ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Nguyễn Quang Trung

DẠY HỌC PHÂN HOÁ QUA TỔ CHỨC ÔN TẬP MỘT SỐ CHỦ ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

THÁI NGUYÊN, NĂM 2007

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN QUANG TRUNG

DẠY HỌC PHÂN HOÁ QUA TỔ CHỨC ÔN TẬP MỘT SỐ CHỦ ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Chuyên ngành: Lý luận và phương pháp dạy học bộ môn Toán
Mã số: 60.14.10

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. BÙI VĂN NGHỊ

THÁI NGUYÊN, NĂM 2007

MỤC LỤC

Lời cảm ơn

*Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới **PGS - TS Bùi Văn Nghị**, đã tận tình hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn này*

Tôi xin trân trọng cảm ơn:

- Phòng đào tạo sau đại học trường ĐHSP Thái Nguyên, Khoa Toán trường ĐHSP Thái Nguyên.

- Các thầy giáo ở Viện Toán học Việt Nam, trường Đại học Sư phạm Hà Nội, trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, đã hướng dẫn chúng tôi học tập trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

- Ban giám hiệu và các bạn đồng nghiệp ở tổ toán trường THPT Lương Ngọc Quyến - Thái nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi giúp tôi hoàn thành đề tài của mình.

- Bạn bè và gia đình đã động viên tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2007

Học viên

Nguyễn Quang Trung

DANH MỤC CHỮ VIẾT TẮT TRONG LUẬN VĂN

GV	: Giáo viên
HĐ	: Hoạt động
N	: Nhóm
Nxb	: Nhà xuất bản
SGK	: Sách giáo khoa
THPT	: Trung học phổ thông

LỜI MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Luật giáo dục nước Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam đã quy định rõ về phương pháp giáo dục phổ thông như sau: "*Phương pháp giáo dục phổ thông phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động tư duy sáng tạo của học sinh, phù hợp với đặc điểm từng lớp học, từng môn học, bồi dưỡng năng lực tự học, rèn luyện kỹ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn, tác động đến tình cảm đem lại niềm vui hứng thú học tập cho học sinh*".

(Luật giáo dục chương II, mục 2, điều 28).

Tiếp đó là nghị quyết hội nghị lần thứ II Ban chấp hành Trung ương Đảng Cộng sản Việt Nam khóa VII khẳng định: "*Cuộc cách mạng về phương pháp giảng dạy phải hướng vào người học, rèn luyện và phát triển khả năng suy nghĩ, khả năng giải quyết vấn đề một cách năng động, độc lập, sáng tạo ngay trong quá trình học tập ở nhà trường phổ thông. Áp dụng những phương pháp giáo dục hiện đại để bồi dưỡng cho học sinh năng lực tư duy sáng tạo, năng lực giải quyết vấn đề*".

Trong công cuộc đổi mới giáo dục Bộ giáo dục và Đào tạo cần tiến hành theo ba hướng:

+ Đổi mới sách giáo khoa ở tất cả các cấp học phổ thông.

+ Đổi mới phương pháp dạy học.

+ Đổi mới việc kiểm tra đánh giá học sinh.

Đi đôi với việc đổi mới SGK, đổi mới chương trình dạy là đổi mới phương pháp dạy học, nhưng đổi mới phương pháp dạy học lại chưa được tiến hành với phần đông giáo viên đang trực tiếp giảng dạy trên lớp hiện nay. Số ít giáo viên đã thực hiện áp dụng phương pháp mới nhưng chưa hiệu quả, chưa tích cực hóa và khơi dậy được năng lực học tập của tất cả các đối tượng học sinh. Hầu hết các giáo viên mới chỉ quan tâm đến đối tượng học sinh có lực học trung bình, nắm được kiến thức cơ bản trong SGK còn đối tượng học sinh khá giỏi có năng lực tư duy sáng tạo về toán và học sinh có lực học yếu kém còn chưa được quan tâm, bồi dưỡng trong giờ học, chưa khuyến khích phát triển tối đa và tối ưu những khả năng của từng cá nhân học sinh.

Trong quá trình đổi mới phương pháp dạy học, việc bồi dưỡng học sinh giỏi là vấn đề rất cần thiết và cần được thực hiện ngay ở trong những tiết học đại trà nhằm phát hiện và bồi dưỡng những tài năng cho đất nước trong tương lai. Không những đảm bảo chất lượng phổ cập, đại trà mà đồng thời chú trọng phát hiện và bồi dưỡng học sinh có năng khiếu về toán. Từ trước đến nay, đổi mới phương pháp dạy học chưa được chú trọng, hầu hết các giáo viên chỉ dừng ở mức độ trang bị kiến thức cơ bản cho đối tượng học sinh có lực học loại trung bình đại trà trong lớp, chưa thực sự quan tâm bồi dưỡng đến đối tượng học sinh khá giỏi. Bởi lẽ họ có tư tưởng sợ kiến thức nặng, cháy giáo án, không đủ thời gian… ngại đầu tư thời gian nghiên cứu bài soạn. Có những giáo viên vẫn dạy theo cách như đã dạy từ mấy chục năm qua, phương pháp đàm thoại chủ yếu, và về thực chất vẫn là *"thầy truyền đạt, trò tiếp nhận, ghi nhớ*". Trong mấy năm gần đây xuất hiện một hiện tượng là sử dụng khá phổ biến cách dạy "*thầy đọc, trò chép*", dạy theo kiểu nhồi nhét, dạy chay.

Ngược lại, một số giáo viên lại chỉ chú ý đến đối tượng học sinh khá giỏi song chưa thực sự quan tâm đến sự tiếp thu kiến thức của đối tượng trung bình và yếu trong lớp làm cho các em này không hiểu bài và có tư tưởng sợ học, giáo viên không bồi dưỡng lấp lỗ hổng kiến thức cho các em ngay trong giờ học chính khóa.

Bên cạnh đó là một số phương pháp dạy học truyền thống như thuyết trình, đàm thoại, giảng giải, vấn đáp…còn nhiều mặt hạn chế, chưa khắc phục được nhược điểm này.

Vậy, câu hỏi đặt ra là cần phải dạy học như thế nào để trong một giờ dạy đảm bảo: bồi dưỡng nâng cao kiến thức cho đối tượng học sinh khá giỏi, trang bị kiến thức cơ bản cho học sinh trung bình và bồi dưỡng lấp chỗ hổng cho học sinh yếu kém?

Theo tôi, hoàn toàn có thể áp dụng được trong một tiết học toán cho tất cả các đối tượng học sinh trong lớp bằng những hệ thống câu hỏi, hệ thống bài tập thích hợp, bằng những biện pháp phân hóa nội tại hợp lý, phù hợp với thực trạng học sinh trong lớp. Cần lấy trình độ phát triển chung của học sinh trong lớp làm nền tảng, bổ sung một số nội dung và biện pháp phân hóa để giúp học sinh khá giỏi đạt được những yêu cầu nâng cao trên cơ sở đã đạt được yêu cầu cơ bản. Sử dụng những biện pháp phân hóa đưa diện học sinh yếu kém lên trình độ chung. Áp dụng linh hoạt các phương pháp dạy học tiên tiến như dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề, dạy học chương trình hóa… đặc biệt là phương pháp dạy học phân hóa ngay trong giờ học sẽ giúp các đối tượng học sinh phát huy được hết khả năng của mình, tiếp thu kiến thức một cách chủ động, sáng tạo tùy theo mức độ nhận thức của từng đối tượng học sinh.

Đạt được như vậy mới thực sự là đổi mới phương pháp dạy học, góp phần xây dựng đào tạo con người mới: chủ động, sáng tạo phù hợp với sự phát triển khoa học kỹ thuật như hiện nay.

Trong những năm học vừa qua, vào thời điểm thay đổi chương trình và sách giáo khoa mới, người giáo viên dù đã vào nghề nhiều năm hoặc mới chập chững bước vào nghề đều gặp vướng mắc nhất định, đặc biệt là giáo viên toán thường gặp nhiều khó khăn hơn bởi bộ môn này chiếm tỷ trọng lớn nhất so với các bộ môn khác.

Xuất phát từ những lí do trên, chúng tôi chọn và nghiên cứu đề tài: ***" Dạy học phân hoá qua tổ chức ôn tập một số chủ đề phương trình, bất phương trình, hệ phương trình vô tỉ THPT".***

2. GIẢ THUYẾT KHOA HỌC

Nếu áp dụng phương pháp dạy học phân hóa vào chủ đề ***Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình vô tỉ*** cho học sinh THPT dựa trên hệ thống những bài toán xây dựng có sự phân bậc, thì vừa bồi dưỡng nâng cao kiến thức cho học sinh khá giỏi, vừa trang bị kiến thức cơ bản cho học sinh trung bình, vừa bồi dưỡng lấp chỗ hổng cho học sinh yếu kém. Qua đó nâng cao hiệu quả việc dạy học ở trường phổ thông

3. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

- Nghiên cứu cơ sở lí luận về phương pháp dạy học phân hoá.

- Nghiên cứu việc vận dụng phương pháp dạy học phân hóa một cách có hiệu quả về chủ đề *Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình vô tỉ* ở trường THPT.

4. NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU

- Nghiên cứu lí luận và thực tiễn dạy học phân hoá.

- Nghiên cứu lí luận và các hình thức dạy học phân hóa.

- Tại sao phải thực hiện dạy học phân hoá trong giờ toán.

- Mối quan hệ giữa phương pháp dạy học phân hoá với các phương pháp dạy học khác.

- Áp dụng dạy học phân hoá vào chủ đề *Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình vô tỉ* cho học sinh THPT như thế nào? Kết quả?

- Xác định hệ thống bài toán có phân bậc theo các chủ đề về *Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình vô tỉ.*

- Nghiên cứu những sai lầm thường gặp và biện pháp khắc phục cho học sinh trong dạy học về *Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình vô tỉ.*

- Thử nghiệm sư phạm để kiểm tra tính khả khả thi của đề tài.

5. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Phương pháp nghiên cứu lí luận: Đọc và nghiên cứu các tài liệu viết về lí luận dạy học bộ môn toán và nghiên cứu các tài liệu liên quan đến đề tài, sách giáo khoa, sách tham khảo, tạp chí nghiên cứu giáo dục, sau đó phân tích, tổng hợp, sáng tạo.

- Phương pháp điều tra - quan sát - tìm hiểu: tiến hành thăm lớp, dự giờ trao đổi, tìm hiểu ý kiến một số đồng nghiệp dạy giỏi toán, có kinh nghiệm, có tâm huyết và quan tâm đến đề tài.

- Phương pháp thực nghiệm sư phạm: Tiến hành thử nghiệm tại trường THPT Lương Ngọc Quyến - Thái Nguyên, so sánh kết quả, đánh giá sự tiến bộ của học sinh trước và sau khi áp dụng đề tài.

6. BỐ CỤC LUẬN VĂN

Lời mở đầu

Chương 1: Dạy học phân hoá

Kết luận chương 1.

Chương 2: Dạy học phân hoá về phương trình, bất phương trình và hệ phương trình vô tỉ ở trường THPT.

Kết luận chương 2.

Chương 3: Thực nghiệm sư phạm.

Kết luận chương 3.

Kết luận chung.

Tài liệu tham khảo.

CHƯƠNG 1
DẠY HỌC PHÂN HÓA

1.1. Tư tưởng chủ đạo về dạy học phân hóa

- Tư tưởng chủ đạo về dạy học phân hóa đã được đề cập rất rõ trong tài liệu [13 ; Tr.256] của GS.TSKH Nguyễn Bá Kim có thể tóm tắt như sau:

Dạy học phân hóa xuất phát từ sự biện chứng của thống nhất và phân hóa, từ yêu cầu đảm bảo thực hiện tốt tất cả mục đích dạy học, đồng thời khuyến khích phát triển tối đa và tối ưu những khả năng của từng cá nhân.

Việc kết hợp giữa giáo dục diện "*đại trà*" với giáo dục diện "*mũi nhọn*", giữa phổ cập với nâng cao trong dạy học toán ở các trường phổ thông cần được tiến hành theo các tư tưởng chỉ đạo sau:

(i) Lấy trình độ phát triển chung của học sinh trong lớp làm nền tảng

Người giáo viên dạy toán phải biết lấy trình độ phát triển chung và điều kiện chung của lớp làm nền tảng. Nội dung và phương pháp dạy học trước hết phải thiết thực với trình độ và điều kiện chung đó. Chúng ta phải tinh giảm nội dung, lược bỏ những nội dung chưa sát thực, chưa phù hợp với yêu cầu thật cơ bản.

(ii) Sử dụng những biện pháp phân hóa đưa diện học sinh yếu kém lên trình độ trên trung bình

Người giáo viên cần cố gắng đưa những học sinh yếu kém đạt được những tiền đề cần thiết để có thể hòa nhập vào học tập đồng loạt theo trình độ chung.

(iii) Có những nội dung bổ sung và biện pháp phân hoá giúp học sinh khá, giỏi đạt được những yêu cầu nâng cao trên cơ sở đã đạt được những yêu cầu cơ bản.

Dạy học phân hóa có thể được thực hiện theo hai hướng:

- Phân hóa nội tại, tức là dùng các biện pháp phân hóa thích hợp trong một lớp học thống nhất với cùng một kế hoạch học tập cùng một chương trình và sách giáo khoa.

- Phân hóa về tổ chức (còn gọi là phân hóa ngoài) tức là hình thành những nhóm ngoại khóa, lớp chuyên, dạy theo giáo trình tự chọn riêng…

1.2. Dạy học phân hóa nội tại

1.2.1. Quan điểm chung của dạy học phân hoá nội tại

- Yêu cầu xã hội đối với học sinh vừa có sự giống nhau về những đặc điểm cơ bản của người lao động trong một xã hội, vừa có sự khác nhau về trình độ nhận thức, về khuynh hướng nghề nghiệp, tài năng…

- Học sinh trong một lớp học vừa có sự giống nhau, vừa có sự khác nhau về trình độ phát triển nhân cách, trong đó sự giống nhau là cơ bản. Chính vì sự giống nhau mà ta có thể dạy học trong một lớp thống nhất. Sự khác nhau trong phát triển nhân cách của mỗi học sinh đòi hỏi người giáo viên phải có biện pháp phân hóa nội tại trong quá trình dạy học.

- Người thầy giáo rất quan trọng, sự hiểu biết của người thầy về đặc điểm tâm lý, trình độ nhận thức của từng học sinh là một điều kiện thiết yếu đảm bảo hiệu quả dạy học phân hóa.

- Dạy học phân hóa cần được xây dựng thành một kế hoạch lâu dài, có hệ thống, có mục đích.

1.2.2. Những biện pháp dạy học phân hóa

(i) Đối xử cá biệt ngay trong những pha dạy học đồng loạt

Theo tư tưởng chỉ đạo, trong dạy học cần lấy trình độ phát triển chung của học sinh trong lớp học làm nền tảng, do đó những pha cơ bản là những pha dạy học đồng loạt. Trong lớp học có nhóm học sinh khá giỏi, có nhóm học sinh yếu kém nên khi thiết kế bài giảng, người giáo viên phải gia công về nội dung và nhiệm vụ cho từng đối tượng học sinh. Cụ thể, đối với nhóm học sinh khá giỏi, giáo viên giao cho các em những nhiệm vụ có tính tìm tòi, phát hiện, đối với nhóm học sinh yếu kém thì có sự giúp đỡ chỉ bảo cụ thể, đặt câu hỏi mang tính chất trực quan hoặc có tác dụng rèn một kỹ năng nào đó. Tránh tư tưởng đồng nhất trình độ dẫn đến đồng nhất nội dung học tập cho mọi đối tượng học sinh. Để làm tốt nhiệm vụ này người giáo viên cần có biện pháp phát hiện phân loại được nhóm đối tượng học sinh về khả năng lĩnh hội kiến thức và trình độ phát triển bằng cách giao nhiệm vụ phù hợp với khả năng của từng em. Nêu những câu hỏi khó hơn cho các em có nhận thức khá giỏi, ngược lại khuyến khích các em yếu kém bởi những câu hỏi ít đòi hỏi tư duy hơn, kèm theo những câu hỏi gợi ý hoặc câu hỏi chẻ nhỏ.

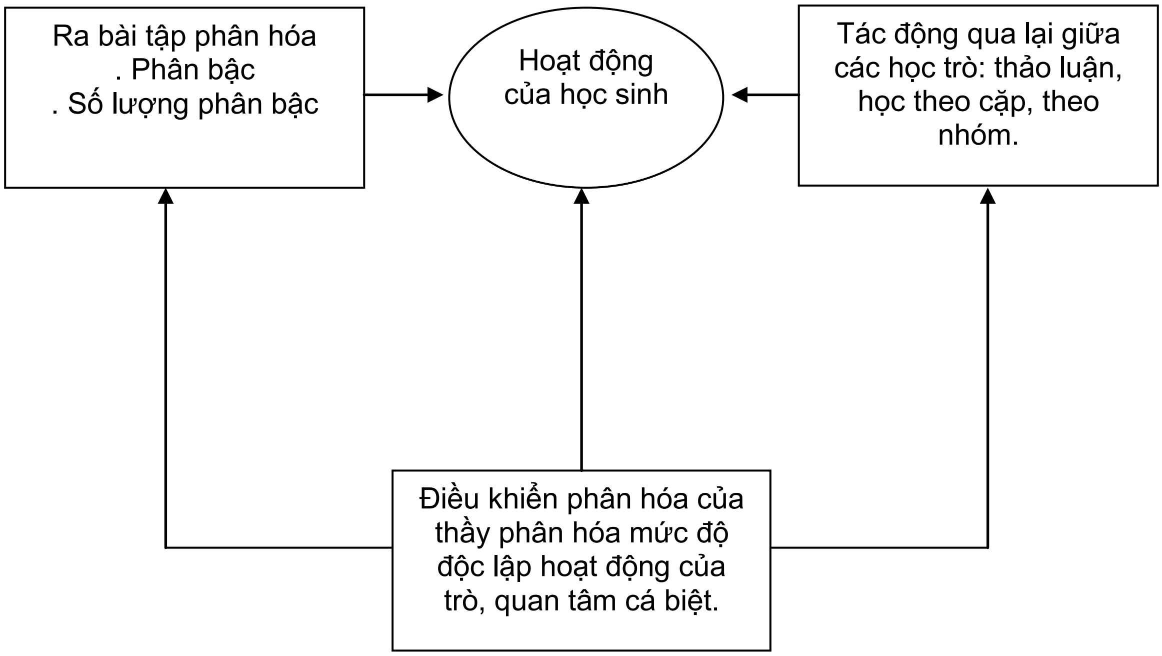
Thông thường, trong lớp học có ba nhóm đối tượng học sinh: Đối tượng học sinh yếu kém, đối tượng học sinh trung bình và đối tượng học sinh khá giỏi.

Phân hóa việc giúp đỡ, kiểm tra và đánh giá học sinh: Đối tượng học sinh yếu kém cần có sự quan tâm giúp đỡ nhiều hơn của giáo viên, các câu hỏi vấn đáp cần có gợi mở, chẻ nhỏ, còn đối tượng học khá giỏi cũng được quan tâm song có hạn chế nhằm phát huy tối đa tính tự giác, độc lập của họ. Trong việc kiểm tra, đánh giá cũng cần có sự phân hóa: ta yêu cầu cao hơn với học sinh khá giỏi, hạ thấp yêu cầu đối với học sinh yếu kém.

(ii) Tổ chức những pha phân hóa ngay trên lớp:

Trong lớp học luôn phân ra ba nhóm đối tượng khác nhau: nhóm học sinh yếu kém, nhóm có học lực trung bình và nhóm học sinh khá giỏi. Trong quá trình dạy học, vào những thời điểm thích hợp có thể thực hiện những pha phân hóa tạm thời, tổ chức cho học sinh hoạt động một cách phân hóa. Biện pháp này được sử dụng khi trình độ học sinh có sự sai khác lớn, có nguy cơ yêu cầu quá cao hoặc quá thấp nếu cứ dạy học đồng loạt.

Trong những pha này, ta giao cho học sinh những nhiệm vụ phân hóa thường thể hiện bởi bài tập phân hóa, từ đó điều khiển họ giải những bài tập này theo từng nhóm và tạo điều kiện giao lưu gây tác động qua lại cho người học. Điều này được thể hiện bởi sơ đồ sau:



Ra bài tập phân hóa là để cho các đối tượng học sinh khác nhau có thể tiến hành các hoạt động khác nhau với trình độ khác nhau, họ có thể phân hóa về yêu cầu bằng cách sử dụng mạch bài tập phân bậc, giao cho học sinh giỏi những bài tập có hoạt động ở bậc cao hơn so với các đối tượng học sinh khác. Hoặc ngay trong một bài tập, ta có thể tiến hành dạy học phân hóa nếu bài tập đó bảo đảm yêu cầu hoạt động cho cả 3 nhóm đối tượng học sinh: Bồi dưỡng lấp lỗ hổng cho học sinh yếu kém, trang bị kiến thức chuẩn cho học sinh trung bình và nâng cao kiến thức cho học sinh khá, giỏi. Để có được bài tập đảm bảo yêu cầu trên, giáo viên phải nắm chắc kiến thức trọng tâm của từng bài và đầu tư nghiên cứu cho bài soạn.

Chúng ta có thể phân hóa về mặt số lượng. Để có được kiến thức rèn luyện một kỹ năng nào đó, số học sinh yếu kém cần thiết loại bài tập cùng loại hơn số học sinh khác. Những học sinh đã hoàn thành tốt sẽ nhận thêm những bài tập khác để đào sâu và nâng cao. Điều khiển phân hóa của thầy được biểu hiện là: Thầy giáo có thể định ra yêu cầu khác nhau về mức độ yêu cầu, mức độ hoạt động độc lập của học sinh. Hướng dẫn nhiều hơn cho đối tượng này, ít hoặc không gợi ý cho học sinh khác, tùy theo khả năng và trình độ của họ. Giáo viên có thể áp dụng dạy học theo nhóm đối tượng học sinh để việc day phân hóa được hiệu quả. Chính nhờ sự phân hóa mà giáo viên có thể thấy rõ được tiến bộ của từng học sinh để tự điều chỉnh cách dạy của mình cho phù hợp. Đồng thời, thầy giáo cần quan tâm cá biệt động viên học sinh có phần thiếu tự tin, lưu ý học sinh này hay tính toán nhầm, uốn nắn kịp thời những học sinh có nhịp độ nhận thức nhanh nhưng kết quả không cao do vội vàng, chủ quan, thiếu sự suy nghĩ chín chắn, lôi kéo những học sinh có nhịp độ nhận thức chậm theo kịp tiến trình bài học. Tác động qua lại giữa những học sinh trong quá trình dạy học, đặc biệt là giải bài tập cần phát huy những tác dụng qua lại giữa những người học, bằng các hình thức học tập khuyến khích sự giao lưu giữa họ,thảo luận trong lớp, học theo cặp, học theo nhóm…Với hình thức này, có thể tận dụng chỗ mạnh của một số học sinh khác trong cùng nhóm. Tác dụng điều chỉnh này có ưu điểm so với tác dụng của thầy là: có tính thuyết phục, nêu gương, không có tính chất áp dặt…

** Phân hóa bài tập về nhà:*

Trong dạy học phân hóa, chúng ta không những thực hiện các pha phân hóa trên lớp mà còn ở những bài tập về nhà, người giáo viên cũng có thể sử dụng các bài tập phân hóa nhưng cần lưu ý:

+ Phân hóa về số lượng bài tập cùng loại: Tùy theo đặc điểm từng loại đối tượng mà giáo viên giao số lượng bài tập thích hợp. Chẳng hạn học sinh yếu kém về kĩ năng thực hành tính toán cần giao nhiều bài tập thực hiện tính toán hơn.

+ Phân hóa về nội dung bài tập: Bài tập mang tính vừa sức, tránh đòi hỏi quá cao hoặc quá thấp cho học sinh. Đối với học sinh khá giỏi cần ra thêm những bài tập nâng cao, đòi hỏi tư duy nhiều, tư duy sáng tạo. Đối với học sinh yếu kém có thể hạ thấp bài tập chứa yếu tố dẫn dắt, chủ yếu bài tập mang tính rèn luyện kỹ năng. Ra riêng những bài tập nhằm đảm bảo trình độ phân hóa cho những học sinh yếu kém để chuẩn bị cho bài học sau.

1.3. Những hình thức dạy học phân hoá

1.3.1. Dạy học ngoại khóa

Mục đích của dạy học ngoại khóa là: Gây hứng thú cho học sinh tập bổ sung, đào sâu mở rộng kiến thức nội khóa, tạo điều kiện gắn liền nhà trường với đời sống, lý thuyết với thực hành. Rèn luyện cách thức làm việc tập thể phân hóa phát hiện và bồi dưỡng năng khiếu.

+ Nội dung: Dạy học ngoại khóa bổ sung nội khóa nhưng không bị hạn chế bởi chương trình, mở rộng, đào sâu chương trình. Thực hiện tốt nguyên lý giáo dục: học đi đôi với hành, giáo dục kết hợp với lao động sản xuất, nhà trường gắn liền với lao động xã hội.

+ Tổ chức: dạy học ngoại khóa có tính chất tự nguyện không bắt buộc.

+ Phương pháp tiến hành sinh động, hấp dẫn.

+ Hình thức dạy học ngoại khóa: nói chuyện chuyên đề, thăm quan, họp báo, câu lạc bộ toán học…

Việc kiểm tra dạy học ngoại khóa nên có tính chất quần chúng để học sinh thấy rõ vai trò, trách nhiệm của mình với tập thể. Khuyến khích những hình thức kiểm tra, nhận xét công khai kết quả học tập trước lớp, toàn trường.

