redacted] xác định trên tập chữ thập

$$X_\delta := \mathrm{X}(A_{1,\delta},\ldots,A_{N,\delta};D_{1,\delta},\ldots,D_{N,\delta}).$$

Áp dụng kết quả của bước một ta thu được ánh xạ $f_\delta \in \mathrm{O}(X_\delta, Z)$. Dán họ $(f_\delta)_{0<\delta<1}$ ta thu được ánh xạ thác triển f.

2.3. Phần 1 của chứng minh định lý A

Mục đích của phần này là chứng minh định lý A trong trường hợp đặc biệt sau:

Định lý 2.3.1. *Cho D là đa tạp phức, G là đa tạp phức mà song chỉnh hình tới tập mở trong* [redacted]. *Giả sử A là tập con mở của D, B là tập con không đa cực địa phương của G và Z là không gian giải tích phức có tính chất thác triển Hartogs. Đặt $X := \mathrm{X}(A,B;D,G)$ và $X := \mathrm{X}(A,B;D,G)$. Khi đó, với mỗi ánh xạ $f \in \mathrm{O}_s(X,Z)$ có duy nhất ánh xạ $f \in \mathrm{O}(X,Z)$ sao cho $f = f$ trên X* [redacted].

Chú ý 2.3.2. Với giả thiết trên có:

X [redacted]

Trong chứng minh dưới đây, ta giả sử rằng G là miền trong [redacted]. Với giả sử này, theo phần iii) của mệnh đề 1.5.6 ta chứng minh được định lý.

Chứng minh

Ta bắt đầu chứng minh với bổ đề dưới đây.

Bổ đề 2.3.3. *Vẫn giả thiết như định lý 2.3.1. Với* $j \in \{1,2\}$, *giả sử* $\phi_j \in \mathcal{O}(\overline{E}, D)$ *là một đĩa chỉnh hình và đặt* $t_j \in E$ *sao cho* $\phi_1(t_1) = \phi_2(t_2)$ *và* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{D\setminus A}\left(\phi_j\left(e^{i\theta}\right)\right)d\theta < 1$ *thì:*

i) Với $j \in \{1,2\}$, *ánh xạ* (t,w) [redacted] $,w)$ *thuộc*

$\mathcal{O}_s\Big(\mathrm{X}\big(\phi_j^{-1}(A)$ [redacted] $G\big),Z\Big)$

trong đó $\phi_j^{-1}(A) := \left\{t \in \overline{E} : \phi_j(t) \in A\right\}$.

ii) Với $j \in \{1,2\}$, *giả sử* f_j *là ánh xạ duy nhất trong*

$\mathcal{O}\Big(\mathrm{X}\big(\phi_j^{-1}(A)$ [redacted] $G\big),Z\Big)$

sao cho $f_j(t,w) = f\left(\phi_j(t), w\right)$, $(t,w) \in \mathrm{X}\big(\phi_j^{-1}(A)$ [redacted].

Khi đó, theo khẳng định i), chú ý 2.3.2 và áp dụng định lý 2.1.1, ta có:

$$f_1(t_1, w) = f_2(t_2, w)$$

với $\forall w \in G$ *sao cho* $(t_j, w) \in \mathrm{X}\big(\phi_j^{-1}(A)$ [redacted] $G\big)$, $\quad j \in \{1,2\}$.

Chứng minh bổ đề 2.3.3

Khẳng định i) suy ra trực tiếp từ giả thiết.

Chứng minh khẳng định ii).

Cố định $w_0 \in G$ sao cho $(t_j, w_0) \in X(\phi_j^{-1}(A)$ [redacted] $G)$ với $j \in \{1,2\}$. Ta cần chứng minh $f_1(t_1, w_0) = f_2(t_2, w_0)$. Ta có cả hai ánh xạ $w \in G$ [redacted] $)$ và $w \in G$ [redacted] $)$ đều thuộc vào $O(G, Z)$, trong đó Γ là thành phần liên thông chứa w_0 của tập mở sau:

$$\{w \in G : \text{[redacted]}\}$$

Hơn nữa, với mỗi $w \in B$ [redacted] ta có [redacted] 0.

Vì vậy, với mỗi $j \in \{1,2\}$, ta có được $(t_j, w) \in X(\phi_j^{-1}(A)$ [redacted].

Do đó, từ $\phi_1(t_1) = \phi_2(t_2)$ ta có:

$$f_1(t_1, w) = f(\phi_1(t_1), w) = f(\phi_2(t_2), w) = f_2(t_2, w), \quad w \in B \text{[redacted]}$$

Mặt khác, theo phần *v*) của mệnh đề 1.5.6, Γ chứa tập con không đa cực địa phương của B [redacted].

Vì vậy, theo định lý 1.6.1, ta có: $f_1(t_1, w) = f_2(t_2, w), w \in G$.

Do đó $f_1(t_1, w_0) = f_2(t_2, w_0)$. Bổ đề được chứng minh.

Bước 1: Xây dựng ánh xạ thác triển f trên X.

Chứng minh bước 1: Ta xác định f như sau: Giả sử Ξ là tập tất cả các cặp $(z, w) \in D \times G$ với tính chất có đĩa chỉnh hình $\phi \in O(\overline{E}, D)$ và $t \in E$ sao cho $\phi(t) = z$ và $(t, w) \in X(\phi^{-1}(A)$ [redacted] $G)$. Theo định lý 2.1.1, giả sử f_ϕ là ánh xạ duy nhất trong $O(X(\phi^{-1}(A)$ [redacted] $G), Z)$ sao cho:

$$f_\phi(t, w) = f(\phi(t), w), \quad (t, w) \in X(\phi^{-1}(A) \text{[redacted]}. \tag{2.1}$$

Khi đó, ánh xạ thác triển f xác định bởi

$$f(z, w) = f_\phi(t, w). \tag{2.2}$$

Theo khẳng định ii) của bổ đề 2.3.3, f hoàn toàn xác định trên Ξ . Ta đi chứng minh

$$\mathrm{X} = X\,. \tag{2.3}$$

Giả sử có (2.3) thì f hoàn toàn xác định trên X . Hơn nữa, theo công thức (2.2), cố định mọi $z \in D$, ánh xạ thu hẹp $f(z,.)$ là chỉnh hình trên tập mở $\{w \in G : (z,w) \in \mathrm{X}\}$.

Để chứng minh bao hàm $\mathrm{X} \subset X$, ta giả sử $(z,w) \in \mathrm{X}$. Theo định nghĩa trên của Ξ có thể tìm được đĩa chỉnh hình $\phi \in \mathrm{O}\left(\overline{E},D\right)$, một điểm $t \in E$ sao cho $\phi(t) = z$ và $(t,w) \in \mathrm{X}\left(\phi^{-1}(A)\right.$ [redacted] $\left.G\right)$.

Vì [redacted] nên ta suy ra:

[redacted].

Do đó: $(z,w) \in X$.

Vì vậy, $\mathrm{X} \subset X$.

Tiếp theo, ta cần chứng tỏ $X \subset \mathrm{X}$.

Thật vậy, giả sử $(z,w) \in X$ và cố định mỗi $\varepsilon > 0$ sao cho:

$\varepsilon < 1 -$ [redacted]. (2.4)

Theo định lý 1.4.1 và mệnh đề 1.5.5, có đĩa chỉnh hình $\phi \in \mathrm{O}\left(\overline{E},D\right)$ sao cho $\phi(0) = z$ và

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{D\setminus A}\left(\phi\left(e^{i\theta}\right)\right)d\theta <$ [redacted] $+\,\varepsilon.$ (2.5)

Ta có: [redacted]

$<$ [redacted] <1

trong đó bất đẳng thức đầu tiên suy ra từ việc áp dụng bổ đề 1.5.4, bất đẳng thức thứ hai có từ (2.5) và bất đẳng thức cuối cùng suy ra từ (2.4).

Do đó $(0,w) \in X\left(\phi^{-1}(A)\right.$ [redacted] $\left.G\right)$.

Suy ra $(z,w) \in X$.

(2.3) được chứng minh.

