ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
------------- 0 -------------

PHẠM BÁ TUYÊN

HÀM LỒI VÀ CÁC TÍNH CHẤT

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**
Mã số: **60.46.36**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

------------- 0 -------------

Phạm Bá Tuyên

HÀM LỒI VÀ CÁC TÍNH CHẤT

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**
Mã số: **60.46.36**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS-TS Trần Vũ Thiệu

Thái Nguyên – 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

------------- 0 -------------

Phạm Bá Tuyên

HÀM LỒI VÀ CÁC TÍNH CHẤT

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**
Mã số: **60.46.36**

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS-TS Trần Vũ Thiệu

Thái Nguyên – 9/2009

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Hàm lồi và các biến dạng của nó (lồi chặt, lồi mạnh, tựa lồi ...) có nhiều tính chất đẹp đáng chú ý và được sử dụng rộng rãi trong nhiều lý thuyết và ứng dụng thực tiễn, đặc biệt trong giải tích lồi và tối ưu hoá. Hàm lồi và các mở rộng là một chủ đề hấp dẫn với nhiều kết quả phong phú và luôn thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu.

Đề tài luận văn đề cập tới các hàm lồi một biến và nhiều biến, cùng với các tính chất cơ bản của chúng. Hàm lồi có vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực nghiên cứu: qui hoạch toán học, lý thuyết điều khiển tối ưu, lý thuyết trò chơi, kinh tế toán ... Giả thiết về tính lồi của hàm không thể thiếu trong nhiều định lý về tồn tại nghiệm tối ưu, tồn tại giá cân bằng hay tình thế cân bằng trong các mô hình kinh tế toán. Vì thế, tìm hiểu hàm lồi và các tính chất là thực sự cần thiết và hữu ích, giúp hiểu sâu hơn về nhiều vấn đề trong giải tích lồi và lý thuyết tối ưu.

Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu và trình bày những kết quả cơ bản đã biết liên quan đến các hàm lồi một biến và nhiều biến, đặc biệt lưu ý các tính chất nổi bật như tính liên tục, tính khả vi và các tính chất cực trị. Nội dung đề cập trong luận văn được trình bày một cách chặt chẽ về mặt toán học, các khái niệm và kết quả nêu ra có kèm theo ví dụ và hình vẽ để minh hoạ.

Nội dung luận văn được chia thành ba chương:

Chương 1: "Hàm lồi một biến" đề cập tới các hàm lồi một biến, xác định và nhận giá trị thực hữu hạn hay vô cực trên một khoảng liên tục (hữu hạn hay vô hạn) của đường thẳng số thực. Hàm lồi một biến có nhiều tính chất đáng chú ý như tính Lipschitz, tính liên tục và khả vi hầu khắp nơi trên miền xác định. Xét một số hàm có liên quan: hàm lồi chặt, hàm tựa lồi, tựa lồi chặt, hàm liên hợp ...

Chương 2: "Hàm lồi trong R^n giới thiệu về hàm lồi nhiều biến và các tính chất cơ bản: Hàm n biến là hàm lồi khi và chỉ khi hàm thu hẹp của nó trên mọi đường thẳng trong R^n là hàm lồi một biến. Hàm lồi có mối quan hệ chặt chẽ với các tập lồi: f là hàm lồi khi và chỉ khi epi f là tập lồi và nếu f là hàm lồi thì mọi tập mức dưới của nó là các tập lồi. Hàm lồi trên tập lồi mở thì liên tục. Tiếp theo nêu cách nhận biết hàm lồi qua các phép toán và hàm khả vi là lồi qua một số dấu hiệu. Trong chương còn giới thiệu khái niệm dưới vi phân của hàm lồi và mối quan hệ giữa dưới vi phân với đạo hàm theo hướng và với hàm liên hợp.

Chương 3: "Cực trị của hàm lồi" trình bày các tính chất cực trị của hàm lồi, hàm lồi chặt và hàm lồi mạnh: cực tiểu địa phương của hàm lồi luôn là cực tiểu toàn cục; hàm lồi chặt có nhiều nhất một điểm cực tiểu và hàm lồi mạnh luôn đạt cực tiểu trên tập đóng khác rỗng, cực tiểu đó là duy nhất nếu tập là lồi đóng khác rỗng; cực đại của hàm lồi (cực tiểu của hàm lõm) nếu có sẽ đạt tại điểm cực biên (nói riêng, tại đỉnh) của tập được xét. Ngoài ra, chương này còn trình bày các điều kiện tối ưu cần và đủ đối với các hàm lồi khả vi.

Do thời gian có hạn nên luận văn này mới chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu, tập hợp tài liệu, sắp xếp và trình bày các kết quả nghiên cứu đã có theo chủ đề đặt ra. Trong quá trình viết luận văn cũng như trong xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi có những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn GS-TS Trần Vũ Thiệu đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô ở Viện Toán học, Viện Công nghệ thông tin Hà Nội, Khoa Công nghệ thông tin, Khoa Toán và Phòng Đào tạo sau đại học trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình học tập tại trường.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, các Phòng, Ban chức năng và Bộ môn Toán Trường Cấp II-III Tân Quang và bạn bè đồng nghiệp cùng gia đình đã quan tâm giúp đỡ, động viên để tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 09 *năm* 2009

Tác giả

Phạm Bá Tuyên

Chương 1
Hàm lồi một biến

Hàm lồi có vai trò quan trọng trong giải tích lồi, đặc biệt trong tối ưu hoá. Ta bắt đầu làm quen với hàm lồi một biến và các tính chất đáng chú ý của nó.

1.1 Hàm lồi thực

1.1.1. Định nghĩa và tính chất

Ký hiệu I là một khoảng (đóng, mở hay nửa mở, hữu hạn hay vô hạn) trong đường thẳng thực $\mathbb{R}$. Chẳng hạn, khoảng mở hữu hạn

$$I = (p, q) \quad \text{với} \quad -\infty < p < q < +\infty$$

Định nghĩa 1.1. Cho hàm một biến số $f\colon I \to \mathbb{R}$,

a) f gọi là **lồi** (hay **hàm lồi**) nếu:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \tag{1.1}$$

với mọi $a, b \in I$, và mọi $\lambda \in R$, với $0 < \lambda < 1$. Hình 1.1 cho thấy ý nghĩa hình học của tính lồi: dây cung với hai đầu mút $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$ luôn nằm ở phía trên đồ thị của hàm f.

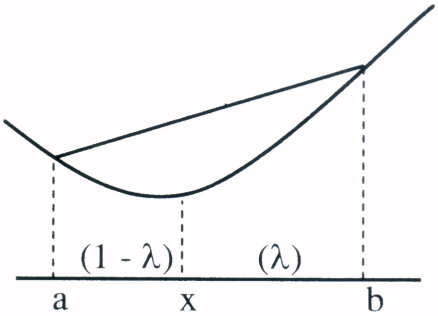
b) f gọi là **lồi chặt** nếu f lồi và trong (1.1) có bất đẳng thức chặt khi $a \neq b$.

Ta nêu các phát biểu tương đương khác về tính lồi của hàm $f\colon I \to \mathbb{R}$.

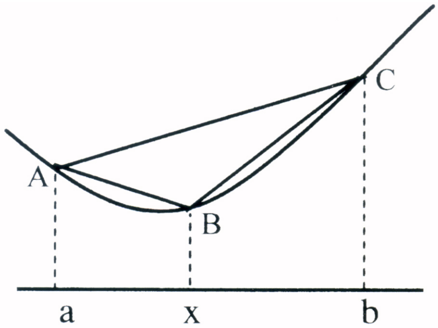
a) $$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

với mọi $a, b, x \in I$ và $a < x < b$. Chú ý rằng vế phải của bất đẳng thức trên có thể viết thành:

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$



Hình 1.1



Hình 1.2.

b) $$f(\lambda a + \mu b) \le \lambda f(a) + \mu f(b)$$

với mọi $a, b, x \in I$ và mọi $\lambda, \mu \in R$ sao cho $\lambda > 0, \mu > 0, \lambda + \mu = 1.$

- Dễ dàng kiểm tra các tính chất đơn giản sau đây của hàm lồi:

  a) Nếu f và g là các hàm lồi và $\alpha \ge 0, \beta \ge 0$ thì $\alpha f + \beta g$ là hàm lồi.

  b) Tổng của một số hữu hạn các hàm lồi là hàm lồi.

  c) Hàm giới hạn (theo từng điểm) của dãy hàm lồi hội tụ là lồi.

  d) Giả sử $f : I \to \mathbb{R}$ là hàm lồi. Khi đó:

  $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in I \quad \text{và} \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

  với mọi $x_i \in I, \lambda_i \ge 0\ (1 \le i \le n), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$

  e) Giả sử f là cận trên theo từng điểm của một họ bất kỳ các hàm lồi $I \to \mathbb{R}$. Nếu f hữu hạn khắp nơi trên I thì f là lồi. Tuy nhiên, mệnh đề tương tự không còn đúng đối với cận dưới.

Định lý 1.1. *Giả sử $f : I \to \mathbb{R}$ là hàm lồi. Khi đó*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \tag{1.2}$$

với mọi $a, b, x \in I, a \le x \le b$. Nếu f lồi chặt thì ở (1.2) có bất đẳng thức chặt.

Hình 1.2 cho thấy ý nghĩa hình học của định lý này: độ dốc $(AB) \leq$ độ dốc $(AC) \leq$ độ dốc (BC).

Chứng minh. Do f lồi nên ta có

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \tag{1.3}$$

Từ bất đẳng thức này ta suy ra

$$f(x) - f(a) \leq \frac{a-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)]$$

đó là bất đẳng thức đầu của (1.2). Bất đẳng thức sau được chứng minh tương tự. Nếu f lồi chặt thì trong (1.3), do đó trong (1.2) có dấu bất đẳng thức chặt. □

• Ký hiệu phần trong của I là int(I). Giả sử $f\colon I \to \mathbb{R}$ là hàm lồi và $c \in$ int(I). Giả sử $[a,b] \subset I$ sao cho $a < c < b$. Theo định lý 1.1 ta có:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c-a} \leq \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \quad \text{với mọi} x \in (c,b].$$

Cũng từ định lý 1.1 suy ra rằng hàm

$$x \to \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \quad \text{không giảm trên} (c,b].$$

Do đó tồn tại đạo hàm phải

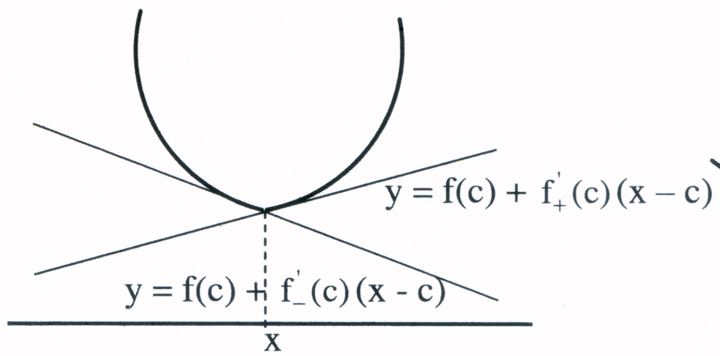
$$f'_+(c) = \lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c}$$

Bằng cách tương tự có thể chứng minh rằng tồn tại đạo hàm trái $f'_-(c)$.
Nếu $a < c < d < b$ thì với số dương h đủ nhỏ ta có

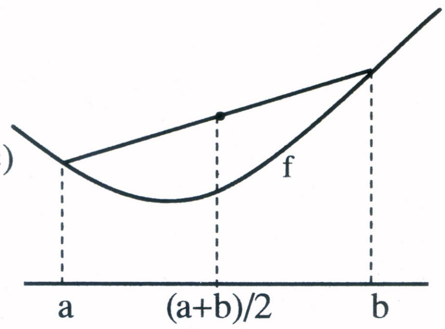
$$\frac{f(c) - f(c-h)}{h} \leq \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \frac{f(d) - f(d-h)}{h}$$

Cho qua giới hạn khi $h \downarrow 0$ ta được: $f'_-(c) \leq f'_+(c) \leq f'_-(d)$. Vì thế, ta có định lý:

Định lý 1.2. *Giả sử $f\colon I \to \mathbb{R}$ là hàm lồi. Khi đó, f có đạo hàm phải và đạo hàm trái tại mọi điểm thuộc* int(I), *đồng thời f'_- và f'_+ là những hàm* *không giảm trên* $\mathrm{int}(I)$. *Nếu* $c \in \mathrm{int}(I)$, *ta có* $f'_-(c) \le f'_+(c)$ *và* $f(x) \ge f(c) + f'_-(c)(x-c), f(x) \ge f(c) + f'_+(c)(x-c)$ *với mọi* $x \in I$ (xem Hình 1.3).



Hình 1.3



Hình 1.4

Nhận xét 1.1. Giả sử $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm lồi. Lập luận trên cho thấy rằng trong trường hợp này tồn tại $f'_+(a)$ và $f'_-(b)$, nếu chấp nhận giới hạn $+\infty$ và $-\infty$.

1.1.2. Hàm Lipschitz và tính liên tục của hàm lồi

Định nghĩa 1.2. Hàm $f\colon I \to \mathbb{R}$ gọi là $Lipschitz$ trên $I_0 \subset I$ nếu tồn tại số $K > 0$ sao cho $|f(x) - f(y)| \le K|x-y|$ với mọi $x, y \in I_0$. Điều kiện $Lipschitz$ kéo theo f liên tục, thậm chí liên tục đều trên I_0 và f có biến phân giới nội trên mọi khoảng con đóng, giới nội của I_0.

Định lý 1.3. *Giả sử* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *là hàm lồi và* $[a,b] \subset \mathrm{int}(I)$. *Khi đó,*

a) f $Lipschitz$ *trên* $[a,b]$.

b) f *liên tục trên* $\mathrm{int}(I)$.

Chứng minh. Tồn tại $c, d \in I$ sao cho $c < a < b < d$. Theo định lý 1.2 ta có
$$f'_+(a) \le f'_+(x) \le \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \le f'_-(y) \le f'_-(b)$$
với mọi $a \le x < y \le b$. Từ đó suy ra $|f(x) - f(y)| \le K|x-y|$, trong đó $K := max(|f'_+(a)|, |f'_-(b)|)$. Điều này chứng minh a); b) là hệ quả trực tiếp của a). □

Nhận xét 1.2. Chú ý rằng f không nhất thiết *Lipschitz* trên I, ngay cả khi f giới nội và f không nhất thiết liên tục trên I, ngay cả khi f đóng và hữu hạn.

- Một hàm *Lipschitz* trên khoảng $[a, b]$ thì liên tục tuyệt đối trên $[a, b]$; sự kiện mọi người đã biết là một hàm như thế là khả vi hầu khắp nơi. Do vậy từ Định lý 1.3 suy ra rằng một hàm lồi là khả vi hầu khắp nơi.

Sau đây ta sẽ chứng minh một tính chất khả vi mạnh hơn của các hàm lồi mà không cần dùng tới khái niệm liên tục tuyệt đối.

Định lý 1.4. *Giả sử* $f : I \to \mathbb{R}$ *là hàm lồi. Khi đó*

a) Trên $\operatorname{int}(I)$, f'_{-} *liên tục bên trái và* f'_{+} *liên tục bên phải.*

b) Chỉ có một số đếm được các điểm tại đó f *không khả vi.*

Chứng minh a) Do tính liên tục của f trên $\operatorname{int}(I)$ (Định lý 1.3) nên với mọi $x, y, z \in \operatorname{int}(I)$ và $x < z < y$ ta có

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{z \downarrow x} \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \geq \lim_{z \downarrow x} f'_{+}(z)$$

Cho qua giới hạn khi $y \downarrow x$ ta nhận được

$$f'_{+}(x) \geq \lim_{z \downarrow x} f'_{+}(z)$$

Do f'_{+} là hàm không giảm (Định lý 1.2) nên ta có

$$f'_{+}(x) \leq \lim_{z \downarrow x} f'_{+}(z)$$

Vì thế $f'_{+}(x) = \lim\limits_{z \downarrow x} f'_{+}(z)$, điều này cho thấy tính liên tục phải của f'_{+}. Tính liên tục trái của f'_{-} chứng minh tương tự.

b) Theo Định lý 1.2 ta có

$$f'_{+}(x) \leq f'_{-}(y) \leq f'_{+}(z)$$

với mọi $x, y, z \in \operatorname{int}(I)$ và $x < y < z$. Nếu f'_{+} liên tục tại y thì ta có

$$f'_{+}(y) = \lim_{x \uparrow y} f'_{+}(x) = \lim_{x \downarrow y} f'_{+}(z) = f'_{-}(y)$$

điều này có nghĩa là f khả vi tại y. Từ đó suy ra các điểm của $\text{int}(I)$ tại đó f không khả vi là những điểm mà tại đó hàm không giảm f'_+ có bước nhảy. Điều này chứng minh b), vì chỉ có một số đếm được các bước nhảy như thế.