1.3.2. Dạy học bồi dưỡng học sinh giỏi

Bồi dưỡng học sinh giỏi là việc làm rất quan trọng và cần thiết, cần được thực hiện ngay trong những tiết học đồng loạt, bằng những biện pháp phân hóa nội tại thích hợp. Hai hình thức thường tổ chức là: Nhóm học sinh giỏi toán và lớp phổ thông chuyên toán.

+ Nhóm học sinh giỏi toán: Gồm những học sinh cùng một lớp hoặc cùng một khối, có năng lực về toán, yêu thích nghiên cứu toán và tự nguyện xin bồi dưỡng nâng cao về toán. Để đảm bảo học sinh không học lệch, nhóm không nhận một học sinh nào kém về một môn khác, dù rằng có thành tích cao về toán.

Trong những buổi sinh hoạt ngoại khóa, học sinh giỏi toán chính là lực lượng nòng cốt của nhà trường.

** Mục đích bồi dưỡng nhóm học sinh giỏi toán là:*

Nâng cao hứng thú học tập môn toán, đào sâu và mở rộng tri thức trong giáo trình. Giáo viên làm nổi bật vai trò của môn toán trong đời sống, bồi dưỡng tác phong, phương pháp nghiên cứu và thói quen tự đọc sách cho học sinh.

** Nội dung bồi dưỡng học sinh giỏi được chú trọng bởi các phần sau:*

Nghe thuyết trình những kiến thức bổ sung cho nội khóa, giải các bài tập nâng cao; học chuyên đề toán; thăm quan thực hành và ứng dụng toán.

+ Lớp phổ thông chuyên toán:

Hiện nay ở nước ta đang tập hợp những học sinh giỏi toán ở trường phổ thông thành những lớp đặc biệt, giao cho một số trường đại học hoặc các trường chuyên phụ trách. Nhưng lớp này được gọi là những lớp phổ thông chuyên toán.

Mục đích của những lớp học này là phát hiện những học sinh có năng lực về toán, bồi dưỡng các em phát triển tốt về mặt này trên cơ sở giáo dục toàn diện, góp phần đào tạo đội ngũ cán bộ khoa học kỹ thuật giỏi, một số có thể trở thành nhân tài đất nước. Để thực hiện tốt mục đích đào tạo lớp chuyên toán, chương trình các môn học ở các lớp này được Bộ giáo dục và Đào tạo quy định là chương trình phân hóa phổ thông có thêm một số giờ toán và ngoại ngữ. Trong đó chú trọng những ứng dụng thực tiễn của toán học, tăng cường một số yếu tố về lôgic học, bổ sung một số yếu tố về toán học hiện đại…

1.3.3. Dạy học giúp đỡ học sinh yếu kém toán

- Trong trường phổ thông, những học sinh có kết quả toán tường xuyên dưới trung bình gọi là học sinh yếu toán. Việc lĩnh hội tri thức, rèn luyện kỹ năng đối với những học sinh này đòi hỏi nhiều thời gian và công sức hơn đối với học sinh khác. Song song với việc giảng dạy trên lớp, giáo viên cần tách riêng đối với nhóm học sinh yếu kém ngoài giờ lên lớp.

- Nội dung giúp đỡ học sinh yếu kém nên nhằm vào những phương hướng sau:

+ Đảm bảo trình độ xuất phát của học sinh: Cần trang bị cho các em những tiền đề cần thiết để đảm bảo trình độ xuất phát cho những tiết lên lớp.

+ Lấp lỗ hổng về kiến thức kỹ năng, đây là một điểm yếu rõ nét và phổ biến của học sinh yếu kém. Thông qua những giờ lý thuyết và thực hành, giáo viên tập cho học sinh có ý thức phát hiện ra lỗ hổng kiến thức của mình và biết tra cứu tài liệu, sách vở để tự lấp lỗ hổng đó.

+ Luyện những bài tập vừa sức: Do tính vững chắc của kiến thức cần được coi trọng, người giáo viên cần dành thì giờ để học sinh tăng cường luyện tập vừa sức mình.

+ Đảm bảo học sinh hiểu đề bài, tăng số lượng bài tập cùng thể loại và vừa mức độ.

+ Sử dụng các bài tập phân bậc cần trang bị cho họ những hiểu biết sơ đẳng về phương pháp học toán đó là: nắm được lý thuyết mới làm bài tập, đọc kỹ đầu bài, hình vẽ cẩn thận, làm ra nháp trước … Đấu tranh kiên trì với thói xấu của học sinh: chưa học lý thuyết đã làm bài tập, không đọc kỹ đầu bài đã lao vào làm bài, hình vẽ cẩu thả, viết nháp lộn xộn…

1.4. Vai trò của dạy học phân hóa

1.4.1. Vai trò và nhiệm vụ môn toán trong trường phổ thông

(i) Vai trò của toán học trong đời sống và trong khoa học

Toán học có tầm quan trọng rất lớn trong đời sống và trong các ngành khoa học khác. Tất cả các môn khoa học đều nghiên cứu dựa trên nền tảng của toán học. "*Một khoa học chỉ thực sự phát triển nếu nó có thể sử dụng được phương pháp của toán học*" đó là lời tiên đoán của Mác đã được chứng minh bằng sự phát triển của khoa học kỹ thuật ngày nay.

Ở trường phổ thông, môn toán có vị trí rất quan trọng. Nó đóng góp một phần to lớn trong việc thực hiện mục tiêu của giáo dục phổ thông góp phần tạo ra những con người làm chủ tri thức khoa học và công nghệ hiện đại, có tư duy sáng tạo, có kỹ năng thực hành giỏi, có tác phong công nghiệp, có tính tổ chức kỷ luật, có sức khỏe và là những người thừa kế xây dựng CNXH vừa "*hồng*" vừa "*chuyên*" như lời dặn của Bác Hồ vĩ đại.

Trong dạy học toán, bài tập toán có vai trò rất quan trọng, nó được sử dụng với nhiều dụng ý khác nhau. Một bài tập có thể tạo tiền đề xuất phát để gợi động cơ, để làm việc với nội dung mới, để củng cố hoặc kiểm tra bài giảng…Mỗi bài tập cụ thể được đặt ở thời điểm nào đó của quá trình dạy học đều chứa đựng một cách tường minh hay tiềm ẩn những chức năng khác nhau, những chức năng này đều hướng đến các mục đích dạy học.

(ii) Mục đích việc dạy toán trong trường phổ thông

Môn toán có vị trí rất quan trọng, do đó mục đích của nó cần được người giáo viên nghiên cứu kỹ lưỡng. Cần lưu ý những mục đích cơ bản sau đây:

- Làm cho học sinh nắm được một cách chính xác,vững chắc có hệ thống những kiến thức và kỹ năng toán học phổ thông cơ bản hiện đại, sát với thực tiễn. Có năng lực vận dụng những tri thức đó vào các tình huống khác nhau trong cuộc sống, trong lao động sản xuất và trong học tập khoa học.

- Phát triển những năng lực phẩm chất trí tuệ, giúp cho họ biến những phẩm chất thu nhận được thành phẩm chất của bản thân mình, thành công cụ để nhận thức và hành động đúng đắn trong các lĩnh vực hoạt động học tập, trong cuộc sống thường ngày.

- Giáo dục cho học sinh về tư tưởng, đạo đức, lối sống, thẩm mỹ của người công dân, yêu nước trung thực và giản dị.

- Phát triển ở mỗi học sinh khả năng học tập, tiếp thu kiến thức toán học, đồng thời phát hiện và bồi dưỡng học sinh có năng khiếu về toán.

(iii) Nhiệm vụ giảng dạy toán ở trường phổ thông

- Nhiệm vụ cơ bản về giảng dạy toán ở trường phổ thông là truyền thụ tri thức kỹ năng toán học, kỹ năng vận dụng toán học vào cuộc sống.

- Phát triển năng lực tư duy toán học cho tất cả học sinh ở trình độ chung, trình độ phổ thông.

- Giáo dục tư tưởng chính trị, phẩm chất đạo đức thẩm mỹ đúng đắn phù hợp với con người XHCN.

- Bảo đảm hoàn thiện chất lượng phổ thông, chú trọng phát hiện và bồi dưỡng năng khiếu về toán, tạo ra những hạt nhân về toán trong tương lai.

1.4.2. Những ưu, nhược điểm về dạy học phân hóa trong trường phổ thông

(i) Ưu điểm dạy học phân hóa

- Trong các phương pháp giảng dạy toán thì phương pháp dạy học phân hóa là một phương pháp khá hiệu quả. Trong giờ học toán ở trường phổ thông, việc bảo đảm thực hiện tốt các mục đích dạy học đối với tất cả các đối tượng học sinh, khuyến khích phát triển tối đa và tối ưu những khả năng của cá nhân là yêu cầu vô cùng quan trọng mà dạy học phân hóa đã đạt được.

- Dạy học phân hóa phát huy tốt khả năng cá thể hóa hoạt động của người học, đưa người học trở thành chủ thể của quá trình nhận thức, tiếp thu kiến thức một cách chủ động, sáng tạo phù hợp với năng lực nhận thức của bản thân. Bên cạnh đó người giáo viên có cơ hội hiểu và nắm được mức độ nhận thức của từng cá thể người học để đề ra những biện pháp tác động, uốn nắn kịp thời và có đánh giá một cách chính xác, khách quan.

- Dạy học phân hóa gây được hứng thú học tập cho mọi đối tượng học sinh, xóa bỏ mặc cảm tự ti của đối tượng học sinh có nhịp độ nhận thức thấp cùng tham gia tìm hiểu nội dung, yêu cầu của bài. Kích thích, gây hứng thú học tập cho các đối tượng học sinh khá giỏi phát huy hết khả năng, trí tuệ của mình. Không gây cảm giác nhàm chán cho học sinh khá giỏi.

- Dạy học phân hóa trong giờ dạy toán dễ dàng thực hiện, không gây khó khăn, trở ngại cho giáo viên trong việc chuẩn bị cũng như tiến hành giảng dạy. Không nhất thiết đòi hỏi cần có các phương tiện thiết bị hiện đại kèm theo, phù hợp với thực trạng điều kiện vật chất còn thiếu thốn ở nước ta hiện nay.

- Dạy phân hóa xóa bỏ mặc cảm, khoảng cách giữa học sinh yếu kém với học sinh khá giỏi, đưa các em sát lại gần nhau hơn. Tạo điều kiện cho đối tượng học sinh yếu kém học hỏi, thảo luận với học sinh khá giỏi. Các em có cơ hội giúp đỡ nhau cùng phát triển, tiếp thu một cách nhanh chóng tri thức của nhân loại.

(ii) Nhược điểm của dạy học phân hóa

Nhược điểm cơ bản là người giáo viên trước khi lên lớp phải chuẩn bị bài soạn, hệ thống bài tập phân hóa được chọn lọc cẩn thận, đầu tư nhiều thời gian công sức. Tổ chức lớp học hiện nay hầu hết đều có số học sinh đông, chênh lệch nhiều về trình độ có thể gây khó khăn cho các giáo viên mới, giáo viên dạy thay có thể chưa kịp nắm được trình độ nhận thức của từng học sinh. Có thể khắc phục nhược điểm này bằng cách người dạy tạo điều kiện cho lớp học nề nếp học tập tốt, các nhóm đối tượng học sinh được phân hóa ổn định trong giờ học.

1.4.3. Mối quan hệ giữa dạy học phân hóa và các phương pháp dạy học khác

Thực tế giảng dạy cho thấy không có một phương pháp dạy học nào là tối ưu, nhưng người giáo viên chúng ta có thể phối kết hợp các phương pháp, phương tiện dạy học khác trong giờ học để có được hiệu quả cao nhất. Việc phân hóa từng bộ phận của quá trình dạy học thường dễ thực hiện và đạt hiệu quả cao hơn khi áp dụng cho cả một quá trình. Vì thế, nên áp dụng dạy học phân hóa kết hợp với những phương pháp dạy học khác, sử dụng các phương tiện dạy học khác trong các giờ học. Sự phối hợp các xu hướng dạy học không truyền thống có khả năng nâng cao hiệu quả và chất lượng giờ học, Mỗi phương pháp dạy học đều có ưu, nhược điểm khác nhau khi thực hiện một quá trình dạy học, tuy nhiên chúng ta cần cân nhắc ưu nhược điểm của từng phương pháp để có thể dùng xen kẽ, bổ trợ cho nhau.

Chẳng hạn, dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề là phương pháp dạy học phát huy tính tự giác, tích cực, chủ động, sáng tạo của người học, đặc biệt là trong những tình huống dạy học các khái niệm, các tri thức mới. Nếu trong hệ thống câu hỏi dẫn dắt, chúng ta kết hợp phương pháp dạy học phân hóa sẽ giúp cho tất cả các đối tượng học sinh cùng tham gia khám phá tri thức mới tùy theo khả năng nhận thức của từng em. Có nhiều ý kiến cho rằng, chỉ có những học sinh khá giỏi, có năng lực học tập toán, có tư duy nhanh mới có khả năng khám phá những tri thức mới bằng phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vần đề. Song, trong thực tế không hoàn toàn như vậy. Trong hệ thống câu hỏi dẫn dắt học sinh đi tìm tri thức mới, chúng ta cần quan tâm đến những câu hỏi mang tính tái hiện tri thức, những câu hỏi không đòi hỏi tư duy sâu để giúp học sinh trung bình, yếu kém cùng tham gia, hòa mình vào khí thế học tập chung của lớp.

Phương pháp dạy học chương trình hóa cũng có nhiều ưu điểm góp phần tích cực hóa hoạt động nhận thức của từng học sinh. Ở phương pháp này chúng ta dễ dàng đánh giá được năng lực học tập, sự tiến bộ và những sai lầm của từng học sinh. Để áp dụng được phương pháp này cần phải đầu tư rất nhiều thời gian công sức, kể cả vật chất, chương trình biên soạn rất cồng kềnh. Chính vì vậy, người giáo viên nên sử dụng phương pháp này trong từng bộ phận của quá trình dạy học.

Như vậy, trong dạy học phân hóa, giáo viên có thể sử dụng kết hợp tất cả các phương pháp dạy học đang tồn tại trong nhà trường nhưng phải có sự vận dụng linh hoạt, đặc biệt sử dụng các thao tác kỹ thuật dạy học nhóm cần sử dụng triệt để hơn.

1.5. Quy trình dạy học phân hóa

1.5.1. Nhiệm vụ của thầy trước khi lên lớp

(i) Phân hóa nhóm đối tượng học sinh

- Sự giống và khác nhau về yêu cầu xã hội, về trình độ phát triển nhân cách của mỗi cá thể học sinh đòi hỏi một quá trình dạy học thống nhất với những biện pháp phân hóa nội tại. Nhiệm vụ của giáo viên là nghiên cứu tìm hiểu những mặt mạnh và yếu trong năng lực, trình độ phát triển của học sinh để có biện pháp cụ thể tác động đến đối tượng. Có như vậy mới giúp cho tất cả học sinh đều tiếp thu được những kiến thức và kỹ năng tối thiểu. Đồng thời, phát hiện và đào tạo nhân tài ngay từ trong nhà trường.

- Trong quá trình dạy học, giáo viên thường xuyên theo dõi, tìm hiểu, kiểm tra để phân loại học sinh trong lớp, thường chia làm 3 nhóm đối tượng học sinh: Nhóm có nhịp độ nhận thức nhanh (nhóm khá giỏi), nhóm có nhịp độ nhận thức chậm (nhóm yếu kém), và nhóm có nhịp độ nhận thức trung bình. Qua đó, đề ra những yêu cầu khác nhau đối với từng loại: mức độ khó dễ các câu hỏi đàm thoại, mức độ yêu cầu đối với phương pháp học tập được nghiên cứu, số lượng và yêu cầu của các bài tập làm ở lớp, ở nhà. Nhưng đối với hai đối tượng khá giỏi và yếu kém thường có biểu hiện như thế nào ?

- Đối với học sinh yếu kém thường biểu hiện: Không nắm được kiến thức và kỹ năng cơ bản, có những sai lầm nghiêm trọng, kết quả kiểm tra thường dưới mức trung bình … Song giáo viên cần tìm ra nguyên nhân học kém toán: có em học kém vì năng lực toán yếu, có em học yếu vì nguyên nhân khác (gia đình khó khăn, không có điều kiện thời gian học tập, có vướng mắc về tư tưởng nên chưa tập trung …), để từ đó có biện pháp giáo dục, giúp đỡ như: xây dựng lòng tự tin ở bản thân, thường xuyên theo dõi, động viên kịp thời, tranh thủ sự quan tâm của gia đình và xã hội. Bên cạnh đó cũng cần nghiên cứu những đặc điểm về tư duy, về phương pháp suy nghĩ thể hiện ở 3 đặc điểm sau: nhiều "*lỗ hổng*" về tri thức, kỹ năng, tiếp thu chậm, phương pháp học tập toán chưa tốt. Không nên đồng nhất các em học kém toán với nhau mà cần phân kiểu học của từng học sinh kém toán để có phương pháp giúp đỡ, cụ thể hơn như hai kiểu kém sau: kiểu kém trực quan hình tượng và kiểu kém từ - logic. Ở loại học sinh có thành phần từ - logic nổi trội hơn thì nên hình thành cho các em khái niệm toán học từ lời nói, đi từ tư duy đến hình tượng. Ở loại học sinh có thành phần trực quan - hình tượng mạnh hơn thì nên dùng con đường khái quát hóa trên cơ sở trực quan, đi từ hình tượng đến tư duy.

- Đối với học sinh khá giỏi có năng lực học tập toán: các em có khả năng học toán thường có xu hướng thích giải nhiều bài toán, thích giải các bài toán khó, các bài toán đòi hỏi tư duy sáng tạo (là điều rất tốt), nhưng lại coi nhẹ việc học lý thuyết, coi nhẹ các bài toán thông thường. Do đó các em không nắm chắc kiến thức cơ bản, hoặc không thành tạo các kỹ năng tính toán, vẽ hình … Vì vậy, điều quan trọng nhất là hình thành ở các em lòng ham thích, hứng thú, say mê học toán, thường xuyên giáo dục đức tính kiên trì, tỉ mỉ, cẩn thận, khiêm tốn, sẵn sàng giúp đỡ bạn cùng lớp tiến bộ … Trong giờ học, giáo viên cần suy nghĩ tìm tòi để đề ra cho hoc sinh những câu hỏi đào sâu lý thuyết (chẳng hạn: trả lời câu hỏi, bài tập trong sách giáo khoa bằng cách khác …) hoặc khai thác khía cạnh khác nhau của các bài tập đơn giản.

- Với học sinh trung bình cần phải nắm thật chắc kiến thức cơ bản sách giáo khoa, làm đầy đủ và đạt yêu cầu các bài tập sách giáo khoa với sự gợi ý ở mức độ hạn chế của giáo viên, có thể tiếp thu phần nào kiến thức nâng cao của học sinh khá giỏi.

Biện pháp điều tra, phát hiện và phân loại đối tượng học sinh về khả năng lĩnh hội kiến thức và trình độ phát triển thông qua quan sát, kiểm tra, tìm hiểu … có thể được tiến hành ngay trong những tuần đầu năm học và trong suốt quá trình dạy học, giáo viên thường xuyên theo dõi điều chỉnh lại nhân sự nhóm, chuyển lên nhóm trên hoặc xuống nhóm dưới nếu có thành viên nào trong nhóm tỏ ra tiến bộ hay thụt lùi. Tuy nhiên, để đảm bảo mục đích và hiệu quả sư phạm, ta có thể tùy thuộc vào đặc điểm và số lượng học sinh trong lớp mà có thể phân thành nhiều nhóm (chẳng hạn phân thành 9 nhóm: 2 nhóm khá giỏi, 5 nhóm trung bình, 2 nhóm yếu kém) vừa khơi gợi niềm tin ở khả năng mỗi cá nhân, tránh mặc cảm, tự ti, vừa tạo nhu cầu thi đua học tập giữa các nhóm.

(ii) Thiết kế bài học

- Nghiên cứu nắm vững nội dung và yêu cầu của bài học: Đây là vấn đề trước tiên và đặc biệt quan trọng của người thầy giáo trong việc thiết kế bài học có chất lượng. Có nắm vững nội dung kiến thức bài học thì giáo viên mới có thể hình thành các phương pháp dạy học để vận dụng vào từng tình huống cụ thể cho hiệu quả, đạt được mục đích dạy học của mình. Giáo viên cần làm cẩn thận và xem xét nhiều khía cạnh khác nhau của các bài tập trong sách giáo khoa, và những bài tập cho học sinh làm thêm.

- Thiết kế các pha dạy học đồng loạt trong các pha dạy học đồng loạt: nên sử dụng kết hợp phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề, dạy học chương trình phân hóa với các câu hỏi phân hóa. Khi đưa các yếu tố phát hiện và giải quyết vấn đề kết hợp cùng hệ thống câu hỏi phân hóa vào bài học các tri thức khái niệm, các định lý … sẽ phần phát triển tư duy, tăng cường tính tự giác, chủ động, sáng tạo cho các đối tượng học sinh. Những tri thức mới được kiến tạo nhờ quá trình phát hiện và giải quyết vấn đề, học sinh được khám phá, phân tích vấn đề, để đề xuất và thực hiện được phương pháp giải quyết. Tạo ra các tình huống có vấn đề là thành phần quan trọng trong dạy học theo xu hướng tích cực hóa quá trình học tập của học sinh. Tình huống có vấn đề là tình huống khó khăn đặt ra, để khắc phục nó phải tìm tòi suy nghĩ, phải có tri thức mới, những biện pháp mới, những cách giải quyết thích hợp hay có thể là tình huống có mâu thuẫn. Để phát huy tính tích cực, tự giác học tập của học sinh cần tạo ra các tình huống có vấn đề để học sinh khám phá ra tri thức mới. Có nhiều biện pháp tạo ra tình huống.

- Khai thác phần kiểm tra bài cũ, đặt vấn đề mới đòi hỏi nghiên cứu.
- Chọn một ứng dụng của kiến thức mới, đặt học sinh trước mâu thuẫn chưa giải quyết được với kiến thức cũ.
- Chọn một bài toán mà kiến thức mới giải quyết nhanh hơn.
- Gắn cho các phép tính với nội dung thực tế tạo cho học sinh hứng thú thực hiện phép tính đó.
- Tình huống có vấn đề được xuất hiện khi giáo viên đặt ra các tình huống phải lựa chọn.

Trong dạy học, phát hiện và giải quyết vấn đề giáo viên đưa học sinh vào tình huống có vấn đề rồi giúp học sinh giải quyết vấn đề đặt ra bằng hệ thống câu hỏi dẫn dắt. Bằng cách đó học sinh vừa nắm được tri thức mới, vừa nắm được phương pháp đi tới tri thức đó, lại vừa phát triển tư duy sáng tạo và có tiềm năng vận dụng tri thức vào những tình huống mới, phát hiện kịp thời và giải quyết hợp lý các vấn đề xảy ra.

- Làm cho hệ thống câu hỏi trở thành một quá trình dẫn dắt học sinh suy luận.

- Không lặp lại các câu hỏi một cách đơn điệu nên hỏi cùng nội dung dưới nhiều hình thức khác nhau. Có như vậy các em vừa nắm được bản chất vấn đề, vừa biết vận dụng kiến thức vào những tình huống khác nhau.

- Hệ thống câu hỏi phân hóa song vẫn tác động đến nhiều loại đối tượng. Trong các câu hỏi phải có cả những câu mà học sinh kém cũng có thể trả lời được vì nó đã có quá trình dẫn dắt và học sinh khá cũng phải theo dõi câu hỏi dễ dàng vì đằng sau nó là sự phát triển mới.

(iii) Ra bài tập phân hóa:

Ý đồ ra bài tập phân hóa để cho học sinh khác nhau có thể tiến hành các hoạt động phù hợp với trình độ khác nhau của họ. Phải dựa vào đặc điểm và sự phân loại học sinh trong lớp để giáo viên lựa chọn bài tập thích hợp. Có thể phân hóa về yêu cầu bằng cách cho sử dụng mạch bài tập phân bậc, giao cho học sinh giỏi những bài tập có hoạt động ở bậc cao hơn so với các đối tượng học sinh khác. Đối với học sinh yếu kém, có thể giao cho các bài tập phân bậc "*mịn*". Cụ thể là khoảng cách giữa hai bậc liên tiếp không quá cao, quá xa. Nhiều bậc học sinh yếu kém gộp lại thành một bậc của học sinh trung bình hoặc khá giỏi. Hoặc ngay trong một bài tập người giáo viên cũng có thể tiến hành dạy phân hóa nếu như bài tập đó đảm bảo yêu cầu cho cả ba nhóm đối tượng học sinh: Bồi dưỡng lấp lỗ hổng cho học sinh yếu kém, trang bị kiến thức chuẩn bị cho học sinh trung bình và nâng cao cho học sinh khá, giỏi.

(iii) Xem xét các yếu tố ảnh hưởng đến quá trình học tập: môi trường, phương tiện, điều kiện dạy học …. Trong mỗi tiết học, sử dụng các phương tiện dạy học và đồ dùng học tập khác nhau, đây là một yếu tố ảnh hưởng rất lớn đến chất lượng giờ học, cần được giáo viên thực sự quan tâm và chú trọng. Thông thường trong các giờ học, giáo viên tổ chức cho học sinh học tập trong lớp học song một số tiết học đòi hỏi phải ở không gian rộng hơn, hay ở

ngoài trời trong các tiết thực hành, do vậy giáo viên cần chú ý đến điều kiện sân bãi, môi trường xung quanh, điều kiện thời tiết … các yếu tố đó có ảnh hưởng lớn đến sức khỏe, tâm lý, tinh thần học tập của học sinh nên giáo viên cần đề ra phương án khác nhau để đảm bảo chất lượng giờ học.