Hoàn thành bước 1.

Để chứng minh f thoả mãn kết luận của định lý. Ta tiến hành theo hai bước sau:

Bước 2. Chứng minh đẳng thức $f = f$ trên X [redacted]

Chứng minh bước 2. Giả sử (z, w) là điểm tuỳ ý của $A \times G$. Chọn đĩa chỉnh hình $\phi \in O\left(\overline{E}, D\right)$ xác định bởi $\phi(t) := z, t \in \overline{E}$. Khi đó, theo công thức (2.2) ta được:

$$f(z,w) = f_{\phi}(0,w) = f\left(\phi(0),w\right) = f(z,w), \quad w \in G. \tag{2.6}$$

Do đó $f = f$ trên $A \times G$.

Tiếp theo, giả sử (z, w) là điểm tuỳ ý thuộc $D \times (B$ [redacted] và $\varepsilon > 0$ sao cho:

$$\varepsilon < 1 - \text{[redacted]}. \tag{2.7}$$

Áp dụng định lý 1.4.1 và mệnh đề 1.5.5, có thể tìm được đĩa chỉnh hình $\phi \in O\left(\overline{E}, D\right)$ sao cho $\phi(0) = z$ và

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{D\setminus A}\left(\phi\left(e^{i\theta}\right)\right)d\theta < \text{[redacted]} + \varepsilon. \tag{2.8}$$

Do đó:

[redacted]

trong đó bất đẳng thức đầu tiên suy ra từ việc áp dụng bổ đề 1.5.4 và đẳng thức [redacted]$= 0$, bất đẳng thức thứ hai có từ (2.8) và bất đẳng thức cuối theo (2.7).

Do đó: $(0, w) \in X(\phi^{-1}(A)$[redacted]$G)$.

Vì vậy, sử dụng (2.1), (2.2) và lý luận như trong (2.6), ta kết luận:

$$f(z,w) = f(z,w).$$

Từ đó $f = f$ trên $D \times (B$[redacted]

Như vậy, ta có thể chỉ ra $f = f$ trên $(A$[redacted]

Theo chú ý 2.3.2, chứng minh xong bước 2.

Bước 3. Chứng minh rằng $f \in \mathrm{O}(X, Z)$.

Chứng minh bước 3. Cố định điểm tuỳ ý $(z_0, w_0) \in X$ và giả sử $\varepsilon > 0$ đủ bé

sao cho: $2\varepsilon < 1 -$[redacted] (2.9)

Vì [redacted]$\in \mathrm{PSH}(G)$ nên có thể tìm được một lân cận mở V của w_0 sao

cho: [redacted]$\varepsilon, \quad w \in V.$ (2.10)

Giả sử d là số chiều của D tại điểm z_0.

Áp dụng bổ đề 1.4.2 và mệnh đề 1.5.5 ta thu được tập mở T trong [redacted], một lân cận mở U của z_0 là song chỉnh hình tới hình cầu đơn vị trong [redacted] và họ các đĩa chỉnh hình $(\phi_z)_{z \in U} \subset \mathrm{O}(\overline{E}, D)$ với các tính chất sau:

Ánh xạ $(z,t) \in U \times E$[redacted] là chỉnh hình; (2.11)

$$\phi_z(0) = z, \quad z \in U; \tag{2.12}$$

$\phi_z(t) \in A, \quad t \in T$[redacted]; (2.13)

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{\partial E \setminus T}(e^{i\theta})\, d\theta <$[redacted]$) + \varepsilon.$ (2.14)

Xét ánh xạ $g : X(T$[redacted]$E, U, G) \to Z$ cho bởi:

$$g(t,z,w) := f(\phi_z(t), w), \quad (t,z,w) \in X(T$$ [redacted] $$E, U, G). \qquad (2.15)$$

Giả sử $t \in T$ [redacted] thì theo (2.13) ta có: $\phi_z(t) \in A$ với $z \in U$.

Do đó, theo (2.11), (2.15) và giả thiết $f \in O_s(X, Z)$ ta kết luận được $g(t,z,.)|_G \in O(G,Z)$ (tương ứng $g(t,.,w)|_U \in O(U,Z)$) với mỗi $z \in U$ (tương ứng $w \in B$). Tương tự, với mỗi $z \in U$, $w \in B$ ta có thể chỉ ra $g(.,z,w)|_E \in O(E,Z)$.

Như vậy, ta chứng minh được $g \in O_s(X(T$ [redacted] $E, U, G), Z)$. Vì U là song chỉnh hình tới hình cầu đơn vị trong [redacted] nên ta có thể áp dụng định lý 2.1.1 với g để thu được ánh xạ duy nhất:

$$g \in O(X(T$$ [redacted] $$E, U, G), Z)$$

sao cho:

$g(t,z,w) = g(t,z,w), \quad (t,z,w) \in X(T$ [redacted] $).$ (2.16)

Ta có:

$X(T$ [redacted]

Mặt khác, với mỗi $w \in V$ ta có:

[redacted]

$<$ [redacted] $\varepsilon < 1$ (2.17)

Trong đó bất đẳng thức đầu theo áp dụng bổ đề 1.5.4 và (2.10), bất đẳng thức thứ hai có từ (2.14) và bất đẳng thức cuối do (2.9).

Vì vậy $(0,z,w) \in X(T$ [redacted] $E, U, G), \quad (z,w) \in U \times V.$ (2.18)

Theo (2.2), (2.12), (2.13) và (2.17) ta có: với $z \in U$, f_{ϕ_z} hoàn toàn xác định và chỉnh hình trên $X(T$ [redacted] $G)$ và

$$f(z,w) = f_{\phi_z}(0,w), \quad w \in V. \qquad (2.19)$$

Mặt khác, theo (2.1), (2.15) và (2.16) ta có:

$$f_{\phi_z}(t,w) = g(t,z,w), \quad (t,w) \in \mathrm{X}(T$$ [redacted] $$, z \in U.$$

Vì vậy, cố định $z \in U$, ánh xạ thu hẹp (t,w) [redacted] $w)$ là chỉnh hình trên $\mathrm{X}(T$ [redacted] $G)$. Từ đẳng thức sau cùng và tính duy nhất của định lý 2.1.1 ta suy ra:

$$g(t,z,w) = f_{\phi_z}(t,w), \quad (t,w) \in \mathrm{X}(T$$ [redacted] $$, z \in U.$$

Đặc biệt, sử dụng (2.2), (2.18) và (2.19) ta được:

$$g(0,z,w) = f_{\phi_z}(0,w) = f(z,w), \quad (z,w) \in U \times V.$$

Từ (2.18) ta biết rằng g là chỉnh hình trên lân cận của $(0,z_0,w_0)$, ta kết luận được f là chỉnh hình trên lân cận của (z_0,w_0).

Vì (z_0,w_0) là điểm tuỳ ý thuộc X nên ta có $f \in \mathcal{O}(X,Z)$.

Chứng minh xong bước 3.

Kết hợp các bước 1 – 3, định lý được chứng minh.

2.4. Phần 2 của chứng minh định lý A

Mục đích chính của phần này là chứng minh định lý A trong trường hợp đặc biệt sau:

Định lý 2.4.1. *Giả sử D, G là các đa tạp phức, $A \subset D$, $B \subset G$ là các tập con mở và Z là không gian giải tích phức có tính chất thác triển Hartogs. Đặt* $X := \mathrm{X}(A,B;D,G)$ *và* $X := \mathrm{X}(A,B;D,G)$.

Khi đó, với mỗi ánh xạ $f \in \mathcal{O}_s(X,Z)$ *có duy nhất ánh xạ* $f \in \mathcal{O}(X,Z)$ *sao cho* $f = f$ *trên X.*

Chú ý 2.4.2. Với giả thiết trên, theo khẳng định i) của mệnh đề 1.5.6, ta có : $X^* = X$.