1.2 Tính lồi tại điểm giữa

1.2.1. Hàm lồi khả vi

Khái niệm sau đây có liên quan chặt chẽ với tính lồi.

Định nghĩa 1.3. Hàm $f\colon I \to \mathbb{R}$ gọi là **lồi tại điểm** giữa nếu với mọi $a, b \in I$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$$

Hình 1.4 nêu ý nghĩa hình học của tính lồi tại điểm giữa: điểm giữa của dây cung nối hai điểm trên đồ thị của f không nằm dưới điểm tương ứng trên đồ thị.

Định lý 1.5. (xem [3]) *Giả sử $f\colon I \to \mathbb{R}$ là hàm lồi tại điểm giữa và liên tục. Khi đó f là hàm lồi.*

Định lý 1.6. *Giả sử I là khoảng mở và $f\colon I \to \mathbb{R}$ hai lần khả vi. Khi đó, f lồi khi và chỉ khi $f''(x) \ge 0$ với mọi $x \in I$.*

Chứng minh. "Chỉ khi": Theo Định lý 1.2, f' là hàm không giảm trên I. Do đó $f''(x) \ge 0$ với mọi $x \in I$.
"Khi": Giả sử $x, y \in I, x < y$ và $0 < \lambda < 1$, Theo định lý giá trị trung bình trong giải tích, có tồn tại $\xi_1, \xi_2,\ x < \xi_1 < \lambda x + (1-\lambda)y < \xi_2 < y$ và $\xi_3,\ \xi_1 < \xi_3 < \xi_2$, sao cho

$$\begin{aligned}
&f[\lambda x + (1-\lambda)y] - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y)\\
&= \lambda(1-\lambda)(y-x)f'(\xi_1) + (1-\lambda)\lambda(x-y)f'(\xi_2)\\
&= \lambda(1-\lambda)(y-x)(\xi_1-\xi_2)f''(\xi_3) \le 0.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra f là hàm lồi.

Nhận xét 1.3. Từ chứng minh trên ta có thể thấy rằng f lồi chặt khi $f''(x) > 0$ với mọi $x \in I$. Điều ngược lại nói chung không đúng, chẳng hạn hàm $f\colon x \mapsto x^4$ lồi chặt trên $\mathbb{R}$, nhưng $f''(0) = 0$.

1.2.2. Hàm lồi và các bất đẳng thức lồi

Nhiều ví dụ đơn giản về hàm lồi có thể nhận được từ Định lý 1.6 và qua các hàm này ta có thể rút ra một số bất đẳng thức mà thoạt nhìn thường không dễ nhận biết. Sau đây là một ví dụ:

$$x^\lambda y^\mu \leq \lambda x + \mu y \tag{1.4}$$

với mọi $x > 0, y > 0, \lambda > 0, \mu > 0$ và $\lambda + \mu = 1$. Bất đẳng thức này có thể suy ra bằng cách sử dụng tính lồi (chặt) của hàm $x \mapsto e^x$ như sau:

$$e^{\lambda \log x + \mu \log y} \leq \lambda e^{\log x} + \mu e^{\log y}$$

Một số cách quen thuộc khác để diễn đạt (1.4) là

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \tag{1.5}$$

và
$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

với $x > 0, y > 0, p > 1, q > 1$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Với $p = q = 2$, thì (1.5) là bất đẳng thức quen thuộc $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$ (trung bình nhân của hai số dương không lớn hơn trung bình cộng của chúng hay tổng quát, trung bình nhân của n số dương không lớn hơn trung bình cộng của chúng).

Định lý 1.7 *Giả sử f là hàm $(a, b) \to \mathbb{R}$. Khi đó, f lồi khi và chỉ khi có thể biểu diễn f dưới dạng*

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt \quad (\text{với } c, x \in (a, b))$$

trong đó g là một hàm không giảm liên tục phải $(a, b) \to \mathbb{R}$.

Chứng minh Giả sử $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ là hàm lồi và $a_i \in [a, b]$, $(1 \leq i \leq n)$. Khi đó ta có

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(a_i) \tag{1.6}$$

Bất đẳng thức (1.6) là định lý về giá trị trung bình của n số:

f (giá trị t.b. của $a_1, a_2, \ldots, a_n$) $\leq$ giá trị t.b. của $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$.

Định lý này có dạng tương tự như định lý giá trị trung bình của một hàm.

Định lý 1.8. (Bất đẳng thức Jensen). *Giả sử* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *là hàm lồi và* $g\colon [c,d] \to (a,b)$ *là hàm liên tục. Khi đó*

$$f\left(\frac{1}{d-c}\int_c^d g(x)dx\right) \leq \frac{1}{d-c}\int_c^d f(g(x))dx$$

Nhận xét 1.4. a) Trong định lý trên ta có thể thay g bởi một hàm khả tích Lebesgue trên [c, d].

b) Bất đẳng thức $Jensen$ có dạng tương tự sau trong lý thuyết xác xuất:

Giả sử X là một không gian xác xuất với độ đo xác xuất μ $(\mu(X) = 1)$, Giả sử $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ là hàm lồi và $g\colon X \to (a,b)$ là hàm $\mu -$ khả tích. Khi đó,

$$f\left(\int_X g d\mu\right) \leq \int_X (f \circ g) d\mu$$

Nói theo ngôn ngữ xác xuất, nếu x là một biến ngẫu nhiên trên X thì ta có $f(Ex) \leq E[f(x)]$, trong đó Ex là kỳ vọng của x.

- Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n,\ r_1, r_2, \ldots, r_n$ là các số dương thoả mãn

$$\sum_{i=1}^n r_i = 1.$$

Ta có thể dễ dàng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a)

$$\prod_{i=1}^n x_i^{r_i} \leq \sum_{i=1}^n r_i x_i$$

b)

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{(bất đẳng thức Holder).}$$

với $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số không âm và $p > 1, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi p = q = 2 ta nhận được bất đẳng thức Cauchy:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}$$

1.3 Hàm liên hợp

Khái niệm hàm liên hợp của một hàm rất quen thuộc trong giải tích lồi. Sau đây ta làm quen với khái niệm này.

Định lý 1.9. *Hàm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là lồi khi và chỉ khi tồn tại hàm $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sao cho*

$$f(x) = \sup\nolimits_{y \in \mathbb{R}}[xy - g(y)] \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa 1.4. Ta gọi hàm g nói trên là hàm liên hợp của hàm f, f và g tạo thành một cặp hàm thoả mãn bất đẳng thức

$$f(x) + g(y) \geq xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

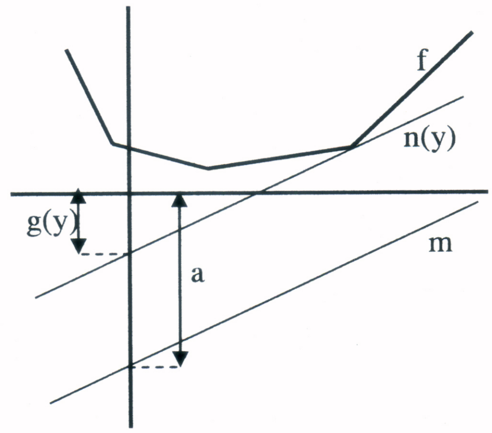
Ta nêu ra cách giải thích hình học sau đây cho Định lý 1.9 (xem Hình 1.5). Đường thẳng m với độ dốc y và hệ số chắn $-a$ không đâu nằm phía trên đồ thị của f khi và chỉ khi với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$xy - a \leq f(x), \text{ do đó } a \geq xy - f(x).$$

Số a nhỏ nhất vẫn còn thoả mãn bất đẳng thức này là

$$\sup\nolimits_{x \in \mathbb{R}}[xy - f(x)] = g(y).$$

Vì thế, bằng cách tịnh tiến m về phía trên cho đến khi nhận được đường $n(y)$ cắt đồ thị của f và hệ số chắn của nó bằng $-g(y)$. Định lý 1.9 cho thấy rằng f là hình bao của họ đường thẳng $n(y)(y \in \mathbb{R})$ khi và chỉ khi f là hàm lồi.



Hình 1.5. Hàm liên hợp

Ví dụ 1.1. Hàm liên hợp của hàm lồi chính thường $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, là hàm $g(y) = \sup_x \{yx - e^x\}$. Rõ ràng $g(y) = 0$ với $y = 0$ và $g(y) = +\infty$ với $y < 0$. Với $y > 0$ hàm $yx - e^x$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = h$ thoả mãn $y = e^h (\Rightarrow h = \log y)$, vì thế $g(y) = y \log y - y$. Như vậy

$$g(y) = \begin{cases} 0 & y = 0, \\ +\infty & y < 0, \\ y \log y - y, & y > 0. \end{cases}$$

Ví dụ 1.2. Giả sử $p > 1, f(x) = \dfrac{|x|^p}{p}$ (với $x \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$g(y) = \frac{1}{q}|y|^q, \text{ trong đó } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Do đó theo}(1.7)$$

$$xy \leq \frac{1}{q}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q \text{ với mọi } x \text{ và } y \text{ thực.}$$

1.4 Hàm lồi giá trị trong $\bar{\mathbb{R}}$

Trong Định lý 1.9 ta đã xét tới các hàm có giá trị trong $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Từ đây về sau, ta sẽ xét các hàm tổng quát hơn với giá trị trong $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Về những tính toán liên quan tới giá trị $+\infty, -\infty$ ta chấp nhận các qui tắc hiển nhiên như $x + \infty = +\infty, \forall x \in R,\ x \times (-\infty) = -\infty$ nếu $x > 0$ và một số qui tắc ít quen biết hơn như $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0 \times (-\infty) = (-\infty) \times 0 = 0$. Biểu thức $(+\infty - \infty)$ không được xác định.

Sau đây ta sẽ mở rộng khái niệm hàm lồi.

Định nghĩa 1.5. Hàm $f \colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ gọi là lồi nếu với mọi $x, y, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) < \mu, f(y) < \nu, 0 < \lambda < 1$ thì

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] < \lambda\mu + (1 - \lambda)\nu \tag{1.8}$$

Giả sử $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm lồi và $f(x) < \mu, f(y) < \nu, 0 < \lambda < 1$. Khi đó,

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) < \lambda\mu + (1 - \lambda)\nu.$$

Ngược lại, giả sử có bất đẳng thức (1.8).

Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ ta có (do $f(x) < f(x) + \varepsilon, f(y) < f(y) + \varepsilon$)

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \varepsilon.$$

do đó $\quad f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ vì thế f lồi.

Từ đó, Định nghĩa 1.5 trên thực tế là sự mở rộng Định nghĩa 1.1.

Ta xét một số khái niệm liên quan đến hàm lồi mở rộng.

a) Miền hữu hiệu của hàm lồi $f \colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$, ký hiệu $\mathrm{dom}(f)$, là tập $\{x \in R \,|f(x) < +\infty\}$.

b) Hàm lồi $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là chính thường trên $\mathbb{R}$ nếu nó không đồng nhất bằng $+\infty$ (tức là nếu $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$ và $f(x) > -\infty, \forall x \in \mathrm{dom}(f)$).

c) Hàm lồi trên $\mathbb{R}$ mà nó không phải là chính thường được gọi là hàm lồi không chính thường trên $\mathbb{R}$.

Có thể kiểm tra lại rằng miền hữu hiệu của hàm lồi $f \colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ là lồi (do đó là một khoảng).

Hàm lồi chính thường $F \colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ với miền hữu hiệu I có thể nhận được bằng cách mở rộng một hàm lồi hữu hạn trên I lên toàn bộ $\mathbb{R}$ theo cách sau:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu x} \in I, \\ +\infty & \text{nếu x} \notin I, \end{cases}$$

Cách mở rộng này cho phép xử lý các hàm lồi hữu hạn với các miền xác định khác nhau như những hàm lồi với giá trị trong $\bar{\mathbb{R}}$ và xác định trên toàn $\mathbb{R}$. Chú ý rằng hàm g nói trong Định lý 1.9 là lồi theo nghĩa vừa nêu trên.

• Có thể dễ dàng mô tả lớp hàm lồi không chính thường.

Định lý 1.10. *Giả sử* $f\colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ *là một hàm lồi không chính thường. Khi đó,* $f(x) = -\infty$ *với mọi* $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$.

Chứng minh. Phát biểu này hiển nhiên đúng nếu $f = +\infty$ (tức là$f(x) = +\infty$ với mọi $x \in \mathbb{R}$). Nếu $f \neq +\infty$ thì tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) = -\infty$ (chú ý $a \in \operatorname{dom}(f)$). Giả sử $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f)), x \neq a$. Tồn tại $y \in \operatorname{dom}(f)$ và $\lambda \in (0,1)$ sao cho $x = \lambda a + (1-\lambda)y$. Theo Định nghĩa 1.5, với mọi α cho $f(y) < \alpha < +\infty$ và mọi $b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f[\lambda a + (1-\lambda)y] < \lambda\beta + (1-\lambda)\alpha$$

(do $f(a) = -\infty < \beta$). Đặt $\beta \to -\infty$, ta có $f(x) = -\infty$.

• Các tính chất a) $\to$ e) của hàm lồi thực nêu trong mục 1.1 vẫn còn đúng đối với các hàm lồi giá trị trong $\bar{\mathbb{R}}$, miễn là trong các tính chất a), b) và d) ta hạn chế ở các hàm lồi chính thường (để tránh các biểu thức dạng $+\infty - \infty$).

Sau đây ta sẽ dùng đến tính chất: hàm lồi chính thường trên $\mathbb{R}$ có **đạo hàm phải** và **đạo hàm trái** khắp trên $\operatorname{dom}(f)$, miễn là cho phép đạo hàm lấy các giá trị $+\infty$ và $-\infty$. Ta đưa ra chứng minh cho trường hợp $\operatorname{dom}(f) = [a,b]$. Theo Định lý 1.2, $f'_+(x)$ tồn tại với mọi $x \in [a,b)$ và f'_- tồn tại với mọi $x \in (a,b]$. Với mọi $x < a$ ta có $f(x) = +\infty$ vì thế

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty, \text{ do đó } f'_-(a) = -\infty;$$

với mọi $x > b$ ta có

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} = +\infty, \text{ và vì thế } f'_+(b) = +\infty.$$

• Ta xét lớp hàm rộng hơn các hàm lồi và hàm lồi chặt.

Định nghĩa 1.6. Cho hàm $f\colon I \to \mathbb{R}$.

a) Hàm f gọi là **tựa lồi** nếu

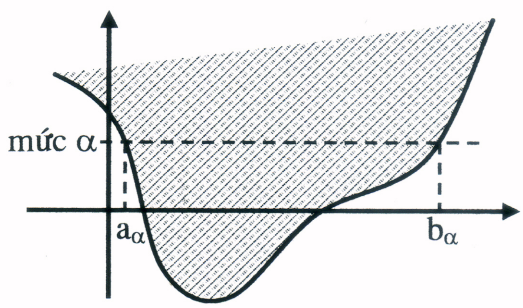
$$f[\lambda a + (1-\lambda)b] \leq f(b)$$

với mọi $a, b \in I$ mà $f(a) < f(b)$ và mọi $\lambda \in (0,1)$.