Phương tiện dạy học: Mô hình, hình vẽ, SGK, phiếu học tập, máy chiếu, máy vi tính … góp phần chứa đựng và truyền tải thông tin, tạo điều kiện thuận lợi cho việc tổ chức hoạt động học tập nên là một yếu tố quan trọng không thể thiếu được trong đổi mới phương pháp dạy học theo xu hướng tích cực hóa hoạt động người học. Mỗi giờ học cần sử dụng các phương tiện dạy học khác nhau tùy thuộc vào các chức năng của từng loại phương tiện như: kiến tạo tri thức, rèn luyện kỹ năng, kích thích hứng thú học tập, tổ chức điều khiển quá trình học tập … Giáo viên nên biết phối hợp sử dụng các phương tiện dạy học khác nhau trong từng tình huống cụ thể để lấy điểm mạnh của phương tiện này bổ sung điểm yếu của phương tiện khác, nhằm phát huy tối đa sức mạnh tổng hợp của hệ thống phương tiện dạy học trong mỗi giờ học. Phiếu học tập, máy chiếu, máy vi tính là những phương tiện thể hiện rõ tính ưu việt khi tổ chức các pha phân hóa trong giờ học nên giáo viên biết sử dụng hợp lý, chúng vừa góp phần tổ chức điều khiển quá trình học tập đến từng cá thể học sinh phát huy khả năng của mình, kích thích hứng thú học tập, vừa góp phần hợp lý hóa công việc của thầy và trò, trong đó các yếu tố thời gian, khối lượng công việc được đảm bảo.

1.5.2. Nhiệm vụ của trò trước khi lên lớp

Thực hiện tốt nhiệm vụ được giao về nhà: Học và làm bài tập ở nhà, nghiên cứu trước nội dung bài học, chuẩn bị đồ dùng, dụng cụ phương tiện học tập cần thiết cho giờ học …

- Học và làm bài tập về nhà: Đây là một trong những nhiệm vụ quan trọng nhất mà mỗi học sinh cần phải thực hiện tốt trước khi đến lớp. Học bài ở đây không có nghĩa là phải học thuộc theo kiểu rập khuôn mà cần học theo kiểu hiểu rõ bản chất vấn đề, biết vận dụng linh hoạt các kiến thức đã học để áp dụng vào các tình huống cụ thể, các bài tập cụ thể. Song, khi giao nhiệm vụ về nhà cho học sinh thì giáo viên cần lưu ý đảm bảo tính vừa sức để tạo niềm tin vào khả năng bản thân cho học sinh. Đối với học sinh yếu kém chỉ nên yêu cầu học và giải bài tập trong sách giáo khoa, có lược bỏ một số bài tập đòi hỏi tư duy cao, tăng lượng bài tập rèn luyện kỹ năng. Đối với học sinh khá giỏi ngoài việc học nắm vững lý thuyết và giải các bài tập trong sách giáo khoa cần làm thêm một số bài tập nâng cao đòi hỏi tư duy nhiều hơn mà giáo viên đã lựa chọn và giao cho.

- Chuẩn bị đồ dùng học tập, phương tiện học tập cũng là một yếu tố quan trọng đảm bảo chất lượng giờ học trên lớp.

1.5.3. Quy trình tổ chức giờ học

(i) Tổ chức các pha dạy học đồng loạt

- Kết hợp và sử dụng các phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề, dạy học chương trình hóa, lý thuyết tình huống … nhằm mục đích giúp học sinh tiếp thu tốt các tri thức khái niệm và định lý. Các phương pháp này có ưu điểm rất lớn là tạo ra tình huống gợi vấn đề, điều khiển học sinh hoạt động tự đánh giá, tích cực chủ động và sáng tạo.

- Đối xử cá biệt trong các pha đồng loạt, Thu hút tất cả các đối tượng học sinh trong lớp tham gia tìm hiểu nội dung bài học bằng cách giao nhiệm vụ phù hợp với khả năng từng đối tượng học sinh, nêu những câu hỏi khó hơn cho các em có nhận thức khá giỏi, khuyến khích các em học sinh yếu kém bằng những câu hỏi ít đòi hỏi tư duy hơn, kèm theo những câu hỏi gợi ý hoặc câu hỏi chẻ nhỏ.

(ii) Điều khiển các pha phân hóa

+ Trong việc điều khiển học sinh hoạt động trong các pha phân hóa thầy giáo có thể định ra các yêu cầu khác nhau về mức độ yêu cầu, mức độ hoạt động độc lập của học sinh, hướng dẫn nhiều hơn cho đối tượng học sinh này, ít hoặc không gợi ý học sinh khác, tùy theo khả năng và trình độ của họ. Giáo viên có thể áp dụng dạy học theo nhóm đối tượng học sinh (hay sử dụng phiếu học tập) để việc dạy học phân hóa được hiệu quả hơn.

Việc tổ chức điều khiển quá trình giải bài tập phân hóa của học sinh có thể được tiến hành theo các bước sau:

* *Bước 1*: Giáo viên tổ chức, giao nhiệm vụ cho các đối tượng học sinh khá, giỏi, trung bình, yếu kém 3 loại bài tập khác nhau tùy theo khả năng, trình độ nhận thức của từng nhóm (bài tập phân hóa mà giáo viên đã chuẩn bị từ trước như đã nói ở trên) và đặt ra mục đích yêu cầu một cách rõ ràng cho học sinh.

* *Bước 2*: Từng cá nhân học sinh giải bài tập độc lập (dưới sự quan sát, hướng dẫn gợi mở của giáo viên). Giáo viên có thể định ra các yêu cầu khác nhau về mức độ hoạt động độc lập của mỗi học sinh, hướng dẫn nhiều hơn cho học sinh này ít hoặc khơi gợi ý cho học sinh khác, tùy theo khả năng và trình độ của họ.

* *Bước 3*: Đại diện mỗi nhóm có thể được chỉ định hoặc tự giác lên trình bày phương án giải quyết.

* *Bước 4*: Thảo luận nhóm: giáo viên điều khiển học sinh trong nhóm, trong lớp tham gia thảo luận giao lưu, đóng góp ý kiến bổ sung. Tuy nhiên giáo viên có thể khuyến khích học sinh tham gia công việc của nhóm kế tiếp nếu đã hoàn thành công việc của nhóm mình.

* *Bước 5:* Giáo viên tổng kết, chốt lại ý kiến đúng.

Chính nhờ sự phân hóa như vậy giáo viên có thể thấy rõ sự tiến bộ của từng học sinh để tự điều chỉnh cách dạy học của mình cho phù hợp. Đồng thời, giáo viên cần quan tâm cá biệt: động viên những học sinh có phần thiếu tự tin, lưu ý những học sinh hay tính toán nhầm lẫn, uốn nắn kịp thời những học sinh có nhịp độ nhận thức nhanh nhưng kết quả không cao do vội vàng, chủ quan, thiếu sự suy nghĩ chín chắn, lôi kéo những học sinh có nhịp độ nhận thức chậm theo kịp tiến trình của giờ học.

(iii) Giao bài tập phân hóa về nhà

Trong dạy học phân hóa, không chỉ thực hiện các pha phân hóa trên lớp mà ngay cả khi giao bài tập về nhà cho học sinh, người giáo viên cũng có thể sử dụng các bài tập phân hóa song cần lưu ý:

- Phân hóa theo số lượng bài tập cùng loại phù hợp với từng loại đối tượng để cùng đạt một yêu cầu. Tùy theo đặc điểm từng loại đối tượng học sinh đề ra bài tập thực hành tính toán nhiều hơn hay ít hơn.

- Phân hóa về nội dung bài tập mang tính vừa sức để tránh đòi hỏi quá cao đối với học sinh yếu kém và quá thấp đối với học sinh khá giỏi. Giáo viên cần ra những bài tập nâng cao, đòi hỏi tư duy nhiều hơn cho học sinh khá giỏi, bài tập của học sinh yếu kém có thể hạ thấp, chia nhỏ nhiều hơn, chủ yếu bài tập mang tính rèn luyện kỹ năng. Ra riêng những bài tập nhằm đảm bảo trình độ xuất phát cho những học sinh yếu kém để chuẩn bị cho bài học sau. Đối với đối tượng học sinh trung bình giáo viên có thể ra những bài tập trong SGK hay sách bài tập, tuy nhiên có thể lược bớt một số bài tập khó.

1.6. Phân bậc hoạt động trong dạy học môn toán

Nội dung tư tưởng chủ đạo này là: Phân bậc hoạt động làm một căn cứ cho việc điều khiển quá trình dạy học.

Một điều quan trọng trong dạy học là phải xác định được những mức độ yêu cầu thể hiện ở những hoạt động mà học sinh phải đạt được vào cuối cùng hay ở những thời điểm trung gian. Ở đây, thuật ngữ "*mức độ*", và do đó cả thuật ngữ "*phân bậc*" có thể hiểu vừa theo nghĩa "*vĩ mô*" vừa theo nghĩa "*vi mô*". Theo nghĩa vi mô, ta nói tới những giai đoạn khác nhau của toàn bộ thời gian thời gian học ở trường phổ thông, của một lớp hay một cấp học nào đó. Theo nghĩa vi mô, những mức độ hoạt động được hiểu là những mức độ khó khăn hay mức độ yêu cầu trong một khoảng thời gian ngắn, trong một tiết học.

Hiện nay việc phân bậc nhiều hoạt động quan trọng còn quá chung, có khi chưa được chú ý, nhìn chung chưa đáp ứng được nhu cầu của thực tế dạy học. Ngay trong hoàn cảnh việc phân bậc hoạt động theo nghĩa vi mô chưa được giải quyết tốt trong chương trình và sách giáo khoa, người thầy giáo vẫn có thể và cần thiết phải cố gắng thực hiện sự phân bậc hoạt động một cách linh hoạt. Dù theo nghĩa vĩ mô hay vi mô, ta đều cần nắm được những căn cứ để tiến hành việc này.

1.6.1. Những căn cứ phân bậc hoạt động

Việc phân bậc hoạt động có thể dựa vào những căn cứ sau:

(i) Sự phức tạp của đối tượng hoạt động

Đối tượng hoạt động càng phức tạp thì hoạt động đó càng khó thực hiện. Vì vậy, có thể dựa vào sự phức tạp của đối tượng để phân bậc hoạt động.

(ii) Sự trừu tượng, khái quát của đối tượng

Đối tượng hoạt động càng trừu tượng, khái quát có nghĩa là yêu cầu thực hiện hoạt động càng cao. Cho nên có thể coi mức độ trừu tượng, khái quát của đối tượng là một căn cứ để phân bậc hoạt động,

(iii) Nội dung của hoạt động

Nội dung của hoạt động chủ yếu là những tri thức liên quan đến hoạt động và những điều kiện khác của hoạt động. Nội dung hoạt động càng gia tăng thì hoạt động càng khó thực hiện, cho nên nội dung cũng là một căn cứ phân bậc hoạt động.

(iv) Sự phức hợp của hoạt động

Một hoạt động phức hợp bao gồm nhiều hoạt động thành phần. Gia tăng những thành phần này cũng có nghĩa là nâng cao yêu cầu đối với hoạt động.

(v) Chất lượng của hoạt động

Chất lượng của hoạt động, thường là tính độc lập hoặc tính thành thạo, cũng có thể lấy làm căn cứ để phân bậc hoạt động.

(vi) Phối hợp nhiều phương diện làm căn cứ phân bậc hoạt động

1.6.2. Điều khiển quá trình học tập dựa vào sự phân bậc hoạt động

Người thầy giáo cần biết lợi dụng sự phân bậc hoạt động để điều khiển quá trình học tập, chủ yếu là theo những hướng sau:

(i) Chính xác hoá mục tiêu.

(ii) Tuần tự nâng cao yêu cầu.

(iii) Tạm thời hạ thấp yêu cầu khi cần thiết.

(iv) dạy học phân hoá.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Qua nghiên cứu lý luận về dạy học phân hóa trong giờ học toán, có thể rút ra kết luận sau:

Dạy học phân hóa xuất phát từ nhu cầu đảm bảo thực hiện tốt mục đích dạy học, đồng thời khuyến khích phát triển tối đa và tối ưu những khả năng của từng cá nhân, xuất phát từ nhu cầu thực tiễn trong một lớp học luôn có sự chênh lệch về trình độ nhận thức của mỗi thành viên. Vì vậy, nhiệm vụ của người giáo viên là nghiên cứu một phương pháp dạy học thích hợp có thể tác động đến hầu hết các đối tượng đó, đều nắm được kiến thức nền tảng vững chắc, đảm bảo tính phổ cập và nâng cao. Để thực hiện điều đó thì người giáo viên cần bắt tay vào công việc thực tế bài giảng một cách cụ thể, tránh lý thuyết chung chung. Vì vậy, người giáo viên cần nghiên kĩ đặc điểm của mỗi lớp học, khu vực, trình độ nhận thức chung của học sinh trong lớp để tiến hành giảng dạy. Có như vậy mới thực sự tạo ra những giờ học đạt hiệu quả, góp phần nâng cao chất lượng dạy và học của bộ môn toán ở trường THPT.

CHƯƠNG 2
DẠY HỌC PHÂN HOÁ VỀ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH Ở TRƯỜNG THPT

2.1. Thực trạng và định hướng dạy học phân hoá môn toán ở trường phổ thông

2.1.1.Thực trạng dạy học phân hoá môn toán ở trường phổ thông

Đổi mới phương pháp dạy là một vấn đề đã được đề cập và bàn luận rất sôi nổi từ nhiều thập kỷ qua. Những năm gần đây, đổi mới phương pháp dạy học đã được định hướng theo tư tưởng tích cực hóa hoạt động người học dưới sự điều khiển của người giáo viên. Học sinh tự giác tích cực, chủ động tìm tòi, phát hiện và giải quyết nhiệm vụ nhận thức và có ý thức vận dụng linh hoạt sáng tạo các kiến thức kỹ năng đã thu được. Nhưng những định hướng này mới chỉ đến được người giáo viên qua tài liệu mang tính lí thuyết hơn là hướng dẫn thực hành, do vậy người giáo viên đã có thực hiện, nhưng chưa vận dụng trên cơ sở khoa học.

Hiện tượng giáo viên đổi mới phương pháp dạy học chỉ để đáp ứng nhu cầu đặt ra trước mắt, hình thức dạy học phân hoá chưa phong phú và sự chuẩn bị bài giảng của giáo viên trước khi lên lớp cũng sơ sài nên hiệu quả đạt được là chưa cao.

Trong quá trình đổi mới phương pháp giáo dục hiện nay, việc bồi dưỡng học sinh giỏi là vấn đề rất cần thiết, cần thực hiện ngay trong những tiết học đồng loạt nhằm phát hiện và bồi dưỡng những tài năng toán học cho đất nước. Từ trước đến nay hầu hết giáo viên chỉ dừng lại trang bị kiến thức cơ bản cho học sinh loại trung bình trong lớp nắm được bài mà chưa thực sự quan tâm bồi dưỡng đến đối tượng học sinh khá giỏi, yếu kém bởi tư tưởng lười đổi mới, sợ kiến thức nặng, ngại đầu tư thời gian nghiên cứu sẽ rất thiệt thòi cho các em có năng khiếu toán chưa phát huy hết khả năng của mình.

Chính vì vậy, khi xây dựng nội dung bài học, giáo viên nên căn cứ vào mức độ nhận thức chung của học sinh trong lớp để đưa ra các câu hỏi phân hóa hoặc bài tập phân hóa phù hợp.

2.1.2. Định hướng về dạy học phân hoá môn toán ở trường phổ thông

- Ra bài tập phân hóa là để cho các đối tượng học sinh khác nhau có thể tiến hành các hoạt động khác nhau với trình độ khác nhau, giáo viên có thể phân hóa yêu cầu bằng cách sử dụng mạch bài tập phân bậc, giao cho học sinh giỏi những bài tập có hoạt động ở bậc cao hơn so với các đối tượng học sinh khác. Hoặc ngay trong một bài tập, ta có thể tiến hành dạy học phân hóa nếu bài tập đó bảo đảm yêu cầu hoạt động cho cả 3 nhóm đối tượng học sinh và bài tập phân hoá nhằm mục đích:

- Đối với học sinh trung bình, yếu kém thường biểu hiện không nắm được kiến thức và kỹ năng cơ bản thì bộc lộ những sai lầm nghiêm trọng và lỗ hổng kiến thức.

- Đối với bản thân học sinh khá giỏi có năng lực học tập toán; các em có khả năng học toán thường có xu hướng thích giải nhiều bài toán, thích giải các bài toán khó, các bài toán đòi hỏi tư duy sáng tạo, nhưng lại coi nhẹ việc học lý thuyết, coi nhẹ các bài toán thông thường và chủ quan, lơ là và dẫn đến sai lầm trong khi giải toán.

Từ đó bồi dưỡng lấp lỗ hổng cho học sinh yếu kém, trang bị kiến thức chuẩn cho học sinh trung bình và nâng cao kiến thức cho học sinh khá, giỏi.

Ví dụ: Khi học về giải các phương trình vô tỉ cơ bản, ta có thể ra ra bài tập như sau:

a. Giải phương trình: $\sqrt{(5-x)(2x-4)} = x - 2$ (1)

b. Giải phương trình: $\sqrt{3x-3} - \sqrt{5-x} = \sqrt{2x-4}$ (2)

c. Từ nghiệm của (1) hãy viết nghiệm của phương trình:

$$\sqrt{3x^2-9x-9}-\sqrt{5+3x-x^2}=\sqrt{2x^2-6x-4} \qquad (3)$$

d. Xây dựng cách giải của phương trình bậc nhất theo hàm số u(u là biểu thức có chứa x)

$$\sqrt{au+b}-\sqrt{cu+d}=\sqrt{mu+n}$$

Yêu cầu:

* Học sinh yếu kém giải được ý (a), kiến thức cơ bản SGK, dưới sự dẫn dắt của thầy giáo.

* Học sinh TB giải ý (b), mức độ yêu cầu cơ bản của SGK.

* Học sinh khá, giỏi thực hiện giải ý (c), (d) trên cơ sở kiến thức cơ bản.

Tóm tắt lời giải:

a. (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0 \\ (5-x)(2x-4)=(x-2)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

b. Điều kiện: 3x - 3 ≥ 0; 2x - 4 ≥ 0 ⇔ 2≤ x ≤ 5

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{3x-3}=\sqrt{5-x}+\sqrt{2x-4}$

$\Leftrightarrow$ 3x - 3 = 5 - x + 2x - 4 + 2$\sqrt{(5-x)(2x-4)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(5-x)(2x-4)}$ = x - 2 $\quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có đúng 2 nghiệm x = 2; x = 4

c. Ta có (3) $\Leftrightarrow \sqrt{3(x^2-3x)-3}-\sqrt{5-(x^2-3x)}=\sqrt{2(x^2-3x)-4}$

Nhận thấy rằng nếu thay x bởi (x^2 - 3x) thì phương trình (2) thành phương trình (1). Từ đó ta có nghiệm của (2) là:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-3x=2 \\ x^2-3x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-2=0 \\ x^2-3x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \\ x=-1 \\ x=4 \end{array}\right.$$

d. Tổng quát hoá phương trình: $\sqrt{au+b} - \sqrt{cu+d} = \sqrt{mu+n}$

(a, b, c, m, n $\in$ R, u là biểu thức chứa x)

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa:

au + b ≥ 0 ; cu + d ≥ 0; mu + n ≥ 0 (*)

Bước 2: Với điều kiện ấy ta biến đổi phương trình như sau:

$\sqrt{au+b} = \sqrt{cu+d} + \sqrt{mx+n}$

$\Leftrightarrow$ au + b = cu + d + mu + n + 2 $\sqrt{(cu+d)(mu+n)}$

Rút gọn các hạng tử đồng dạng ta được, phương trình: $\sqrt{f(x)}$ = g(x)

Phương trình đã cho tương ứng với hệ: $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

Từ hệ phương trình trên ta tìm x thoả mãn điều kiện (*)

Việc xây dựng và áp dụng những bài tập kiểu phân hoá này trong giờ học không những giúp cho học sinh hoạt động học tập phù hợp với trình độ của mình, khơi dậy niềm tin ở khả năng bản thân. Bên cạnh đó, kiến thức của mỗi đối tượng học sinh khám phá đều liền mạch, do đó học sinh yếu vừa được quan tâm bồi dưỡng kiến thức cơ bản vững chắc, vẫn có thể theo dõi tiếp thu các kiến thức từ hoạt động của đối tượng học sinh trung bình hay khá giỏi, đồng thời học sinh khá giỏi vẫn phát huy hết khả năng tư duy của mình và được tập luyện đào sâu lý thuyết thông qua hoạt động của học sinh trung bình hay yếu kém. Mặt khác, thời gian mà giáo viên sử dụng dạy học bài tập phân hóa này cho tất cả các đối tượng học sinh trong giờ học vẫn được đảm bảo hợp lý, đây là một yếu tố quan trọng góp phần thành công của giờ học. Tuy nhiên, để có những bài tập đảm bảo yêu cầu trên, người giáo viên cần nắm chắc kiến thức trọng tâm của từng bài và chuẩn bị tài liệu, đầu tư công sức, thời gian cho bài soạn một cách chu đáo, kỹ lưỡng. Tránh tư tưởng đồng nhất trình độ dẫn đến đồng nhất nội dung học tập cho mọi đối tượng học sinh.

+ *Cũng có thể phân hóa về mặt số lượng*: Để chiếm lĩnh một kiến thức hay rèn luyện một kỹ năng nào đó, một số học sinh cần nhiều loại bài tập cùng loại hơn một số học sinh khác. Nên ra đủ liều lượng bài tập như vậy cho từng loại đối tượng học sinh. Những học sinh còn thừa thời gian, đặc biệt học sinh giỏi sẽ nhận thêm những bài tập khác để đào sâu và nâng cao.

Ví dụ: Khi học về bất phương trình, chứa ẩn trong dấu căn bậc hai ta có thể ra bài tập như sau:

a. $\sqrt{2(x^2-16)} > 10 - 2x$

b. $\dfrac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

c. $\dfrac{\sqrt{2(5^{2x}-16)}}{\sqrt{5^x-3}} + \sqrt{5^x-3} > \dfrac{7-5^x}{\sqrt{5^x-3}}$

d. $\sqrt{15.2^{x+1}+1} \geq \left|2^x-1\right| + 2^{x+1}$

Đối với học sinh yếu kém, trung bình thì phải giải thứ tự từ ý (a) cho tới ý (c), nhưng đối với học sinh khá giỏi thì có thể giải ý (a) rồi chuyển sang ý (c) và (d)

2.1.3. Điều hành các hoạt động cho học sinh trong giờ dạy học phân hoá

2.1.3.1. Phân nhóm học sinh

- Có hai kiểu phân nhóm là phân nhóm theo khu vực (phân nhóm hỗn hợp: phân nhóm theo bàn, theo tổ hoặc theo dãy bàn) và phân nhóm theo trình độ nhận thức của học sinh trong lớp (phân nhóm theo đối tượng, nhận thức khá giỏi, nhận thức trung bình và nhận thức yếu kém). Trong hoạt động phân nhóm theo khu vực có ưu điểm giúp học sinh hòa mình vào hoạt động tập thể tạo điều kiện cho học sinh có lực học yếu dễ ỉ lại, lười suy nghĩ. Hoạt động nhóm theo trình độ nhận thức phát huy tối đa khả năng hoạt động cá biệt hoá đến từng cá nhân người học, mang tính vừa sức, giáo viên dễ dàng kiểm soát mức độ học tập của mỗi học sinh, có thể đánh giá khách quan, chính xác. Tùy theo từng tình huống dạy học mà giáo viên có thể tổ chức cho học sinh hoạt động theo hình thức phân nhóm nào để giờ học đạt hiệu quả cao nhất.

* Biện pháp phân nhóm theo khu vực: Đây là hình thức dạy học hợp tác theo nhóm nhỏ, mỗi nhóm từ 6 đến 7 học sinh hoặc có thể là một tổ, một dãy … tùy thuộc vào mục đích sư phạm và yêu cầu của vấn đề dạy học, có thể duy trì cả tiết học hay thay đổi theo từng hoạt động, từng phần của tiết học, các nhóm được giao cùng nhiệm vụ hay được giao các nhiệm vụ khác nhau. Mỗi nhóm tự bầu ra một nhóm trưởng nếu cần thiết.

* Biện pháp phân nhóm theo đối tượng học sinh là hình thức phân nhóm theo trình độ nhận thức của từng học sinh, việc phân nhóm này gặp nhiều khó khăn hơn. Giáo viên cần phân loại nhận dạng được những nhịp độ nhận thức của của mỗi học sinh và qui về những nhóm đặc trưng như nhóm nhịp độ nhận thức nhanh, nhịp độ nhận thức chậm, hay trung bình. Để phân loại được các đối tượng này một cách chính xác phải có biện pháp điều tra, phát hiện và phân loại đối tượng học sinh về khả năng lĩnh hội kiến thức và trình độ phát triển thông qua quan sát, kiểm tra, đánh giá …. Trong quá trình học tập, giáo viên thường xuyên theo dõi để điều chỉnh lại nhân sự của nhóm cho phù hợp với trình độ phát triển của mỗi học sinh trong lớp học.