Chứng minh định lý 2.4.1

Ta sử dụng bổ đề sau:

Bổ đề 2.4.3. *Vẫn giữ giả thiết như định lý 2.4.1. Với* $j \in \{1,2\}$, *giả sử* $\psi_j \in \mathcal{O}(\overline{E}, G)$ *là đĩa chỉnh hình và* $\tau_j \in E$ *sao cho* $\psi_1(\tau_1) = \psi_2(\tau_2)$ *và* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{G\setminus B}\left(\psi_j\left(e^{i\theta}\right)\right)d\theta < 1$. *Khi đó:*

i) Với $j \in \{1,2\}$, *ánh xạ* (z,τ) [redacted] $_j(\tau))$

$$\text{thuộc } \mathcal{O}_s\left(\mathrm{X}\left(A, \psi_j^{-1}(B)\ \text{[redacted]}\right), Z\right),$$

trong đó $\psi_j^{-1}(B) := \left\{\tau \in \overline{E} : \psi_j(\tau) \in B\right\}$.

ii) Với $j \in \{1,2\}$, *giả sử* [redacted] *là ánh xạ duy nhất trong*

$$\mathcal{O}\left(\mathrm{X}\left(A, \psi_j^{-1}(B)\ \text{[redacted]}\right), Z\right)$$

sao cho [redacted] $f(z, \psi_j(\tau)),\quad (z,\tau) \in \mathrm{X}\left(A, \psi_j^{-1}(B)\ \text{[redacted]}\right)$.

Khi đó, theo phần i), chú ý 2.4.2 và áp dụng định lý 2.3.1, ta có:

[redacted] *với mọi* $z \in D$ *sao cho* $(z, \tau_j) \in \mathrm{X}\left(A, \psi_j^{-1}(B)\ \text{[redacted]}\right)$, *với* $j \in \{1,2\}$.

Chứng minh bổ đề 2.4.3.

Theo hướng như chứng minh bổ đề 2.3.3.

Ta quay về chứng minh định lý 2.4.1, trước tiên ta định nghĩa ánh xạ $g : X \to Z$ như sau: Giả sử Ξ là tập tất cả các điểm $(z,w) \in D \times G$ với tính chất có đĩa chỉnh hình $\psi \in \mathcal{O}(\overline{E}, G)$ và $\tau \in E$ sao cho $\psi(\tau) = w$ và

$$(z,\tau) \in \mathrm{X}\left(A, \psi^{-1}(B)\ \text{[redacted]}\right).$$

Theo bổ đề 2.4.3, giả sử [redacted] là ánh xạ duy nhất trong

$$\mathrm{O}\Big(\mathrm{X}\big(A,\psi^{-1}(B)$$ [redacted] $$\big),Z\Big)$$

sao cho: [redacted] $f\left(z,\psi(\tau)\right),\quad (z,\tau)\in \mathrm{X}\left(A,\psi^{-1}(B)\right.$ [redacted] $\left.\right).$ (2.20)

Khi đó, ta đặt $\quad g(z,w):=$ [redacted] (2.21)

Theo khẳng định ii) của bổ đề 2.4.3, g hoàn toàn xác định trên Ξ. Hơn nữa, theo lý luận như trong bước 1 của chứng minh định lý 2.3.1, ta có $\mathrm{X} = X$.

Do đó, g hoàn toàn xác định trên X.

Hơn nữa, theo lý luận như trong bước 2 của chứng minh định lý 2.3.1, theo (2.20) - (2.21) và chú ý 2.4.2 ta có với mọi w cố định thuộc G, ánh xạ thu hẹp $g(.,w)$ là chỉnh hình trên tập mở $\{z\in D:(z,w)\in X\}$ và $g = f$ trên X.

Ta định nghĩa ánh xạ f trên X như sau:

Giả sử $(z,w)\in X, \phi\in \mathrm{O}\left(\overline{E},D\right)$ là đĩa chỉnh hình và $t\in E$ sao cho

$\phi(t)=z$ và $(t,w)\in \mathrm{X}\left(\phi^{-1}(A)\right.$ [redacted] $\left.G\right).$

Theo bổ đề 2.4.3 và trong đó thay thế vai trò của B (tương ứng D) bởi A (tương ứng G), giả sử f_ϕ là ánh xạ duy nhất trong

$\mathrm{O}\Big(\mathrm{X}\big(\phi^{-1}(A)$ [redacted] $G\big),Z\Big)$

sao cho

$f_\phi(t,w)=f\left(\phi(t),w\right),\quad (t,w)\in \mathrm{X}\left(\phi^{-1}(A)\right.$ [redacted] $\left.G\right).$ (2.22)

Ta đặt: $\quad f(z,w):= f_\phi(t,w).$ (2.23)

Lý luận tương tự phần trước, ta kết luận f hoàn toàn xác định trên X.

Hơn nữa, theo (2.22) - (2.23) và chú ý 2.4.2 ta có: với mọi z cố định thuộc *D*, ánh xạ thu hẹp $f(z,.)$ là chỉnh hình trên tập mở $\{w \in G : (z,w) \in X\}$ và $f = f$ trên *X*.

Định lý được chứng minh nếu ta có thể chỉ ra $f = g$. (2.24)

Thật vậy, giả sử có (2.24) thì với mỗi $(z_0, w_0) \in X$, ta có thể tìm một lân cận mở $U \times V$ của (z_0, w_0) sao cho $U \times V \in X$ và *U* (tương ứng *V*) là song chỉnh hình tới hình cầu Eclidean. Theo (2.24) và tính chất nói đến ở trên của f và g, ta thấy rằng $f(=g) \in \mathrm{O}_s(\mathrm{X}(U,V;U,V),Z)$. Do đó, áp dụng định lý 2.1.1 với f, ta có $f \in \mathrm{O}(U \times V, Z)$.

Do đó, $f \in \mathrm{O}(X,Z)$ và định lý được chứng minh.

Để chứng minh (2.24), cố định một điểm tuỳ ý $(z_0, w_0) \in X$, cố định mỗi $\varepsilon > 0$ sao cho $3\varepsilon < 1 -$ [redacted] (2.25)

Áp dụng định lý 1.4.1 và mệnh đề 1.5.5 ta có một đĩa chỉnh hình $\phi \in \mathrm{O}(\overline{E}, D)$ (tương ứng $\psi \in \mathrm{O}(\overline{E}, G)$) sao cho $\phi(0) = z_0$ (tương ứng $\psi(0) = w_0$) và

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{D\setminus A}\left(\phi\left(e^{i\theta}\right)\right)d\theta < \text{[redacted]}) + \varepsilon,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{G\setminus B}\left(\psi\left(e^{i\theta}\right)\right)d\theta < \text{[redacted]}) + \varepsilon.$$

Kết hợp với đánh giá trong (2.25), lý luận như bước 1 của định lý 2.3.1, ta có $(0,0) \in \mathrm{X}\left(\phi^{-1}(A)\right.$ [redacted]

Vì $f \in \mathrm{O}_s(X,Z)$ nên ánh xạ h xác định bởi

$h(t,\tau) := f(\phi(t),\psi(\tau)),\quad (t,\tau)\in \mathrm{X}(\phi^{-1}(A)$ [redacted]

thuộc $\mathrm{O}_s(\mathrm{X}(\phi^{-1}(A)$ [redacted].

Hơn nữa, theo (2.20) và (2.22) ta có:

$f_\phi(t,\psi(\tau)) = f(\phi(t),\psi(\tau)) =$ [redacted]$),$ (2.26)

$(t,\tau)\in \mathrm{X}(\phi^{-1}(A)$ [redacted].

Theo định lý 2.1.1, giả sử $\hat{h}\in \mathrm{O}(\mathrm{X}(\phi^{-1}(A)$ [redacted] là ánh xạ duy nhất sao cho

$h(t,\tau) = h(t,\tau) = f(\phi(t),\psi(\tau)),\quad (t,\tau)\in \mathrm{X}(\phi^{-1}(A)$ [redacted]

thì theo (2.26) ta có

$f_\phi(t,\psi(\tau)) = h(t,\tau) =$ [redacted]$),\quad (t,\tau)\in \mathrm{X}(\phi^{-1}(A)$ [redacted]

Vì thế $f_\phi(0,w_0) = h(0,0) =$ [redacted].