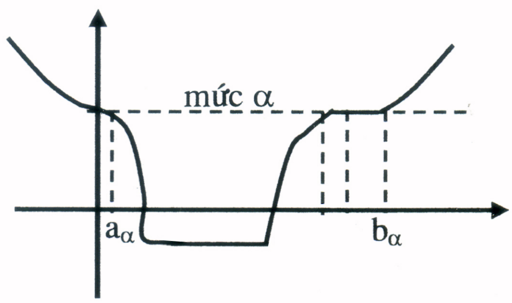
b) Hàm f gọi là tựa lồi chặt nếu

$$f[\lambda a + (1-\lambda)b] < f(b)$$

với mọi $a, b \in I$ mà $f(a) < f(b)$ và mọi $\lambda \in (0,1)$.



Hình 1.6. Hàm tựa lồi (chặt)



Hình 1.7. Hàm tựa lồi (không chặt)

Có thể thấy:

+ Hàm f tựa lồi khi và chỉ khi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ tập mức dưới $\{x \in I : f(x) \leq \alpha\}$ là lồi. Đồ thị của hàm tựa lồi chặt không chứa đoạn thẳng.

+ Một hàm tựa lồi chặt không nhất nhiết là hàm tựa lồi, nhưng một hàm tựa lồi chặt và liên tục là hàm tựa lồi (ví dụ x^3 là hàm tựa lồi chặt và là hàm tựa lồi).

+ Hàm lồi là tựa lồi, nhưng điều ngược lại không chắc đúng (hàm $\sqrt{|x|}$ là tựa lồi, nhưng không lồi). Định lý sau cho thấy rõ điều đó.

Định lý 1.11. (Tính lồi kéo theo tính tựa lồi).
Hàm lồi luôn là hàm tựa lồi. Hàm lồi chặt luôn là hàm tựa lồi chặt.

Chứng minh. Ta nêu ra chứng minh cho trường hợp hàm lồi, trường hợp lồi chặt chứng minh tương tự.

Giả sử $f\colon I \to \mathbb{R}$ là hàm lồi. Lấy bất kỳ $a, b \in I$. Không giảm tổng quát ta xem như $f(a) \leq f(b)$. Từ định nghĩa hàm lồi, với $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ ta có

$$f(x) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b), \forall \lambda \in [0,1]$$

hay

$$f(x) \leq f(b) + \lambda(f(a) - f(b)), \forall \lambda \in [0,1]$$

Do $\lambda > 0$ và $f(a) \leq f(b)$ nên $\lambda(f(a) - f(b)) \leq 0$. Từ đó $f(x) \leq f(b)$. Theo trên $f(b) = max\{f(a), f(b)\}, \forall \lambda \in [0,1]$, nghĩa là f thoả mãn định nghĩa của hàm tựa lồi. $\square$

Tóm lại, chương này đề cập tới hàm lồi (hàm lồi chặt) một biến hữu hạn hay nhận giá trị vô cực và mở rộng của nó là hàm tựa lồi (hàm tựa lồi chặt). Giới thiệu một số tính chất quan trọng của hàm lồi như tính Lipschitz, tính liên tục, tính khả vi của hàm lồi và xét khái niệm hàm liên hợp của hàm lồi. Các khái niệm và tính chất đã xét của hàm lồi một biến sẽ được mở rộng cho hàm lồi nhiều biên ở chương sau.

Chương 2
Hàm lồi trong $\mathbb{R}^n$

Hàm lồi và các biến dạng của nó (lồi chặt, lồi manh, tựa lồi, ...) có nhiều tính chất đáng chú ý và hay được xét tới trong lý thuyết và ứng dụng thực tế. Chương này giới thiệu về các hàm lồi nhiều biến, cùng các tính chất cơ bản của chúng. Nội dung của chương chủ yếu dựa trên các tài liệu [2], [4], [5]

2.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

• **Định nghĩa 2.1.** + Hàm $f\colon S \to [-\infty, +\infty]$ xác định trên tập hợp lồi $S \subseteq R^n$ được gọi là lồi trên S nếu với mọi $x^1, x^2 \in S$ và mọi số thực $\lambda \in [0,1]$ ta có

$$f[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \tag{2.1}$$

mỗi khi vế phải được xác định, nghĩa là hệ thức (2.1) cần được thoả mãn trừ khi $f(x^1) = -f(x^2) = \pm\infty$ (vì biểu thức $+\infty - \infty$ không được xác định).
+ Nếu (2.1) thoả mãn với dấu $<$ đối với mọi $x^1, x^2 \in S, x^1 \neq x^2, 0 < \lambda < 1$ thì f được gọi là lồi chặt trên S.
+ Hàm $f(x)$ gọi là lõm (lõm chặt) trên S nếu $-f(x)$ là lồi (lồi chặt) trên S; gọi là *tuyến tính afin* (hay đơn giản là afin) trên S nếu f hữu hạn và vừa lồi vừa lõm trên S. Một hàm afin trên R^n có dạng $f(x) = <a, x> + \alpha$ với $a \in R^n, \alpha \in R$, bởi vì với mọi $x^1, x^2 \in R^n$ và mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có $f[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] = \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$. Tuy nhiên, hàm afin không phải là hàm lồi chặt hay lõm chặt.

• **Định nghĩa 2.2.** Cho hàm bất kỳ $f\colon S \to [-\infty, +\infty]$ với $S \subseteq R^n$, các tập $\operatorname{dom} f = \{x \in S : f(x) < +\infty\}$, $\operatorname{epi} f = \{(x, \alpha) \in S \times R : f(x) \leq \alpha\}$ được gọi lần lượt là miền hữu dụng và tập trên đồ thị của $f(x)$. Nếu $\operatorname{dom} f \neq$

$\emptyset$ (f không $\equiv +\infty$) và $f(x) > -\infty$ với mọi $x \in S$ thì ta nói hàm f là chính thường. Nói cách khác, f chính thường nếu $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ và f hữu hạn trên $\operatorname{dom} f$. Có thể chứng minh rằng hàm $f(x)$ là lồi trên S khi và chỉ khi

a) Tập trên đồ thị $\operatorname{epi} f = \{(x, \alpha) \in S \times R : f(x) \leq \alpha\}$ là tập lồi, hoặc

b) $f\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k x^k\right) \leq \sum_{k=1}^m \lambda_k f(x^k)$ với mọi $x^k \in S, \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$ và $\lambda_k \geq 0, \forall k$, trong đó m là số nguyên ≥ 2 (bất đẳng thức Jensen).

$*$ Đặt $hypof = \{(x, \alpha) \in S \times R : f(x) \geq \alpha\}$. Ta gọi đó là tập dưới đồ thị của f. Có thể thấy rằng hàm f lõm khi và chỉ khi tập dưới đồ thị của nó là tập lồi, bởi vì hypo f = - epi$g$ với $g = -f$. Tập trên (dưới) đồ thị của hàm afin là một nửa không gian trong $R^n \times R$.

$*$ Hàm lồi $f: S \to [-\infty, +\infty]$ có thể được mở rộng thành hàm lồi xác định trên toàn không gian R^n bằng cách đặt $f(x) = +\infty \forall x \notin S$. Vì vậy để đơn giản ta thường xét hàm lồi trên toàn R^n.

Sau đây là một số ví dụ quen thuộc về hàm lồi ($C \subset R^n$ là tập lồi, $C \neq \emptyset$):

- Hàm chuẩn $Euclid ||x|| = \sqrt{<x, x>} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, x \in R^n$.
- Hàm chỉ của C: $\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi x} \in C, \\ +\infty & \text{nếu x} \notin C, \end{cases}$
- Hàm tựa của C: $s_C(x) = \sup_{y \in C} <y, x>$ (cận trên của $x^T y$ trên C).
- Hàm khoảng cách từ điểm $x \in R^n$ tới C : $d_C(x) = inf_{y \in C} ||x - y||$.

Hàm lồi (chặt) Hàm lồi (không chặt) Hàm không lồi Hàm lõm

Hình 2.1. Đồ thị hàm lồi, hàm lõm và hàm không lồi

Mệnh đề 2.1. *Nếu* $f(x)$ *là một hàm lồi không chính thường thì* $f(x) = -\infty$ *tại mọi điểm trong tương đối* x *thuộc miền hữu dụng của nó.*

Chứng minh. Theo định nghĩa, $f(x^0) = -\infty$ tại ít nhất một $x^0 \in \operatorname{dom} f$ (trừ khi $\operatorname{dom} f = \emptyset$). Nếu x là điểm trong tương đối của $\operatorname{dom} f$ thì có một $x^1 \in \operatorname{dom} f$ sao cho x là điểm trong tương đối của đoạn $[x^0, x^1] : x = \lambda x^0 + (1-\lambda)x^1$ với $\lambda \in (0,1)$. Do f lồi và $f(x^1) < +\infty$ nên

$$f(x) \leq \lambda f(x^0) + (1-\lambda) f(x^1) = -\infty. \qquad \square$$

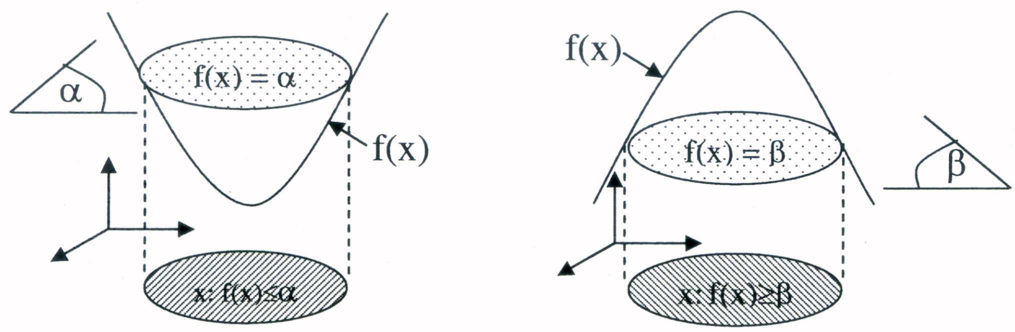
Định lý sau đây nêu mối liên hệ đáng chú ý giữa hàm lồi và tập lồi.

Định lý 2.1. *Giả sử* $f \colon R^n \to [-\infty, +\infty]$ *là một hàm lồi trên* R^n *và* $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ *. Khi đó, các tập mức dưới* $C_\alpha = \{x : f(x) < \alpha\}, \bar{C}_\alpha = \{x : f(x) \leq \alpha\}$ *là tập lồi. Tương tự, nếu* f *là một hàm lõm trên* R^n *thì các tập mức trên* $D_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}, \bar{D}_\alpha = \{x : f(x) \geq \alpha\}$ *là tập lồi.*

Chứng minh. Theo định nghĩa của hàm lồi, ta có

$$f[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] \leq max f(x^1, f(x^2, \forall x^1, x^2 \in R^n, \lambda \in (0,1).$$

Từ đó suy ra các kết luận của định lý. $\square$



Hình 2.2. Tập mức dưới hàm lồi, tập mức trên hàm lõm

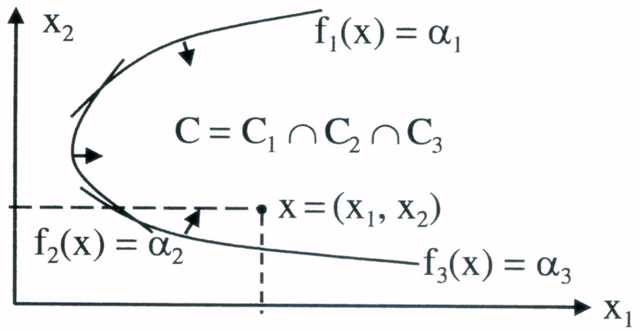
Nhận xét 2.1. Mệnh đề đảo của các kết luận trên nói chung không đúng. Chẳng hạn, hàm giá trị thực (một biến) không giảm trên đường thẳng thực có tất cả các tập mức dưới của nó là lồi, nhưng bản thân hàm đó không lồi trên R. Ví dụ, $f(x) = x^3$ là một hàm như thế.

• **Định nghĩa 2.3.** Một hàm mà mọi tập mức dưới của nó là tập lồi được gọi là hàm tựa lồi. Một hàm mà mọi tập mức trên của nó là tập lồi được gọi là hàm tựa lõm. Đương nhiên hàm lồi (lõm) là hàm tựa lồi (tựa lõm).

Hệ quả 2.1. *Giả sử f_i là các hàm lồi trên $R^n, \alpha_i \in R(\forall i \in I), I$ là tập chỉ số bất kỳ. Khi đó, tập sau đây là lồi:*

$$C = \{x \in R^n : f_i(x) \le \alpha_i, \forall i \in I\}$$

Chứng minh. Do $C_i = \{x \in R^n : f_i(x) \le \alpha_i, \forall i \in I\}$ lồi $\forall i$, nên $C = \cap_{i \in I} C_i$ lồi. □



Hình 2.3. Nghiệm của hệ bất đẳng thức lồi là tập lồi (Hệ quả 2.1)

• **Định nghĩa 2.4.** Hàm f trên R^n được gọi là thuần nhất dương nếu

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \forall x \in R^n, \forall \lambda > 0 \ (\Rightarrow f(0) = 0).$$

Định lý 2.2. *Hàm thuần nhất dương $f\colon R^n \to (-\infty, +\infty)$ là lồi khi và chỉ khi*

$$f(x+y) \le f(x) + f(y), \forall x, y \in R^n.$$

Chứng minh. a) Giả sử hàm thuần nhất dương f là lồi. Lấy bất kỳ $x, y \in R^n$. Khi đó

$$f(x+y) = 2f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \le 2[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)] = f(x) + f(y).$$

b) Ngược lại, giả sử $f(x+y) \le f(x) + f(y) \forall x, y \in R^n$. Lấy bất kỳ $(x^i, \alpha_i) \in \operatorname{epi} f$, tức là $f(x^i) \le \alpha_i (i = 1, 2)$. Ta có $(x^1 + x^2, \alpha_1 + \alpha_2) \in \operatorname{epi} f$, bởi vì $\qquad f(x^1 + x^2) \le f(x^1) + f(x^2) \le \alpha_1 + \alpha_2$.

Hơn nữa, f là hàm thuần nhất dương nên nếu $(x, \alpha) \in \operatorname{epi} f$ thì $f(x) \le \alpha$ và $\qquad \lambda f(x) = f(\lambda x) \le \lambda\alpha \quad (0 < \lambda < \infty) \Rightarrow \lambda(x, \alpha) \in \operatorname{epi} f$.

Như vậy, epi f đóng đối với phép cộng và phép nhân vô hướng, nghĩa là epi f là một nón lồi. Vậy hàm f là lồi. $\square$

Hệ quả 2.2. *Giả sử f là hàm lồi chính thường, thuần nhất dương. Khi đó, $\forall x^i \in R^n, \forall \lambda i > 0, i = 1, \ldots, m$ (Chứng minh theo qui nạp):*

$$f(\lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_m x^m) \le \lambda_1 f(x^1) + \ldots + \lambda_m f(x^m).$$

Hệ quả 2.3. *Giả sử f là hàm lồi chính thường, thuần nhất dương. Khi đó,*

$$f(x) + f(-x) \ge 0 (\forall x \in R^n).$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 2.2 với $y = -x$ ta sẽ có $f(x) + f(-x) \ge f(x - x) = f(0) = 0$ với mọi $x \in R^n$. $\square$

Tóm lại, f là hàm lồi thuần nhất dương $\Leftrightarrow$ epi f là nón lồi đỉnh tại gốc 0.