2.1.3.2. Thiết kế nội dung theo chủ đề

* *Thiết kế bài giảng*: Cần nghiên cứu nắm vững nội dung và yêu cầu bài học, thiết kế các pha dạy học đồng loạt, cần sử dụng hệ thống câu hỏi phân hóa để giúp tất cả các đối tượng học sinh trong lớp cùng tham gia tìm hiểu nội dung bài học. Khi ra các bài tập phân hóa, cần phải dựa vào trình độ nhận thức của học sinh mà lựa chọn các bài tập thích hợp nhằm bồi dưỡng cho học sinh yếu kém "*lấp những lỗ hổng*", kiến thức cơ bản cho học sinh trung bình, kiến thức nâng cao cho học sinh khá, giỏi.

* *Xét các yếu tố ảnh hưởng tới quá trình dạy học* như môi trường, phương tiện, điều kiện dạy học, cần quan tâm đến các phương tiện dạy học và phối hợp sử dụng chúng sao cho có hiệu quả nhằm phát huy tối đa sức mạnh của phương tiện dạy học khi tổ chức các pha dạy học phân hóa.

* *Tổ chức các pha dạy học đồng loạt ngay trong những giờ lên lớp* gồm tất cả các phương pháp dạy học nhưng đòi hỏi phải có sự vận dụng linh hoạt, kết hợp, sử dụng các phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề, dạy học chương trình hóa, phương pháp vấn đáp … Cần xây dựng các câu hỏi phân hóa làm phương tiện để thực hiện bài giảng cho tất cả các đối tượng học sinh dựa vào nhịp độ nhận thức. Ta có thể kết hợp giữa nhóm phân hóa với các nhóm hỗn hợp về trình độ tùy theo yêu cầu của mỗi hoạt động. Thông qua các hình thức này, các thành viên trong nhóm đều rèn luyện cách thức làm việc để cùng tiến hành những hoạt động chung, cùng thực hiện một nhiệm vụ chung, trong đó có sự phân công nhiệm vụ, có sự trao đổi ý kiến, có diễn đạt, lý giải, thuyết phục để tìm ra con đường hoặc phương án giải quyết. Chúng ta cần chú ý:

+ Hướng dẫn cho học sinh cách thức làm việc theo nhóm, có giao lưu ý kiến, có phân công phân nhiệm, có người điều khiển, chịu trách nhiệm.

+ Cần thay đổi vai trò người thực hiện và người kiểm tra, thay đổi phân công phân nhiệm để tập cho mọi người có thể hiện nhiều chức năng khác nhau, hoàn thành nhiều nhiệm vụ khác nhau.

+ Cần gây cho mọi thành viên trong nhóm có thể quen kiểm tra và tự kiểm tra rút kinh nghiệm trong hoạt động.

Tuy nhiên ngay trong các pha dạy học đồng loạt cũng cần có đối xử cá biệt, khuyến khích học sinh yếu kém trả lời những câu hỏi dễ, những câu hỏi mang tính gợi mở. Đặt học sinh khá giỏi và những tình huống phán đoán, câu hỏi có tính tìm tòi, phát huy trí tuệ. Tất cả các câu hỏi phải có tác dụng dẫn dắt, khuyến khích học sinh tích cực suy luận, không đơn điệu, phân hóa song vẫn tác động đến nhiều đối tượng với tác dụng khác nhau.

- Tổ chức các nhóm tham gia tổ chức các nhóm tham gia hoạt động giải bài tập phân hóa, đây là khâu quan trọng và thể hiện rõ nhất vai trò của hình thức hoạt động nhóm đối tượng. Cần phải tổ chức hoạt động này theo một qui trình chặt chẽ, cụ thể, yếu tố thời gian đặc biệt được chú trọng. Học sinh trong các nhóm được giao nhiệm vụ phù hợp với trình độ, năng lực nhận thức, hứng thú học tập của mình trên cơ sở kiến thức cơ bản. Hệ thống bài tập phân hóa được chọn lọc, có sự liên kết, từ thấp và được nâng cao dần đảm bảo tư duy học sinh được liền mạch, hệ thống.

2.1.3.3. Các bước tiến hành trong dạy học mỗi chủ đề

Bước 1: Nêu phương pháp giải cho mỗi chủ đề.

Bước 2: Ra bài tập phân hoá cho mỗi chủ đề.

Bước 3: Phân công bài tập về từng nhóm học sinh (3 nhóm).

Bước 4: Tổng kết và bổ sung lời giải của từng nhóm.

Bước 5: Ra bài tập phân hoá tương tự.

2.2. Dạy học phân hoá các chủ đề về phương trình, bất phương trình và hệ phương trình vô tỉ

2.2.1. Chủ đề 1: Biến đổi tương đương phương trình, bất phương trình

* *Mục đích:*

- Học sinh vận dụng khái niệm phương trình tương đương để giải các bài toán cụ thể.

- Học sinh nhận biết và khắc phục được những sai lầm khi biến đổi tương đương thường gặp.

* *Các bước tiến hành:*

HĐ 1: GV nhắc lại một số kiến thức biến đổi đương áp dụng khi giải phương trình hoặc bất phương trình vô tỉ.

- Khi giải phương trình hoặc bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn, ta thực hiện một số phép biến đổi tương đương để đưa nó về một phương trình hoặc bất phương trình không còn chứa ẩn trong dấu căn bậc hai. Trong quá trình biến đổi căn lưu ý:

+ Nêu các điều kiện xác định của phương trình và nêu điều kiện nghiệm. (nếu có).

+ Chỉ bình phương hai vế của phương trình khi cả hai vế đều không âm.

+ Gộp các điều kiện đó với phương trình hoặc bất phương trình mới nhận được, ta có một hệ phương trình tương đương với phương trình đã cho (tức là phương trình và hệ thu được có cùng tập nghiệm).

- Đây là phương pháp cơ bản, phổ biến và áp dụng cho nhiều dạng phương trình vô tỷ. Khi giải phương trình vô tỷ, trước hết ta tìm điều kiện (nếu có) để phương trình có nghĩa, sau đó tìm cách khử căn thức. Để làm được điều đó ta thường dùng phép biến đổi phương trình đã cho thành phương trình tương đương bằng cách lũy thừa hai vế để giảm bớt căn thức, nhưng khi lấy nghiệm cần lưu ý điều kiện hạn chế của nghiệm để loại nghiệm không thích hợp.

Một số phép biến đổi tương đương:

+) $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$

+) $\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{A.B} \quad (A \geq 0,\ \ B \geq 0)$

+) $\sqrt{AB} = \sqrt{-A}.\sqrt{-B} (A \leq 0; B \leq 0)$

+) $A\sqrt{B} = \begin{cases} -\sqrt{A^2B} & (A < 0) \\ \sqrt{A^2B} & (A \geq 0) \end{cases}$

+) $-\sqrt[2k+1]{-A} = \sqrt[2k+1]{A}$

+) $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases}$

+) $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2k+1}(x)$

+) $\sqrt[2k]{\mathrm{f(x)}} = \sqrt[2k]{\mathrm{f(x)}} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{f(x)} \geq 0 \quad (\text{hoặc } \mathrm{g(x)} \geq 0) \\ \mathrm{f(x)} = \mathrm{g(x)} \end{cases}$

+) $\sqrt[2k+1]{\mathrm{f(x)}} = \sqrt[2k+1]{\mathrm{g(x)}} \Leftrightarrow \mathrm{f(x)} = \mathrm{g(x)}$

* $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$ * $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$

* $\sqrt[3]{f(x)} < \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow$ f(x) < g(x).

Khi giải phương trình vô tỷ, thường học sinh chưa phân biệt được khi nào phép biến đổi là tương đương, khi nào hệ quả dẫn tới là xuất hiện nghiệm ngoại lai. Vì vậy, ta cần lưu ý cho học sinh như sau:

+ Khi lũy thừa bậc chẵn 2 vế muốn được phương trình tương đương thì phải đặt điều kiện 2 vế không âm. Do đó khi giải được nghiệm ta chỉ cần kiểm tra điều kiện đặt ra mà không cần thử nghiệm vào phương trình ban đầu.

Còn khi nâng lũy thừa bậc chẵn 2 vế mà không có điều kiện kèm theo thì chỉ được phương trình hệ quả, nên khi tìm được nghiệm của phương trình cuối phải thử lại vào phương trình ban đầu để loại nghiệm ngoại lai.

+ Khi nâng lũy thừa bậc lẻ 2 vế ta luôn được phương trình tương đương.

HĐ 2: *Ra bài tập phân hoá.*

Ví dụ 1. Vận dụng các phép biến đổi tương đương và cơ sở lí thuyết để giải các phương trình.

a. $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$

b. $\sqrt{3x^2 + 24x + 22} = 2x + 1$

c. $\sqrt{x + 4} - \sqrt{1 - x} = \sqrt{1 - 2x}$

HĐ 3: *Phân công thảo luận nhóm*

- Nhóm 1 (yếu kém) giải ý (a)
- Nhóm 2 (trung bình) giải ý (b)
- Nhóm 3 (khá giỏi) giải ý (c), từ đó viết nghiệm của phương trình:

$$\sqrt{cosx+4}-\sqrt{1-cosx}=\sqrt{1-2cosx}$$

đồng thời tổng quát hoá cho các bài toán.

Tóm tắt lời giải:

N1: a. $\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\geq 0 \\ x^2+2x+4=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là x = -1 hoặc x = - 2

N3: Tổng quát hoá: Phương trình có dạng: $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

* Cách giải: $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0(\text{hoặc}\, g(x)\geq 0) \\ f(x)=g(x) \end{cases}$

N2: b. $\sqrt{3x^2+24x+22}=2x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ 3x^2+24x+22=(2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ x^2-20x-21=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=21 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=21$$

Nghiệm của phương trình đã cho là x=21.

N3: Tổng quát hoá: Phương trình trên có dạng $\sqrt{f(x)}=g(x)$. Đây là một dạng cơ bản của phương trình vô tỷ, thường được giải bằng phương pháp lũy thừa 2 vế.

* Cách giải: $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)=[g(x)]^2 \end{cases}$

N3: c. $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$

Điều kiện: $\begin{cases} x+4\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \\ 1-2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4\le x\le \dfrac{1}{2}$

Với điều kiện trên thì phương trình đã cho tương đương với.

$$\sqrt{x+4}=\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}$$

$\Leftrightarrow x+4=1-x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)} \quad \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1}=2x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ 2x^2-3x+1=(2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Vậy nghiệm của phương trình là: x = 0

Viết nghiệm của phương trình: $\sqrt{cosx+4}-\sqrt{1-cosx}=\sqrt{1-2cosx}$

Bằng phép đặt cosx = t ($-1\le t\le 1$), ta được phương trình có dạng như phương trình ý (c) từ đó tìm được nghiệm t = 0 $\Leftrightarrow$ cosx = 0

$\Leftrightarrow$ x = $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in Z$)

- Phương trình trên có dạng: $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$

* Cách giải: Điều kiện: $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \\ h(x)\ge 0 \end{cases}$

Bình phương 2 vế của phương trình ta được:

$$2\sqrt{f(x)g(x)}=h(x)-f(x)-g(x)$$

Phương trình trên có dạng: $\sqrt{f(x)}$ = g(x)

* Chú ý: Phương trình: $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{g(x)}$

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt.

$$\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \qquad (1)$$

Tóm tắt lời giải:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ f(x) = 3x^2 - (m-4)x - 1 = 0 (2) \end{cases}$$

(1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $-\dfrac{1}{2} \leq x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-4)^2 + 12 > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{m-4}{6} > -\dfrac{1}{2} \\ f(-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{m-4}{2} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}$$

Vậy để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thì m $\geq \dfrac{9}{2}$.

Các sai lầm thường gặp khi giải phương trình bằng phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{x^2 - 4x + 2} = \sqrt{3x - 10}$ **b.** $\sqrt{(x+4)^2(x-5)}$ = x + 4

c. $2\sqrt{x^2 - 9} = (x+5)\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$ **d.** $\sqrt{2x^3 - 3x} = \sqrt{x^2 - 2x}$

e. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x+1}$

Tóm tắt lời giải:

a. $\sqrt{x^2 - 4x + 2} = \sqrt{3x - 10}$ (1)

- *Sai lầm thường gặp:*

(1) $\Leftrightarrow$ x^2 - 4x + 2 = 3x - 10 $\Leftrightarrow$ x^2 - 7x + 12 = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right.$

- *Nguyên nhân sai lầm:*

Với x = 3 thì căn thức $\sqrt{3x-10}$ vô nghĩa nên x = 3 là nghiệm ngoại lai

• *Lời giải đúng*: $\sqrt{\mathrm{f(x)}} = \sqrt{\mathrm{g(x)}} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{f(x)} \ge 0 (\text{hoặc} \, \mathrm{g(x)} \ge 0) \\ \mathrm{f(x)} = \mathrm{g(x)} \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 3x - 10 \\ 3x - 10 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ x \ge \dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right. \\ x \ge \dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 4.

b. $\sqrt{(x+4)^2(x-5)}$ = x + 4 (2)

• *Sai lầm thường gặp:*

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+4)^2(x-5)} = x + 4 \\ x + 4 \ge 0; x - 5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)\sqrt{x-5} = x + 4 \\ x \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(\sqrt{x-5} - 1) = 0 \\ x \ge 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x + 4 = 0 \\ \sqrt{x-5} = 1 \end{array}\right. \\ x \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x - 5 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 6 \\ x \ge 5 \end{cases}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Phương trình nhận x = - 4 là nghiệm, nghĩa là cách giải trên đã làm mất nghiệm x = -4

• *Lời giải đúng:* $\sqrt{\mathrm{f(x)}} = \mathrm{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{g(x)} \ge 0 \\ \mathrm{f(x)} = [\mathrm{g(x)}]^2 \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+4)^2(x-5)} = x + 4 \\ x + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)\sqrt{x-5} = x + 4 \\ x \ge -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(\sqrt{x-5} - 1) = 0 \\ x \ge -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 4 = 0 \\ \sqrt{x-5} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm x= - 4 và x = 6

c. $2\sqrt{x^2 - 9} = (x+5)\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$ (3)

- *Sai lầm thường gặp:*

$$(3) \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)(x+3)} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-3}.\sqrt{x+3} = (x+5)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}(2\sqrt{x-3} - \frac{x+5}{\sqrt{x-3}}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}\left[2\sqrt{(x-3)^2} - (x+5)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}\left[2(x-3) - (x+5)\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 11 \\ x = -3 \end{array}\right. \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 11$$

- *Nguyên nhân sai lầm:*

Phương trình nhận x =-3 là nghiệm, tức là cách giải trên đã làm mất nghiệm x =- 3.

- *Lời giải đúng:*

$$(3) \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)(x+3)} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x+3}{x-3}.(x-3)^2} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}.|x-3| = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}.\left[2|x-3| - (x+5\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{x-3} = 0 \\ \begin{cases} 2|x-3| - (x+5) = 0 \\ \dfrac{x+3}{x-3} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 11 \end{array}\right.$$

Bình luận: $\sqrt{AB} = \sqrt{-A}.\sqrt{-B}\,(A \leq 0; B \leq 0)$

$$\sqrt{AB} = \sqrt{A}.\sqrt{B}\,(A \geq 0; B \geq 0)$$

d. $\sqrt{2x^3 - 3x} = \sqrt{x^2 - 2x}$ (4)

- *Sai lầm thường gặp:*

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{x(2x^2-3)} = \sqrt{x(x-2)} \Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{2x^2-3} = \sqrt{x}\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{2x^2-3} - \sqrt{x-2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{2x^2-3} - \sqrt{x-2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2-3=x-2\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2-x-1=0; x\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ x\ge 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Phép biến đổi phương trình sau không phải là phép biến đổi tương đương.

$$\sqrt{x(2x^2-3)}=\sqrt{x(x-2)} \Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{2x^2-3}=\sqrt{x}\sqrt{x-2}$$

• *Lời giải đúng:*

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{x(2x^2-3)}=\sqrt{x(x-2)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left\{\begin{array}{l} 2x^2-3=x-2 \\ x(x-2)\ge 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left\{\begin{array}{l} 2x^2-x-1=0 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

e. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{3x+1}$ (5)

• *Sai lầm thường gặp:*

(5) $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1})^3=(\sqrt[3]{3x+1})^3$

$\Leftrightarrow$ 2x -1 + x - 1 + 3 $\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1})=3x+1$ (*)

$\Leftrightarrow$ 3x - 2 + 3 $\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{3x+1}=3x+1$ (**)

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{3x+1}=1$ $\Leftrightarrow\Leftrightarrow$ (2x - 1)(x - 1)(3x + 1)= 1

$\Leftrightarrow$ 6x^3 - 7x^2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 0 hoặc x = $\dfrac{7}{6}$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Phép thế $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{3x+1}$ từ (*) sang (**) là phép biến đổi qua hệ quả, không phải là phép biến đổi tương đương, nên xuất hiện nghiệm ngoại lai x = 0

• *Lời giải đúng:*

Sửa và bổ sung cho lời giải như sau:

Từ (*) sang (**) là phép biến đổi hệ quả (thay dấu $\Leftrightarrow$ bằng dấu $\Rightarrow$)

Thử lại các nghiệm tìm được xem có nghiệm ngoại lai hay không.

Kết quả thử lại: nghiệm x = 0 không thoả mãn (5), nghĩa là x = 0 là nghiệm ngoại lai. Vậy nghiệm của phương trình là x = $\frac{7}{6}$

Bài tập phân hoá (củng cố). Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{x^2-6x+6}=2x-1$ **b. 4** $\sqrt{x+2}=|x+1|+4$

c. $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}$ **d.** $\sqrt{5x^2-10x-1}-\sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{3x^2-6x-2}$

e. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\ =1$ **f.** $\sqrt{(x+1)(x^2-x-2)}=x+1$

g. $3\sqrt{x^2-25}=(2x-1)\sqrt{\frac{x-5}{x+5}}$ **h.** $2\sqrt{x^2-x-6}=\left(x+5\right)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$

Ví dụ 4: Giải các bất phương trình sau:

a. $\sqrt{x^2-3x-10}<x-2$

c. $\frac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{7-x}{\sqrt{x-2}}$

b. $\sqrt{x^2-4x}>x-3$

d. $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-4}$

e. $\frac{\sqrt{2(5^{2x}-16)}}{\sqrt{5^x-3}}+\sqrt{5^x-3}>\frac{7-5^x}{\sqrt{5^x-3}}$

f. $\sqrt{15.2^{x+1}+1}\geq|2^x-1|+2^{x+1}$

g. $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$

HĐ 1: *GV yêu cầu học sinh nhắc lại cách giải bất phương trình:*

$$\sqrt{f(x)}<\text{g(x)}\ ;\ \sqrt{f(x)}>\text{g(x)}$$

HĐ 2: *HS trả lời, GV tóm tắt ghi kết quả góc bảng.*

HĐ 3: *Tiến hành giải bài tập theo từng nhóm cầu đối với các nhóm:*

- Nhóm 1 (yếu kém) giải ý (a; b) trên cơ sở vận dụng lí thuyết và sự hướng dẫn của giáo viên.

- Nhóm 2 (trung bình) giải ý (c;d)

- Nhóm 3 (khá giỏi) giải ý (e; f; g),đồng thời cùng giáo viên hỗ trợ nhóm 1 ; 2.

HĐ 4: *Giáo viên tổng hợp và tóm tắt lời giải:*

a. $\sqrt{x^2-3x-10} < x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-10 \geq 0 \\ x-2>0 \\ x^2-2x-10<(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq 2 \\ x\geq 5 \end{array}\right. \\ x>2 \\ x<14 \end{cases} \Leftrightarrow 5\leq x<14$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là [5 ; 14).

b. $\sqrt{x^2-4x} > x-3 \Leftrightarrow$ (I) $\begin{cases} x^2-4x\geq 0 \\ x-3<0 \end{cases}$ hoặc (II) $\begin{cases} x-3\geq 0 \\ x^2-4x>(x-3)^2 \end{cases}$

Ta có: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ x\geq 4 \end{array}\right. \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow x\leq 0$ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ x>\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{9}{2}$

Nghiệm của bất phương trình đã cho là x≤ 0 hoặc x > $\dfrac{9}{2}$.

c. $\dfrac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \dfrac{7-x}{\sqrt{x-2}}$

Điều kiện: $\begin{cases} x-3>0 \\ x^2-16\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 4$

Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$\sqrt{2(x^2-16)} + x-3 > 7-x \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-16)} > 10-2x$

$$\Leftrightarrow \text{(I)} \begin{cases} 10-2x<0 \\ 2(x^2-16)\geq 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \text{(II)} \begin{cases} 10-2x\geq 0 \\ 2(x^2-16)>(10-2x) \end{cases}$$

Ta có: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x>5 \\ \left[\begin{array}{l} x\leq -4 \\ x\geq 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x>5$

(II)$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le x \le 5 \\ x^2 - 20x + 66 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le x \le 5 \\ 10 - \sqrt{34} < x < 10 + \sqrt{34} \end{cases} \Leftrightarrow$ 10-$\sqrt{34} < x \le 5$

Tổng hợp cả 2 trường hợp ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: (10 - $\sqrt{34}; +\infty$)

d. $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$

Điều kiện: $\begin{cases} 5x-1 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \\ 2x-4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{5x-1} > \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-4}$ $\Leftrightarrow$ 5x-1> x-1 + 2x- 4 + $2\sqrt{(x-1)(2x-4)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 4} < x + 2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 2x^2 - 6x + 4 < (x+2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 10x < 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 0 < x < 10 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 2 \le x < 10$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: [2; 10).

e. $\dfrac{\sqrt{2(5^{2x} - 16)}}{\sqrt{5^x - 3}} + \sqrt{5^x - 3} > \dfrac{7 - 5^x}{\sqrt{5^x - 3}}$

Ta nhận thấy nếu đặt 5^x = t > 0, thì bất phương trình trở thành:

$\dfrac{\sqrt{2(t^2 - 16)}}{\sqrt{t-3}} + \sqrt{t-3} > \dfrac{7-t}{\sqrt{t-2}}$

Tương tự ý (e) ta giải được t > 10 - $\sqrt{34} \Leftrightarrow 5^x$ > 10 - $\sqrt{34}$

$\Leftrightarrow x > \log_5(10 - \sqrt{34})$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $(\log_5(10 - \sqrt{34}); +\infty)$

f. Đặt 2^x = t > 0. Bất phương trình trở thành:

$\sqrt{30t+1} \ge |t-1| + 2t$

* Nếu t ≥ 1. Bất phương trình tương đương với: $\sqrt{30t+1} \ge 3t - 1$

Từ đó tìm được: 0 < t ≤ 1.

** Nếu 0 < t ≤ 1. Bất phương trình tương đương với: $\sqrt{30t+1} \ge t+1$

Từ đó tìm được: $1 \le t \le 4$

Tổng hợp cả hai trường hợp ta được: 0 < t ≤ 4 ⇔ 0 < 2^x ≤ 4 ⇔ x ≤ 2

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: (- ∞ ; 2]

g. $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$

Ta nhận thấy khi tử số có nghĩa thì $1-\sqrt{1-4x^2} \ge 0$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương với hai hệ sau đây:

(I) $\begin{cases} 1-4x^2 \ge 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le x < 0$

(II) $\begin{cases} 1-4x^2 \ge 0 \\ x > 0 \\ 1-\sqrt{1-4x^2} < 3x \end{cases} \Leftrightarrow$ (III) $\begin{cases} 0 < x \le \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{1-4x^2} > 1-3x \end{cases}$

Hệ bất phương trình (III) lại tương đương với hai hệ sau đây:

(III_1) $\begin{cases} 0 < x \le \dfrac{1}{2} \\ 1-3x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < x \le \dfrac{1}{2}$

(III_2) $\begin{cases} 0 < x \le \dfrac{1}{2} \\ 1-3x \ge 0 \\ (13x)^2 < 1-4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \le \dfrac{1}{3}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}] \setminus \{0\}$

Ví dụ 5: Giải và biện luận bất phương trình.

$\sqrt{x-m} - \sqrt{x-2m} > \sqrt{x-3m}$ (m là tham số)

Tóm tắt lời giải:

* Với m = 0 ta có: $\sqrt{x}-\sqrt{x}>\sqrt{x}$ bất phương trình vô nghiệm.

* Với m > 0 ta có điều kiện x ≥ 3m. (1) bất phương trình được viết lại:

$$\sqrt{x-m}>\sqrt{x-2m}+\sqrt{x-3m} \Leftrightarrow x-m>2x-5m+2\sqrt{(x-2m)(x-3m)}$$

$$\Leftrightarrow 4m-x>2\sqrt{(x-2m)(x-3m)} \Leftrightarrow \begin{cases}4m-x\ge 0\\ 16m^2-8mx+x^2>4(x^2-5mx+6m^2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 4m\\ 3x^2-12mx+8m^2<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 4m\\ \dfrac{m(6-2\sqrt{3})}{3}<x<\dfrac{m(6+2\sqrt{3})}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m(6-2\sqrt{3})}{3}<x<\frac{m(6+2\sqrt{3})}{3}$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta có: $3m\le x<\dfrac{m(6+2\sqrt{3})}{3}$

* Với m < 0 ta có điều kiện x ≥ m, bất phương trình tương đương với:

$4m-x>2\sqrt{(x-2m)(x-3m)}$ vì x ≥ m và m < 0 nên bất phương trình vô nghiệm.

Kết luận:

\+ m ≤ 0 tập nghiệm S = ∅.