Nói cách khác, suy ra

$f(z_0,w_0) = f_\phi(0,w_0) =$ [redacted] $g(z_0,w_0).$

Do đó, (2.24) được chứng minh.

Định lý được chứng minh.

2.5. Phần 3 của chứng minh định lý A cho trường hợp *N* = 2

Mục đích chính của phần này là chứng minh định lý A trong trường hợp $N = 2$.

Định lý 2.5.1. *Giả sử D, G là các đa tạp phức, $A\subset D$, $B\subset G$ là các tập con không đa cực địa phương và Z là không gian giải tích phức có tính chất thác triển Hartogs. Đặt* $X := \mathrm{X}(A,B;D,G)$ *và* $X := \mathrm{X}(A,B;D,G)$.

Khi đó, với mỗi ánh xạ $f \in \mathcal{O}_s(X,Z)$ *có duy nhất ánh xạ* $f \in \mathcal{O}(X,Z)$ *sao cho* $f = f$ *trên* X [redacted]

Để chứng minh ta cần một số kết quả sau:

Với mỗi $a \in A^*$ (tương ứng $b \in B^*$), cố định một lân cận mở U_a của a (tương ứng V_b của b) sao cho U_α (tương ứng V_b) là song chỉnh hình tới một miền trong [redacted] (tương ứng trong [redacted]), trong đó d_a (tương ứng d_b) là số chiều của D (tương ứng G) tại a (tương ứng b). Với mỗi $0 < \delta \le \frac{1}{2}$ ta định nghĩa:

$$U_{a,\delta} := \{z \in U_a : [redacted]$$

$$V_{b,\delta} := \{w \in V_b : [redacted]$$

$$A_\delta := [redacted] \qquad (2.27)$$

$$D_\delta := \{z \in D : [redacted]$$

Bổ đề 2.5.2. *Vẫn giữ các kí hiệu như trên thì ta có:*

$$A [redacted] \subset D_{1-\delta} \subset D_\delta, \qquad (2.28)$$

$$[redacted] D. \qquad (2.29)$$

Chứng minh bổ đề 2.5.2. Sử dụng (2.27) và định nghĩa tập đa chính quy địa phương, ta có $a \in U_{a,\delta}$ với $a \in A$ [redacted].

Do đó, ta có bao hàm đầu tiên trong (2.28).

Vì $0 < \delta \le \frac{1}{2}$ ta có bao hàm thứ ba trong (2.28).

Để chứng minh bao hàm thứ hai trong (2.28), giả sử z là một điểm tuỳ ý của A_δ thì ta có $a \in A$ [redacted] sao cho $z \in U_{a,\delta}$.

Áp dụng khẳng định ii) của mệnh đề 1.5.6. và do $0 < \delta \le \frac{1}{2}$ nên ta được:

$$[redacted] < \delta. \tag{2.30}$$

Do đó $z \in D_{1-\delta}$. Nói cách khác, suy ra $A_\delta \subset D_{1-\delta}$.

Vì vậy tất cả (2.28) được chứng minh.

Tiếp theo, sử dụng bao hàm đầu tiên trong (2.28) và áp dụng khẳng định i), ii) của mệnh đề 1.5.6, ta có:

$$[redacted].$$

Chứng minh được đánh giá thứ hai trong (2.29).

Để hoàn thành chứng minh (2.29), ta giả sử $a \in A$[redacted] và $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$.

Từ (2.30) ta suy ra [redacted]$- \delta \leq 0$ với $z \in U_{a,\delta}$.

Do đó, từ (2.27), ta có: [redacted]$- \delta \leq 0, \quad z \in A_\delta$.

Mặt khác, [redacted]$- \delta < 1, \quad z \in D.$

Vì vậy, đánh giá đầu tiên trong (2.29) được chứng minh.

Do đó, chứng minh xong bổ đề.

Định nghĩa 2.5.3. Giả sử M là đa tạp phức và Y là không gian phức. Gọi $(U_j)_{j\in J}$ là họ các tập con mở của M và $(f_j)_{j\in J}$ là họ các ánh xạ sao cho $f_j \in \mathcal{O}(U_j, Y)$. Ta nói $(f_j)_{j\in J}$ là *họ dán được* nếu với mỗi $j,k \in J$ ta có $f_j = f_k$ trên U_j[redacted]. Ánh xạ chỉnh hình duy nhất $f :$[redacted] xác định bởi $f := f_j$ trên U_j, $j \in J$ được gọi là *ánh xạ dán lại của họ* $(f_j)_{j\in J}$.

Bổ đề 2.5.4. *Vẫn giữ giả thiết như định lý 2.5.1 và ký hiệu trên. Hơn nữa, giả sử với mỗi* $a \in A$[redacted]*, có duy nhất ánh xạ*

$$f_a \in \mathcal{O}\left(\mathrm{X}\left(A [redacted]_a, G\right), Z\right)$$

sao cho $f_a(z,w) = f(z,w), \quad (z,w) \in X\big(A$ [redacted] $\big)$ (2.31)

thì họ $\left(f_a\big|_{U_{a,\delta}\times G_\delta} \right)_{a\in A}$ [redacted] *là dán được.*

Chứng minh bổ đề 2.5.4. Giả sử a_1, a_2 là các phần tử tuỳ ý của A [redacted]. Do (2.31) ta có:

$$f_{a_1}(z,w) = f(z,w) = f_{a_2}(z,w), \quad (z,w) \in \big(U_{a_1} \text{ [redacted]}$$

Do đó, theo khẳng định i) của định lý 1.6.2, ta có:

$$f_{a_1}(z,w) = f_{a_2}(z,w), \quad (z,w) \in X\big(A \text{ [redacted]}\big).$$

Kết hợp với định nghĩa của $U_{a,\delta}$, G_δ đã cho trong (2.27), với $0 < \delta \le \frac{1}{2}$ và định nghĩa 2.5.3 suy ra điều phải chứng minh.

Bổ đề 2.5.5. *Giả sử Δ và Γ là hai đa tạp phức,* $(\mathrm{A}_\delta)_{0<\delta<\frac{1}{2}}$ *(tương ứng* $(\mathrm{B}_\delta)_{0<\delta<\frac{1}{2}}$*) là họ các tập con không đa cực địa phương của Δ (tương ứng Γ) và* $(\mathrm{D}_\delta)_{0<\delta<\frac{1}{2}}$ *(tương ứng* $(\mathrm{G}_\delta)_{0<\delta<\frac{1}{2}}$*) là họ các tập con mở của Δ (tương ứng Γ) với các tính chất sau:*

(i) $\mathrm{A}_{\delta_1} \subset \mathrm{A}_{\delta_2} \subset \mathrm{D}_{\delta_2} \subset \mathrm{D}_{\delta_1}$ *và* $\mathrm{B}_{\delta_1} \subset \mathrm{B}_{\delta_2} \subset \mathrm{G}_{\delta_2} \subset \mathrm{G}_{\delta_1}$ *với* $0 < \delta_1 \le \delta_2 < \frac{1}{2}$.

(ii) Có một họ các ánh xạ chỉnh hình $\left(f_\delta\right)_{0<\delta<\frac{1}{2}}$ *sao cho*

$$f_\delta \in \mathrm{O}\Big(X\big(\mathrm{A}_\delta, \mathrm{B}_\delta; \mathrm{D}_\delta, \mathrm{G}_\delta\big), Z\Big)$$

và với $0 < \delta_1 < \delta_2 < \frac{1}{2}$,

$$f_{\delta_1}(z,w) = f_{\delta_2}(z,w) \quad (z,w) \in \mathrm{A}_{\delta_1} \times \mathrm{B}_{\delta_1}.$$

(iii) Có một tập con mở U (tương ứng V) của Δ (tương ứng Γ) và một số $0 < \delta_0 < \frac{1}{2}$ *sao cho* [redacted] *với mọi* $(z, w) \in U \times V$ *và* $0 < \delta < \delta_0$.

Khi đó $f_\delta(z, w) = f_{\delta_0}(z, w)$ *với mọi* $(z, w) \in U \times V$ *và* $0 < \delta < \delta_0$.