2.2 Hàm lồi khả vi

Hàm lồi n biến có mối quan hệ chặt chẽ với hàm lồi một biến. Ta có

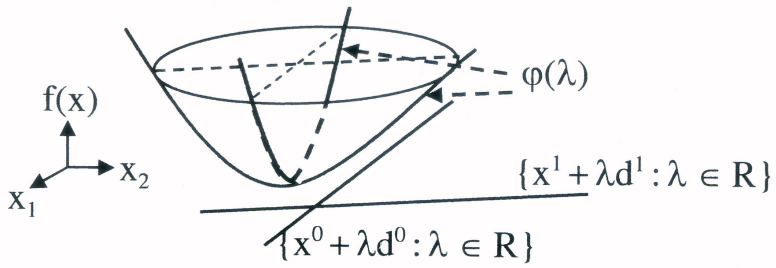
Mệnh đề 2.2. *Hàm $f(x), x \in R^n$, là hàm lồi khi và chỉ khi hàm một biến số $\varphi(\lambda) \equiv f(x + \lambda d)$ là hàm lồi theo λ với mọi $x, d \in R^n$.*

Chứng minh. Điều kiện cần là rõ ràng. Ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử $\varphi(\lambda)$ là hàm lồi $\forall x, d \in R^n$. Lấy bất kỳ $x, y \in R^n$ và đặt $d = y - x$. Khi đó với mọi $\lambda \in [0, 1]$ ta có

$$\begin{aligned} f(\lambda y + (1-\lambda)x) &= f(x + \lambda d) = \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda.1) + (1-\lambda).0) \\ &\le \lambda\varphi(1) + (1-\lambda)\varphi(0) = \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x). \square \end{aligned}$$

Mệnh đề 2.3. (Định lý 1.6, chương 1). *Hàm số thực khả vi $f(x)$ trên một khoảng mở là lồi khi và chỉ khi đạo hàm f' của nó là một hàm không giảm.*

Hàm số thực khả vi hai lần $f(x)$ trên một khoảng mở là lồi khi và chỉ khi đạo hàm cấp hai của nó f'' không âm trên toàn bộ khoảng mở này.



Hình 2.4. Quan hệ giữa hàm lồi nhiều biến và một biến

Nếu $f(x)$ là hàm liên tục và có các đạo hàm riêng theo mọi biến trên một tập $C \subseteq R^n$ thì với mỗi $x \in C$ ta xác định một véctơ cột n thành phần:

$$\bigtriangledown f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T$$

và gọi đó là *vectơ gradient* của hàm f tại điểm x. Véctơ $\bigtriangledown f(x)$ vuông góc với đường mức của hàm f đi qua điểm x. Hướng của véctơ này là hướng tăng nhanh nhất của f tại x nên còn được gọi là *hướng dốc nhất*.

$*$ Có thể thấy rằng nếu f khả vi liên tục (f khả vi và $\bigtriangledown f$ liên tục) thì với $\varphi(\lambda) = f(x+\lambda d)$ sẽ có $\varphi'(\lambda) = <\bigtriangledown f(x+\lambda d), d>$ với mọi $x, d \in R^n$.

$*$ Hơn nữa, nếu f hai lần khả vi liên tục thì $\varphi''(\lambda) = <\bigtriangledown^2 f(x+\lambda d)d, d>$ với

$$\bigtriangledown^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n}$$

là ma trận vuông đối xứng cấp n, gọi là ma trận Hess của hàm f tại điểm x.

Để nhận biết hàm lồi khả vi, người ta thường sử dụng các tiêu chuẩn sau.

Mệnh đề 2.4. *Cho hàm liên tục $f: C \to R$ với $C \subseteq R^n$ là một tập lồi mở:*

a) Nếu hàm f khả vi và $\bigtriangledown f$ liên tục thì f là hàm lồi khi và chỉ khi

$$f(y) \geq f(x) + <\bigtriangledown f(x), y-x>, \forall x, y \in C.$$

hay $\varphi'(\lambda) \equiv <\bigtriangledown f(x+\lambda d), d>$ không giảm theo λ với mọi $x, d \in R^n$.

b) Nếu f khả vi hai lần và $\bigtriangledown^2 f$ liên tục thì f là hàm lồi khi và chỉ khi $\bigtriangledown^2 f(x)$ là ma trận nửa xác định dương $\forall x \in C$ (nghĩa là $<\bigtriangledown^2 f(x)d, d> \geq 0, \forall d \in R^n$) hay $\bigtriangledown^2 f(x)$ có mọi giá trị riêng không âm $\forall x \in C$.

Chứng minh. Ta nêu chứng minh cho kết luận b). Hàm f là lồi trên C khi và chỉ khi với mọi $a \in C, d \in R^n$, hàm $\varphi_{a,d}(\lambda) = f(a + \lambda d)$ là lồi trên khoảng mở $\{\lambda : a + \lambda d \in C\}$. Khi đó, kết luận được suy ra từ Mệnh đề 2.3, vì như đã thấy $\varphi^{''}(\lambda) = <\bigtriangledown^2 f(x)d, d>$ với $x = a + \lambda d$ (chứng minh kết luận a) xem $[2], tr.18$). □

Với hàm lồi chặt ta cũng có các tính chất tương tự như ở Mệnh đề 2.4.

Mệnh đề 2.5. *Cho hàm liên tục $f : C \to R$ với $C \subseteq R^n$ là một tập lồi mở:*
a) Nếu hàm f khả vi và $\bigtriangledown f$ liên tục thì f là hàm lồi chặt khi và chỉ khi

$$f(y) > f(x) + <\bigtriangledown f(x), y - x>, \forall x \neq y \in C.$$

hay $\varphi^{'}(\lambda) \equiv <\bigtriangledown f(x + \lambda d), d>$ tăng chặt theo λ với mọi $x, d \in R^n$.
b) Nếu f khả vi hai lần và $\bigtriangledown^2 f$ liên tục thì f là hàm lồi chặt khi và chỉ khi

- *$\bigtriangledown^2 f(x)$ là ma trận xác định dương $\forall x \in C$ hoặc*
- *$\bigtriangledown^2 f(x)$ có moi giá trị riêng thực sự dương $\forall x \in C$ hoặc*
- *Mọi tử thức con chính của $\bigtriangledown^2 f(x)$ thực sự dương $\forall x \in C$ (theo tiêu chuẩn $Sylvester$). (Chứng minh tương tự mệnh đề trên).* □

Hệ quả 2.4. *Hàm toàn phương $f(x) = \frac{1}{2} <x, Qx> + <c, x> + \alpha$ là lồi trên $R^n \Leftrightarrow$ ma trận Q nửa xác định dương, f lồi chặt $\Leftrightarrow Q$ xác định dương và f là hàm lõm trên $R^n \Leftrightarrow$ ma trận Q nửa xác định âm. (Do $\bigtriangledown^2 f(x) \equiv Q, \forall x \in C$).* □

Ví dụ 2.1. Xét hàm $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$. Ta thấy

$$\bigtriangledown f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ -2x_1 & 6x_2 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \bigtriangledown^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Do $\bigtriangledown^2 f(x)$ xác định dương $\forall x$ nên hàm f đã cho là hàm lồi chặt trên R^2.

2.3 Các phép toán về hàm lồi

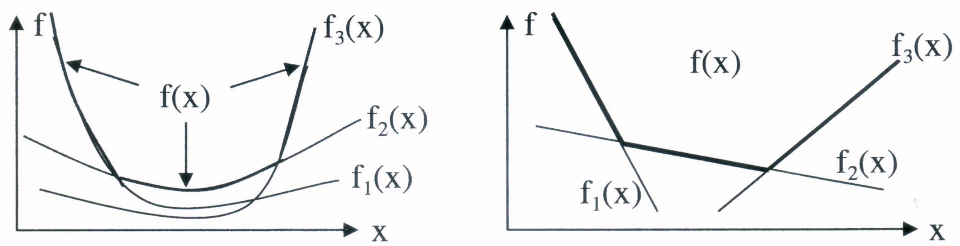
Mệnh đề 2.6. *a) Mọi tổ hợp tuyến tính dương của các hàm lồi là hàm lồi và là hàm lồi chặt nếu ít nhất một trong các hàm đã cho là lồi chặt.*

b) Nếu $f(x), x \in R^n$, là hàm lồi thì $f(Ax + b)$ cũng là hàm lồi, trong đó A là một ma trận vuông cấp n và $b \in R^n$.

c) Cận trên (supremum theo từng điểm) của một họ tuỳ ý các hàm lồi (nói riêng các hàm tuyến tính afin*) là hàm lồi.*

Chứng minh. a)→ b) Chứng minh suy trực tiếp từ định nghĩa hàm lồi.

c) Kết luận được suy ra từ sự kiện là nếu $f(x) = \sup f_i(x) : i \in I$ thì epi $f = \cap_{i \in I}$ epi f_i và giao của một họ bất kỳ các tập lồi là tập lồi. □



Hình 2.5, Đồ thị $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$

Nhận xét 2.2. Nếu $f_1, \ldots, f_m$ là các hàm lồi chính thường thì $f_1 + \ldots + f_m$ là hàm lồi, có thể không chính thường. Chẳng hạn, C và D là hai tập lồi rời nhau. Khi đó hàm chỉ $\delta_C(x)$ và $\delta_D(x)$ là các hàm lồi chính thường, nhưng $\delta_C(x) + \delta_D(x)$ là hàm lồi không chính thường bởi vì $\delta_C(x) + \delta_D(x) = +\infty$ $(\forall x \in R^n)$. □

Mệnh đề 2.7. *Cho $g(x)\colon R^n \to [-\infty, +\infty]$ là một hàm lồi và $\varphi(t)\colon R^n \to [-\infty, +\infty]$ là hàm lồi không giảm. Khi đó, $f(x) = \varphi(g(x))$ là hàm lồi trên R^n.*

Chứng minh. Với mọi $x^1, x^2 \in R^n$ và mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có (do g lồi) $g(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda g(x^1) + (1-\lambda)g(x^2) \Rightarrow$ (do φ không giảm & lồi)

$$\varphi[g(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2)] \leq \lambda\varphi[g(x^1)] + (1\lambda)\varphi[g(x^2)].$$

Ví dụ 2.2. Theo trên hàm $f(x) = c_1 e^{g_1(x)} + \ldots + c_m e^{g_m(x)}$ là hàm lồi nếu mọi $c_i > 0$ và mọi $g_i x$ là lồi (nói riêng $f(x_1, x_2) = c_1 e^{x_1+x_2} + c_2 e^{x_1-x_2}$ là hàm lồi).

Mệnh đề 2.8. *Cho D là một tập lồi trong R^n, G là một tập lồi trong $R^m, \varphi(x,y)$ là hàm lồi giá trị thực trên $D \times G$. Khi đó, hàm*

$$f(x) = inf_{y\in G}\varphi(x,y)$$

là lồi trên D. **Chứng minh.** Giả sử $x^1, x^2 \in D$ và $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ với $\lambda \in [0,1]$. Với mỗi $i = 1, 2$ lấy dãy $\{y^{i,k}\} \subset G$ sao cho

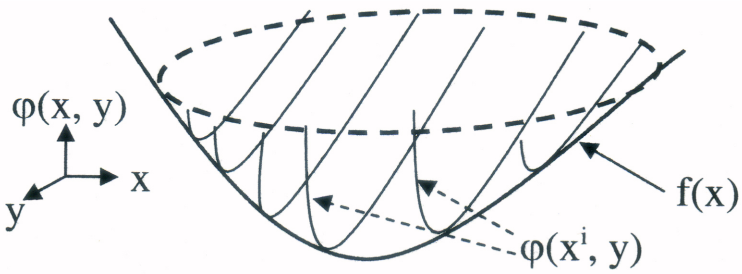
$$\varphi(x^i, y^{i,k}) \to inf_{y\in G}\varphi(x^i, y)$$

Do φ lồi nên

$$f(x) \leq \varphi(x, \lambda y^{1,k} + (1-\lambda)y^{2,k}) \leq \lambda\varphi(x^1, y^{1,k}) + (1-\lambda)\varphi(x^2, y^{2,k}),$$

cho $k \to +\infty$ ta nhận được

$$f(x) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2). \qquad \square$$



Hình 2.6. Đồ thị hàm $f(x) = \inf_{y\in G} \varphi(x,y)$

Hệ quả 2.5. *Giả sử* $E \subset R^{n+1}$ *là tập lồi và*

$$f(x) = inf\{t \in R\colon (x,t) \in E\}. \tag{2.2}$$

Khi đó, f là hàm lồi trên R^n. (Qui ước $infimum$ trên tập $\emptyset$ bằng $+\infty$).□ Khi cho tập trên đồ thị E của hàm lồi $f(x)$, ta có thể khôi phục $f(x)$ nhờ dùng công thức (2.2). Ngược lại, khi cho tập lồi $E \in R^{n+1}$ thì theo Hệ quả 2.5, hàm $f(x)$ xác định theo (2.2) là một hàm lồi trong R^n. Vì thế, nếu $f_1, f_2, \ldots, f_m$ là m hàm lồi cho trước và $E \in R^{n+1}$ là một tập lồi nhận được nhờ thực hiện một phép toán nào đó trên các tập trên đồ thị $E_1, E_2, \ldots, E_m$ của chúng, thì ta có thể dùng (2.2) để xác định một hàm lồi mới $f(x)$ tương ứng. Cụ thể ta có:

Mệnh đề 2.9. *Cho* $f_1, \ldots, f_m$ *là các hàm lồi chính thường trên* R^n. *Khi đó*

$$f(x) = inf\{\sum_{i=1}^{m} f_i(x^i)\colon x^i \in R^n, \sum_{i=1}^{m} x^i = x\} \tag{2.3}$$

là một hàm lồi (có thể không chính thường) trên R^n.

Chứng minh. $f(x)$ xác định theo (2.2) với $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_m$ và $E_i = \operatorname{epi} f_i$ với mọi $i = 1, \ldots, m$. □

Nhận xét 2.3. Hàm xây dựng theo (2.3) được gọi là *tổng chập infimal* của các hàm $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Nếu các hàm $f_1, f_2, \ldots, f_m$ là các hàm lồi chính thường, thì hàm f xác định theo (2.3) là một hàm lồi, nhưng có thể không chính thường. Chẳng hạn khi $m = 2$, thì (2.3) có dạng

$$f(x) = inf_y\{f_1(y) + f_2(x-y)\}.$$

Nếu ta xét hai hàm tuyến tính khác nhau f_1, f_2 trên R thì $f(x) = inf_y\{f_1(y) + f_2(x-y)\} = \infty, \forall x \in R$, nghĩa là f(x) không chính thường. □

$*$ Từ Mệnh đề 2.9 có thể dễ dàng suy ra tính lồi của hàm khoảng cách

$d_C(x) = inf\{\|x-y\| : y \in C\}$ đối với tập lồi C, bởi vì,

$d_C(x) = inf_{y \in C}\{\|x - y\| + \delta_C(y)\} = inf\{\|x^1\| + \delta_C(x^2) : x^1 + x^2 = x\}$ (nhớ rằng $\|x\|$ & $\delta_C(x)$ là các hàm lồi).

• **Định nghĩa 2.5.** Hàm f trên R^n gọi là đóng nếu epi $f \subset R^{n+1}$ là tập đóng.

Định lý 2.6 nêu ở mục 2.4 dưới đây cho thấy hàm f đóng $\Leftrightarrow$ f nửa liên tục dưới $\Leftrightarrow$ với mọi $\alpha \in R$ tập mức dưới $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ là tập đóng.

Ta có các định nghĩa sau về bao đóng, bao lồi và bao lồi đóng của một hàm.

• **Định nghĩa 2.6.**

+ Bao đóng của hàm f , ký hiệu $\overline{f}$, được xác định bởi

$$\text{epi}\,\overline{f} = \overline{\text{epi}\,f}$$

+ Bao lồi và bao lồi đóng của hàm f , ký hiệu là $conv f$ và $\overline{conv} f$, được xác định lần lượt như sau: $\text{epi}(conv f) = conv(\text{epi}\,f)$ và $\text{epi}(\overline{conv} f) = \overline{conv}(\text{epi}\,f)$.