\+ m > 0: $S=\left[3m;\dfrac{m(6+2\sqrt{3})}{3}\right]$

Sai lầm thường gặp trong khi giải bất phương trình và cách khắc phục sai lầm

$$\sqrt{f(x)}\ge g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f(x)\ge g(x)\end{cases}? \qquad \sqrt{f(x)}\le g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f(x)\le g(x)\end{cases}?$$

Ví dụ 6: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2-6x+1}>x-2$ (1)

Tóm tắt lời giải:

- *Sai lầm thường gặp:*

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 2x^2-6x+1 > (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2-2x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

- *Nguyên nhân sai lầm:*

Phép biến đổi trên đã xét thiếu trường hợp x - 2< 0

- *Lời giải đúng:*

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 < 0 \\ 2x^2-6x+1 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 2x^2-6x+1 > (x-2)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \\ x > 3 \end{array}\right.$$

Tóm lại: $\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$

Ví dụ 7: Giải các bất phương trình: $\sqrt{x^2-16} \le 2x-7$

- *Sai lầm thường gặp:*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-16 \ge 0 \\ x^2-16 \le (2x-7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 5 \\ x \le -4 \end{array}\right.$$

- *Nguyên nhân sai lầm:*

Với x $\le -4 \Rightarrow \sqrt{x^2-16} \ge 0 > 2x-7$**,** nên x ≤ -4 không thoả mãn.

- *Lời giải đúng:*

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-16 \ge 0 \\ 2x-7 \ge 0 \\ x^2-16 \le (2x-7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 5$$

Tóm lại: $\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \le g^2(x) \end{cases}$

Sai lầm thường gặp khi thêm hai vế của một phương trình hoặc bất phương trình với cùng một hàm số.

$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) \geq g(x) + h(x)$?

$f(x) + h(x) \geq g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$?

Bài tập áp dụng: $x^2 - x - 4 + \sqrt{4-x^2} \leq \dfrac{x^2}{2-\sqrt{4-x^2}}$ (1)

- *Sai lầm thường gặp:*

(1) $\Leftrightarrow x^2 - x - 4 + \sqrt{4-x^2} \leq 2 + \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$

- *Nguyên nhân sai lầm:*

Phép biến đổi: $x^2 - x - 4 + \sqrt{4-x^2} \leq 2 + \sqrt{4-x^2}$ thành $x^2 - x - 6 \leq 0$ là không tương đương.

- *Lời giải đúng:*

(1) $\Leftrightarrow x^2 - x - 4 + \sqrt{4-x^2} \leq 2 + \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Nhận xét: Khi thêm vào 2 vế của một phương trình hoặc bất phương trình với cùng một hàm số thì nhận được một phương trình hoặc bất phương trình không tương đương với phương trình hoặc bất phương trình ban đầu vì phép biến đổi này có thể làm thay đổi tập xác định của phương trình, bất phương trình ban đầu

Ví dụ 9: Giải bất phương trình:

$\sqrt{f(x)}.g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$? $\sqrt{f(x)}.g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$

Bài tập áp dụng

a. $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2-3x-2} \geq 0$ **b.** $(2x - 5)\sqrt{2x^2-5x+2} \geq 0$

Tóm tắt lời giải:

a. $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2-3x-2} \geq 0$ (1)

- *Sai lầm thường gặp:*

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -\dfrac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\dfrac{1}{2} \\ x \geq 3 \end{array}\right.$$

- *Nguyên nhân sai lầm:*

Với x = 2 thì (1) nghiệm đúng, nên x = 2 là nghiệm của (1). Cách giải trên đã làm mất nghiệm của bất phương trình

- *Lời giải đúng:*

$$\textbf{(1)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} = 0 \\ (x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x \leq -\dfrac{1}{2} \\ x \geq 3 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $x \in (-\infty ; -\frac{1}{2}] \cup [3 ; +\infty) \cup \{2\}$

b. $(2x - 5)\sqrt{2x^2 - 5x + 2} \geq 0$ (2)

- *Sai lầm thường gặp:*

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \\ 2x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

- *Nguyên nhân sai lầm:*

Với x = 2 hoặc x = $\frac{1}{2}$ thì (2) nghiệm đúng, nên x = 2 hoặc x = $\frac{1}{2}$ là nghiệm của (2). Cách giải trên đã làm mất nghiệm của phương trình.

- *Lời giải đúng:*

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2x-5)\sqrt{2x^2-5x+2}=0\\(2x-5)\sqrt{2x^2-5x+2}>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2-5x+2=0\\ \begin{cases}2x-5=0\\2x^2-5x+2>0\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2-5x+2>0\\2x-5>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{1}{2}\\x\ge\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là x $\in[\frac{5}{2}; +\infty) \cup \{\frac{1}{2}; 2\}$

Tổng quát: $\sqrt{f(x)}.g(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{f(x)}.g(x)=0\\\sqrt{f(x)}.g(x)>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)=0\\x\in D[g(x)]\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)=0\\f(x)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}\end{array}\right.$

Bài tập phân hoá (củng cố).

a. $\sqrt{x^2+x-6}<x-1$

b. $\sqrt{x^2-5x-14}\ge 2x-1$

c. $\sqrt{2x+7}-\sqrt{5-x}\ge\sqrt{3x-2}$

d. $\dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}}{\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+3}>\dfrac{3x+6}{\sqrt{x+3}}$

e. $\sqrt{-3^{2x}+2.3^{x+1}-5}+2.3^x-8>0$

f. $\sqrt{4^x-3.2^x+1}+3\ge\left|2^x+1\right|$

g. $3x^2 - 2x + 1 - \sqrt{25-x^2}\ge\dfrac{x^2}{5+\sqrt{25-x^2}}$

h. $(x^2 - 3x)(3x-1).\ \sqrt{x^2-1}\ge 0$

2.2.2. Chủ đề 2: Sử dụng ẩn phụ trong giải phương trình và bất phương trình vô tỉ

HĐ 1: *GV đặt vấn đề:*

Đây cũng là một phương pháp cơ bản để giải phương trình và bất ph- ơng trình vô tỷ, nó có thể giúp ta đưa một phương trình, bất ph- ơng trình phức tạp về một phương trình, bất ph- ơng trình đơn giản hơn nhiều. Khi giải phương trình, bất ph- ơng trình vô tỷ bằng phương pháp này, yêu cầu học sinh phải chuyển điều kiện từ ẩn chính sang ẩn phụ (nếu có).

Có những phương trình, bất ph- ơng trình có thể nhìn thấy ngay cách đặt ẩn phụ, nhưng có những phương trình phải qua một vài bước biến đổi mới đặt được.

2.2.2.1. Sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình và bất phương trình bậc hai

HĐ 2: *GV lưu ý các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau:*

- Nếu bài toán có chứa $\sqrt{f(x)}$ và f(x) có thể đặt $\sqrt{f(x)}$ = t, điều kiện tối thiểu $t \ge 0$, khi đó $f(x) = t^2$

Chẳng hạn gặp phương trình: A.f(x) + B.$\sqrt{f(x)}$ + C = 0. Đặt $\sqrt{f(x)}$ = t ($t \ge 0$), đưa phương trình về dạng: $A.t^2 + B.t + C = 0$.

- Nếu bài toán chứa $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}, \sqrt{f(x).g(x)}$, có thể đặt $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$ = t, khi đó $\sqrt{f(x).g(x)} = t^2 + k + hx$ (k = const), đưa phương trình về dạng:

$$A.t^2 + B.t + C = 0.$$

- Nếu bài toán chứa $\sqrt{f(x)}, \sqrt{g(x)}$ và $\sqrt{f(x)}.\sqrt{g(x)}$ = k (k=const), có thể đặt $\sqrt{f(x)}$ = t, điều kiện tối thiểu t > 0, khi đó $\sqrt{g(x)} = \dfrac{k}{t}$

- Nếu bài toán có dạng: $a\sqrt[n]{f^2(x)} + b\sqrt[n]{g^2(x)} = c\sqrt[n]{f(x).g(x)}$

* Cách giải: Xét f(x) = 0, nếu $f(x) \neq 0$ chi 2 vế cho $\sqrt[n]{f^2(x)}$ rồi đặt $\sqrt[n]{\dfrac{g(x)}{f(x)}} = t$, đưa về phương trình $bt^2 - ct + a = 0$.

- Lưu ý: Với phương trình, bất phương trình căn thức chứa tham số sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, nhất thiết ta phải đi tìm *điều kiện đúng* cho ẩn phụ.

\- Để tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ đối với các phương trình, bất phương trình vô tỉ, ta có thể lựa chọn một trong số các phương pháp sau:

+ Sử dụng tam thức bậc hai, chẳng hạn khi đặt:

$$t = \sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{(x-2)^2 + 1} \geq 1$$

+ Sử dụng đạo hàm.

+ Sử dụng các bất đẳng thức.

HĐ 3: *Ra bài tập phân hoá*

Ví dụ 1. Giải phương trình.

a. $3x^2 + 21x + 18 + 2\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 2$

b. $\sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19}$

c. $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

d. $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2 - 4} - 2x + 2$

e. $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = 3\sqrt[3]{x^2 - 1}$

* Yêu cầu: HS giải bài tập theo nhóm đã phân công, dữa trên cơ sở lí thuyết và sự điều khiển của giáo viên.

N1: giải bài tập (a; b)

N2: giải bài tập (b;c)

N3: giải bài tập (c; d; e) và tổng quát các bài toán.

HĐ 3: *GV tổng kết và tóm tắt lời giải của từng nhóm:*

a. $3x^2 + 21x + 18 + 2\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 2$

Đặt $\sqrt{x^2 + 7x + 7} = t \quad t \geq 0$ phương trình có dạng:

$3t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (thoả mãn) và $t = -\frac{5}{3}$ (loại)

Suy ra: $\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -6 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\{-6; -1\}$

* Tổng quát hoá: A.f(x) + B.$\sqrt{f(x)}$ + C = 0. Đặt $\sqrt{f(x)}$ = t (t ≥ 0), đưa phương trình về dạng: A.t^2 + B.t + C = 0.

b. $\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+19}$

Đặt t = x^2 + x + 2 = $(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}$ phương trình đã cho trở thành.

$\sqrt{t+5}+\sqrt{t}=\sqrt{3t+13}$ với điều kiện t ≥ $\frac{7}{4}$ ta tìm được t = 4

Suy ra: x^2 + x + 2 = 4 ⇔ x = 1 và x = -2

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-2;1\}$

c. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$

Ta nhận thấy: (3x – 2)(x -1) = $3x^2$ - 5x +2

Điều kiện: $\begin{cases}3x-2\geq 0\\ x-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 1$

Đặt $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=t$ (t > 0)

$\Rightarrow$ 3x – 2 + x – 1 + $2\sqrt{3x^2-5x+2}=t^2$

$\Rightarrow$ $2\sqrt{3x^2-5x+2}=t^2$ = $\frac{t^2-4x+3}{2}$

Phương trình có dạng: t = 4x – 9 + t^2 - 4x + 3

⇔ t^2 – t - 6 = 0. Từ đó tìm được t = 3 (thoả mãn) và t = -2 (loại).

Suy ra: $\sqrt{3x^2-5x+2}=6-2x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6-2x\geq 0\\ 3x^2-5x+2=(6-2x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ x^2-19x+34=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 3\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=17\end{array}\right.\end{cases}$$

⇔ x = 2. Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm x = 2.

- Tổng quát hoá: A.($\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$) + B.$\sqrt{(ax+b)(cx+d)}$ = C

Đặt $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$ = t (điều kiện tối thiểu t > 0), từ đó bình phương hai vế để tính $\sqrt{(ax+b)(cx+d)}$ theo t và đưa phương trình về dạng:

A.t^2 + B.t + C = 0.

d. $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-4}-2x+2$

Điều kiện: x ≥ 2

Đặt $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=t$, do x ≥ 2 nên $\sqrt{x-2}\le\sqrt{x+2}$ ⇒ t ≤ 0.

⇒ x – 2 + x + 2 - $2\sqrt{x^2-4}=t^2$ ⇒ $2\sqrt{x^2-4}=2x-t^2$

Phương trình đã cho có dạng: t = 2x – t^2 – 2x + 2 ⇔ t^2 + t – 2 = 0

Từ đó tìm được t = 1 (loại) và t = -2 (thoả mãn)

Suy ra: $\sqrt{x^2-4}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ (x^2-4)=(x-2)^2 \end{cases}$ ⇔ x = 2

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là: x = 2.

- Tổng quát hoá: A.($\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}$) + B. $\sqrt{(ax+b)(cx+d)}$ =C

Đặt $\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}$ = t (tuỳ theo điều kiện của x để tìm điều kiện của t), từ đó bình phương hai về để tính $\sqrt{(ax+b)(cx+d)}$ theo t và đưa phương trình về dạng: A.t^2 + B.t + C = 0.

e. $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$

Ta thấy x = 1 không phải là nghiệm của (1), chia 2 vế (1) cho $\sqrt[3]{(x-1)^2}$

Ta có phương trình $\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+2=3\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ (2).

Đặt y = $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, ta có (2)⇔ y^2- 3y + 2 = 0⇔ $\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=1 \end{array}\right.$

Với y = 2⇒ $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=2 \Leftrightarrow x=\frac{9}{7}$

Với y = 1: Phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình (1) có một nghiệm $x=\frac{9}{7}$

Sai lầm thường gặp khi giải phương trình bằng phép đặt ẩn phụ và cách khắc phục

Ví dụ áp dụng: $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$ **(*)**

- *Sai lầm thường gặp:*

Đặt $x+\sqrt{4-x^2}=t>0$ (1)

$\Rightarrow x\sqrt{4-x^2}=\dfrac{t^2-4}{2}$ (2)

Khi đó (*) $\Leftrightarrow$ t = 2 + 3. $\dfrac{t^2-4}{2}$ $\Leftrightarrow$ $3t^2$ - 2t - 8 = 0

$\Leftrightarrow$ t = 2 (thoả mãn) hoặc t = -$\dfrac{4}{3}$ (loại)

Với t = 2 thế vào (2): $x\sqrt{4-x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\end{array}\right.$

- *Nguyên nhân sai lầm:*

Phép đặt $x+\sqrt{4-x^2}=t$, ta chưa xác định được điều kiện của t.

Từ (1) sang (2) là phép biến đổi hệ quả, không là phép biến đổi tương đương nên khi t = 2 thế vào (2), xuất hiện nghiệm ngoại lai x = -2

- *Lời giải đúng:*

Điều kiện: 4 - $x^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $|x|\leq 2$

Đặt $x+\sqrt{4-x^2}=t$

$\Rightarrow x\sqrt{4-x^2}=\dfrac{t^2-4}{2}$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow$ t = 2 + 3. $\dfrac{t^2-4}{2}$ $\Leftrightarrow$ $3t^2$ - 2t - 8 = 0 $\Leftrightarrow$ t = 2 hoặc t = -$\dfrac{4}{3}$

Với t = 2: $x+\sqrt{4-x^2}=2\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=2-x\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\geq0\\4-x^2=(2-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Với t = $-\frac{4}{3}$: $x+\sqrt{4-x^2}=-\frac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=-\frac{4}{3}-x \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3}-x \geq 0 \\ 4-x^2=(2-x)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -\frac{4}{3} \\ 9x^2+12x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-2-\sqrt{14}}{3}$$

Vậy phương trình (*) có 3 nghiệm là: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = \frac{-2-\sqrt{14}}{3}$

Bài tập phân hoá tương tự

a. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2+\sqrt{2x^2+5x+3}-16$

b. $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$

c. $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}+3=0$

d. $\sqrt[3]{\frac{2x}{1+x}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}}=2$

e. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=\frac{x+5}{2}$

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình.

a. $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}>0$

b. $\sqrt{\frac{x}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$

c. $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x$

d. $x+\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}>3\sqrt{5}$

Yêu cầu: - Đối với học sinh yếu kém chỉ cần giải ý (a,b).

- Đối với học sinh trung bình giải lần lượt từ ý (a) đến (c).

- Đối với học sinh khá giỏi lần lượt từ ý (a) đến ý (d).

Tóm tắt lời giải:

a. $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}>0$

Bất phương trình tương đương với.

$$x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x}-10>0$$

Đặt: $\sqrt{x^2+3x}=t\geq 0$ ta được phương trình

$t^2 + 3t – 10 > 0 \Leftrightarrow t > 2$ (thỏa mãn) hoặc $t < -5$ (loại).

Suy ra: $\sqrt{x^2+3x}>2 \Leftrightarrow x^2 + 3x – 4 > 0 \Leftrightarrow x < - 4$ hoặc $x > 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $(-\infty; - 4) \cup (1 ; +\infty)$.

b. $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\geq\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Điều kiện: $\dfrac{x}{x-1}>0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 1$

Ta nhận thấy: $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}.\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}=1$ Đặt: $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}=t$ $(t > 0)$

Bất phương trình trở thành: $t+\dfrac{1}{t}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}t^2-3t+\sqrt{2}\geq 0$

$$\Leftrightarrow t\geq\sqrt{2} \text{ hoặc } t\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

* $t=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}\geq\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1}\geq 2 \Leftrightarrow 1<x\leq 2$

* $t\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 0<\dfrac{x}{x-1}<\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -1\leq x<0$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $[-1; 0)\cup(1;2]$

c. $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x$

Ta nhận thấy: $(7x + 7).(7x – 6) = 49x^2 + 7x – 42$

Điều kiện: $\begin{cases}7x+7\geq 0\\7x-6\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\geq\dfrac{6}{7}$

Đặt: $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}=t$ với $t \geq t(\frac{6}{7})=\sqrt{13}$

Suy ra: $7x+7+7x-6+2\sqrt{49x^2+7x-42}=t^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{49x^2+7x-42}=t^2-14x-1$

Bất phương trình trở thành: $t + t^2 - 14x - 1 < 181 - 14x$

$\Leftrightarrow t^2 + t - 182 < 0$

$\Leftrightarrow -14 < t < 13$

Kết hợp với: $t \geq \sqrt{13}$ ta được $\sqrt{13} \leq t < 13$

$\Leftrightarrow \sqrt{13} \leq \sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6} < 13 \Leftrightarrow \frac{6}{7} \leq x < 6$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $[\frac{6}{7};6)$.

d. $x + \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} > 3\sqrt{5}$ (*)

Điều kiện: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |x| > 2$

-Ta nhận thấy nếu x < -2 thì vế trái của (*) âm nên bất phương trình vô nghiệm.

- Nếu x > 2 bình phương hai vế (*) ta được:

$\frac{x^4}{x^2-4}+4.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 45$ (**)

Đặt $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = t > 0$, khi đó (**) có dạng: $t^2 + 4t - 45 > 0$

$\Leftrightarrow t > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 5 \Leftrightarrow x^4 - 25x^2 + 100 > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 > 25 \\ x^2 < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| > 5 \\ |x| < \sqrt{5} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện x > 2, ta được nghiệm của bất phương trình là:

$(2 ; \sqrt{5}) \cup (5;+\infty)$

Sai lầm thường gặp trong khi sử dụng ẩn phụ và cách khắc phục sai lầm:

Ví dụ áp dụng: $\sqrt{5x^2+10x+1} \geq 7-x^2-2x$

• *Sai lầm thường gặp:*

Đặt t = $5x^2$ + 10x + 1, t≥ 0, khi đó (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ \sqrt{t} \geq \dfrac{36-t}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \geq (\dfrac{36-t}{5})^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 97t + 1296 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 16 \leq t \leq 81 \Leftrightarrow 16 \leq 5x^2 + 10x + 1 \leq 81$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1-\sqrt{17} \leq x \leq -3 \\ 1 \leq x \leq -1+\sqrt{17} \end{array}\right.$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

Với x < -1- $\sqrt{17}$ hoặc x > -1 +$\sqrt{17}$ thì 7 - x^2 -2x < 0

$\Rightarrow \sqrt{5x^2+10x+1} > 0 > 7-x^2-2x$ nên x < -1- $\sqrt{17}$ hoặc x > -1 +$\sqrt{17}$ thì nghiệm đúng. Cách giải trên đã làm mất nghiệm của bất phương trình.

• *Lời giải đúng:*

Cách 1: Đặt t = $5x^2$ + 10x + 1, t ≥ 0, khi đó (2) $\Leftrightarrow \sqrt{t} \geq \dfrac{36-t}{5}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{36-t}{5} < 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{36-t}{5} \geq 0 \\ t \geq (\dfrac{36-t}{5})^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow t \geq 16 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 1 \geq 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{array}\right.$$

Cách 2: Đặt t = $\sqrt{5x^2+10x+1}$, t ≥ 0, khi đó (2) $\Leftrightarrow$ t + 5t - 36 $\geq 0 \Leftrightarrow t \geq 4$ (thoả mãn) hoặc t ≤ - 9 (loại).

$t \geq 4 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 1 \geq 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{array}\right.$

Bài tập phân hoá tương tự.

a. $2x^2 + \sqrt{x^2 - 5x - 6} > 10x + +15$

b. $\frac{x}{x+1} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} - 3 > 0$

c. $3\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} - 7$

d. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} > 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$

e. x + $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > \frac{35}{12}$

2.2.2.2. Sử dụng ẩn phụ để đưa về phương trình hoặc bất phương trình tích.

Ví dụ 3: Giải các phương trình.

a. $x^2 + \sqrt{x+1} = 1$

b. $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$

c. $\sqrt{x} > 1 + \sqrt[3]{x-1}$

Tóm tắt lời giải:

a. Đặt $\sqrt{x+1} = t$ $(t \geq 0) \Rightarrow x = t^2 - 1$

Phương trình có dạng: $(t^2 - 1)^2 + t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow t(t-1)(t^2 + t - 1) = 0$$

Từ đó ta tìm được: t = 0; t = 1; $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ vì $t \geq 0$ nên loại giá trị $t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

* Với t = 0 thì x = 1

* t = 1 thì x = 0

* $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $\sqrt{x+1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0; 1\right\}$

b. Đặt: $\sqrt{2x-1} = t \geq 0 \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2}$

Phương trình: $\Leftrightarrow$ $t^4 - 4t^2 + 4t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(t^2+2t-1) = 0$

$\Leftrightarrow$ t = 1 hoặc t = $\sqrt{2}$ - 1

$\Leftrightarrow$ x = 1 hoặc x = 2 - $\sqrt{2}$

c. Điều kiện: x > 0

$\Rightarrow 1 + \sqrt[3]{x-1} > 0$

Bất phương trình đã cho tương đương: $x > (1 + \sqrt[3]{x-1})^2$

$\Leftrightarrow x > 1 + 2\sqrt[3]{x-1} + (\sqrt[3]{x-1})^2$

Đặt $\sqrt[3]{x-1}$ = t vì x > 0 nên t > -1. Ta được bất phương trình:

$t^3 - t^2 - 2t > 0 \Leftrightarrow t(t+1)(t-2) > 0 \Leftrightarrow t(t-2) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 2 \\ t < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x-1} > 2 \\ \sqrt[3]{x-1} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 9 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: x > 9 hoặc 0 < x< 1

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

a. $(x-1)\sqrt{2x-1} \leq 3(x-1)$ **b.** $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} > 36$

2.2.2.3. Sử dụng ẩn phụ đưa phương trình về phương trình đẳng cấp

Ví dụ 4: Giải phương trình. $2x^2 - 3x + 2 = x\sqrt{3x-2}$

Tóm tắt lời giải: Điều kiện: $x \geq \dfrac{2}{3}$

Phương trình: $\Leftrightarrow 2x^2 - (3x-2) = x\sqrt{3x-2}$

Đặt $\sqrt{3x-2} = y \geq 0$ ta được $2x^2 - y^2 = xy$ (*)

Phương trình (*) là phương trình đẳng cấp đối với x và y.

Đặt y = tx thì: (*) $\Leftrightarrow x^2(2 - t^2 - t) = 0 \Leftrightarrow 2 - t^2 - t = 0 \Leftrightarrow$ t = 1 hoặc t = 2

- Với t = 1 thì y = x do đó: $\sqrt{3x-2} = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$ x = 1 hoặc x = 2

- Với t = 2 thì y = -2x do $x \geq \dfrac{2}{3}$ nên y < 0 (loại)

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\{1;2\}$.

2.2.2.4. Sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình, bất phương trình của ẩn phụ đó, còn ẩn ban đầu coi là tham số

HĐ 1: *GV đặt vấn đề:*

Phương pháp này là việc sử dụng một ẩn phụ chuyển phương trình, bất phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

Phương pháp này thường được sử dụng đối với những phương trình, bất phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho một biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp.

Khi đó thường ta được một phương trình, bất phương trình bậc hai theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biệt thức Δ là một số chính phương.

HĐ 2: *Ra bài tập phân hoá.*

Ví dụ 5: Giải các phương trình.

a. $6x^2-10x+5-(4x-1)\sqrt{6x^2-6x+5}=0$

b. $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$

Tóm tắt lời giải:

a. Đặt $\sqrt{6x^2-6x+5}=t\geq 0$

Phương trình có dạng: $t^2 - (4x - 1)t - 4x = 0$. Coi đây là phương trình bậc hai ẩn t (x là tham số).

$\Delta=(4x-1)^2+16x=(4x+1)^2$ ta tìm được t = -1 (loại) và t = 4x

* Với t = 4x thì $\sqrt{6x^2-6x+5}=4x \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 6x^2-6x+5=16x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-3+\sqrt{59}}{6}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-3+\sqrt{59}}{6}$

b. Điều kiện $x^3 + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

Ta nhận thấy: $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

Phương trình: $\Leftrightarrow 2\left[(x^2 - 2x + 4) - (x + 2)\right] = 3\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2 - 2x + 4}$

Đặt: $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = t > 0$. Phương trình có dạng: $2[t^2 - (x + 2)] = 3\sqrt{x+2}.t$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 3\sqrt{x+2}.t - 2(x+2) = 0$. Coi t là ẩn.