Chứng minh bổ đề 2.5.5. Cố định δ sao cho $0 < \delta < \delta_0$. Theo (iii) ta có:

$$U \times V \subset H := \mathrm{X}\left(\mathrm{A}_\delta, \mathrm{B}_\delta; \mathrm{D}_{\delta_0}, \mathrm{G}_{\delta_0}\right). \qquad (2.32)$$

Mặt khác, sử dụng tính chất i) và khẳng định ii) của mệnh đề 1.5.6 ta có:

$$H \subset \mathrm{X}\left(\mathrm{A}_\delta, \mathrm{B}_\delta; \mathrm{D}_\delta, \mathrm{G}_\delta\right) [redacted] \mathrm{B}_{\delta_0}; \mathrm{D}_{\delta_0}, \mathrm{G}_{\delta_0}\big).$$

Kết hợp với tính chất ii) ở trên, ta có thể áp dụng khẳng định ii) của định lý 1.6.2 với $f_\delta\big|_H$ và $f_{\delta_0}\big|_H$.

Do đó $f_\delta = f_{\delta_0}$ trên *H*.

Kết hợp với (2.32), bổ đề được chứng minh.

Ta đi chứng minh định lý 2.5.1 trong trường hợp đặc biệt sau.

Mệnh đề 2.5.6. *Với các giả thiết như định lý 2.5.1. Giả sử thêm rằng G là song chỉnh hình tới một miền trong* [redacted] *thì kết luận của định lý 2.5.1 vẫn đúng.*

Chứng minh mệnh đề 2.5.6.

Với mỗi $a \in A$ [redacted], giả sử $f_a := f\big|_{\mathrm{X}(A [redacted] _a, G)}$. Vì $f \in \mathrm{O}_s(X, Z)$ ta suy ra $f_a \in \mathrm{O}_s\left(\mathrm{X}\left(A [redacted] _a, G\right), Z\right)$. Vì U_a (tương ứng *G*) là song chỉnh hình tới một miền trong [redacted] (tương ứng trong [redacted]) nên áp dụng định lý 2.1.1 với f_a cho ánh xạ duy nhất $f_a \in \mathrm{O}\left(\mathrm{X}\left(A [redacted] _a, G\right), Z\right)$ sao cho

$$f_a(z,w) = f_a(z,w) = f(z,w), \quad (z,w) \in \mathrm{X}(A$$ [redacted] $$). (2.33)$$

Giả sử $0 < \delta \le \frac{1}{2}$. Theo (2.33), ta có thể áp dụng bổ đề 2.5.4 với họ

$\left(f_a\big|_{U_{a,\delta} \times G_\delta} \right)_{a \in A}$ [redacted] .

Kí hiệu: [redacted] $\times G_\delta, Z)$ (2.34)

là ánh xạ dán lại của họ này. Theo (2.33), (2.34), ta có thể định nghĩa ánh xạ mới [redacted] trên $\mathrm{X}(A_\delta, B$ [redacted] $_\delta)$ như sau:

[redacted] $A_\delta \times G_\delta$

f_δ trên $D \times (B$ [redacted]

Với định nghĩa này và theo (2.33), (2.34) ta có:

[redacted] $(A_\delta, B$ [redacted] $_\delta), Z)$

và $f_\delta = f$ trên $\mathrm{X}(A$ [redacted] $).$ (2.35)

Vì A_δ là tập mở và G_δ là song chỉnh hình tới tập mở trong [redacted] nên ta có thể áp dụng định lý 2.3.1 với [redacted] để thu được ánh xạ $f_\delta \in \mathcal{O}(\mathrm{X}(A_\delta, B$ [redacted] $_\delta), Z)$

sao cho $f_\delta =$ [redacted] trên $\mathrm{X}(A_\delta, B$ [redacted] $_\delta).$ (2.36)

Từ đó ta xác định ánh xạ thác triển f .

Thật vậy, dán $(f_\delta)_{0<\delta\le\frac{1}{2}}$ với nhau thu được f theo phương pháp sau:

$$f := \lim_{\delta \to 0} f_\delta \text{ trên } X . \quad (2.37)$$

Ta có giới hạn (2.37) tồn tại và có tất cả các tính chất đòi hỏi.

Theo (2.35) - (2.37), ta thấy G_δ [redacted] khi δ [redacted] (vì (2.27)) và bổ đề 2.5.5, chứng minh được hoàn thành nếu ta có thể chỉ ra với $\forall(z_0,w_0)\in X$ đều có lân cận mở $U\times V$ của (z_0,w_0) và $\delta_0>0$ sao cho giả thiết của bổ đề 2.5.5 thoả mãn với

$$\mathrm{D}:=D,\mathrm{G}:=G,\mathrm{A}_\delta:=A_\delta,\mathrm{B}_\delta:=B \text{ [redacted] } D,\mathrm{G}_\delta:=G_\delta,\quad 0<\delta<\frac{1}{2}.$$

Giả sử

$$\delta_0:=\frac{1-\text{[redacted]}}{2} \tag{2.38}$$

và $U\times V$ là một lân cận mở của (z_0,w_0) sao cho:

[redacted]. (2.39)

Khi đó, với $0<\delta<\delta_0$ và $(z,w)\in U\times V$, sử dụng (2.38) – (2.39) và phần iv) của mệnh đề 1.5.6, ta có:

[redacted]

$$\leq\frac{\text{[redacted]}}{1-\delta_0}<1. \tag{2.40}$$

Điều này chứng minh khẳng định trên. Do đó, mệnh đề được chứng minh.

Chứng minh định lý 2.5.1. Với mỗi $a\in A$ [redacted], giả sử $f_a:=f|_{\mathrm{X}(A\text{ [redacted] },G)}$.

Vì $f\in\mathrm{O}_s(X,Z)$ ta suy ra $f_a\in\mathrm{O}_s(\mathrm{X}(A\text{ [redacted] }_a,G),Z)$. Vì U_a là song chỉnh hình tới một miền trong [redacted] nên ta có thể áp dụng mệnh đề 2.5.6 với f_a. Do vậy, có duy nhất ánh xạ $\hat{f}_a\in\mathrm{O}(\mathrm{X}(A\text{ [redacted] }_a,G),Z)$ sao cho:

$$\hat{f}_a(z,w)=f(z,w),\quad (z,w)\in\mathrm{X}(A\text{ [redacted] }). \tag{2.41}$$

Giả sử $0<\delta\le\frac{1}{2}$. Do (2.41) nên ta có thể áp dụng bổ đề 2.5.4.

Vì vậy, ta có thể dán họ $\left(f_a\big|_{U_{a,\delta}\times G_\delta}\right)_{a\in A}$[redacted] để thu được ánh xạ dán

[redacted] $\times G_\delta, Z)$.

Tương tự, với mỗi $b\in B$[redacted], ta thu được ánh xạ duy nhất:

$$f_b\in \mathcal{O}\left(X(A,B\,[redacted]),Z\right)$$

sao cho $f_b(z,w)=f(z,w),\quad (z,w)\in X\big(A$ [redacted]. (2.42)

Hơn nữa, có thể dán họ $\left(f_b\big|_{D_\delta\times V_{b,\delta}}\right)_{b\in B}$[redacted] để thu được ánh xạ dán

[redacted] $\times B_\delta, Z)$.

Tiếp theo, ta chứng minh

[redacted] trên $A_\delta\times B_\delta$ (2.43)

Thật vậy, vì (2.41) – (2.42) nên với mỗi $a\in A$[redacted], $b\in B$[redacted] và mỗi $0<\delta\le\frac{1}{2}$ ta có:

$$f_a(z,w)=f_b(z,w),\quad (z,w)\in U_{a,\delta}\times V_{b,\delta}. \qquad (2.44)$$

Chú ý rằng theo (2.41) – (2.42) ta có:

$f_a(z,w)=f_b(z,w)=f(z,w),\quad (z,w)\in X\big(A$ [redacted].).