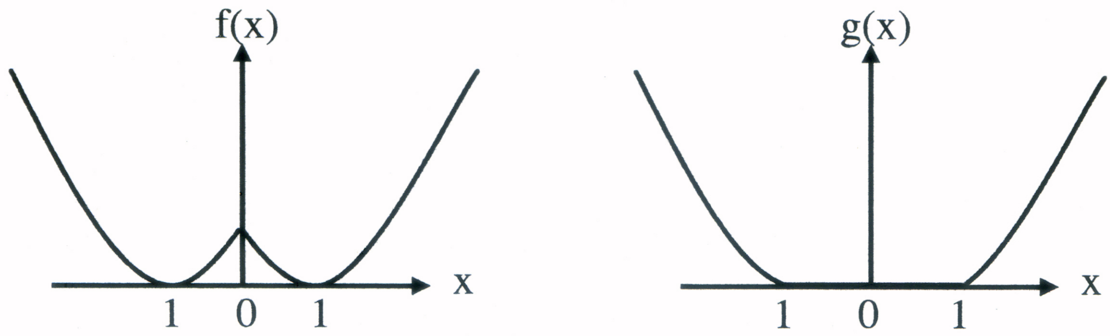
Ví dụ 2.3. $f(x) = min\{(x+1)^2, (x-1)^2\}, x \in R$, là hàm không lồi (Hình 2.7a). Bao lồi đóng của f là hàm $g = \overline{conv} f$ xác định theo công thức (Hình 2.7b)

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq -1, \\ 0, & |x| \leq 1, \\ (x-1)^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

2.4 Tính liên tục của hàm lồi

Định lý 2.3. *Hàm lồi chính thường f trên R^n liên tục tại mọi điểm trong của miền hữu dụng* $(\text{dom}\,f)$ *của nó.*

Chứng minh. Giả sử $x^0 \in \text{int}(\text{dom}\,f)$. Theo Định lý 1.3 (chương 1), với mọi $i = 1, \ldots, n$ thu hẹp của f trên khoảng mở $\{t\colon x^0 + te^i\,\text{int}(\text{dom}\,f)\}$ liên tục trên khoảng này. Vì thế, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước và với mọi $i = 1, \ldots, n$



a) Hình 2.7. Hàm bao lồi b)

ta có thể chọn $\delta_i > 0$ đủ nhỏ sao cho $|f(x^0 + x) - f(x^0)| \leq \varepsilon, \forall x \in [-\delta_i e^i, +\delta_i e^i]$. Giả sử $\delta = min\{\delta_i : i = 1, \ldots, n\}$ và $B = \{x : ||x||_1 \leq \delta\}$. Ký hiệu $d^i = \delta e^i, d^{n+i} = -\delta e^i, i = 1, \ldots, n$. Khi đó, có thể thấy rằng mọi $x \in B$ có dạng $x = \lambda_1 d^1 + \ldots + \lambda_{2n} d^{2n}$ với $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{2n} = 1, \lambda_i \geq 0$. Từ đó, $f(x^0 + x) \leq \lambda_1 f(x^0 + d^1) + \ldots + \lambda_{2n} f(x^0 + d^{2n})$ và vì thế, $f(x^0 + x) - f(x^0) \leq \lambda_1[f(x^0 + d^1) - f(x^0)] + \ldots + \lambda_{2n}[f(x^0 + d^{2n}) - f(x^0)]$. Như vậy, $|f(x^0 + x) - f(x^0)| \leq \lambda_1 |f(x^0 + d^1) - f(x^0)| + \ldots + \lambda_{2n} |f(x^0 + d^{2n}) - f(x^0)| \leq \varepsilon$ với mọi $x \in B$. Điều này chứng tỏ $f(x)$ liên tục tại x^0.□

Định lý 2.4. *Giả sử f là hàm lồi chính thường trên R^n. Khi đó, các điều sau đây là tương đương:*

a) f liên tục tại một điểm nào đó.

b) f bị chặn trên trong một tập mở nào đó.

c) $\text{int}(\text{epi} f) \neq \emptyset$.

d) $\text{int}(\text{dom} f) \neq \emptyset$ *và f liên tục trên* $\text{int}(\text{dom} f)$.

Chứng minh.

a) $\Rightarrow$ b) Nếu f liên tục tại điểm x^0 thì tồn tại lân cận mở U của x^0 sao cho $f(x) < f(x^0) + 1$ với mọi $x \in U$, tức là $f(x)$ bị chặn trong U.

b) $\Rightarrow$ c) Nếu $f(x) \leq M, \forall x$ trong tập mở U thì $U \times [M, +\infty) \subset \text{epi} f$, vì thế int $(\text{epi} f) \neq \emptyset$.

c) $\Rightarrow$ d) Nếu $\text{int}(\text{epi} f) \neq \emptyset$ thì tồn tại tập mở $U \subset R^n$ và khoảng mở

$I \subset R$ sao cho $U \times I \subset \text{epi}\, f$, vì thế $U \subset \text{dom}\, f$, nghĩa là $\text{int}(\text{dom}\, f) \neq \emptyset$. Theo Định lý 2.3 hàm f liên tục trên $\text{int}(\text{dom}\, f)$.

d) $\Rightarrow$ a) là hiển nhiên. $\square$

• **Định nghĩa 2.7.** + Hàm $f\colon R^n \to R$ được gọi là *Lipschitz* địa phương tại $\overline{x} \in R^n$ nếu tồn tại lân cận U của $\overline{x}$ và số $K > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| \leq K||(x - y|| \quad (\forall x, y \in U). \tag{2.4}$$

+ Hàm f được gọi là *Lipschitz* địa phương trên tập $C \subset R^n$ nếu f *Lipschitz* địa phương tại mọi $x \in C$ và hàm f được gọi là *Lipschitz* với hằn số *Lipschitz* K trên tập $C \subset R^n$ nếu (2.4) đúng với mọi $x, y \in C$.

Định lý 2.5. *Giả sử f là hàm lồi chính thường trên R^n và f bị chặn trên trong một tập mở nào đó. Khi đó, f Lipschitz trên mọi tập bị chặn chứa trong* $\text{int}(\text{dom}\, f)$. (Xem chứng minh trong $[4], tr.55$).

• **Định nghĩa 2.8.** + Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới tại $\overline{x} \in R^n$ (với $f(\overline{x}) < +\infty$) nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(\overline{x}) - \varepsilon \leq f(x) \quad (\forall x : ||x - \overline{x}|| < \delta). \tag{2.5}$$

+ Nếu $f(\overline{x}) = +\infty$ thì f được gọi là nửa liên tục dưới tại $\overline{x}$ nếu với mọi $N > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho ($f(x)$ đủ lớn khi x đủ gần $\overline{x}$):

$$f(x) \geq N \quad (\forall x : ||x - \overline{x}|| < \delta). \tag{2.6}$$

$*$ Định nghĩa trên tương đương với $lim\ \text{inf}_{x \to \overline{x}} f(x) \geq f(\overline{x})$.

+ Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới nếu f nửa liên tục dưới tại $\forall x \in R^n$.

+ Nếu thay (2.5) và (2.6) tương ứng bởi $(2.5')$ và $(2.6')$ ta được định nghĩa của hàm nửa liên tục trên tại $\overline{x}$ (f nửa liên tục dưới $\Leftrightarrow -f$ nửa liên tục trên):

$$f(x) \leq f(\overline{x}) + \varepsilon \quad (\forall x : ||x - \overline{x}|| < \delta) \text{ (khi } f(\overline{x}) < +\infty); \qquad (2.5')$$

$$f(x) \leq -N \quad (\forall x : ||x - \overline{x}|| < \delta) \text{ (khi } f(\overline{x}) = -\infty); \qquad (2.6')$$

$*$ Hàm f vừa nửa liên tục dưới, vừa nửa liên tục trên tại $\overline{x}$ sẽ liên tục tại $\overline{x}$ theo nghĩa thông thường.

Định lý 2.6. *Với bất kỳ hàm* $f\colon R^n \to [-\infty, +\infty]$, *3 điều sau tương đương:*

1) f *nửa liên tục dưới trên* R^n.

2) epi f *là tập đóng trong* R^{n+1};

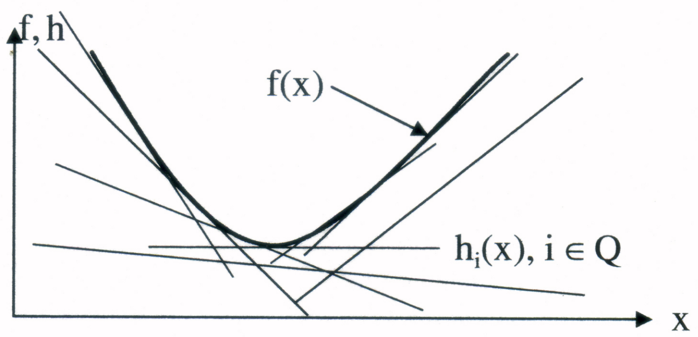
3) Với mọi $\alpha \in \mathbf{R}$ *tập mức dưới* $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ *đóng.*

Chứng minh.

a) $\Rightarrow$ b). Giả sử f nửa liên tục dưới. Ta sẽ chứng tỏ epi f đóng. Thật vậy, giả sử $(x^k, \alpha_k) \in$ epi f (tức là $f(x^k) \leq \alpha_k$) và $(x^k, \alpha_k) \to (x, \alpha)$. Khi đó, do f nửa liên tục dưới, nên ta có $\lim inf f(x^k) \geq f(x)$. Cho $k \to +\infty$, ta có $\alpha = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \geq \lim inf f(x^k) \geq f(x)$, nghĩa là $(x, \alpha) \in$ epi f. Vậy epi f đóng.

b) $\Rightarrow$ c). Giả sử $x^k \to x$ và $f(x^k) \leq \alpha$. Do $(x^k, \alpha) \in$ epi f và epi f đóng nên $(x, \alpha) \in$ epi f, nghĩa là $f(x) \leq \alpha$. Chứng tỏ tập mức dưới $\{x\colon f(x) \leq \alpha\}$ đóng.

c) $\Rightarrow$ a) Giả sử $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ đóng $\forall \alpha \in R$ và $x^k \to x$. Nếu $lim_k \to f(x^k) < f(x)$ thì tồn tại $\alpha < f(x)$ sao cho $f(x^k) \leq \alpha$ với mọi k đủ lớn. Từ c) suy ra $f(x) \leq \alpha < f(x)$, vô lý! Vậy $\lim_{k\to\infty} f(x^k) \geq f(x)$, nghĩa là f nửa liên tục dưới. $\square$



Hình 2.8. Hàm lồi đóng f = bao lồi của họ hàm afin h ≤ f

2.5 Hàm liên hợp

Ta nhắc lại (chứng minh xem $[4], tr.60)$ định lý quan trọng sau đây.

Định lý 2.7. *Hàm lồi chính thường đóng f trên R^n trùng với cận trên (supremum theo từng điểm) của họ tất cả các hàm afin h trên R^n không lớn hơn f (xem Hình 2.8).*

• **Định nghĩa 2.9.** Hàm liên hợp của hàm tuỳ ý $f\colon R^n \to [-\infty, +\infty]$ được định nghĩa là hàm

$$f^*(p) = \sup_{x\in R^n}\{<p, x> -f(x)\}, \tag{2.7}$$

Thực ra, *supremum* trong (2.7) chỉ cần lấy theo $x \in \operatorname{dom} f$ vì $-f(x) = -\infty, \forall x \notin \operatorname{dom} f$. Hệ thức (2.7) còn được gọi là phép biến đổi $Young-Fenchel$. Từ định nghĩa trên suy ra:

$$f^{**}(x) = (f^*)^*(x) = \sup_p\{<p, x> -f^*(p)\}.$$

Mệnh đề 2.10. *$f^*\colon R^n \to [-\infty, +\infty]$ là hàm lồi, đóng.*

Chứng minh. Với mỗi x cố định, $g(p, x) =<p, x> -f(x)$ là một hàm afin trên R^n. Theo Mệnh đề 2.6, f^* là hàm lồi. Mặt khác, tập trên đồ thị của $f^*(p), (p \in R^n)$ là giao theo mọi $x \in R^n$ của tập trên đồ thị các hàm $g(p, x)$, nghĩa là giao của các tập lồi đóng. Vì vậy, epi f^* là tập lồi đóng, do đó f^* là hàm lồi đóng. □

Ví dụ 2.4.

+ Hàm liên hợp của $f(x) = \delta_C(x)$ (hàm chỉ của tập C) là hàm $f^*(p) = \sup_{x\in C} <p, x>= s_C(p)$ (hàm tựa của tập C).

+ Hàm liên hợp của hàm $afin f(x) =<c, x> -\alpha$ là hàm

$$f^*(p) = \sup_x <p, x> - <c, x> +\alpha = \begin{cases} \alpha, p = c, \\ +\infty, p \neq c. \end{cases}$$

Mệnh đề 2.11. *Cho* $f\colon R^n \to [-\infty, +\infty]$ *là một hàm chính thường bất kỳ:*

a) $f(x) + f^*(p) \geq <p, x>, \forall x \in R^n, \forall p \in R^n$ *(Bất đ.th.* $Young - Fenchel$*).*

b) $f^{**}(x) \leq f(x), \forall x$ *và* $f^{**} = f \Leftrightarrow f$ *lồi và đóng (Định lý* $Fenchel - Moreau$*).*

c) $f^{**}(x) = operatornamesup\{h(x) : hafin, h \leq f\}$*, nghĩa là* $f^{**}(x)$ *là hàm lồi đóng lớn nhất, không lớn hơn* $f(x) : f^{**} = \overline{conv} f$*. (Chứng minh xem* $[4], tr.73)$*.*

2.6 Dưới vi phân của hàm lồi

2.6.1. Đạo hàm theo hướng

Giả sử $f\colon R^n \to [-\infty, +\infty]$ là một hàm bất kỳ và x^0 là điểm tại đó f hữu hạn (nghĩa là $|f(x^0)| < +\infty$).

• **Định nghĩa 2.10.** Với $d \in R^n, d \neq 0$, nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x^0 + \lambda d) - f(x^0)}{\lambda}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm theo hướng d của hàm f tại x^0 và ký hiệu là $f^{'}(x^0, d)$.

Nhận xét 2.4. $f^{'}(x^0, d)$. là hàm thuần nhất dương. Thật vậy, $\forall \lambda > 0$ ta có

$$\begin{aligned} f^{'}(x^0, d) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x^0 + \varepsilon\lambda d) - f(x^0)}{\varepsilon} \\ &= \lambda \lim_{\eta \downarrow 0} \frac{f(x^0 + \eta d) - f(x^0)}{\eta} = \lambda f^{'}(x^0, d). \end{aligned}$$

Định lý 2.8. *Giả sử* f *là hàm lồi chính thường. Khi đó:*

a) f *có đạo hàm theo mọi hướng* d *tại mọi điểm* $x \in \operatorname{dom} f$*. Đồng thời*

$$f'(x, d) = inf_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda}.$$

b) Với mỗi $x \in \operatorname{dom} f$, $f'(x,d)$ *là hàm lồi, thuần nhất dương (theo d).*

c) Nếu f *liên tục tại* $x \in \operatorname{dom} f$ *thì* $f'(x,d)$ *hữu hạn, liên tục tại mọi* $d \in R^n$. Chứng minh. Xem [4], trang $65-66$.

2.6.2. Dưới vi phân của hàm lồi

Định nghĩa 2.11. Cho hàm lồi chính thường f trên R^n, véctơ $p \in R^n$ được gọi là dưới *gradient* của f tại điểm x^0 nếu

$$<p, x - x^0> + f(x^0) \leq f(x), \forall x \in R^n. \tag{2.8}$$

Tập tất cả các dưới *gradient* của f tại x^0 được gọi là dưới vi phân của f tại x^0 và được ký hiệu là $\partial f(x^0)$. Hàm f được gọi là khả dưới vi phân tại x^0 nếu $\partial f(x^0) \neq \emptyset$.

Định lý 2.9. *Giả sử* f *là hàm lồi chính thường trên* R^n. *Đối với mỗi tập bị chặn* $C \subset \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ *thì tập* $\cup_{x\in C}\partial f(x)$ *khác rỗng và bị chặn. Nói riêng,* $\partial f(x^0)$ *khác rỗng và bị chặn tại mọi điểm* $x^0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.

Chứng minh. xem $[4], tr.62$.