Ta có: $\Delta = 25(x+2)$ tìm được $t = 2\sqrt{x+2}$ và $t = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x+2}$ (loại)

Với t = $2\sqrt{x+2}$ thì $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 2x + 4 = x + \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 6x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{13}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\left\{3 \pm \sqrt{13}\right\}$.

Ví dụ 6. Giải các bất phương trình sau:

a. $x^2 + 4x \geq (x + 4)\sqrt{x^2 - 2x + 4}$ **b.** $x^2 - 1 \leq 2x\sqrt{x^2 + 2x}$

Tóm tắt lời giải:

a. $x^2 + 4x \geq (x + 4)\sqrt{x^2 - 2x + 4}$

Đặt $\sqrt{x^2 - 2x + 4}$ = t, điều kiện $t \geq 0$

Bất phương trình có dạng:

$f(x) = x^2 - (t - 4)x - 4t \geq 0$ (1)

Coi vế trái là một tam thức bậc hai theo x, ta có:

$\Delta = (t - 4)^2 + 16t = (t + 4)^2$. Khi đó f(x) = 0 có các nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{t - 4 - t - 4}{2} = -4 \\ x = \dfrac{t - 4 + t + 4}{2} = t \end{array}\right.$$

Khi đó (1) tương đương: $(x + 4)(x - t) \geq 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - \sqrt{x^2 - 2x + 4}) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+4\ge 0\\ x-\sqrt{x^2-2x+4}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+4\le 0\\ x-\sqrt{x^2-2x+4}\le 0\end{cases}\end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -4\\ \sqrt{x^2-2x+4}\le x\end{cases}\\ \begin{cases}x\le -4\\ x-\sqrt{x^2-2x+4}\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -4\\ x\ge 0\\ 0\le x^2-2x+4\le x^2\end{cases}\\ x\le -4\end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -4\end{array}\right.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm x $\in(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$.

b. $x^2 - 1 \le 2x\sqrt{x^2+2x}$

Đặt $\sqrt{x^2+2x}$ = t, điều kiện t $\ge$ 0

Bất phương trình có dạng:

$$f(x) = x^2 - 2tx - 1 \le 0 \qquad (1)$$

Coi vế trái là một tam thức bậc hai theo x, ta có:

$\Delta = t^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Khi đó f(x) = 0 có các nghiệm:

$\left[\begin{array}{l}x=t-x-1\\ x=t+x+1\end{array}\right.$ Khi đó (1) tương đương:

$(x - t - x - 1)(x - t + x + 1) \le 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+2x} + 1)(\sqrt{x^2+2x} - 2x - 1) \le 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x} - 2x - 1 \le 0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x} \le 2x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+1\ge 0\\ 0\le x^2+2x\le (2x+1)^2\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 0\\ x\le -2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 0$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 0$

Bài tập phân hoá tương tự.

a. $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$ **b.** $(4x-1)\sqrt{x^3+1} = 2x^3 + 2x + 1$

c. $x^2 - 1 \ge 2x\sqrt{x^2-2x}$ **d.** $x - 1 \ge x(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})+\sqrt{x^2-x}$

2.2.2.5. Sử dụng ẩn phụ đưa về hệ phương trình.

HĐ 1: *GV đặt vấn đề*

Để sử dụng phương pháp này ta sử dụng k ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một hệ phương trình với k ẩn phụ. Trong hệ mới thì k-1 phương trình nhận được từ mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng. Chẳng hạn đối với phương trình: $\sqrt[m]{a-f(x)}+\sqrt[n]{b+f(x)}=c$

Đặt: $u=\sqrt[m]{a-f(x)}$; $v=\sqrt[n]{b+f(x)}$ Khi đó thu được hệ $\begin{cases} u+v=c \\ u^m+v^n=a+b \end{cases}$

HĐ 2: *Ra bài tập phân hoá*

Ví dụ 7. Giải các phương trình, bất phương trình sau.

a. $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$

b. $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

c. $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$

d. $\sqrt{2x^2+12x+6}-\sqrt{2x-1}>x+2$

HĐ 3: *Phân tích và hướng dẫn học sinh tìm lời giải*

a. Đặt: $\sqrt[4]{97-x}=u$; $\sqrt[4]{x}=v$ Điều kiện: u ≥ 0 ; v ≥ 0

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4=97 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta tìm được: u = 3 ; v = 2 và u = 2 ; v = 3 (thoả mãn điều kiện)

Từ đó suy ra: x = 81 và x = 16

b. Đặt: $y=\sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow y^3 = 2x - 1$

Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$

Giải hệ phương trình tìm được: x = 1; x = $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

c. Điều kiện: -1 ≤ x ≤ 1

Đặt: $u = \sqrt{1+x}$ và $v = \sqrt{1-x}$ điều kiện: u ≥ 0 ; v ≥ 0. Ta có hệ

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ \sqrt{1+uv}(u^3 - v^3) = 2 + uv \end{cases}$$

Ta biến đổi: $1 + uv = \frac{1}{2}(2 + 2uv) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + 2uv) = \frac{1}{2}(u+v)^2$

Suy ra: $\sqrt{1+uv} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$

Vậy: $\begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)(u-v)(u^2+v^2+uv) = 2 + uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ u^2 - v^2 = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow u^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Do đó: $1 + x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Leftrightarrow$ x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d. Điều kiện $\begin{cases} 2x^2 + 12x + 6 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Biến đổi bất phương trình về dạng: $\sqrt{2(x+2)^2 + 2(2x-1)} > x + 2 + \sqrt{2x-1}$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{2x-1} \geq 0 \\ v = x + 2 > 0 \end{cases}$ khi đó bất phương trình có dạng:

$$\sqrt{2u^2 + 2v^2} > u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ 2u^2 + 2v^2 > (u+v)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ (u-v)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow u \neq v$$

Xét trường hợp: u = v $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}$ = x + 2 $\Leftrightarrow$ x = 1 hoặc x =5

$\Rightarrow$ u $\neq$ v, ta phải có x $\in [\frac{1}{2}; +\infty) \backslash \{1; 5\}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: x $\in [\frac{1}{2}; +\infty) \backslash \{1; 5\}$

Sai lầm thường gặp khi sử dụng ẩn phụ đưa về hệ phương trình và cách khắc phục.

Ví dụ áp dụng: $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - \sqrt{4x^2 - 4x + 4} = 9x - 3$ (1)

• *Sai lầm thường gặp:*

Đặt a = $\sqrt{4x^2+5x+1}$; b = $\sqrt{4x^2-4x+4}$ (a, b ≥ 0)

Ta có $a^2 - b^2 = (4x^2 + 5x + 1) - (4x^2 - 4x + 4) = 9x - 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a + b)(a - b) - (a - b) = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0 \Leftrightarrow a - b = 0$ hoặc $a + b - 1 = 0$

Nếu a - b = 0 ta có $\sqrt{4x^2+5x+1} = \sqrt{4x^2-4x+4}$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Nếu a + b - 1 = 0 ta có a + b = 1 (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow \begin{cases} a-b=9x-3 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow 2a = 9x-2 \Rightarrow 2\sqrt{4x^2+5x+1} = 9x-2$ (4)

$\Leftrightarrow 4(4x^2 + 5x + 1) = (9x - 2)^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 20x + 4 = 81x^2 - 36x + 4$

$\Leftrightarrow 65x^2 - 56x = 0 \Leftrightarrow x(65x - 56) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{56}{65}$

Thử x = 0 không thoả mãn (4); $x = \frac{56}{65}$ thoả mãn (4)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{3}$; $x = \frac{56}{65}$

• *Nguyên nhân sai lầm:* Nghiệm $x = \frac{56}{65}$ là nghiệm ngoại lai.

Lời giải sai ở chỗ xét a + b - 1 = 0

Chú ý $b = \sqrt{(2x-1)^2} \geq \sqrt{3}$ để loại trường hợp a + b = 1

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}$

• **HĐ:** *GV bình luận:*

Qua các ví dụ trên chắc chắn các bạn đã thấy sự linh hoạt, đa dạng và hữu hiệu của việc sử dụng ẩn phụ vào giải phương trình vô tỉ. Tuy mỗi với mỗi bài toán khác nhau có các hướng giải khác nhau, song nếu khéo léo sử dụng ẩn phụ đưa về các dạng cơ bản trên thì việc giải phương trình vô tỉ sẽ ngắn gọn và đơn giản.

Bài tập tương tự.

a. $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$ **b.** $\sqrt[4]{57-x}+\sqrt[4]{x+40}=5$

c. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x+1}$ **d.** $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$

e. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$ **f.** $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=2$

g. $\sqrt{x^3-2x}+x\geq x\sqrt{x}+\sqrt{x^2-2x}$ **h.** $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-x+1}=4x-3$

2.2.3. Chủ đề 3: Lượng giác hoá phương trình và bất phương trình vô tỉ

HĐ 1: *GV nêu vấn đề*

Trong phương trình, bất phương trình vô tỉ nếu:

- Nếu bài toán có chứa $\sqrt{a^2-x^2}$ tức là ẩn x $\in$ [-a, a] thì ta có thể đặt:

x = acost (0 ≤ t ≤ π) hay x= asint $(-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2})$

- Nếu bài toán có chứa $\sqrt{x^2-a^2}$ thì có thể đặt x = $\frac{|a|}{\sin t}$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

hoặc x = $\frac{|a|}{\cos t}$ với t $\in$ [0 ; π] \ { $\frac{\pi}{2}$ }

- Nếu bài toán có chứa $\sqrt{x^2+a^2}$ (ẩn x bất kì) ta có thể đặt x = tgt $(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$

Nhờ sử dụng các công thức lượng giác mà việc khử các dấu căn thức đã trở nên rất thuận lợi.

HĐ 2: *Ra bài tập phân hoá*

Ví dụ 1. Giải phương trình, bất phương trình sau.

a. $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x(1+2\sqrt{1-x^2})$ **b.** $\sqrt{x^5}+\sqrt{(1-x^2)^5}\leq 1$

c. x + $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{2}$ **d.** $\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2+1}{2x} = \frac{(x^2+1)^2}{2x(1-x^2)}$

Tóm tắt lời giải:

a. HĐ 1: *HS nhóm 1 đặt điều kiện để phương trình có nghĩa*

Điều kiện: -1 $\le x \le 1$

HĐ 2: *HS nhóm 2 nêu cách giải dựa trên cơ sở lí thuyết*

Đặt x =sint với t$\in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. Khi đó phương trình có dạng:

$\sqrt{1+cost}$ = sint(1 + 2cost) $\Leftrightarrow \sqrt{2}cos\frac{t}{2}$ = sint + sin2t (*)

HĐ 3: *HS nhóm 3 thực hiện lời giải và kết luận nghiệm*

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{2}cos\frac{t}{2}$ =2sin$\frac{3t}{2}cos\frac{t}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}cos\frac{t}{2}(1-2\sin\frac{3t}{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cos\frac{t}{2}=0 \\ \sin\frac{3t}{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{6} \\ t=\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: x =$\frac{1}{2}$ hoặc x =1

b. Điều kiện: x$\in$[0; 1]

Đặt x = cost với t $\in [0;\frac{\pi}{2}]$ ta có: $\sin^5 t + \cos^{\frac{5}{2}} t \le 1$

Do $\sin^5 t \le \sin^2 t$ và $\cos^{\frac{5}{2}} t \le \cos^2 t$ nên $\sin^5 t + \cos^{\frac{5}{2}} t \le \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ với mọi t $\in [0;\frac{\pi}{2}]$

Nên bất phương trình có nghiệm mọi x$\in$[0; 1]

c. Điều kiện $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$

Đặt x = $\frac{1}{cost}, t\in(0;\frac{\pi}{2})$. Khi đó phương trình có dạng:

$\frac{1}{cost}+\frac{1}{\sin t}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow$ sint + cost = 2 $\sqrt{2}$ sint.cost

Đặt sint +cost = u, điều kiện u $\in [0;1]$. Từ đó giải được t $=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là: x = $\sqrt{2}$.

d. Điều kiện: x $\neq \pm 1;0$

Đặt x = tgt, t $\in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{4};0\right\}$

Khi đó: $\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{cost}$; sin2t = $\frac{2x}{1+x^2}$; cost = $\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$\Rightarrow$ sin4t = 2sin2t.cost2t = $\frac{4x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ $\Rightarrow \frac{2}{\sin 4t}=\frac{(x^2+1)^2}{2x(1-x^2)}$

Phương trình có dạng: $\frac{1}{cost}+\frac{1}{\sin 2t}=\frac{2}{\sin 4t}$ $\Leftrightarrow$ 2sint.cos2t + cos2t =1

Từ đó giải được: sint = $\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy nghiệm của phương trình là x = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 2: Giải và biện luận phương trình theo tham số a.

$\sqrt{a+x}=a-\sqrt{a-x}$ (1)

Tóm tắt lời giải:

(1) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=a$ (2)

$\Rightarrow$ điều kiện: $\begin{cases}-a\leq x\leq a\\ a\geq 0\end{cases}$ (3)

* Khi a = 0: (2) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$ $\Leftrightarrow$ x = 0.

* Khi a > 0 $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ $-1\leq \frac{x}{a}\leq 1$ đặt: x = acosφ với φ $\in$ [0 ; π] (4).

Khi đó (2) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{a(1+\cos\varphi)}+\sqrt{a(1-\cos\varphi)}=a$ $\Leftrightarrow$ $\cos(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{a}}{2}$ (5)

Vì φ ∈ [0 ; π] ⇒ $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}) \le 1$

Nên (5) có nghiệm khi $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{\sqrt{a}}{2} \le 1 \Leftrightarrow 2 \le a \le 4$.

Khi đó, nghiệm của (1) được xác định từ (4) và (5) như sau:

$$x = a\cos\varphi = a\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) =$$

$$-2a\sin(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4})\cos(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \pm 2a\cos(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4})\sqrt{1 - \cos^2(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4})} = \pm\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$$

Kết luận:

* Nếu a = 0 thì (1) có nghiệm x = 0

* Nếu $2 \le a \le 4$ thì (1) có nghiệm $x = \pm\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$

* Nếu a < 0 thì (1) vô nghiệm.

Ví dụ 3: Giải và biện luận phương trình theo tham số m.

$$2\sqrt{m+x} - \sqrt{m-x} = \sqrt{m - x + \sqrt{x(m+x)}} \quad (1)$$

Tóm tắt lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} m + x \ge 0 \\ m - x \ge 0 \\ x(m+x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \le x \le m \\ x \ge 0; m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le m \quad (2)$

* Khi m = 0: (1) ⇔ $2\sqrt{x} - \sqrt{-x} = \sqrt{-x + \sqrt{x^2}}$ ⇔ x = 0.

* Khi m > 0: (2) ⇔ $0 \le \frac{x}{m} \le 1$ đặt $x = m\cos\alpha, \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (3)

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{m(1+\cos\alpha)} - \sqrt{m(1-\cos\alpha)} = \sqrt{m(1-\cos\alpha) + \sqrt{m^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha} = \sqrt{1 - \cos\alpha + \sqrt{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}}$$

$$\Leftrightarrow 4(1+\cos\alpha) - 4\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} = \sqrt{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow\ 4(\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha})=\sqrt{\cos\alpha} \quad \Leftrightarrow\ 32-\cos\alpha=32\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow\ 1025\cos^2\alpha-64\cos\alpha=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha=0 \\ \cos\alpha=\dfrac{64}{1025}\end{array}\right.$$

Lúc đó (3) cho nghiệm x = 0 hoặc $x=\dfrac{64m}{1025}$

Kết luận:

* Nếu m ≥ 0 thì (1) có nghiệm x = 0 hoặc $x=\dfrac{64m}{1025}$

* Nếu m < 0 thì (1) vô nghiệm

Ví dụ 4: Xác định tham số a để bất phương trình sau có nghiệm.

$$\sqrt{a+\sqrt{x}+\sqrt{a-\sqrt{x}\le 2}}$$

Tóm tắt lời giải:

Ta chỉ cần xét a ≥ 0

* Khi a = 0 ⇒ $\sqrt{\sqrt{x}}+\sqrt{-\sqrt{x}}\le 2 \Leftrightarrow$ x = 0.

* Khi a > 0 điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt{x}\le a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 0\le \sqrt{x}/a\le 1\end{cases}$ đặt $\begin{cases} \sqrt{x}=a\cos\varphi \\ \varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$

Khi đó: (1) ⇔ $\sqrt{a(1+\cos\varphi)}+\sqrt{a(1-\cos\varphi)}\le 2 \Leftrightarrow \cos(\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\pi}{4})\le\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

Với $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\le\cos(\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\pi}{4})\le 1$

Vậy (2) có nghiệm ⇔ $\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 0<a\le 2$

Kết luận: Bất phương trình (1) có nghiệm: ⇔ $0<a\le 2$

Bài tập phân hoá tương tự.

Giải các phương trình sau:

a. $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$

b. $\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{1-x^2} - 2x^2 + 1 = 0$

2.2.4. Chủ đề 4: Sử dụng hàm số giải phương trình và bất phương trình vô tỉ

HĐ: *GV đặt vấn đề.*

* Giả sử hàm số f(x) đơn điệu trên (a; b) thì trên (a; b) phương trình f(x) = 0 có nhiều nhất một nghiệm.

* Khi gặp phương trình vô tỉ có tham số m, ta cố gắng biến đổi phương trình ấy về dạng: f(x) = m (*). Chúng ta thực hiện các bước sau:

Số nghiệm của (*) bằng số giao điểm của đường thẳng (d) y = m với đồ thị (C) của hàm số y = f(x).

+ Xét hàm số: y = f(x)

Tìm miền xác định D

Tính đạo hàm y', rồi giải phương trình $y' = 0$

Lập bảng biến thiên

+ Kết luận

- Phương trình (*) có nghiệm trên D $\Leftrightarrow$ m thuộc miền giá trị của hàm số f(x).

$\Leftrightarrow$ Min f(x) $\le$ m $\le$ Maxf(x) trên D

- Để phương trình (*) có k nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ d cắt (C) tại k điểm phân biệt.

- Để phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow$ d$\cap$ (C)= $\varnothing$

* Khi gặp bất phương trình vô tỉ có tham số m, ta cố gắng biến đổi bất phương trình ấy về dạng: f(x) < m (f(x) > m) (**).

- Bất phương trình (**) có nghiệm x thuộc $(\alpha;\beta)$ $\Leftrightarrow$ m > Min f(x) (m < Max f(x)) trên khoảng $(\alpha;\beta)$.

- Bất phương trình (**) có nghiệm đúng với mọi x thuộc $(\alpha; \beta)$

$\Leftrightarrow$ m > Max f(x) trên khoảng $(\alpha;\beta)$; m < Min f(x) trên $(\alpha; \beta)$.

• Lưu ý: Với phương trình, bất phương trình căn thức chứa tham số sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, nhất thiết ta phải đi tìm *điều kiện đúng* cho ẩn phụ.

- Để tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ đối với các phương trình, bất phương trình vô tỉ, ta có thể lựa chọn một trong số các phương pháp sau:

+ Sử dụng tam thức bậc hai, thí dụ: t = $\sqrt{x^2-4x+5}=\sqrt{(x-2)^2+1}\geq 1$

+ Sử dụng đạo hàm.

+ Sử dụng các bất đẳng thức.

HĐ 2: *Ra bài tập phân hoá*

Ví dụ 1: Giải các phương trình và bất phương trình.

a. $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}+\sqrt{x+7}+\sqrt{x+16}=14$ **b.** $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+3}<9$

HĐ 3: *GV phân tích giúp học sinh xây dựng lời giải*

a. Điều kiện: $x\geq 5$

Xét hàm số f(x) = $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}+\sqrt{x+7}+\sqrt{x+16}-14$ với $x\in[5;+\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-5}}+\frac{1}{2\sqrt{x+7}}+\frac{1}{2\sqrt{x+16}}>0$ với $x\in(5;+\infty)$

Suy ra hàm số f(x) đồng biến trên $(5;+\infty)$ (1)

Mặt khác f(9) = 0 (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = 9.

b. Điều kiện: $x\geq -\frac{3}{2}$

Ta xét hàm số: f(x) = $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+3}-9<0$ với $x\geq -\frac{3}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3}}>0 \text{ với } x>-\frac{3}{2}$$

Suy ra hàm số f(x) đồng biến trên $(-\frac{3}{2};+\infty)$

Nhận thấy f(11) = 0

Vậy bất phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2} \\ f(x) < f(11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2} \\ x < 11 \end{cases}$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $[-\dfrac{3}{2};11)$

Ví dụ 2: Tìm m để các phương trình sau có nghiệm thực.

a. $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m$

b. $m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$

c. $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$

Tóm tắt lời giải:

a.HĐ 1: *HS đặt điều kiện:* $-3 \le x \le 6$

HĐ 2: *HS nhắc lại cách giải của phương trình đã học, từ đó:*

Đặt: $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} > 0$ với x $\in$ [-3 ; 6]

Ta có: $t' = \dfrac{1}{2\sqrt{3+x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}$; $t' = 0$; $x = \dfrac{3}{2}$

Bảng biến thiên:

x	-3		$\frac{3}{2}$		6
t'		+	0	-	
t	3	↗	$3\sqrt{2}$	↘	3

Vậy t$\in$ $[3;3\sqrt{2}]$

Ta có: $t^2 = 3 + x + 6 - x + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \Leftrightarrow \sqrt{(3+x)(6-x)} = \dfrac{t^2-9}{2}$

Phương trình đã cho trở thành: $\dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{9}{2} = m$

Xét hàm số: $y = -\dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{9}{2}$ với t$\in$ $[3;3\sqrt{2}]$

Ta có: y' = - t + 1 ; y' = 0 $\Leftrightarrow$ t = 1.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		3		$3\sqrt{2}$		$+\infty$
y'				$-$			
y			3	$\searrow$	$3\sqrt{2}-\dfrac{9}{2}$		

Tóm lại:

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ m$\in[3\sqrt{2}-\dfrac{9}{2};\ 3]$

b. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$ đặt: $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$

Ta có $\sqrt{1+x^2} \ge \sqrt{1-x^2}$ $\Rightarrow$ t $\ge$ 0.

$t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \le 2 \Rightarrow t \le \sqrt{2}$. Do đó t$\in[0; \sqrt{2}\,]$

Phương trình đã cho trở thành: $\dfrac{-t^2+t+2}{t+2} = m$ (*)

Xét f(t) = $\dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$ với t$\in[0; \sqrt{2}\,]$

f'(t) = $\dfrac{-t^2-4t}{(t+2)^2} \le 0$ với mọi t$\in[0; \sqrt{2}\,]$.

Bảng biến thiên:

t		0		$\sqrt{2}$	
$f'(t)$			$-$		
$f(t)$		1	$\searrow$	$\sqrt{2}-1$	

Vậy để phương trình đã cho có nghiệm thì: m$\in[\sqrt{2}-1;\ 1]$

c. Điều kiện: x $\ge$ 1

- Khi x = 1 thì m = 0. Vậy khi m = 0 thì phương trình có nghiệm x = 1

- Khi x > 1 phương trình tương đương:

$3 + m\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = 2\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ Đặt: t = $\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ Ta có: với x > 1 thì t > 1

Khi đó phương trình trở thành: $m = \frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}$ với t > 1.

$f'(t) = \frac{-2t+6}{t^3}$ f'(t) = 0 ; ⇔ t = 3

Bảng biến thiên:

t	1		3		$+\infty$
f'(t)		+	0	−	
f(t)	-1	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0

Tóm lại: Để phương trình đã cho có nghiệm thì $-1 < m \le \frac{1}{3}$

Ví dụ 3: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm đúng với mọi x ∈[-4 ; 6]

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \le x^2 - 2x + m$$

Tóm tắt lời giải:

Nhận thấy rằng: $(4+x)(6-x) = -x^2 + 2x + 24$

Đặt: $\sqrt{(4+x)(6-x)} = t$ với (t ≥ 0)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\sqrt{(4+x)(6-x)} \le \frac{4+x+6-x}{2} = 5 \Rightarrow$ t ∈ [0; 5]

Suy ra: $-x^2 + 2x + 24 = t^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 24 - t^2$

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + t - 24 \le m$ với t ∈ [0, 5].

Xét hàm số; f(t) = t^2 + t – 24 với t ∈ [0, 5]

f '(t) = 2t + 1 > 0 với mọi t ∈ [0, 5]

Bảng biến thiên:

t	0		5
f'(t)		+	
f(t)	-24	↗	6

Vậy để bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với $\forall$ x $\in$ [-4 ; 6] thì m $\geq$ 6.

Ví dụ 4: Cho bất phương trình.

$\sqrt{2x^2+7} < x + a$

1. Giải bất phương trình khi $a = \frac{1}{2}$

2. Tìm a để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x

Tóm tắt lời giải:

1. Khi $a = \frac{1}{2}$ ta có bất phương trình: $\sqrt{2x^2+7} < 2x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1>0 \\ 2x^2+7<(2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x^2+2x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Kết quả x > 1.