Vì U_a (tương ứng V_b) là song chỉnh hình tới một miền trong [redacted] (tương ứng [redacted]) nên áp dụng tính duy nhất của định lý 2.1.1 cho

$f_a(z,w)=f_b(z,w),\quad (z,w)\in X\big(A$ [redacted].

Vì vậy, (2.44) được chứng minh và từ đó chứng minh được (2.43).

Theo (2.43) ta có thể xác định một ánh xạ mới [redacted]$B_\delta;D_\delta,G_\delta) \to Z$ như sau:

$$[redacted] \text{n } A_\delta \times G_\delta \quad [redacted] \text{n } D_\delta \times B_\delta \tag{2.45}$$

Theo (2.45) ta có có [redacted]$(A_\delta,B_\delta;D_\delta,G_\delta),Z)$

Vì ta đã biết từ (2.28) rằng A_δ (tương ứng B_δ) là tập con mở của D_δ (tương ứng G_δ) nên ta có thể áp dụng định lý 2.4.1 cho [redacted] với mọi $0<\delta\le\frac{1}{2}$.Do vậy, thu được ánh xạ duy nhất [redacted]$A_\delta,B_\delta;D_\delta,G_\delta),Z)$ sao cho

$$f_\delta = [redacted] \text{ trên } X(A_\delta,B_\delta;D_\delta,G_\delta) \tag{2.46}$$

Từ (2.41) – (2.42) và (2.45) – (2.46) ta có:

$$f_\delta = f \text{ trên } X(A [redacted].) \tag{2.47}$$

Hơn nữa, với mỗi $0<\delta\le\delta_0\le\frac{1}{2}$ và mỗi $(z,w)\in A_\delta\times B_\delta$ có $a\in A$[redacted] sao cho $z\in U_{a,\delta_0}$.

Do đó từ cách xây dựng của [redacted], (2.45) và (2.46) ta có:

$$f_\delta(z,w)=f_a(z,w)=f_{\delta_0}(z,w).$$

Điều này chứng tỏ

$$f_\delta = f_{\delta_0} \text{ trên } A_\delta\times B_\delta,\ 0<\delta\le\delta_0\le\frac{1}{2} \tag{2.48}$$

Từ đó, ta xác định ánh xạ thác triển cần có f

$$f := \lim_{\delta\to 0} f_\delta \text{ trên } X.$$

Để chứng minh f thoả mãn kết luận của định lý ta tiến hành như phần cuối của chứng minh mệnh đề 2.5.6. Theo (2.47), (2.48) và bổ đề 2.5.5, việc chứng minh sẽ hoàn thành nếu có thể chứng tỏ với mọi $(z_0, w_0) \in X$ có một lân cận mở $U \times V$ của (z_0, w_0) và $\delta_0 > 0$ sao cho giả thiết của bổ đề 2.5.5 thoả mãn với

$$\mathrm{D} := D, \mathrm{G} := G, \mathrm{A}_\delta := A_\delta, \mathrm{B}_\delta := B_\delta, \mathrm{D}_\delta := D_\delta, \mathrm{G}_\delta := G_\delta, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2}.$$

Chứng minh theo phương pháp như (2.38) –(2.40).

Định lý được chứng minh.

2.6. Phần 4: Chứng minh định lý A trong trường hợp tổng quát

Trong phần này, ta chứng minh định lý A với mọi $N \geq 3$.

Ta chia chứng minh thành hai phần:

2.6.1. Chứng minh sự tồn tại và duy nhất của f

Ta tiếp tục phép quy nạp (I) với $N \geq 3$.

Giả sử định lý đúng với $N - 1 \geq 2$.

Ta xét trường hợp chữ thập N lá $X := \mathrm{X}(A_1, ..., A_N; D_1, ..., D_N)$, trong đó $D_1, ..., D_N$ là các đa tạp phức và $A_1 \subset D_1, ..., A_N \subset D_N$ là các tập con không đa cực địa phương ($1 \leq j \leq N$). Giả sử $f \in \mathrm{O}_s(X, Z)$. Chú ý rằng tính duy nhất của f suy ra trực tiếp từ phần ii) của định lý 1.6.2.

Ta lại tiếp tục tiến hành phép quy nạp (II) với số nguyên k $(0 \leq k \leq N)$ sao cho có ít nhất k đa tạp phức trong số $\{D_1, ..., D_N\}$ là song chỉnh hình tới miền Euclidean.

Với $k = N$ ta quy về định lý 2.1.1.

Giả sử định lý A là đúng với trường hợp $k = k_0$ $(1 \leq k_0 \leq N)$. Ta phải xét trường hợp $k = k_0 - 1$. Không mất tính tổng quát, giả sử D_2 không là song chỉnh hình tới một miền Euclidean.

Với mỗi $1 \le j \le N$ và $a_j \in A_j$ [redacted] cố định một lân cận mở U_{a_j} của a_j sao cho U_{a_j} là song chỉnh hình tới một miền trong [redacted], trong đó d_{a_j} là số chiều của D_j tại a_j.

Với $1 \le j \le N$ và với mỗi $0 < \delta < 1$, ta định nghĩa:

$$U_{a_j,\delta} := \{ z_j \in U_{a_j} : \text{[redacted]}$$

$$A_{j,\delta} := \text{[redacted]} \qquad (2.49)$$

$$D_{j,\delta} := \{ z_j \in D_j : \text{[redacted]}) < 1 - \delta \}$$

Với mọi $a_1 \in A_1$ [redacted] xét ánh xạ f_{a_1} được cho bởi:

$$f_{a_1}(z_2,...,z_N) := f(a_1, z_2,,...,z_N),$$

$$(z_2,...,z_N) \in X(A_2,...,A_N; D_2,...,D_N)$$

Theo công thức trên và giả thiết rằng $f \in O_s(X,Z)$, f_{a_1} thoả mãn giả thiết của định lý A với chữ thập (N – 1) lá. Do đó, áp dụng giả thiết của phép quy nạp (I), ta thu được ánh xạ duy nhất:

$$\hat{f}_{a_1} \in O\left(\hat{X}(A_2,...,A_N; D_2,...,D_N), Z\right)$$

sao cho:

$$f_{a_1}(z_2,...,z_N) := f(a_1, z_{2,},...,z_N),$$

$$(z_2,...,z_N) \in X(A_2 \text{[redacted]}). \qquad (2.50)$$

Với mọi $a_2 \in A_2$ [redacted], xét ánh xạ f_{a_2} được cho bởi:

$$f_{a_2}(z_1, z_2, z_3,...,z_N) := f(z_1, z_2, z_3,...,z_N),$$

$$(z_1, z_2, z_3,...,z_N) \in X(A_1, A_2 \text{[redacted]} ..., A_N; D_1, U_{a_2}, D_3,...,D_N).$$

Vì U_{a_2} là song chỉnh hình tới miền Euclidean nhưng D_2 thì không nên theo công thức trên và giả thiết rằng với $f \in O_s(X,Z)$, ta có thể áp dụng giả thiết của quy nạp (II) với f_{a_2}. Do đó, thu được ánh xạ duy nhất:

$$f_{a_2} \in O\big(X\big(A_1,A_2$$ [redacted] $$\ldots,A_N;D_1,U_{a_2},D_3,\ldots,D_N\big),Z\big)$$

sao cho

$$f_{a_2}(z_1,z_2,z_3,\ldots,z_N) := f(z_1,z_2,z_3,\ldots,z_N), \quad (2.51)$$

$$(z_1,z_2,z_3,\ldots,z_N) \in X\big(A_1$$ [redacted] $$,D_3,\ldots,D_N\big).$$

Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.6.1.1. *Vẫn các giả thiết như định lý A và các kí hiệu trên thì với mỗi* $a_1 \in A_1$ [redacted] $a_2 \in A_2$ [redacted] *và mỗi* $0 < \delta < \dfrac{1}{N}$ *ta có:*

$$f_{a_1}(z_2,z_3,\ldots,z_N) = f_{a_2}(a_1,z_2,z_3,\ldots,z_N),$$

$$(z_2,z_3,\ldots,z_N) \in U_{a_2,\delta} \times A_{3,\delta} \times \ldots \times A_{N,\delta}.$$

Chứng minh bổ đề 2.6.1.1.