Dưới vi phân của hàm lồi thuần nhất dương được cho trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.12. *Giả sử* $f\colon R^n \to R$ *là hàm lồi thuần nhất dương, nghĩa là hàm lồi* $f\colon R^n \to R$ *thoả mãn* $f(\lambda x) = \lambda f(x),\ \forall \lambda > 0$. *Khi đó*

$$\partial f(x^0) = \{p \in R^n : <p, x^0> = f(x^0), <p, x> \leq f(x) \quad \forall x\} \tag{2.9}$$

Chứng minh. Nếu $p \in \partial f(x^0)$ thì $<p, x - x^0> + f(x^0) \leq f(x) \quad \forall x$. Lấy $x = 2x^0$ ta có $<p, x^0> + f(x^0) \leq 2f(x^0)$, nghĩa là $<p, x^0> \leq f(x^0)$. Sau đó, lấy $x = 0$ ta được $- <p, x^0> \leq -f(x^0)$, từ đó $<p, x^0> = f(x^0)$. (Điều kiện này trở thành tầm thường và có thể bị loại bỏ nếu $x^0 = 0$). Hơn nữa, từ định nghĩa của dưới vi phân suy ra $<p, x> = <p, x - x^0> + f(x^0) \leq f(x) \quad \forall x$. Ngược lại, nếu p thuộc tập ở vế phải của (2.9) thì $<p, x - x^0> \leq f(x) - f(x^0)$, vì thế $p \in \partial f(x^0$

Nếu có thêm $f(-x) = f(x) \geq 0 \quad \forall x$ (hàm chẵn không âm) thì điều kiện $<p, x> \leq f(x)\ \forall x$ tương đương với $| <p, x> | \leq f(x) \quad \forall x$. Nói riêng, ta có:

1) Nếu $f(x) = ||x||$ (chuẩn *Euclid*) thì

$$\partial f(x^0) = \begin{cases} \{p : ||p|| \leq 1\} & \text{khi } x^0 = 0, \\ \{x^0/||x^0||\} & \text{khi } x^0 \neq 0. \end{cases}$$

2) Nếu $f(x) = max|x_i|, i = 1, \ldots, n$ (chuẩn *Tchebycheff*) thì với $I_x = \{i : |x_i| = f(x)\}$:

$$\partial f(x^0) = \begin{cases} conv\{\pm e^1, K, \pm e^n\} & \text{khi } x^0 = 0, \\ conv\{(signx_i^0)x_i^0 : i \in I_{x^0} & \text{khi } x^0 \neq 0. \end{cases}$$

3) $f(x) = <a, x> +\alpha \quad (a \in R^n, \alpha \in R)$ thì $\partial f(x) = \{a\} \quad (\forall x \in R^n)$.

$*$ Mệnh đề sau nêu mối liên hệ giữa dưới vi phân và đạo hàm theo hướng

Mệnh đề 2.13. *Giả sử f là hàm lồi chính thường và $x^0 \in \operatorname{dom} f$. Khi đó:*

a) $p \in \partial f(x^0)$ khi và chỉ khi

$$<p, d> \leq f'(x^0, d), \forall d \in R^n \setminus \{0\}. \tag{2.10}$$

b) Nếu f liên tục tại x^0 thì dưới vi phân $\partial(x^0)$ là tập lồi, compact và

$$f'(x^0, d) = max\{<p, d>: p \in \partial f(x^0)\}.$$

Chứng minh.

a) Bằng cách đặt $x = x^0 + \lambda d$, ta có thể viết lại bất đẳng thức về dưới $gradient$(2.8) thành:

$$<p, d> \leq [f(x^0 + \lambda d) - f(x^0)]/\lambda \quad \forall d \neq 0, \forall \lambda > 0,$$

bất đẳng thức này tương đương với

$$<p, d> \leq inf_{\lambda > 0}[f(x^0 + \lambda d) - f(x^0)]/\lambda, \quad \forall d,$$

nghĩa là theo Định lý 2.8, $<p, d> \leq f'(x^0, d) \quad \forall d \neq 0$.

b) Để chứng minh $\partial f(x^0)$ lồi, ta lấy $p^1, p^2 \in \partial f(x^0)$ và $\lambda \in [0, 1]$. Khi đó, $\forall x \in R^n$ thì

$$<\lambda p^1, x - x^0> \leq \lambda(f(x) - f(x^0)) \text{và} <(1-\lambda)p^2, x - x^0> \leq (1-\lambda)(f(x) - f(x^0))$$

$$\Rightarrow <\lambda p^1 + (1-\lambda)p^2, x - x^0> \leq f(x) - f(x^0)$$
$$\Rightarrow \lambda p^1 + (1-\lambda)p^2 \in \partial f(x^0) \Rightarrow \partial f(x^0) \text{ lồi.}$$

Điều kiện (2.10) cho thấy $\partial f(x^0)$ là tập đóng và do đó *compact*, vì nó bị chặn theo Định lý 2.9. Do tính thuần nhất của hàm $f'(x^0, d)$ nên một hàm afin, không lớn hơn nó và đúng bằng nó tại một điểm nào đó, phải có dạng $<p, d>$ với $<p, d> \leq f'(x^0, d) \forall d$, nghĩa là theo kết luận a) vừa chứng minh $p \in \partial f(x^0)$. Do $f'(x^0, d)$ là hàm lồi chính thường (Định lý 2.8) nên theo Định lý 2.7, ta có $f'(x^0, d) = max\{<p, d>: p \in \partial f(x^0)\}$. □

⋆ Định lý sau nêu mối liên hệ giữa dưới vi phân và hàm liên hợp.

Định lý 2.10. *Giả sử f là hàm lồi chính thường trên R^n và $x^0 \in \text{dom}\, f$. Khi đó: $p \in \partial f(x^0) \Leftrightarrow f(x^0) + f^*(p) = <p, x^0>$.*

Chứng minh. Giả sử $p \in \partial f(x^0)$. Khi đó
$<p, x - x^0> + f(x^0) \leq f(x) \forall x \Rightarrow <p, x^0> - f(x^0) \geq <p, x> - f(x) \forall x \Rightarrow < p, x^0> - f(x^0) \geq \sup_x\{<p, x> - f(x)\} = f^*(p) \Rightarrow f(x^0) + f^*(p) \leq < p, x^0>$.

Kết hợp với bất đẳng thức $Young - Fenchen$, ta nhận được

$$f(x^0) + f^*(p) = <p, x^0 > \tag{2.11}$$

Ngược lại, giả sử có (2.11). Từ bất đẳng thức $Young - Fenchen$ với $x = x^0 + \lambda d$, ta có:

$$f(x^0 + \lambda d) + [<p, x^0> - f(x^0)] \geq <p, x^0 + \lambda d> \Rightarrow$$
$$\frac{f(x^0 + \lambda d) - f(x^0)}{\lambda} \geq \frac{<p, \lambda d>}{\lambda} = <p, d> \Rightarrow$$
$$f'(x^0, d) \geq <p, d>\ \forall d \Rightarrow p \in \partial f(x^0.) \text{ (Mệnh đề 2.13).}$$ □

⋆ Quan hệ giữa dưới vi phân và đạo hàm: Theo định nghĩa, hàm f khả vi tại điểm x^0 nếu tồn tại véctơ $\bigtriangledown f(x^0)$ (véctơ *gradient* của f tại x^0) thoả mãn

$$f(x^0 + d) = f(x^0) + <\bigtriangledown f(x^0), d> + O(||d||).$$

Điều này tương đương với

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x^0 + \lambda d) - f(x^0)}{\lambda} = <\bigtriangledown f(x^0), d>, \forall d \neq 0,$$

vì thế đạo hàm theo hướng $f'(x^0, d)$ tồn tại và là hàm tuyến tính theo d.

Mệnh đề 2.14. *Giả sử f là hàm lồi chính thường và $x^0 \in \operatorname{dom} f$. Nếu f khả vi tại x^0 thì $\bigtriangledown f(x^0)$ là véctơ dưới gradient duy nhất của f tại x^0.* $\square$

Chứng minh. Nếu f khả vi tại x^0 thì $f'(x^0, d) = \{<\bigtriangledown f(x^0), d>\}$. Vì thế, theo kết luận a) của Mệnh đề 2.13, véctơ p là dưới *gradient* của f tại x^0 khi và chỉ khi $<p, d> \leq <\bigtriangledown f(x^0), d>\ \forall d$, từ đó suy ra $p = \bigtriangledown f(x^0)$.

Ngược lại có thể chứng minh rằng nếu f có tại x^0 một véctơ dưới *gradient* duy nhất thì f khả vi tại x^0. Như vậy, khái niệm dưới *gradient* là sự mở rộng của khái niệm *gradient* (tại những điểm ở đó hàm không khả vi).

2.6.3. Các phép toán về dưới vi phân

Mệnh đề 2.15. *Giả sử f là hàm lồi chính thường trên R^n và $\lambda > 0$. Khi đó, với mọi $x \in R^n$:*

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

Chứng minh. Với $x \in \operatorname{dom} f$, do f lồi chính thường và $\lambda > 0$, nên λf là lồi chính thường và $x \in \operatorname{dom}(\lambda f)$. Đồng thời, $(\lambda f)'(x, \cdot) = \lambda f'(x, \cdot)$. Từ mệnh đề 2.13 suy ra $\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x)$. Nếu $x \neq \operatorname{dom} f$ thì $\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x) = \emptyset$. $\square$

Sau đây là một số qui tắc tính dưới vi phân (chứng minh xem $[4], 67-69$).

Định lý 2.11. (Moreau-Rockafellar). *Giả sử $f_i, i = 1, \ldots, m$, là các hàm lồi chính thường trên R^n. Khi đó với mọi $x \in R^n$:*

$$\partial(f_1 + \ldots + f_m)(x) \supset \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x).$$

Hơn nữa, nếu tồn tại điểm $a \in I_{i=1}^m \operatorname{dom} f_i$ tại đó tất cả các hàm f_i liên tục (có thể trừ ra một hàm), thì

$$\forall x \in R^n : \partial(f_1 + \ldots + f_m)(x) = \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x).$$

Định lý 2.12. *Giả sử $A \colon R^n \to R^m$ là toán tử tuyến tính và g là hàm lồi chính thường trên R^m. Khi đó, với mọi $x \in R^n$:*

$$A^T \partial g(Ax) \subset \partial(g \circ A)(x).$$

Hơn nữa, nếu g liên tục tại một điểm nào đó $\in Im(A)$ *(ảnh của A) thì*

$$A^T\partial g(Ax) = \partial(g \circ A)(x), \forall x \in R^n$$

Định lý 2.13. *Giả sử* $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$*, trong đó* g_i *là các hàm lồi từ* R^n *vào* R*, giả sử* $\varphi\colon R^m \to R$ *là hàm lồi thoả mãn* $\varphi(t) \geq \varphi(t')$ *mỗi khi* $t_i \geq t_i^{'}, i = 1, \ldots, m$*. Khi đó, hàm* $f = \varphi \circ g$ *là lồi và*

$$\partial f(x) = \{s_1p^1 + \ldots + s_mp^m : p^i \in \partial g_i(x), (s_1, \ldots, s_m) \in \partial\varphi(g(x))\}.$$

Nhận xét 2.5. Khi $\varphi(y)$ khả vi tại $g(x)$ công thức nêu ở định lý trên tương tự như qui tắc cổ điển về lấy đạo hàm của hàm hợp. Cụ thể là

$$\partial(\varphi \circ g)(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}(g(x))\partial g_1(x) + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_m}(g(x))\partial g_m(x).$$

Định lý 2.14. *Giả sử* $f(x) = max\{g_1(x), \ldots, g_m(x)\}$*, trong đó* g_i *là các hàm lồi từ* R^n *vào* R*. Khi đó*

$$\partial f(x) = conv\{\cup\partial g_i(x)\colon i \in I(x)\},$$

với $I(x) = i : f(x) = g_i(x)$.

Tóm lại, chương này đã giới thiệu khái quát về hàm lồi và các vấn đề có liên quan: dấu hiệu nhận biết, các phép toán và tính liên tục của hàm lồi, khái niệm dưới vi phân của hàm lồi, quan hệ giữa dưới vi phân với đạo hàm theo hướng và với hàm liên hợp. Các sự kiện nêu ra được minh hoạ qua một số ví dụ và hình vẽ cụ thể. Vấn đề cực trị của hàm lồi sẽ được xét ở chương sau.

Chương 3
Cực trị của hàm lồi

Chương này đề cập tới các tính chất cực trị của hàm lồi, điều kiện tối ưu cần và đủ đối với hàm lồi khả vi và một số kết quả chính về cực tiểu (cực đại) của các hàm lồi. Nội dung của chương chủ yếu dựa trên tài liệu [1], [4] và [5].

3.1 Cực tiểu địa phương và cực tiểu toàn cục

Định nghĩa 3.1. Giả sử $f\colon R^n \to [-\infty, +\infty]$ là hàm số tuỳ ý và $C \subset R^n$ là tập tuỳ ý. Điểm $x^0 \in C \cap \operatorname{dom} f$ được gọi là điểm cực tiểu toàn cục của $f(x)$ trên C, nếu $-\infty < f(x^0) \leq f(x)$ với mọi $x \in C$. Điểm $x^0 \in C$ được gọi là điểm cực tiểu địa phương của $f(x)$ trên C, nếu tồn tại lân cận $U(x^0)$ của x^0 sao cho $-\infty < f(x^0) \leq f(x)$ với mọi $x \in C \cap U(x^0)$.

Các khái niệm cực đại địa phương và cực đại toàn cục được định nghĩa tương tự. Đối với hàm tuỳ ý f trên tập C, ta ký hiệu tập tất cả các điểm cực tiểu (cực đại) toàn cục của f trên C là $Argmin_{x\in C} f(x) (Argmax_{x\in C} f(x))$.

Do $min\{f(x) : x \in C\} = -max\{-f(x) : x \in C\}$ nên lý thuyết cực tiểu (hay cực đại) hàm lồi cũng chính là lý thuyết cực đại (hay cực tiểu) hàm lõm.

3.2 Cực tiểu hàm lồi (cực đại hàm lõm)

Mệnh đề sau đây nêu lên tính chất đặc trưng của hàm lồi.

Định lý 3.1. *Cho C là tập lồi, khác rỗng trong R^n và $f\colon R^n \to R$ là hàm lồi. Mọi điểm cực tiểu địa phương của f trên C đều là điểm cực tiểu toàn cục. Tập $Argmin_{x\in C} f(x)$ là tập con lồi của C.*

Chứng minh. Giả sử $x^0 \in C$ là điểm cực tiểu địa phương của f và $U(x^0)$ là lân cận của x^0 sao cho $f(x^0) \leq f(x)$ với mọi $x \in C \cap U(x^0)$. Với bất kỳ $x \in C$ ta có $x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)x^0 \in C \cap U(x^0)$ với mọi $\lambda > 0$ đủ nhỏ. Khi đó, $f(x^0) \leq f(x_\lambda) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x^0)$ hay $\lambda f(x^0) \leq \lambda f(x)$. Do $\lambda > 0$ nên $f(x^0) \leq f(x)$. Vì $x \in C$ được chọn tuỳ ý nên x^0 là điểm cực tiểu toàn cục của f trên C. Nếu $\alpha = min\{f(x) : x \in C\}$ thì $Argmin_{x\in C} f(x)$ trùng với tập $C \cap \{x : f(x) \leq \alpha\}$.Tập này lồi do hàm $f(x)$ lồi (Định lý 2.1, Chương 2).

Hệ quả 3.1. *Bất cứ điểm cực đại địa phương nào của một hàm lõm trên một tập lồi cũng là điểm cực đại toàn cục. Tập tất cả các điểm cực đại của một hàm lõm trên tập lồi là lồi.*

Nhờ các tính chất nêu trên, việc tìm cực tiểu (cực đại) toàn cục của một hàm lồi (hàm lõm), nói riêng của một hàm tuyến tính hay hàm afin, dẫn đến việc tìm cực tiểu (cực đại) địa phương của hàm đó. Bài toán rõ ràng trở nên đơn giản hơn rất nhiều, do có thể vận dụng các phương pháp tìm cực tiểu địa phương của hàm.