2. Ta có: $a\sqrt{2x^2+7} < x + a \Leftrightarrow a(\sqrt{2x^2+7} - 1) < x$

$\Leftrightarrow a < \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+7}-1}$ vì $\sqrt{2x^2+7} > 1; \forall x$

Đặt $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+7}-1}$ bài toán trở thành tìm a để f(x) > a ; $\forall$x $\in$ R

* $f'(x) = \dfrac{7-\sqrt{2x^2+7}}{(\sqrt{2x^2+7}-1)^2.\sqrt{2x^2+7}}$

* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{21}$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{21}$		$\sqrt{21}$		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	↘	$-\frac{\sqrt{21}}{6}$	↗	$\frac{\sqrt{21}}{6}$	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy f(x) > 4 với mọi x $\Leftrightarrow$ a < minf(x) $\Leftrightarrow$ a < $-\frac{\sqrt{21}}{6}$

Bài tập phân hoá tương tự

1. Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a. $\sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4}>5$ **b.** $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$

c. $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$ d. $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

2. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm:

a. $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$

b. $x^2 - 4x - 2(m+1)\sqrt{x^2-4x+5} = m-10$

c. $m(\sqrt{2-x^2}-\sqrt{2+x^2}+5)=\sqrt{2-x^2}-\sqrt{2+x^2}-2\sqrt{4-x^4}$

d. $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x})$

3.Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm đúng với mọi x $\in[-\frac{1}{2}; 3]$

$\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m + 2x^2 - 5x + 3$

2.2.5. Chủ đề 5: Những phương trình và bất phương trình vô tỉ không mẫu mực

GV đặt vấn đề:

Nhiều phương trình, bất phương trình bằng cách đánh giá tinh tế dựa trên:

* Tam thức bậc hai.

* Các bất đẳng thức cơ bản, như Cosi, Bunhiacôpxki...

* Tính chất trị tuyệt đối

.....

Ta có thể nhanh chóng chỉ ra được nghiệm của nó

Nếu gặp phương trình dạng: f(x) = g(x), mà chứng tỏ được $\begin{cases} f(x)\le a \\ g(x)\ge a \end{cases}$ thì phương trình tương đương với $\begin{cases} f(x)=a \\ g(x)=a \end{cases}$

Ra bài tập phân hoá:

Ví dụ: Giải các phương trình, bất phương trình sau;

a. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

b. $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

c. $\sqrt{2x^2-12x+22}+\sqrt{3x^2 18x+36}=-2x^2+12x-13$

d. $2\sqrt{7x^3-11x+25x-12}$ = x^2 + 6x - 1

e. $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\le 2$

Phân tích và hướng dẫn học sinh tìm lời giải:

a. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$ (1)

Điều kiện: $2\le x\le 4$

* Theo bất đẳng thức B.C.S ta có:

$1.\sqrt{x-2}+1.\sqrt{4-x}$ $\le$ $\sqrt{(1^2+1^2)(x-2+4-x)}$ = 4

$\rightarrow\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\le 2$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x-2}=\sqrt{4-x}$ $\Leftrightarrow$ x = 3

* Mặt khác ta có: $x^2-6x+11=(x-3)^2+2\ge 2$ với $\forall$ x $\in[2;4]$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 3

Do đó (1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2\\ x^2-6x+11=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 3

b. $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

Điều kiện: $\begin{cases}3x^2-5x+1\ge 0\\ x^2-2\ge 0\\ x^2-x-1\ge 0\\ x^2-3x+4\ge 0\end{cases}$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với.

$$\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{3(x^2-x-1)}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x}+4$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x-1)}}=\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}} \quad (2)$$

Nhận thấy các mẫu số của (2) đều dương

x = 2 là nghiệm của (2)

x > 2 Vế trái (2) < 0 < vế phải (2)

x < 2 Vế trái (2) > 0 > vế phải (2)

Vậy x = 2 là nghiệm duy nhất.

c. $\sqrt{2x^2-12x+22}+\sqrt{3x^2 18x+36}=-2x^2+12x-13$

Phương trình đã cho tương đương với

$\sqrt{2(x-3)^2+4}+\sqrt{3(x-3)^2+9}=5-2(x-3)^2$ (*)

Ta có: Vế trái (*) ≥ 2 + 3 = 5 dấu bằng xảy ra ⇔ x = 3 ; Vế phải ≤ 5

PT ⇔ $\begin{cases} VT=2 \\ VP=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất x = 3

d. $2\sqrt{7x^3-11x+25x-12}$ = x^2 + 6x - 1 ⇔ $2\sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)}$ = x^2 + 6x -1

Điều kiện: 7x - 4 ≥ 0 ⇔ x ≥ $\frac{7}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho vế trái, ta được:

$$2\sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)} \le (7x - 4) + x^2 - x + 3 = x^2 + 6x - 1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: 7x - 4 = x^2 - x + 3 ⇔ x = 1 hoặc x = 7

Vậy nghiệm của phương trình là: x = 1 hoặc x= 7

e. $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\le 2$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1 \\ x+\sqrt{x^2+1}\ge 0 \end{cases}$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\text{VT} = \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} \geq 2\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} = 2$$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi VT = 2

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} \;\Leftrightarrow\; x = 1$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là x = 1.

+) Nhận xét: Ta thấy đường lối để giải bài tập theo phương pháp đánh giá rất phong phú và đa dạng, không theo một quy trình nào, phải tùy vào đặc điểm của từng bài mà có sự đánh giá cho phù hợp.

Bài tập phân hoá tương tự.

Giải các phương trình – bất phương trình sau.

a. $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}} = 4-(x+\dfrac{1}{x})$

b. $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}$

c. $\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2$

d. $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4-2x-x^2$

e. $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x^2-10x+16} \geq 3-x$

f. $\mathrm{x}\sqrt{\mathrm{y}-1} + 2\mathrm{y}\sqrt{\mathrm{x}-1} = \dfrac{3\mathrm{xy}}{2}$

2.2.6. Phương trình, bất phương trình vô tỉ có chứa các biểu thức lượng giác, hàm mũ, logarit

- Phương pháp chung để giải các phương trình loại này là khử các phép toán lượng giác, mũ và logarit để đưa về phương trình, bất phương trình vô tỉ thông thường.

- Các phương pháp thông dụng: Đặt ẩn phụ, nâng lên luỹ thừa..

Ví dụ 1. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-\cos x}=1 \quad (1)$$

Tóm tắt lời giải: Phương trình có nghĩa với mọi x

HĐ 1: Hướng dẫn học sinh biến đổi phương trình về phương trình vô tỉ cơ bản bằng phương pháp bình phương hai vế.

(1) $\Leftrightarrow$ 1 - (sinx + cosx) + 2$\sqrt{1-(sinx+\cos x)+sinxcosx}$ = 0 (2)

HĐ 2: *Yêu cầu học sinh nhắc lại cách giải phương trình*:

A(sinx ± cosx) + B.sinxcosx + C = 0

HĐ 3: *Giải phương trình (2)*

Đặt sinx + cosx = t, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Sinx + cosx = $\dfrac{t^2-1}{2}$

(2) $\Leftrightarrow$1 - t + $\sqrt{2}|t-1|$ = 0 $\Leftrightarrow\sqrt{2}|t-1|$ = t - 1 suy ra t - 1 ≥ 0

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{2}$ (t - 1) = t - 1$\Leftrightarrow$ t =1 = sinx + cosx = $\sqrt{2}cos(x-\dfrac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow cos(x-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{4}=\pm\dfrac{\pi}{4}$ + 2kπ

$\Leftrightarrow$x = 2kπ hoặc x = $\dfrac{\pi}{2}$ + 2kπ, k $\in$Z

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$\cos x+\sqrt{2-cos^2x}+cosx\sqrt{2-cos^2x}=3$$

Tóm tắt lời giải: Phương trình có nghĩa với mọi x

HĐ 1: Phân tích và hướng dẫn học sinh dựa vào chủ đề 2 để tìm lời giải bằng cách đặt: t = cosx + $\sqrt{2-cos^2x}$; điều kiện $0\le t\le 2$

HĐ 2: Tính cosx$\sqrt{2-cos^2x}$ = ?, bằng cách bình phương hai vế tìm được:

cosx$\sqrt{2-cos^2x}=\dfrac{t^2-2}{2}$

Phương trình trở thành: t^2+ 2t - 8 = 0 $\Leftrightarrow$ t = 2 (thoả mãn) hoặc t = - 4 (loại)

$\Leftrightarrow$ cosx + $\sqrt{2-cos^2x}$ =2 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{2-cos^2x}$ = 2 - cosx

$\Leftrightarrow$2- cos^{2}x = (2 - cosx)^2 $\Leftrightarrow$ cosx =1 $\Leftrightarrow$ x = 2kπ, k $\in$Z

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$\sqrt{sinx+cos2x}+\sqrt{3+sinx+2cos^2x}=2$ (3)

Tóm tắt lời giải:

(3) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{sinx+2cos^2x-1}+\sqrt{3+sinx+2cos^2x}=2$

Điều kiện: sinx + cos2x ≥ 0

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{sinx+2cos^2x-1}\geq 0 \\ v=\sqrt{\sin x+2cos^2x+3}\geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ v^2 - u^2 = 4

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u+v=2 \\ v^2-u^2=4 \end{cases}$ từ đó giải được v = 2 và u = 0.

$\Rightarrow\begin{cases} 2cos^2x+sinx-1=0 \\ 2cos^2x+sinx+3=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ 2cos^{2}x + sinx - 1= 0 (thoả mãn điều kiện)

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ sinx=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\,(k\in Z) \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right.$

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$\sqrt{\text{c}otg-1}+\sqrt{tgx-1}=\dfrac{1}{\sin 2x}$ (4)

Tóm tắt lời giải:

Điều kiện $\begin{cases} cotgx\geq 1 \\ tgx\geq 1 \\ \sin 2x>0 \end{cases}$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $\begin{cases} \sqrt{1(\cot gx-1)} \le \dfrac{1+\cot gx-1}{2} = \dfrac{cotgx}{2} \\ \sqrt{1(tgx-1)} \le \dfrac{1+tgx-1}{2} = \dfrac{tgx}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{cotgx-1} + \sqrt{tgx-1} \le \dfrac{1}{2}(cotgx+tgx) \ = \ \dfrac{1}{\sin 2x}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} cotgx-1=1 \\ tgx-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cotgx=2 \\ tgx=2 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 5: Giải phương trình: 2^{2x} - $\sqrt{2^x+6} = 6$

Tóm tắt lời giải: Đặt u = $2^x > 0$

Phương trình trở thành: u^2 - $\sqrt{u+6} = 6$

Đặt v =$\sqrt{u+6}$, điều kiện v$\ge \sqrt{6}$. Ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} u^2 = v+6 \\ v^2 = u+6 \end{cases}$ Từ đó tìm được u =3 hoặc u = $\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 3 \\ 2^x = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_2 3 \\ x = \log_2 \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

Ví dụ 6: Giải các phương trình, bất phương trình sau:

a. $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$ **b.** $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

HĐ 1: Gọi học sinh nhắc lại một số công thức về hàm số logarit và các tính chất của hàm logarit

HĐ 2: *Phân tích và tìm lời giải*

a. Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1$

Vì $\log_3 3x = 1 + \log_3 x$ nên phương trình tương đương:

$3\sqrt{\log_3 x} - (1 + \log_3 x) - 1 = 0$

Đặt $\sqrt{\log_3 x} = t \geq 0$, ta có phương trình: $t^2 - 3t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ t = 1 hoặc t = 2 (thoả mãn), từ đó tìm được: x = 3 hoặc x = 81.

$$\sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t-3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -1 \\ 3 < t < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{array}\right.$$

Ví dụ 7: Cho bất phương trình: $x\sqrt{2x - x^2} < x^2 - ax.2^x + a.2^x.\sqrt{2x - x^2}$

1. Giải bất phương trình với a = - 1

2. Tìm a để bất phương trình có ít nhất một nghiệm x > 1

Tóm tắt lời giải:

1. Khi a = -1 bất phương trình trở thành:

$$x\sqrt{2x - x^2} - x.2^x - x^2 - 2^x\sqrt{2x - x^2} < 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x - x^2}(x + 2^x) < x(x + 2^x)$ $\Leftrightarrow (x + 2^x)(\sqrt{2x - x^2} - x) < 0$

Để căn thức có nghĩa thì $2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

Với điều kiện đó thì: $x + 2^x > 0$

Nên bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2x - x^2} - x < 0 \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $0 \leq x \leq 2$ ta có nghiệm của bất phương trình là: $1 < x \leq 2$.

2. Ta dùng phương pháp phản chứng.

Yêu cầu bài toán không được thoả mãn:

$\Leftrightarrow x\sqrt{2x - x^2} \geq x^2 - ax.2^x + a.2^x.\sqrt{2x - x^2}$ với $\forall x \in (1; 2]$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x - x^2}(x - a.2^x) \geq x(x - a.2^x)$ với $\forall x \in (1; 2]$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2x - x^2} - x)(x - a.2x) \geq 0$ (*) với $\forall x \in (1; 2]$

Vì: $\sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - (x-1)^2} < 1$; $\forall x \in (1; 2] \Rightarrow \sqrt{2x - x^2} - x < 0$; $\forall x \in (1; 2]$

nên (*) $\Leftrightarrow x - a.2^x \leq 0$ với $\forall x \in (1; 2]$

$\Leftrightarrow a \geq \dfrac{x}{2^x}$ với $\forall x \in (1; 2]$

Xét hàm số $f(x)=\frac{x}{2^x}$, ta có f(x) liên tục trên $\in$(1; 2] và

$$f'(x)=\frac{2^x-x.2^x.\ln 2}{(2^x)^2}=\frac{1-x\ln 2}{2^x}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\ln 2 = 1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\ln 2}=\log_2 e$$

Ta có f(1) = f(2) = $\frac{1}{2}$; f($\log_2 e$) = $\frac{1}{e}\log_2 e$

Vậy a ≥ f(x) với ∀x ∈(1; 2] ⇔ $a\ge\frac{1}{e}\log_2 e$

Do đó, để bất phương trình có ít nhất nghiệm x > 1 thì $a<\frac{1}{e}\log_2 e$

Ví dụ 8: Giải và biện luận phương trình theo tham số m.

$$\sqrt{m+2^x}+\sqrt{m-2^x} = m \ (1).$$

Tóm tắt lời giải:

* Nếu m $\le 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* Xét m > 0, đặt t = 2^x > 0, (1) trở thành: $\sqrt{m+t}+\sqrt{m-t}$ = m

$\Leftrightarrow$ 2m + 2$\sqrt{m^2-t^2}$ = m^2 $\Leftrightarrow$ 2$\sqrt{m^2-t^2}$ = m^2 - 2m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 2 \\ 4(m^2-t^2)=(m^2-2m)^2 (2)\end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow 4t^2 = 4m^3 - m^4$. Để có nghiệm thì: $4m^3 - m^4 > 0 \Leftrightarrow$ m< 4

Tóm lại: Nếu 2 ≤ m < 4 thì (1) có nghiệm t = $\frac{1}{2}\sqrt{4m^3-m^4}$ = 2^x

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\log_2(4m^3 - m^4) -1$$

- Nếu m < 2 hoặc m ≥ 4 thì (1) vô nghiệm.

Bài tập phân hoá tương tự:

1. Giải các phương trình, bất phương trình sau:

a. sinx + $\sqrt{2-\sin^2 x}-sinx\sqrt{2-\sin^2 x}=1$

b. $\cos^2 x + \sqrt{2 + cosx} = 2$

c. $\sqrt{sinx + cosx} + \sqrt{sinx - cosx} = 2$

d. $\sqrt{\sin^4 x + 4cos^2 x} = \sin^2 x - 2\sin x + 2$

e. $2^{2x} - \sqrt{2^x + 6} = 6$

f. $3\log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) = 2\log_2 \sqrt{x}$

g. $\sqrt{\log_9(3x^2 - 4x + 2)} + 1 > \log_3(3x - 4x + 2)$

h. $\sqrt{8 + 2^{1+x} - 4^x} + 2^{1+x} > 5$

2. Tìm m để mọi x thuộc khoảng (0; 2) đều thoả mãn bất phương trình:

$\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \le 5$

3. Tìm a để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{\log_2 x + a} > \log_2 x$$

4.Tìm m để phương trình sau có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; \sqrt{3}]$

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$$

2.2.7. Sử dụng điều kiện cần và đủ giải phương trình, bất phương trình vô tỉ

HĐ 1: *GV đặt vấn đề*:

- Ta thường sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ đối với lớp dạng bài toán tìm điều kiện của tham số để:

+ Hai phương trình, bất phương trình tương đương

+ Phương trình, hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

+ Phương trình, hệ phương trình có nghiệm với mọi giá trị của một tham số.

+ Phương trình, bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x $\in$ D

- Khi đó ta thực hiện các bước:

+ Đặt điều kiện để các biểu thức của hệ phương trình có nghĩa.

+ Tìm điều kiện cần cho hệ dựa trên việc đánh giá hoặc tính đối xứng của hệ.

+ Kiểm tra điều kiện đủ.

- Lưu ý: Hai phương trình tương đương khi và chỉ khi mỗi nghiệm của phương trình này đều là nghiệm của phương trình kia và ngược lại. Nói cách khác là hai tập nghiệm của hai phương trình là bằng nhau.

- Để xác định điều kiện hai phương trình tương đương, trước tiên ta phải tìm các nghiệm của phương trình đơn giản hơn rồi thay các nghiệm này vào phương trình còn lại để tìm điều kiện thoả mãn đề bài.

HĐ 2: *Ra bài tập phân hoá:*

Ví dụ 1: Cho phương trình:

$$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2m\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=m^3$$

1. Giải phương trình với m = -1.

2. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Tóm tắt lời giải:

1. Với m = -1 phương trình trở thành:

$$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt[4]{x(1-x)}+x+1-x-2\sqrt{x(1-x)}=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}=0\\ \sqrt{x}-\sqrt{1-x}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=1-x \quad \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Vậy với m = -1 thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$

2. Nhận thấy nếu x_0 là một nghiệm thì $x = 1 - x_0$ cũng là một nghiệm. do đó, nếu $x = x_0$ là một nghiệm duy nhất thì phải có: $x_0 = 1 - x_0 \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$.

* *Điều kiện cần*: Với $x=\frac{1}{2}$ thì phương trình trở thành: $m = m^3$

$\Leftrightarrow m = 0 ; m = \pm 1$.

* *Điều kiện đủ:*

a. m = 0 thì phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x})^2=0 \quad \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ với m = -1 thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$ (thoả mãn).

b. m = - 1 theo câu 1, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$

c. m = 1 phương trình trở thành: $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=1$

Có ít nhất hai nghiệm x = 0; x = 1 (không thoả mãn).

Tóm lại: m = 0 ; m = -1.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{1-y}=m\\ \sqrt{1-x}+\sqrt{y}=m\end{cases}$$

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Tóm tắt lời giải:

Nhận thấy nếu (x_0 ;y_0) là một nghiệm thì (y_0; x_0) cũng là một nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất thì phải có: $x_0 = y_0$.

* *Điều kiện cần*:

Thay x = y, hệ trở thành $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=m$ (1)

Ở (1) nếu x_0 là một nghiệm thì $1 - x_0$ cũng là một nghiệm của (1).

Để (1) có nghiệm duy nhất thì $x_0=\frac{1}{2}$ thay vào (1) $\Rightarrow$ $m=\sqrt{2}$

* *Điều kiện đủ*: Với $m=\sqrt{2}$ thì hệ trở thành:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{1-y}=\sqrt{2}\\ \sqrt{1-x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{1-y}=\sqrt{2}\\ (\sqrt{x}+\sqrt{1-x})+(\sqrt{y}+\sqrt{1-y})=2\sqrt{2}\end{cases} \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức. B.C.S ta có: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{2}\\ \sqrt{y}+\sqrt{1-y}\le\sqrt{2}\end{cases}$

Suy ra: $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{y}+\sqrt{1-y}\le 2\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra: $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{1-x}\\ \sqrt{y}=\sqrt{1-y}\end{cases} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$

Tóm lại: $m=\sqrt{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 3: Xác định các giá trị của a sao cho hệ sau đây có nghiệm với mọi b.

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2b^2-1}-\sqrt{(a-1)by}=x-1\\ ax+by-1=0\end{cases} \quad \text{(I)}$$

Tóm tắt lời giải:

Điều kiện cần:

Hệ có nghiệm với b = 0, khi đó:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2-1}=x-1\\ ax-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ ax-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ a=1\end{cases}$$

Vậy a = 1 là điều kiện cần để hệ có nghiệm với mọi b.

Điều kiện đủ:

Với a = 1, hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2b^2-1}=x-1\\ x+by-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}x-1\ge 0\\ x^2-2b^2-1=(x-1)^2\end{cases}\\ x+by-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=b^2+1\\ x+by-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=b^2+1\\ b^2+by=0\end{cases} \Rightarrow \text{ít nhất một nghiệm là } \begin{cases}x=b^2+1\\ y=-b\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm với mọi b khi a = 1

Ví dụ 4: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm đúng với mọi x $\in$ [-2, 4]

$$\sqrt{(2+x)(4-x)} \le x^2 - 2x + m$$

Tóm tắt lời giải:

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall$x $\in$[-2, 4] $\Rightarrow$ x = 1 là nghiệm của (1), khi đó: 3 $\le$ m - 1 $\Leftrightarrow$ m $\ge$ 4

Đó là điều kiện cần để bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in [-2, 4]$.

Điều kiện đủ: Giả sử $m \geq 4$, khi đó:

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho vế trái, ta được:

VT = $\sqrt{(2+x)(4-x)} \leq \frac{(2+x)+(4-x)}{2} = 3$

Biến đổi vế phải về dạng:

VP = $x^2 - 2x + m = (x-1)^2 + m - 1 \geq 3$

Suy ra: $\sqrt{(2+x)(4-x)} \leq x^2 - 2x + m$

Vậy với $m \geq 4$ bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [-2, 4]$.

Ví dụ 5: Cho hai phương trình:

$(x+1)(x-5) + 2 + 3m\sqrt{x^2 - 4x + m + 6} = 0$ (1)

$\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{2}$ (2)

Tìm m để hai phương trình tương đương.

Tóm tắt lời giải:

Giải (2): Đặt $\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} = u \\ \sqrt[3]{3-x} = v \end{cases}$ Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u + v = \sqrt[3]{2} \\ u^3 + v^3 = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \sqrt[3]{2} \\ (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (u; v) = (\sqrt[3]{2}\,; 0), (0\,; \sqrt[3]{2})$$

* Từ đó ta giải được $x = 1$ hoặc $x = 3$.

Điều kiện cần: Giả sử (1) và (2) tương đương thì $x = 1$ phải là nghiệm của (1).

Khi đó (1) tương đương với: $m\sqrt{m+3} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2(m+3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, khi đó (1) có dạng:

$x^2 - 4x - 3 + 3\sqrt{x^2 - 4x + 7} = 0$ (3)

Để giải (3) ta đặt $\sqrt{x^2 - 4x + 7} = t$ ($t \geq 0$), khi đó (3) có dạng:

$t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (thoả mãn) hoặc $t = -5$ (loại).

Với t = 2 thì $\sqrt{x^2-4x+7}=2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc x = 3. Tức là (1) và (2) tương đương.

Tóm lại: với m =1 thì hai phương trình đã cho tương đương với nhau.

Ví dụ 6: Cho phương trình và bất phương trình:

$$\sqrt{4-x}+\sqrt{25-3x}\geq 5 \qquad (1)$$

$$\sqrt{x-1+2m\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2m\sqrt{x-2}}=2 \qquad (2)$$

Tìm m để phương trình và bất phương trình tương đương.

Tóm tắt lời giải:

Giải (1): điều kiện $\begin{cases}4-x\geq 0\\ 25-3x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\leq 4$

Xét hàm số: f(x) = $\sqrt{4-x}+\sqrt{25-3x}$ với x $\leq$ 4

Ta có: $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}-\dfrac{3}{2\sqrt{25-3x}}<0$ với mọi x < 4.

Suy ra hàm số f(x) nghịch biến trên khoảng (- ∞; 4)

Mặt khác: f(3) = 5.

Vậy bất phương trình: f(x) $\geq$ 5 $\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 4\\ x\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow x\leq 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là: (- ∞; 3].

Điều kiện cần: Giả sử (1) và (2) tương đương với nhau thì x = 3 là nghiệm của (2), khi đó (2) tương đương với:

$$\sqrt{2+2m}+\sqrt{2-2m}=2\Leftrightarrow\sqrt{4-4m^2}=0\Leftrightarrow m=\pm 1 .$$

Vậy $m=\pm 1$ là điều kiện cần để (1) và (2) tương đương.

Điều kiện đủ:

- Với m= -1, khi đó (2) có dạng:

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=2 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-2}+1\right|+\left|\sqrt{x-2}-1\right|=2$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-2}+1\right|+\left|1-\sqrt{x-2}\right| = \left|(\sqrt{x-2}+1)+(1-\sqrt{x-2})\right|$$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2}+1)(1-\sqrt{x-2}) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$ x $\leq$ 3.

Tức là (1) và (2) tương đương.

- Với m = - 1, giải tương tự.

Vậy với m = ± 1 thì (1) và (2) tương đương.

Bài tập phân hoá tương tự

1. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

a. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{6-y}=m \\ \sqrt{y}+\sqrt{6-x}=m \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \sqrt{x^2+3}+|y|=m \\ \sqrt{y^2+5}+|x|=\sqrt{x^2+5} \end{cases}$

2. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x thuộc [-2, 4]

-4 $\sqrt{(2+x)(4-x)} \leq$ x^2 - 2x + m - 18

3. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất.

a. $\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}=m$ **b.** $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}+\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=m$

2.2.8. Chủ đề 6: Hệ phương trình vô tỉ

HĐ 1: *GV đặt vấn đề:*

- Lược đồ để giải hệ phương trình vô tỉ có thể được minh hoạ theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để hệ có nghĩa

Bước 2: Lựa chọn các phương pháp thực hiện:

- Biến đổi tương đương.
- Sử dụng ẩn phụ.
- Sử dụng hàm số
- Dùng tam thức bậc hai
- Dùng điều kiện cần và đủ
- Dùng phép thế

Lưu ý: Trong trường hợp sử dụng phương pháp biến đổi tương đương, chúng ta có thể bỏ qua bước 1 để giảm thiểu độ phức tạp.