Theo (2.50), (2.51) ta có:

$$f_{a_2}(a_1,z_2,z_3,\ldots,z_N) = f(a_1,z_2,z_3,\ldots,z_N) = f_{a_1}(z_2,z_3,\ldots,z_N),$$

$$(z_2,z_3,\ldots,z_N) \in X\big(A_2$$ [redacted] $$,\ldots,D_N\big).$$

Do đó, áp dụng phần ii) của định lý 1.6.2 với f_{a_1} và $f_{a_2}(a_1,.)$ ta có

$$f_{a_1}(z_2,z_3,\ldots,z_N) = f_{a_2}(a_1,z_2,z_3,\ldots,z_N),$$

$$(z_2,z_3,\ldots,z_N) \in X\big(A_2$$ [redacted] $$\ldots,A_N;U_{a_2},D_3,\ldots,D_N\big). \quad (2.52)$$

Hơn nữa, từ $0 < \delta < \dfrac{1}{N}$, theo (2.49), (2.50) ta có:

$$U_{a_2,\delta} \times A_{3,\delta} \times \ldots \times A_{N,\delta} \subset X\big(A_2$$ [redacted] $$\ldots,A_N;U_{a_2},D_3,\ldots,D_N\big).$$

Kết hợp với (2.52) ta suy ra kết luận cần chứng minh của bổ đề.

Tiếp theo, ta luôn giả sử rằng $0<\delta<\frac{1}{N}$. Theo (2.51), phần i) của định lý 1.6.2 và định nghĩa 2.5.3, ta có thể dán họ của các ánh xạ:

$$\left(f_{a_2}\Big|_{D_{1,N\delta}\times U_{a_2,\delta}\times A_{3,\delta}\times\ldots\times A_{N,\delta}} \right)_{a_2\in A_2}$$ [redacted] .

Để thu được ánh xạ dán

[redacted] $_{1,N\delta}\times A_{2,\delta}\times\ldots\times A_{N,\delta}, Z\big)$ (2.53)

Giả sử

$X_\delta := \mathrm{X}\big(A_1$ [redacted] $\times\ldots\times A_{N,\delta}; D_{1,N\delta}, \mathrm{X}(A_2,\ldots,A_N;D_2,\ldots,D_N)\big)$,

$X_\delta := \mathrm{X}\big(A_1$ [redacted] $\times\ldots\times A_{N,\delta}; D_{1,N\delta}, \mathrm{X}(A_2,\ldots,A_N;D_2,\ldots,D_N)\big)$. (2.54)

Theo bổ đề 2.6.1.1 và theo (2.53) ta có thể định nghĩa ánh xạ mới [redacted] Z như sau:

[redacted] $\begin{cases} \text{[redacted]} & z\in D_{1,N\delta}\times A_{2,\delta}\times\ldots\times A_{N,\delta} \\ f_{z_1} \quad \text{khi} & z\in\big(A_1 \text{ [redacted] } (A_2,\ldots,A_N;D_2,\ldots,D_N\big) \end{cases}$ (2.55)

trong đó $z=(z_1,\ldots,z_N)\in X_\delta$.

Sử dụng (2.55), (2.50) và (2.53) ta có [redacted] $)$.

Hơn nữa, theo (2.54) ta có X_δ [redacted].

Do đó, với mỗi $0<\delta<\frac{1}{N}$, áp dụng định lý 2.5.1 với [redacted] thu được ánh xạ duy nhất $f_\delta\in\mathrm{O}(X_\delta)$ sao cho:

$f_\delta =$ [redacted] trên X_δ. (2.56)

Cuối cùng, dán $(f_\delta)_{0<\delta<\frac{1}{N}}$ ta có thể xác định ánh xạ thác triển cần có f theo công thức:

$$f := \lim_{\delta \to 0} f_\delta \text{ trên } X. \tag{2.57}$$

Tiếp theo, ta lý luận như trong chứng minh định lý 2.5.1. Ta kiểm tra giả thiết của bổ đề 2.5.5 được thoả mãn với:

$$\mathrm{D} := D_1,$$

$$\mathrm{G} := \mathrm{X}(A_2, \ldots, A_N; D_2, \ldots, D_N),$$

$\mathrm{A}_\delta := A_1$ [redacted]

$$\mathrm{B}_\delta := A_{2,\delta} \times \ldots \times A_{N,\delta},$$

$$\mathrm{D}_\delta := D_{1,N\delta},$$

$$\mathrm{G}_\delta := \mathrm{X}(A_2, \ldots, A_N; D_2, \ldots, D_N),$$

với $0 < \delta < \dfrac{1}{N}$.

Giả sử:

$$\Omega := \mathrm{X}(A_{2,\delta}, \ldots, A_{N,\delta}; D_2, \ldots, D_N),$$

$\Omega_{N\delta} := \{z' \in \Omega :$ [redacted] $\ldots \times A_{N,\delta}, \Omega) < 1 - N\delta\}.$

Áp dụng bất đẳng thức (2.29), ta được:

$\sum_{j=2}^{N}$ [redacted] $N\delta < 1, \quad z' = (z_2, \ldots, z_N) \in \Omega_{N\delta}.$

Do đó: $\Omega_{N\delta} \subset \mathrm{X}(A_2, \ldots, A_N; D_2, \ldots, D_N)$ mà theo phần ii) của mệnh đề 1.5.6 ta có:

[redacted] $\ldots \times A_{N,\delta}, \mathrm{X}(A_2, \ldots, A_N; D_2, \ldots, D_N))$

$\leq$ [redacted] $\ldots \times A_{N,\delta}, \Omega_{N\delta}), \quad z' \in \Omega_{N\delta}.$ (2.58)

Mặt khác, theo phần ii) của mệnh đề 1.5.8, ta có:

$$d\,\text{[redacted]}\,z_2,\ldots,z_N\big)\in\Omega. \qquad (2.59)$$

Theo phần iv) của mệnh đề 1.5.6, ta có:

$$d\,\text{[redacted]}\ldots\times A_{N,\delta},\Omega_{N\delta}\big)=\frac{d\,\text{[redacted]}\ldots\times A_{N,\delta},\Omega\big)}{1-N\delta},\quad z'\in\Omega_{N\delta}.$$

Kết hợp với (2.58) – (2.59) suy ra:

$$d\,\text{[redacted]}\ldots\times A_{N,\delta},\mathrm{X}\big(A_2,\ldots,A_N;D_2,\ldots,D_N\big)\big)\le\frac{\sum_{j=2}^{N}d\,\text{[redacted]}D_j\big)}{1-N\delta}. \qquad (2.60)$$

Với mọi $z^0=\left(z_1^0,z^{0'}\right)\in X$, giả sử $\delta_0:=\dfrac{1-\sum_{j=1}^{N}d\,\text{[redacted]}_j\big)}{2N}$ và cố định một lân cận mở $U\times V$ của z^0 sao cho:

$$\sum_{j=1}^{N}d\,\text{[redacted]}\left(z_1,z'\right)\in U\times V.$$

Khi đó, sử dụng đánh giá sau cùng, (2.60) và phần iv) của mệnh đề 1.5.6, ta có:

$$d\,\text{[redacted]},\mathrm{X}\big(A_2,\ldots,A_N;D_2,\ldots,D_N\big)\big)$$

$$\le\frac{\sum_{j=1}^{N}d\,\text{[redacted]}_j\big)+\delta_0}{1-N\delta_0}<1$$

với $z=\left(z_1,z'\right)\in U\times V$ và $0<\delta\le\delta_0$. Theo bổ đề 2.5.5 và công thức (2.57) ta có $f\in\mathrm{O}\left(X,Z\right)$.