Định lý 3.2. *Với mọi hàm lồi chính thường f :*

a) Cực đại của f trên một đoạn thẳng bất kỳ đạt tại một đầu mút của đoạn đó.

b) Nếu $f(x)$ hữu hạn và bị chặn trên trên một nửa đường thẳng thì cực đại của f trên nửa đường thẳng này đạt tại điểm gốc của nó.

c) Nếu $f(x)$ hữu hạn và bị chặn trên trên một tập afin thì f bằng hằng số trên tập này.

Chứng minh.

a) Suy trực tiếp từ định nghĩa của hàm lồi, bởi vì:

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \leq max\{f(x^1), f(x^2)\} \forall \lambda \in [0,1].$$

b) Nếu $f(b) > f(a)$ thì với mọi $x = b + \lambda(b-a), \lambda \geq 0$ ta có $b = \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{\lambda}{1+\lambda}a$. Từ đó, $(1+\lambda)f(b) \leq f(x) + \lambda f(a)$ (mỗi khi $f(x) < +\infty$), nghĩa là $f(x) \geq \lambda[f(b) - f(a)] + f(b)$. Điều này chứng tỏ $f(x) \to +\infty$ khi $\lambda \to +\infty$. Như vậy, nếu $f(x)$ hữu hạn và bị chặn trên trong nửa đường thẳng xuất phát từ a thì ta phải có $f(b) \leq f(a)$ với mọi b trên nửa đường thẳng này.

c) Giả sử M là tập afin trên đó $f(x)$ hữu hạn. Với bất kỳ $a, b \in M$, nếu $f(b) > f(a)$ thì theo phần vừa chứng minh, $f(x)$ không bị chặn trên trên nửa đường thẳng trong M đi từ a qua b. Tương tự, nếu $f(a) > f(b)$ thì $f(x)$ không bị chặn trên trên nửa đường thẳng trong M đi từ b qua a, Vậy, nếu $f(x)$ bị chặn trên trong M thì $f(a) = f(b), \forall a, b \in M$, tức là f đồng nhất bằng hằng số trên M. □

Ta nhắc lại khái niệm hàm lồi chặt và nêu tính chất đặc trưng của lớp hàm này (Định nghĩa 2.1, Chương 2): Hàm giá trị thực f trên tập lồi C được gọi là hàm lồi chặt trên C nếu

$$f[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] < \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$$

với bất kỳ hai điểm khác nhau $x^1, x^2 \in C$ và bất kỳ $0 < \lambda < 1$. Đương nhiên, hàm lồi chặt là hàm lồi, nhưng điều ngược lại nói chung không đúng.

Mệnh đề 3.1. *Hàm lồi chặt f trên C có nhiều nhất một điểm cực tiểu trên C, nghĩa là tập $Argmin_{x\in C} f(x)$ gồm nhiều nhất một phần tử.*

Chứng minh. Nếu f có hai điểm cực tiểu khác nhau $x^1, x^2 \in C$ thì do tính lồi chặt của f nên $f(\frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2) < f(x^1) = f(x^2)$, điều này không thể xẩy ra! □

Ví dụ 3.1. Hàm lồi chặt một biến $f(x) = x^2$ có duy nhất một điểm cực tiểu $x^* = 0$. Còn hàm lồi chặt $f(x) = e^x \quad (x \in R)$ không có điểm cực tiểu nào. □

Mệnh đề sau đây cho một điều kiện cần và đủ để $x^0 \in C$ là điểm cực tiểu (toàn cục) của hàm lồi trên một tập hợp lồi.

Mệnh đề 3.2. *Giả sử $f(x)$ là hàm lồi khả vi liên tục, xác định trên tập lồi C và giả sử $x^0 \in C$. Khi đó, $f(x^0) \leq f(x) \forall x \in C$ (nghĩa là x^0 là điểm cực tiểu của hàm $f(x)$ trên C) khi và chỉ khi $< \triangledown f(x^0), x - x^0 > \geq 0$ với mọi $x \in C$.*

Chứng minh. a) **Điều kiện cần.** Giả sử $f(x^0) \leq f(x) \forall x \in C$. Nếu x^0 là điểm trong của C thì theo phép tính biến phân ta phải có $\nabla f(x^0) = 0$, do đó $< \nabla f(x^0), x - x^0 >= 0$. Còn nếu x^0 là một điểm biên của C thì do x^0 là điểm cực tiểu, $f(x)$ là hàm lồi và C là tập lồi nên ta có $f(x^0) \leq f[\lambda x + (1-\lambda)x^0], \forall x \in C$ và $0 \leq \lambda \leq 1$. Từ đó với $\lambda > 0$ thì

$$\frac{f[x^0 + \lambda(x - x^0)] - f(x^0)}{\lambda} \geq 0$$

Cho qua giới hạn khi $\lambda \to 0$, ta nhận được $< \nabla f(x^0), x - x^0 > \geq 0$.

b) **Điều kiện đủ.** Giả sử $< \nabla f(x^0), x - x^0 > \geq 0 \forall x \in C$. Do $f(x)$ lồi nên theo Mệnh đề 2.4 (Chương 2), ta có:

$$f(x) - f(x^0) \geq < \nabla f(x^0), x - x^0 > \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

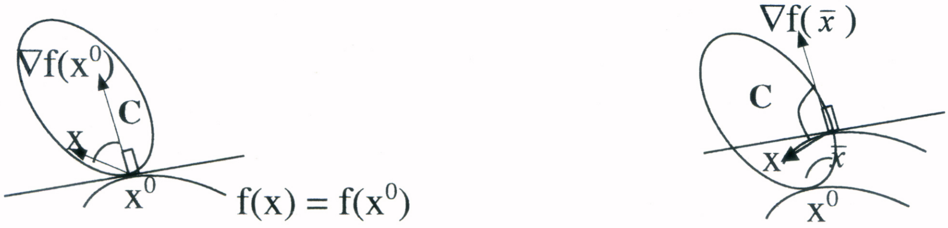
Do đó $f(x) \geq f(x^0)\ \forall x \in C$ và x^0 là điểm cực tiểu của $f(x)$ trên C. □

Về mặt hình học, Mệnh đề 3.2 nói rằng x^0 là điểm cực tiểu nếu góc giữa hai véctơ $\nabla f(x^0)$ và $x - x^0$ là góc nhọn với mọi $x \in C$ (Hình 3.1a).

Nếu $\overline{x} \in C$ không phải là điểm cực tiểu và nếu $f(\overline{x}) \geq f(x)$ với x nào đó $\in C$ thì từ Mệnh đề 2.4 suy ra:

$$0 \geq f(x) - f(\overline{x}) \geq < \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} >,$$

nghĩa là góc giữa hai véctơ $\nabla f(\overline{x})$ và $x - \overline{x}$ là góc tù (Hình 3.1b).



a) Hình 3.1. Điều kiện tối ưu cần và đủ b)

Mệnh đề 3.3. *Giả sử C là tập lồi trong R^n và $f\colon R^n \to R$ là hàm lồi. Muốn cho $x^0 \in C$ là điểm cực tiểu của f trên C điều kiện cần và đủ là*

$$0 \in \partial f(x^0) - N_C(x^0) \tag{3.1}$$

với $N_C(x^0) = \{p : <p, x - x^0> \geq 0 \forall x \in C\}$ là nón pháp tuyến trong của C tại x^0.

Chứng minh. Nếu có (3.1) thì tồn tại $p \in \partial f(x^0) \cap N_C(x^0)$. Với mọi $x \in C$ do $p \in \partial f(x^0)$ nên $<p, x - x^0> \leq f(x) - f(x^0)$, nghĩa là $f(x^0) \leq f(x) - <p, x - x^0>$. Mặt khác, do $p \in N_C(x^0)$ nên ta có $<p, x - x^0> \geq 0 \forall x \in C$, vì thế $f(x^0) \leq f(x) \quad \forall x \in C$, nghĩa là x^0 là điểm cực tiểu của f trên C.

Ngược lại, nếu $x^0 \in Argmin_{x \in C} f(x)$ thì hệ bất đẳng thức sau vô nghiệm

$$(x, y) \in C \times R^n, x - y = 0, f(y) - f(x^0) < 0.$$

Đặt $D = C \times R^n$ và $A(x, y) = x - y$. Do đó $A(D) = C - R^n$. Với hình cầu bất kỳ B tâm $0, x^0 + B \subset R^n$, vì thế $B = x^0 - (x^0 + B) \subset A(D)$, do đó $0 \in \operatorname{int} A(D)$. Theo một định lý đã biết về hệ bất đẳng thức lồi $(xem[4]$, Định lý $2.4, tr.59)$, tồn tại véctơ $p \in R^n$ sao cho

$$<p, x - y> + f(y) - f(x^0) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in C \times R^{n.}$$

Cho $y = x^0$ ta nhận được $<p, x - x^0> \geq 0 \quad \forall x \in C$, nghĩa là $p \in N_C(x^0)$. Tiếp đó, cho $x = x^0$ ta được $f(y) - f(x^0) \geq <p, y - x^0> \quad \forall y \in R^n$, nghĩa là $p \in \partial f(x^0)$. Vậy, $p \in N_C(x^0) \cap \partial f(x^0)$. Từ đó $0 \in \partial f(x^0) - N_C(x^0)$. □

Hệ quả 3.2. *Với các giả thiết như trong Mệnh đề 3.3, điểm trong $x^0 \in C$ là điểm cực tiểu khi và chỉ khi $0 \in \partial f(x^0)$.*

Chứng minh. Hệ quả suy từ nhận xét $N_C(x^0) = 0$ nếu $x^0 \in \operatorname{int} C$. □

Mệnh đề 3.4. *Giả sử $C \subset R^n$ là tập compact $\neq \emptyset$, $f\colon C \to R$ là một hàm liên tục bất kỳ và f^C là hàm bao lồi của f trên C. Khi đó, mỗi điểm cực tiểu toàn cục của f trên C cũng là một điểm cực tiểu của $f^C(x)$ trên $convC$.*

Chứng minh. Giả sử $x^0 \in C$ là điểm cực tiểu toàn cục của $f(x)$ trên C. Do f^C không lớn hơn f nên ta có $f^C(x^0) \le f(x^0)$. Nếu $f^C(x^0) < f(x^0)$ thì hàm lồi $h(x) = max\{f(x^0), f^C(x)\}$ không lớn hơn f , nhưng lại lớn hơn f^C, đó là điều không thể xảy ra. Như vậy, $f^C(x^0) = f(x^0)$ và $f^C(x) = h(x) \quad \forall x \in convC$. Từ đó, $f^C(x^0) = f(x^0) \le f^C(x) \quad \forall x \in convC$, nghĩa là x^0 cũng là điểm cực tiểu toàn cục của $f^C(x)$ trên $convC$. □

∗ Để xét thêm một tiêu chuẩn tối ưu nữa, ta cần đến định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.2. Cho tập lồi $C \in R^n$ và điểm $y \in R^n$. Ta gọi hình chiếu của y trên C là điểm $x^0 \in C$ sao cho

$$||x^0 - y|| = inf_{x\in C}||x - y|| = \delta_C(y).$$

Ký hiệu $x^0 = p(y)$ và gọi $\delta_C(y)$ là khoảng cách từ y tới C. Dĩ nhiên $y = p(y)$ và $\delta_C(y) = 0$ nếu $y \in C$. (Có thể chứng minh $\exists p(y)$ nếu C là tập lồi đóng).

Bổ đề 3.1. Muốn cho điểm $x^0 \in C$ là hình chiếu của điểm y trên tập lồi đóng C, điều kiện cần và đủ là

$$<x - x^0, y - x^0> \le 0 \quad \forall x \in C \tag{3.2}$$

Chứng minh. Giả sử x^0 là hình chiếu của y trên C. Lấy một điểm tuỳ ý $x \in C$ và xét điểm $z = \lambda x + (1-\lambda)x^0$. Do C lồi nên $\forall \lambda \in [0, 1]$ thì $z \in C$. Vì

$$||z - y||^2 = \lambda^2||x - x^0||^2 + 2\lambda <x - x^0, x^0 - y> + ||x^0 - y||^2.$$

Do $||z - y||^2 \ge ||x^0 - y||^2$ (theo định nghĩa của hình chiếu) nên

$$\lambda^2||x - x^0||^2 + 2\lambda <x - x^0, x^0 - y> \ge 0.$$

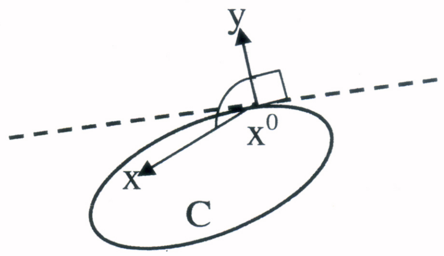
Do bất đẳng thức này đúng với mọi $\lambda \in [0, 1]$ nên $<x - x^0, x^0 - y> \ge 0$. Từ đó suy ra (3.2).

Ngược lại, giả sử có (3.2). Khi đó với mọi $x \in C$ sẽ có

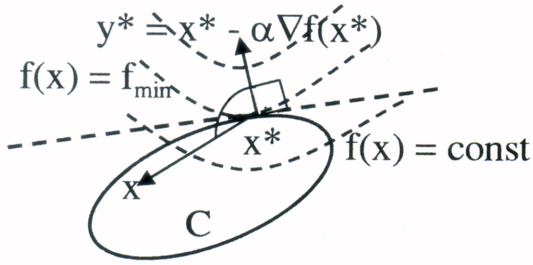
$||x - y||^2 = ||(x - x^0) + (x^0 - y)||^2$

$$= ||x - x^0||^2 + 2 <x - x^0, x^0] - y> + ||x^0 - y||^2 \geq ||x^0 - y||^2$$

Điều này chứng tỏ x^0 là hình chiếu của y trên C. □



Hình 3.2. Bổ đề 3.1



Hình 3.3. Mệnh đề 3.5

Mệnh đề 3.5. *Muốn cho điểm x^* của tập lồi đóng C là điểm cực tiểu của hàm lồi khả vi $f(x)$ trên C, điều kiện cần và đủ là $x^* = p(y^*)$, trong đó $y^* = x^* - \alpha \bigtriangledown f(x^*)$ và $\alpha > 0$ là một số bất kỳ.*

Chứng minh.

Đủ. Giả sử $x^* = p(y^*)$. Do $p(y^*)$ là hình chiếu của điểm y^* trên C nên từ (3.2) ta có bất đẳng thức

$$<x - x^*, y^* - x^*> \leq 0 \quad \forall x \in C.$$

Vì $y^* = x^* - \alpha \bigtriangledown f(x^*)$ và $\alpha > 0$ nên

$$<\bigtriangledown f(x^*), x - x^*> \geq 0 \quad \forall x \in C,$$

nghĩa là theo Mệnh đề 3.2, x^* là điểm cực tiểu của hàm $f(x)$ trên C.

Cần. Giả sử x^* là điểm cực tiểu của f trên C. Khi đó với mọi $x \in C$ ta có

$$<\bigtriangledown f(x^*), x - x^*> \geq 0 \ hay - \alpha <\bigtriangledown f(x^*), x - x^*> \leq 0 \ (\alpha > 0).$$

Nhưng $-\alpha \bigtriangledown f(x^*) = y^* - x^*$, do đó $<y^* - x^*, x - x^*> \leq 0$. Theo Bổ đề 3.1, x^* là hình chiếu của điểm y^* trên C, nghĩa là $x^* = p(y^*)$. □

3.3 Cực tiểu của hàm lồi mạnh

Sau đây ta xét một lớp hàm luôn có cực tiểu trên mọi tập đóng $\neq \emptyset$. Hơn nữa, giống như đối với hàm lồi chặt, cực tiểu này là duy nhất nếu tập đó là lồi.