- Nếu lựa trọn phương pháp đặt ẩn phụ thì:

+ Với hệ phương trình không có tham số có thể chỉ cần thiết lập điều kiện hẹp cho ẩn phụ

+ Với hệ phương trình có tham số phải đi tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ.

- Khi gặp hệ phương trình dạng $\begin{cases} f(x)=f(y) & (1) \\ g(x,y)=0 & (2) \end{cases}$ ta có thể tìm lời giải theo một trong hai hướng sau:

+ Hướng 1: Phương trình (1) $\Leftrightarrow$ f(x) - f(y) = 0 (3)

Tìm cách đưa (3) về một phương trình tích.

+ Hướng 2: Xét hàm số y = f(t). Ta thường gặp hàm số liên tục trong tập xác định của nó.

Nếu hàm số y = f(t) đơn điệu, thì từ (1) suy ra x = y. Khi đó bài toán đưa về giải và biện luận phương trình (2) theo ẩn x.

Nếu hàm số y = f(t) có một cực trị tại t = a thì nó thay đổi chiều biến thiên một lần khi qua a. Từ (1) suy ra x = y hoặc x, y nằm về hai phía của a.

HĐ 2: *Ra bài tập phân hoá:*

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2} \\ x+y-xy=9 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{2+\sqrt{xy}} \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=7 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \sqrt{x+5}+\sqrt{y-2}=7 \\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}=7 \end{cases}$

Phân tích và tìm lời giải:

(1)

(2)

a. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$

Điều kiện: x > 0 ; y > 0

(1) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x^2+y^2}=8\sqrt{2}-\sqrt{2xy}>0 \Rightarrow \sqrt{xy}<8$

Hệ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2-2xy}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ x+y+2\sqrt{xy}=16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{(16-2\sqrt{xy})^2-2xy}=8\sqrt{2}$ (3)

Đặt $\sqrt{xy}=t$ với 0 < t < 8.

(3) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{(16-2t)^2-2t^2}+t\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$ t = 4

Ta được: $\begin{cases} \sqrt{xy}=4 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ (x, y) = (4; 4)

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (4; 4)

b. $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 & (1) \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 & (2) \end{cases}$

Từ (1) có xy ≥ 0. Nếu x hoặc y âm thì vế trái của (1) có giá trị âm, phương trình không thoản mãn.

Đặt: x + y = S ; xy = P (S, P ≥ 0 ; S^2 - 4P ≥ 0)

Từ (1) $\Rightarrow$ $S-\sqrt{P}=3$ (3)

Từ (2) bình phương hai vế, ta được $S+2\sqrt{P+S+1}=14$ (4)

Từ (3) và (4) tìm được S = 6; P =9

Ta được nghiệm duy nhất của hệ (x; y) = (3 ;3)

c. Ta nhận thấy: $\frac{6x}{x+y}.\frac{x+y}{6x}=1$

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{6x}} = \dfrac{5}{2} & (1) \\ x + y - xy = 9 & (2) \end{cases}$$ Đặt: $\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}} = t > 0$

(1) $\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow$ t = $\dfrac{1}{2}$ hoặc t = 2

Với t = 2 $\Leftrightarrow$ $y = \dfrac{1}{2}x$ thế vào (2) ta được: $x^2 - 3x + 18 = 0$ vô nghiệm.

Với $t = \dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ y = 11x thế vào (2) ta được $11x^2 - 12x + 9 = 0$ vô nghiệm.

Tóm lại hệ đã cho vô nghiệm.

d. $$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{2 + \sqrt{xy}} & (1) \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 7 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) có xy > 0. Nếu x hoặc y âm thì vế trái của (2) âm. Phương trình không thoả mãn.

Đặt: $a = \sqrt{x} > 0$; $b = \sqrt{y} > 0$

Hệ trở thành: $$\begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{7ab}{2 + ab} \\ ab(a^2 + b^2) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{7ab}{2 + ab} \\ ab.\dfrac{7ab}{2 + ab} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \sqrt{\dfrac{15}{2}} \\ ab = 2 \end{cases} \text{ (a, b> 0)}$$

$\Rightarrow$ a,b là nghiệm của phương trình: $t^2 - \sqrt{\dfrac{15}{2}}t + 2 = 0$ phương trình này vô nghiệm.

Tóm lại: Hệ đã cho vô nghiệm.

e. Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 2 \end{cases}$

Bình phương hai vế hệ tương đương: $\begin{cases} x + 5 + y - 2 + \sqrt{(x+5)(y-2)} = 49 \\ x - 2 + y + 5 + 2\sqrt{(x-2)(y+5)} = 49 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2\sqrt{(x+5)(y-2)} = 46 & (1) \\ \sqrt{(x+5)(y-2)} = \sqrt{(x-2)(y+5)} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Leftrightarrow$ x = y ; (1) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{(x+5)(x-2)} = 23 - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 23 - x \ge 0 \\ (x+5)(x-2) = (23-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 11$$

Tóm lại: hệ có duy nhất (x,y) = (11, 11)

Ví dụ 2: Tìm m để các hệ sau có nghiệm.

a. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = \sqrt{m} \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{m} \end{cases}$

c. $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{3-y} = m \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{3-x} = m \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x + y \le 2 \\ x + y + \sqrt{2x(y-1) + m} = 2 \end{cases}$

Tóm tắt lời giải:

a. Điều kiện: x ≥ 0 ; y ≥ 0.

Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = \sqrt{y} \end{cases}$ với u ≥ 0 ; v ≥ 0 hệ đã cho trở thành.

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^3 + v^3 = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = m \end{cases} \quad (1)$$

$\Leftrightarrow$ u,v là hai nghiệm của phương trình. $t^2 - t + m = 0$ (2)

Hệ đã cho có nghiệm (x, y) $\Leftrightarrow$ hệ (1) có nghiệm u ≥ 0, v ≥ 0.

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm t không âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4m \ge 0 \\ S = 1 \ge 0 \\ P = m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{1}{4}$$

b. $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = \sqrt{m} \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{m} \end{cases}$

Điều kiện; x ≥ 2 ; y ≥ 2 ; m > 0

Hệ tương đương với; $\begin{cases} x + 1 + y - 2 + 2\sqrt{(x+1)(y-2)} = m \\ y + 1 + x - 2 + 2\sqrt{(y+1)(x-2)} = m \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)(y-2)} = \sqrt{(y+1)(x-2)} \Leftrightarrow x = y$$

Hệ trở thành: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{m}$ với x ≥ 2

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}$ với x ≥ 2

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0 \text{ với mọi } x > 2$$

Bảng biến thiên:

x	2		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Vậy hệ đã cho có nghiệm ⇔ $\sqrt{m} \geq \sqrt{3}$ ⇔ m ≥ 3

c. $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{3-y} = m (1) \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{3-x} = m (2) \end{cases}$ Điều kiện: -1 ≤ x, y ≤ 3

Trừ hai vế của (1) cho (2) và chuyển vế, ta được:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} = \sqrt{y-1} - \sqrt{3-y} \quad (3)$$

Dễ thấy hàm số f(t) = $\sqrt{t+1} - \sqrt{3-t}$ đồng biến trên (-1 ; 3) nên từ (3) suy ra x = y.

Khi đó từ (1) có g(x) = $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$ liên tục trên [-1 ; 3] và:

g'(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$, g'(x) = 0 ⇔ x =1.

Ta có: g(-1) = 2, g(1) = 2$\sqrt{2}$, g(3) = 2.

Từ đó → 2≤ g(x) ≤ 2$\sqrt{2}$

Vậy hệ có nghiệm khi 2≤ m ≤ 2$\sqrt{2}$

d. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x + y + \sqrt{2x(y-1)+m} = 2 \end{cases}$ (1)

Ta có: (1) ⇔ $\sqrt{2x(y-1)+m} = 2 - (x+y)$

(2)

(3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y \le 2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = m+1 \end{cases}$$

* Nếu m + 1 ≤ 0 thì (3) vô nghiệm ⇒ hệ vô nghiệm.

* Nếu m > -1 thì các điểm M (x, y) thoả mãn (3) nằm trên đường tròn (C) tâm I(1, 2) bán kính R=$\sqrt{m+1}$

Mặt khác điểm M(x, y) thoả mãn (2) thì nằm trên nửa mặt phẳng xác định bởi đường thẳng (d): x + y- 2 = 0

Điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm là (C) có điểm với nửa mặt phẳng xác định bởi: x + y ≤ 2.

⇔ d(I, d) ≤ R ⇔ $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{2}$

Ví dụ 3: Tìm m để hệ có đúng hai nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = m \\ x + y = 3m \end{cases}$$

Tóm tắt lời giải:

Điều kiện: x ≥ -1, y ≥ -2 và m ≥ 0.

Đặt: $u = \sqrt{x+1} \ge 0$; $v = \sqrt{y+2} \ge 0$

Hệ trở thành: $\begin{cases} u + v = m \\ u^2 + v^2 = 3m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = m - u & (1) \\ f(u) = 2u^2 - 2mu + m^2 - 3m - 3 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ⇒ m- u ≥ 0 ⇔ 0 ≤ u ≤ m

Để hệ đã cho có đúng hai nghiệm thì (2) có hai nghiệm: 0 ≤ u ≤ m;

Nếu m = 0 thì $u = \sqrt{\frac{3}{2}}$ → v $= -u = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ →hệ vô nghiệm, nên chỉ xét

0 < u ≤ m. Yêu cầu của bài toán được thoả mãn ⇔ (2) có nghiệm sao cho: 0 < u_1 < u_2 ≤ m.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(0) > 0 \\ f(m) \ge 0 \\ 0 < \dfrac{m}{2} < m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 6m + 6 > 0 \\ m^2 - 3m - 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{21}}{2} \le m < 3 + \sqrt{15}$$

Tóm lại: Giá trị m cần tìm: $\frac{3+\sqrt{21}}{2} \le m < 3 + \sqrt{15}$

Ví dụ 4: Giải và biện luận hệ: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{2-y} = m \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{y+1} = m \end{cases}$

Tóm tắt lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 2 \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{2-y} = m & (1) \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{y+1} = \sqrt{2-x} - \sqrt{2-y} & (2) \end{cases}$

Nếu x = y = -1 hoặc x = y = 2 thì (2) thoả mãn.

Nên (2) $\Leftrightarrow \dfrac{x-y}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}} + \dfrac{x-y}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2-y}} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}} + \frac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2-y}}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow x = y$$

Hệ trở thành: $\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = m$ (3)

Nếu m ≤ 0 thì (3) vô nghiệm, nên hệ đã cho vô nghiệm.

Nếu m > 0 thì (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(x+1)(2-x)} = m^2 - 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \sqrt{3} \\ x = y \\ x^2 - x - 2 + \dfrac{1}{4}(m^2-3)^2 = 0 \end{cases}$ (4)

Phương trình (4) có $\Delta = 6m^2 - m^4$

Nếu $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \le m \le \sqrt{6}$ thì (4) có hai nghiệm.

$$x = y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{6m^2 - m^4}) \text{ hoặc } x = y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{6m^2 - m^4})$$

Nếu m < $\sqrt{3}$ hoặc m > $\sqrt{6}$ thì (4) vô nghiệm.

Tóm lại: + Nếu m < $\sqrt{3}$ hoặc m > $\sqrt{6}$ thì hệ vô nghiệm.

+ Nếu $\sqrt{3} \le m \le \sqrt{6}$ thì hệ có hai nghiệm.

x = y = $\frac{1}{2}(1-\sqrt{6m^2-m^4})$ hoặc x = y = $\frac{1}{2}(1+\sqrt{6m^2-m^4})$

Ví dụ 5: Cho hệ phương trình.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+4xy-3y^2} = x+1(1) \\ x-y = m(2) \end{cases}$$

Tìm m để hệ có hai nghiệm thực phân biệt.

Tóm tắt lời giải:

Từ (2) ⇒ y = x – m thế vào (1) ta được: $\sqrt{2x^2+2mx-3m^2} = x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ f(x) = x^2+2(m-1)x-3m^2-1=0 \qquad (3) \end{cases}$$

Hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt ⇔ (3) có hai nghiệm x_1; x_2 thoả mãn:

$-1 \le x_1 < x_2$; từ đó tìm được: $\frac{-1-\sqrt{7}}{3} < a < \frac{\sqrt{7}-1}{3}$.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Việc nghiên cứu áp dụng lí luận dạy học phân hoá trong dạy học một số chủ đề phương trình, bất phương trình, hệ phương trình vô tỉ THPT như đã trình bày góp phần đổi mới phương pháp dạy học, tác động tốt đến mọi đối tượng học sinh trong lớp, học sinh yếu kém đã biết cùng tham gia xây dựng bài học, học sinh trung bình hiểu vấn đề một cách sâu sắc hơn, học sinh có năng lực học tập bộ môn toán được phát huy hết khả năng của mình, qua đó trí tuệ của các em được phát triển. Như vậy, chúng ta đã thực hiện tốt mục đích dạy học là đào tạo ra những học sinh đáp ứng được nhu cầu của xã hội phát triển.

CHƯƠNG 3
THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

3.1. Mục đích, nội dung, tổ chức thực nghiệm sư phạm

* Bước đầu kiểm tra tính khả thi và tính hiệu quả của phương án dạy học phân hoá qua tổ chức ôn tập một số chủ đề phương trình, hệ phương trình, bất phương trình vô tỉ trung học phổ thông.

* Tổ chức thực nghiệm

+ Chọn lớp thử nghiệm

- Vì đối tượng thực nghiệm là học sinh trung học phổ thông nên chúng tôi chọn hai lớp: $12A_6$ và $12A_7$ năm học 2007- 2008 của trường PTTH Lương Ngọc Quyến - Thái Nguyên.

- Lớp $12A_6$ là lớp thử nghiệm; lớp $12A_7$ là lớp đối chứng. Mặt bằng chung về trình độ nhận thức của đối tượng học sinh trong 2 lớp là như nhau.

+ Tiến trình thử nghiệm

- Số tiết dạy thử nghiệm là 6 tiết.

- Quá trình thử nghiệm được xếp vào một số tiết ôn tập, mỗi tuần 2 tiết vào tháng 8 năm học 2007 - 2008.

+ Nội dung thử nghiệm

- Các tiết dạy thử nghiệm là một số tiết ôn tập về phương trình vô tỉ ở THPT. Sử dụng các bài tập trong hệ thống bài tập đã xây dựng ở chương 2.

- Chúng tôi đã tiến hành dạy học theo quy trình phân hoá và nội dung bài học như trong luận văn đã trình bày đối với lớp thực nghiệm và không áp dụng đối với lớp đối chứng.

+ Phương pháp dạy học

Chúng tôi đã vận dụng nhiều phương pháp dạy học: dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề; dạy học phân hóa; dạy học chương trình hoá; đàm thoại gợi mở... và một số hình thức dạy học phát huy tối ưu và tối đa hoạt động của học sinh như: dạy học theo nhóm đối tượng học sinh, dạy học phân nhóm theo khu vực học tập, dạy học cá thể hoá... Qua đó phát huy tốt vai trò của người thầy, là người tổ chức và điều khiển hoạt động nhận thức của học sinh.

3.2. Kết quả thử nghiệm

3.2.1. Về khả năng lĩnh hội kiến thức của học sinh

Giáo viên đã tổ chức được hoạt động cho học sinh trong giờ học, sử dụng các phương pháp hợp lí. Học sinh có khả năng tiếp nhận và nắm được cách giải các chủ đề về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình vô tỉ THPT, có thể tự giải được một số bài trong các chủ đề trên. Một số bài học sinh chưa giải được, nhưng sau khi có gợi ý của giáo viên thì một số em đã giải được, thậm chí là rất xuất sắc.

Sau đợt thử nghiệm, học sinh đã nắm bắt được các hoạt động trí tuệ cơ bản trong toán học như phân tích, so sánh, khái quát hoá, đặc biệt hoá, tương tự... Hạn chế được những khó khăn, sai lầm khi học và giải bài tập toán trong phương trình, bất phương trình, hệ phương trình vô tỉ THPT, phù hợp với định hướng đổi mới phương pháp dạy học thời đại hiện nay.

3.2.2. Về kết quả kiểm tra

Đề kiểm tra

Câu 1. (4 điểm): Giải phương trình

a. $\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=1$ b. $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}$ = 1 - x

Câu 2. (2 điểm): Giải bất phương trình

$2.\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}\geq 3\sqrt[4]{(3x-2).(x+2)}$

Câu 3. (2 điểm): Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1\\ \sqrt{x+y+2}=2y-2\end{cases}$$

*Câu 4.(*2 điểm): Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$-x^2 + 2x + 4.\sqrt{(x+1)(3-x)} = m - 3$

Ý định sư phạm đề kiểm tra

Câu 1: Thuộc chủ đề phương trình vô tỉ bằng phương pháp biến đổi tương đương. a. Đáp số x = 1 b. Đáp số x = 1

Câu 2: Thuộc chủ đề sử dụng ẩn phụ đưa bất phương trình vô tỉ về bất phương trình bậc hai.

Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$

Chia cả hai vế cho $\sqrt{x+2}$ ta được: $2.\sqrt{\frac{3x-2}{x+2}} + 1 \geq 3.\sqrt[4]{\frac{3x-2}{x+2}}$ (*)

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{3x-2}{x+2}}$ $(t \geq 0)$

(*) $\Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 \geq 0$

Từ đó tìm được $x \geq 2$ hoặc $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{34}{47}$

Câu 3: Thuộc chủ đề giải hệ phương trình bằng phép biến đổi tương đương và phép thế.

Đáp số: $(x, y) = (\frac{1}{2};\frac{3}{2})$

Câu 4: Thuộc chủ đề sử dụng phương pháp khảo sát chiều biến thiên của hàm số.

Đặt $t = \sqrt{(x+1)(3-x)}$ từ đó tìm được điều kiện của t là: $0 \leq t \leq 2$

Đáp số: $0 \leq m \leq 12$

Kết quả kiểm tra

Điểm / Lớp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tổng số bài
$12A_6$ (lớp thử nghiệm)	0	0	2	1	6	4	13	7	5	2	40
$12A_7$ (lớp đối chứng)	2	7	1	4	10	3	6	6	1	0	40

3.3. Kết luận sơ bộ

- Lớp $12A_6$ (*lớp thử nghiệm*): Trên trung bình: 92,5%.

Trong đó: Khá giỏi: 67,5%; Trung bình: 25%; Yếu kém: 7,5%

- Lớp $12A_7$ (*lớp đối chứng*): Trên trung bình: 65%.

Trong đó: Khá giỏi: 32,5%; Trung bình: 32,5%; Yếu kém: 35%

Qua đó ta thấy học sinh ở lớp thử nghiệm nắm vững kiến thức cơ bản, học sinh yếu kém bước đầu có dự tiến bộ đã hình thành một số kĩ năng cơ bản, học sinh khá giỏi được bồi dưỡng nâng cao trên cơ sở nắm vững kiến thức cơ bản, các em có khả năng phát huy được hoạt động trí tuệ và vận dụng kiến thức linh hoạt.

Kết luận chung về thực nghiệm

Qua quá trình dạy thực nghiệm và từ kết quả của bài kiểm tra của học sinh cho thấy: Sử dụng các phương pháp dạy học các chủ đề đã nêu trong đề tài nhằm rèn luyện hoạt động trí tuệ để giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình vô tỉ là có thể thực hiện được

Nếu thường xuyên áp dụng dạy học theo định hướng trên thì có tác dụng rất tốt trong việc gây hứng thú trong học tập cho học sinh, lôi cuốn học sinh vào các hoạt động học tập tự giác, tích cực, độc lập và sáng tạo, giúp học sinh rèn luyện các hoạt động trí tuệ trong khi giải toán.

KẾT LUẬN

Luận văn đã thu được những kết quả chính sau đây:

- Trình bày tổng quan về dạy học phân hoá nói chung, dạy học phân hoá trong môn toán nói riêng ở trường THPT.

- Phân tích thực trạng áp dụng dạy học phân hoá trong giờ dạy học môn toán hiện nay ở trường THPT và đề ra được một số định hướng về tổ chức và hoạt động, và các bước tiến hành trong dạy học phân hoá của người giáo viên.

- Xây dựng được nội dung các chủ đề để dạy học phân hoá phương trình,bất phương trình và hệ phương trình vô tỉ ở trường THPT, có chú ý đến việc khắc phục những khó khăn và sai lầm của học sinh trong mỗi chủ đề.

- Tổ chức thực nghiệm ở hai lớp 12 của trường THPT Lương Ngọc Quyến Thái Nguyên. Kết quả thực nghiệm phần nào kiểm nghiệm được tính khả thi và kết quả của đề tài.

- Luận văn có thể là một tài liệu tham khảo bổ ích cho giáo viên toán và sinh viên toán các trường Đại học - Cao đẳng Sư phạm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hoàng Chúng (1990), *Rèn luyện khả năng sáng tạo toán ở trường phổ thông,* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

2. Phan Đức Chính, Phan Tuấn Dương, Lê Đình Thịnh, Lê Thống Nhất (1997), *Các bài giảng luyện thi đại học môn Toán,* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

3. Phan Đức Chính, Vũ Dương Thụy, Đào Tam, Lê Thống Nhất (1997), *Các bài giảng luyện thi đại học môn Toán,* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

4. Trần Tuấn Diệp, Ngô Long Hậu, Nguyễn Phú Trường (2006), *Giới thiệu đề tuyển sinh vào Đại học- Cao đẳng toàn quốc, môn Toán, từ năm học 2002 - 2003 đến 2005 - 2006,* Nxb Hà Nội.

5. Lê Hồng Đức, Đào Thiện Khải, Lê Bích Ngọc (2004), *Phương pháp giải toán Đại số - Phương trình - Bất phương trình và hệ phương trình vô tỉ,* Nxb Đại học Sư phạm, năm 2004.

6. Lê Hồng Đức (2005), *Phương pháp giải toán đạo hàm và ứng dụng,* Nxb Hà Nội.

7. Hàn Liên Hải, Phan Huy Khải, Đào Ngọc Nam, Nguyễn Đạo Phương, Lê Tất Tôn, Đặng Quan Viễn (2000), *Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông Đại số,* Nxb Hà Nội, năm 2004.

8. Phan Huy Khải (1999), *Hướng dẫn làm bài tập và làm bài thi môn Toán,* Nxb Đại học Quốc gia, Hà Nội.

9. Phan Huy Khải (2001), *Giới thiệu các dạng toán luyện thi đại học,* Tập 1, Nxb Hà Nội.

10. Nguyễn Ngọc Khoa (2007), *Thử sức qua 500 bài toán luyện thi đại học,* Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.

11. Nguyễn Bá Kim, Vương Dương Minh, Tôn Trần (1998), *Khuyến khích một số hoạt động trí tuệ cho học sinh qua môn Toán ở trường THCS,* Nxb Giáo dục.

12. Nguyễn Bá Kim (2002), *Những xu hướng dạy học không truyền thống, tài liệu bồi dưỡng giáo viên,* Hà Nội.

13. Nguyễn Bá Kim (2006), *Phương pháp dạy học môn Toán,* Nxb Đại học Sư phạm.

14. Ngô Thúc Lanh, Đoàn Quyên, Nguyễn Đình Chi (2000), *Từ điển toán học thông dụng,* Nxb Giáo dục.

15. Hoàng Lê Minh (2004), "Phân bậc hoạt động trong dạy học môn toán", *Tạp chí Giáo dục,* số 86, tháng 5.

16. Trần Phương, Nguyễn Đức Tấn (2004), *Sai lầm thường gặp và các sáng tạo khi giải toán*, Nxb Hà Nội.

17. Trần Phương (2007), *Tuyển tập các chuyên đề luyện thi đại học môn Toán,* Nxb Hà Nội.

18. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Nguyễn Xuân Liêm, Đặng Hùng Thắng, Trần Văn Vuông (2007), *Đại số 10- Nâng cao,* Nxb Giáo dục.

19. Nguyễn Văn Quí, Nguyễn Tiến Dũng, Nguyễn Việt Hà (1998), *Các dạng toán về bất đẳng thức giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất trong đại số,* Nxb Đà Nẵng.

20. Nguyễn Văn Quí, Phan Văn Đức, Dương Quốc Đạt, Nguyễn Tiến Dũng (2007), *Luyện thi đại học môn toán,* Nxb Đại học Quốc gia, Thành phố Hồ chí Minh.

21. *Tạp chí toán học và tuổi trẻ* (2007), số 355, Nxb Giáo dục - Bộ Giáo dục và đào tạo.

22. Huỳnh Công Thái, Lê Mậu Thảo (2005), *Phân loại và hướng dẫn giải toán phương trình mở - Logarít và các dạng hệ phương trình đại số,* Nxb Hà Nội.

23. Nguyễn Cảnh Toàn (1998), *Tập cho học sinh giỏi làm quen dần với nghiên cứu toán học,* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

24. Trần Thúc Trình (2003), *Rèn luyện tư duy trong dạy học môn Toán*, Viện khoa học Giáo dục.

25. Nguyễn Thị Hương Trang (2001), "Vận dụng linh hoạt các thao tác tư duy khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự hòa trong dạy học giải toán", *Tạp chí Giáo dục,* số 7, tháng 6.

26. Bùi Quang Trường (2006), *Những dạng toán điển hình trong các đề thi tuyển sinh đại học và cao đẳng,* Nxb Hà Nội.

27. *Tuyển chọn theo chuyên đề toán học và tuổi trẻ* (2005), Quyển 1, Nxb Giáo dục.

28. Trần Vinh (2007), *Thiết kế bài giảng - Đại số 10 nâng cao,* tập 2, Nxb Hà Nội.

In chuan 3.10.2007

Chuẩn nhất nhất nhất