Hơn nữa, theo (2.50) – (2.51), (2.54) – (2.57) và ta thấy $D_{1,N\delta}$ [redacted] khi δ [redacted] (xem (2.49)), ta kết luận $f = f$ trên tập hợp sau:

$(A_1$ [redacted]

Vì tập hợp này bằng X [redacted] nên theo định lý 1.6.3 ta có ánh xạ f được cho bởi công thức (2.57) có tất cả các tính chất đòi hỏi. Hoàn thành phép quy nạp (II) với $k = k_0 - 1$. Do đó, chứng minh được của phép quy nạp (II), phép quy nạp (I) và phần đầu của định lý.

2.6.2. Chứng minh đánh giá trong định lý A

Chia phần này thành hai bước:

Bước 1. Chứng minh bất đẳng thức $\left|f\right|_X \le |f|_X$.

Chứng minh bước 1. Giả sử ngược lại, tức là tồn tại một điểm $z^0 \in X$ sao cho $\left|f\left(z^0\right)\right| > |f|_X$. Đặt $\alpha := f\left(z^0\right)$ và xét hàm

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - \alpha}, \qquad z \in X. \tag{2.61}$$

Theo giả sử trên, ta có $g \in \mathrm{O}_s(X,$ [redacted]. Do đó, theo mục 2.6.1, có đúng một hàm $g \in \mathrm{O}\left(X,\right.$ [redacted] với $g = g$ trên X. Vì vậy, theo (2.61), trên X ta có:

$$g(f - \alpha) \equiv 1.$$

Như vậy, $g\left(f - \alpha\right) \equiv 1$ trên X. Đặc biệt, $0 = g\left(z^0\right)\left(f\left(z^0\right) - \alpha\right) = 1$ (mâu thuẫn). Do đó, bất đẳng thức $\left|f\right|_X \le |f|_X$ được chứng minh.

Bước 2. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left|f(z)\right| \le |f|_A^{1-\omega(z)} |f|_X^{\omega(z)}. \tag{2.62}$$

Chứng minh bước 2. Ta chứng minh (2.62) bằng quy nạp theo *N*.

Khi $N = 1$, áp dụng định lý 1.6.4 với hàm đa điều hoà dưới $z \in D_1$ [redacted] $z)\big|$, ta được (2.62) đúng.

Giả sử (2.62) đúng với $N-1$. Ta sẽ chứng minh nó đúng với *N*. Cố định điểm tuỳ ý $z^0 = \left(z_1^0,\dots,z_N^0\right) \in X$. Giả sử

$$\delta := \sum_{j=2}^{N} \text{[redacted]}_j\big). \tag{2.63}$$

Với mỗi $a_1 \in A_1$ [redacted], ta áp dụng giả thiết của phép quy nạp với hàm f_{a_1} và thu được:

$$\left|f_{a_1}\left(z_2^0,\dots,z_N^0\right)\right| \le |f|_A^{1-\delta}\,|f|_X^{\delta}. \tag{2.64}$$

Theo (2.55) – (2.57) ta được:

$$f_{a_1}\left(z_2^0,\dots,z_N^0\right) = f\left(a_1, z_2^0,\dots,z_N^0\right), \quad a_1 \in A_1 \text{[redacted]}$$

Kết hợp với (2.64) ta suy ra

$$\left|f\left(., z_2^0,\dots,z_N^0\right)\right|_{A_1\text{[redacted]}} \le |f|_A^{1-\delta}\,|f|_X^{\delta}. \tag{2.65}$$

Mặt khác

$$\left|f\left(., z_2^0,\dots,z_N^0\right)\right|_{D_{1,\delta}} \le \left|f\right|_X \le |f|_X \tag{2.66}$$

trong đó đánh giá sau cùng có từ bước 1.

Áp dụng định lý 1.6.4 với hàm $\log\left|f\left(., z_2^0,\dots,z_N^0\right)\right|\Big|_{D_{1,\delta}}$ và theo (2.65), (2.66) ta được:

$$\left|f\left(z^0\right)\right| \le \left|f\left(., z_2^0,\dots,z_N^0\right)\right|_{A_1\text{[redacted]}}^{1-\text{[redacted]}}\left|f\left(., z_2^0,\dots,z_N^0\right)\right|_{D_{1,\delta}}^{\text{[redacted]}} = |f|_A^{1-\omega(z^0)}\,|f|_X^{\omega(z^0)}$$

trong đó đẳng thức có được từ (2.63) và đồng nhất

$$\text{[redacted]} = \frac{\text{[redacted]}}{1-\delta}$$

có do phần iv) mệnh đề 1.5.6.

Vì vậy, (2.62) được chứng minh với điểm z^0 cho trước . Vì z^0 là điểm tuỳ ý trong X do đó (2.62) được chứng minh.

Kết hợp kết quả ở mục 2.6.1 và 2.6.2 ta có định lý A được chứng minh.

KẾT LUẬN CHUNG

Bài toán nghiên cứu vấn đề thác triển luôn là bài toán mở với những người nghiên cứu. Với mục đích bước đầu tìm hiểu hướng nghiên cứu này, luận văn nghiên cứu định lý thác triển Hartogs đối với các ánh xạ chỉnh hình tách biến mà cụ thể là kết quả nghiên cứu gần đây của Nguyễn Việt Anh.

Với mục đích đó, luận văn đã đạt được các kết quả sau:

+ Hệ thống kiến thức cơ bản liên quan đến vấn đề nghiên cứu.

+ Trình bày lý thuyết Poletsky về các đĩa và định lý của Rosay trên các đĩa chỉnh hình.

+ Trình bày một dạng tổng quát của định lý thác triển Hartogs nổi tiếng đối với các hàm chỉnh hình tách, tổng quát kết quả của Alehyane – Zeriahi cho tập chữ thập là tích các đa tạp phức tuỳ ý.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyen Viet Anh (2005), "A general version of the Hartogs extension theorem for separately holomorphic mappings between complex analytic spaces", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5). Vol. IV, 219-254.

[2]. O.Alehyane et J. M. Hecart (1999), "Propriete de stabilite de la fonction extremale relative", preprint.

[3]. O. Alehyane et A. Zeriahi (2001), "Une nouvelle version du theoreme d'extension de Hartogs pour les applications separement holomorphes entre espaces analytiques", Ann. Polon. Math. 76, 245- 278.

[4]. E. Berford (1982), "The operator $(dd^c)^n$ on complex spaces", Semin. P. Lelong – H. Skoda, Analyse, Annees 1980/81, Lect. Notes Math. 919, 294-323.

[5]. E. Bedford and B. A. Taylor (1982), "A new capacity for plurisubharmonic functions", Acta Math. 149 , 1 – 40.

[6]. S. M. Ivashkovich (1997), "The Hartogs phenomenon for holomorphically convex Kahler manifolds", Math. USSR – Izv. 29, 225 – 232.

[7]. M. Jarnicki and P. Pflug (2000), *Extension of holomorphic Functions*, de Gruyter Expositions in Mathematics 34, Walter de Gruyter.

[8]. B. Josefson (1978), "On the equivalence between polar and globally polar sets for plurisubharmonic functions on C^n", Ark. Mat. 16 , 109 – 115.

[9]. Nguyễn Văn Khuê – Lê Mậu Hải, *Hàm biến phức*, NXB ĐH Quốc gia Hà Nội.

[10]. N. V. Khue and N. H. Thanh (1999), "Locally bounded holomorphic functions and the mixed Hartogs theorem", Southeast Asian Bull, 643 – 655.

[11]. M. KLIMEK, *Pluripotential theory*, London Mathematical society monographs, Oxford Univ. Press. 6, 1991.

[12]. E. A. Poletsky (1991), "Plurisubharmonic functions as solutions of variational problems", *Several complex variables and complex geometry*, Proc. Summer Res. Inst,. Santa Cruz/CA (USA) 1989, Proc. Symp. Pure Math. 52, Part 1, 163 – 171.

[13]. E. A. Poletsky (1993), "Holomorphic currents", Indiana Univ. Math. J. 42, 85 – 144.

[14]. J. P. Rosay (2003), "Poletsky theory of disks on holomorphic manifolds", Indiana Univ. Math. J. 52, 157 – 169.

[15]. B. Shiffman (1971), "Extension of holomorphic maps into Hermitian manifolds", Math. Ann. 194, 249 – 258.