Định nghĩa 3.3. Hàm $f(x)$ xác định trên tập lồi $C \subset R^n$ được gọi là lồi mạnh, nếu tồn tại hằng số $\rho > 0$ đủ nhỏ (hằng số lồi mạnh) sao cho với mọi $x, y \in C$ và mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có bất đẳng thức:

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)\rho||x-y||^2 \qquad (3.3)$$

Có thể chứng minh rằng hàm $f(x)$ lồi mạnh khi và chỉ khi hàm $f(x) - \rho.||x||^2$ là lồi. Rõ ràng một hàm lồi mạnh thì lồi chặt, nhưng điều ngược lại không chắc đúng (Chẳng hạn, hàm $e^x, x \in R$, lồi chặt nhưng không lồi mạnh).

Các hàm lồi mạnh có vai trò đặc biệt quan trọng trong nghiên cứu các bài toán cực trị (Chẳng hạn, $f(x) \equiv f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2, x \in R^2$, là hàm lồi mạnh).

Ví dụ 3.2. Xét hàm toàn phương

$$f(x) = \frac{1}{2} <x, Qx> + <p, x>,$$

trong đó Q là ma trận đối xứng, xác định dương. Tính lồi mạnh của f được suy ra từ các hệ thức (sau khi thực hiện một số tính toán đơn giản):

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda) <x-y, Q(x-y)>$$

$$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)\rho||x-y||^2,$$

để ý rằng với $0 \leq \lambda \leq 1$ thì $\lambda^2 \leq \lambda, (1-\lambda)^2 \leq (1-\lambda)$ và vì rằng

$$<x-y, Q(x-y)> \geq \rho||x-y||^2$$

trong đó ρ là giá trị riêng nhỏ nhất (dương) của ma trận Q. □

Mệnh đề 3.6. *Nếu $f(x)$ là hàm lồi mạnh và khả vi trên tập lồi đóng C thì*

a) $<\nabla f(x) - \nabla f(y), x-y> \geq \rho||x-y||^2$ với mọi $x, y \in C$.

b) Với bất kỳ $x^0 \in C$ tập mức dưới $C_0 = \{x \in C : f(x) \le f(x^0)\}$ bị chặn.

c) Tồn tại duy nhất điểm $x^* \in C$ sao cho $f(x^*) = min\{f(x) : x \in C\}$.

Chứng minh.

a) Do f lồi nên theo Mệnh đề 2.4, $\forall x, y \in C$ thì $f(x) - f(y) \le$ $<\triangledown f(x), x - y>$. Hơn nữa, do f lồi mạnh nên với $\lambda = \dfrac{1}{2}$ ta có:

$$\frac{1}{4}\rho||x-y||^2 \le \frac{1}{2}[f(x) - f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)] + \frac{1}{2}[f(y) - f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)] \le$$
$$\frac{1}{4} <\triangledown f(x), x-y> + \frac{1}{4} <\triangledown f(y), y-x> = \frac{1}{4} <\triangledown f(x) - \triangledown f(y), x-y>$$

b) Do

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 <\triangledown f[y + \lambda(x-y)], x-y> d\lambda =$$
$$= <\triangledown f(y), x-y> + \int_0^1 <\triangledown f[y+\lambda(x-y)] - \triangledown f(y), x-y> d\lambda$$

nên kết hợp với bất đẳng thức ở phần $a)$ ta được

$$f(x) - f(y) \ge <\triangledown f(y), x-y> + \frac{1}{2}\rho||x-y||^2 \Rightarrow \ (cho\ y = x^0)$$

$$0 \ge f(x) - f(x^0) \ge <\triangledown f(x^0), x - x^0> + \frac{1}{2}\rho||x-x^0||^2 \Rightarrow$$

$$||x-x^0||^2 \le \frac{2}{\rho} <\triangledown f(x^0), x^0 - x> \le \frac{2}{\rho}||\triangledown f(x^0)|| \times ||x - x^0||,$$

Từ đó suy ra $||x - x^0|| \le \dfrac{2}{\rho}||\triangledown f(x^0)||$ với mọi $x \in C_0$, nghĩa là C_0 bị chặn.

c) Do hàm $f(x)$ liên tục trên tập lồi đóng bị chặn $C_0 \subset C$, nên tồn tại $x^* \in C_0$ sao cho

$$f(x^*) = min\{f(x) : x \in C_0\} = min\{f(x) : x \in C\}.$$

Vì hàm lồi mạnh cũng là hàm lồi chặt, nên theo Mệnh đề 3.1 điểm cực tiểu x^* là duy nhất.

$\square$

Mệnh đề 3.7. *Giả sử $f(x)$ lồi mạnh trên tập lồi đóng C và x^0 là điểm cực tiểu của f trên C. Khi đó, với mọi $x \in C$ ta có*

$$||x - x^0||^2 \leq \frac{2}{\rho}[f(x) - f(x^0)] \tag{3.4}$$

Hơn nữa, nếu f khả vi thì

$$||x - x^0|| \leq \frac{1}{\rho}|| \bigtriangledown f(x)|| \tag{3.5}$$

và

$$0 \leq f(x) - f(x^0) \leq \frac{1}{\rho}|| \bigtriangledown f(x)||^2.$$

Chứng minh. Từ định nghĩa của hàm lồi mạnh (hệ thức (3.3)) suy ra (với $\lambda = \frac{1}{2}$):

$$f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^0) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x^0) - \frac{1}{4}\rho||x - x^0||^2.$$

Từ đó và $f(x^0) \leq f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^0)$ suy ra (3.4). Tại điểm cực tiểu x^0 của f trên C, theo Mệnh đề 3.2, $<\bigtriangledown f(x^0), x - x^0> \geq 0 \quad \forall x \in C$.
Mặt khác, theo Mệnh đề 3.6 a) ta có:

$$\rho||x - x^0||^2 \leq <\bigtriangledown f(x) - \bigtriangledown f(x^0), x - x^0> \leq$$
$$\leq <\bigtriangledown f(x), x - x^0> \leq || \bigtriangledown f(x)||.||x - x^0||$$

nghĩa là có bất đẳng thức (3.5). Cuối cùng, từ Mệnh đề 2.4 và hệ thức (3.5) suy ra

$$0 \leq f(x) - f(x^0) \leq <\bigtriangledown f(x), x - x^0> \leq ||\bigtriangledown f(x)|| \times ||x - x^0|| \leq \frac{1}{\rho}||\bigtriangledown f(x)||^2$$

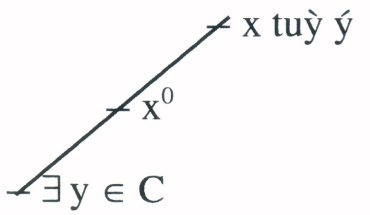
3.4 Cực đại hàm lồi (cực tiểu hàm lõm)

Khác với cực tiểu, điểm cực đại địa phương của hàm lồi không nhất thiết là điểm cực đại toàn cục. Nói chung, thông tin địa phương không đủ để xác định điểm cực đại toàn cục của một hàm lồi.

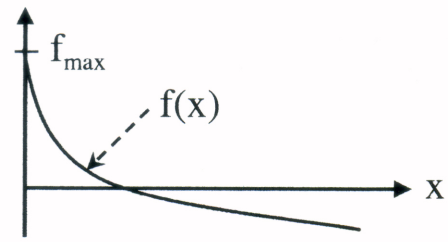
Mệnh đề 3.8. *Giả sử $C \subset R^n$ là tập lồi và $f : C \rightarrow R$ là hàm lồi. Nếu $f(x)$ đạt cực đại trên C tại điểm trong tương đối x^0 của C ($x^0 \in riC$) thì $f(x)$ bằng hằng số trên C. Tập $Argmax_{x \in C} f(x)$ là hợp của một số diện của C.*

Chứng minh. Giả sử f đạt cực đại trên C tại điểm $x^0 \in riC$ và giả sử x là điểm tuỳ ý thuộc C. Do $x^0 \in riC$ nên tìm được $y \in C$ sao cho $x^0 = \lambda x + (1-\lambda)y$ với λ nào đó $\in (0,1)$. Khi đó, $f(x^0) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Vì thế $\lambda f(x) \geq f(x^0) - (1-\lambda)f(y) \geq f(x^0) - (1-\lambda)f(x^0) = \lambda f(x^0)$. Như vậy, $f(x) \geq f(x^0)$. Từ đó $f(x) = f(x^0)$ và phần đầu của Mệnh đề được chứng minh.

Để chứng minh phần thứ hai của Mệnh đề, ta để ý rằng với mỗi điểm cực đại $x^0 \in C$ đều $\exists$ diện F của C sao cho $x^0 \in riF$. Vì thế theo lập luận trên đây, mọi điểm thuộc diện này đều là điểm cực đại toàn cục của f trên C.□



Hình 3.4. Mệnh đề 3.8



Hình 3.5. Mệnh đề 3.9

Mệnh đề 3.9. *Giả sử C là tập lồi, đóng và $f : C \rightarrow R$ là hàm lồi. Nếu C không chứa đường thẳng nào và $f(x)$ bị chặn trên trên mọi nửa đường thẳng trong C thì*

$$\sup\{f(x) : x \in C\} = \sup\{f(x) : x \in V(C)\},$$

trong đó $V(C)$ là tập các điểm cực biên của C, nghĩa là nếu cực đại của $f(x)$ đạt được trên C thì cực đại cũng đạt được trên $V(C)$.

Chứng minh. Theo định lý trong giải tích lồi, $C = convV(C) + K$, trong đó K là nón lồi sinh bởi các phương cực biên của C. Một điểm bất kỳ thuộc C mà nó không phải là điểm cực biên, sẽ thuộc nửa đường thẳng xuất phát từ một điểm v nào đó $\in V(C)$ theo phương của một tia trong K. Do $f(x)$ hữu hạn và bị chặn trên trên nửa đường thẳng này, nên cực đại của nó trên đường thẳng này đạt được tại v (Định lý 3.2). Như vậy, *supremum* của $f(x)$ trên C qui về *supremum* của f trên $convV(C)$. Khi đó, bởi vì bất kỳ $x \in convV(C)$ đều có dạng $x = \sum_{i \in I} \lambda_i v^i$ với $v^i \in V(C)$ và $\lambda_i \geq 0, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, cho nên $f(x) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i f(v^i) \leq max_{i \in I} f(v^i)$. □

Hệ quả 3.3. *Hàm lồi thực $f(x)$ trên tập lồi đa diện D, không chứa đường thẳng nào, hoặc không bị chặn trên trên một cạnh vô hạn nào đó của D, hoặc đạt cực đại tại một đỉnh của D.* □

Hệ quả 3.4. *Hàm lồi thực $f(x)$ trên tập lồi compact$C$ đạt cực đại tại một điểm cực biên của C.* □

Nhận xét 3.1. Thực ra, tính chất nêu trong Hệ quả 3.4 cũng đúng cho lớp hàm rộng hơn. Cụ thể là các hàm tựa lồi, nghĩa là các hàm $f\colon R^n \to [-\infty, +\infty]$ sao cho các tập mức dưới $I_\alpha = \{x \in R^n : f(x) \leq \alpha\}$ là lồi với mọi $\alpha \in R$ (Định nghĩa 2.3, Chương 2). Thật vậy, do tập lồi *compact*C bằng bao lồi các điểm cực biên của nó, nên bất kỳ $x \in C$ có biểu diễn $x = \sum_{i \in I} \lambda_i v^i$, trong đó v^i là các điểm cực biên, $\lambda_i \geq 0, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ và I là tập hữu hạn các chỉ số. Nếu $f(x)$ là hàm tựa lồi hữu hạn trên C và $\alpha = max_{i \in I} f(v^i)$ thì $v^i \in C \cap I_\alpha,\ \forall i \in I$. Do $C \cap I_\alpha$ lồi, nên $x \in C \cap I_\alpha$. Như vậy, $f(x) \leq \alpha = max_{i \in I} f(v^i)$, nghĩa là cực đại của f trên C đạt được tại một điểm cực biên của C. □

Cũng có thể chứng minh được rằng cận trên của một họ hàm tựa lồi là hàm tựa lồi, nhưng tổng của hai hàm tựa lồi không chắc là hàm tựa lồi.

Tóm lại, chương này đã trình bày những tính chất cực trị cơ bản liên quan tới hàm lồi, hàm lồi chặt và hàm lồi mạnh. Đáng chú ý là cực tiểu địa phương của một hàm lồi luôn là cực tiểu toàn cục, điểm cực tiểu của hàm lồi chặt nếu có là duy nhất và hàm lồi mạnh luôn đạt cực tiểu trên tập đóng khác rỗng, cực tiểu đó là duy nhất nếu tập là lồi đóng khác rỗng. Cực đại của hàm lồi nếu có sẽ đạt tại điểm cực biên (nói riêng, tại đỉnh) của tập được xét.

KẾT LUẬN

Các hàm tuyến tính và afin là những hàm đơn giản và được dùng phổ biến nhất. Hàm lồi thuộc lớp hàm phi tuyến hay được dùng trong lý thuyết và ứng dụng thực tế, vì hàm lồi cùng với các biến dạng của nó (lồi chặt, lồi mạnh, tựa lồi ...) có nhiều tính chất đẹp rất đáng được chú ý.

Luận văn này chủ yếu tập trung vào tìm hiểu các hàm lồi một biến và nhiều biến, cùng các tính chất cơ bản của chúng, đặc biệt là tính liên tục, tính khả vi và các tính chất cực trị.

Chương 1 đề cập tới các hàm lồi một biến, nhận giá trị hữu hạn hay vô cực. Hàm lồi một biến xác định trên khoảng $I \subseteq R$ là $Lipschits$ trên $[a, b] \subset \text{int}(I)$, liên tục trên $\text{int}(I)$ và khả vi hầu khắp nơi trên I. Nếu hàm f hai lần khả vi trên khoảng mở I thì hàm f lồi khi và chỉ khi $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$.

Chương 2 giới thiệu về hàm lồi nhiều biến và các tính chất cơ bản như: f là hàm lồi khi và chỉ khi tập trên đồ thị của nó là lồi, hàm f lồi thì các tập mức dưới của nó là tập lồi, cách nhận biêt hàm khả vi là hàm lồi, các phép toán bảo toàn tính lồi của hàm, giới thiệu khái niệm dưới vi phân của hàm lồi và mối quan hệ giữa dưới vi phân với đạo hàm theo hướng và với hàm liên hợp.

Chương 3 trình bày các tính chất cực trị của hàm lồi, hàm lồi chặt và hàm lồi mạnh, các điều kiện tối ưu cần và đủ đối với các hàm lồi khả vi và một số kết quả chính về cực tiểu (cực đại) của hàm lồi. Đáng chú ý là cực tiểu địa phương của một hàm lồi luôn là cực tiểu toàn cục, điểm cực tiểu của hàm lồi chặt nếu có là duy nhất và hàm lồi mạnh luôn đạt cực tiểu trên tập đóng khác rỗng, cực tiểu đó là duy nhất nếu tập là lồi đóng khác rỗng. Cực đại của hàm lồi nếu có sẽ đạt tại điểm cực biên (nói riêng, tại đỉnh) của tập lồi được xét.

Tác giả đã cố gắng sắp xếp và trình bày vấn đề theo cách hiểu rõ ràng và trực quan nhất có thể, đưa ra nhiều ví dụ và hình vẽ cụ thể để minh hoạ cho các khái niệm và sự kiện được đề cập tới trong luận văn.

Hy vọng tác giả luận văn sẽ có dịp làm quen với những lớp hàm lồi khác và nhiều ứng dụng phong phú của chúng trong lý thuyết và thực tiễn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] T. V. Thiệu (2003), *Cơ sở giải tích lồi*, Bài giảng lớp cao học, Viện Toán học Hà Nội.

[2] T. V. Thiệu (2004), *Giáo trình tối ưu tuyến tính*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.

Tiếng Anh

[3] J. Tiel (1984), *Convex Analysis - An Introductory Text*, John Wiley and Sons, Toronto - Singapore.

[4] H. Tuy (1998), *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Boston/ London/ Dordrecht.

Tiếng Nga

[5] В. Г. Карманов (1975), *Математическое Программирование*, Издательство Наука, Москва.