VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC
-----oOo-----

Trần Nguyên An

VỀ ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG VỚI GIÁ CỰC ĐẠI VÀ TÍNH CATENARY CỦA VÀNH NOETHER ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀNỘI-2011

VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC
-----oOo-----

Trần Nguyên An

VỀ ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG VỚI GIÁ CỰC ĐẠI VÀ TÍNH CATENARY CỦA VÀNH NOETHER ĐỊA PHƯƠNG

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 62. 46. 05. 01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
1. GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường
2. PGS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn

HÀNỘI-2011

Tóm tắt

Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether, M là R-môđun hữu hạn sinh, A là một R-môđun Artin. Môđun A được gọi là *thỏa mãn tính chất* $(*)$ nếu

$$\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \text{ với mọi iđêan nguyên tố } \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R A.$$

Luận án nghiên cứu tính chất $(*)$ cho các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ trong mối liên hệ với tính catenary, tính catenary phổ dụng và tính không trộn lẫn của vành cơ sở. Đồng thời luận án cũng đề cập đến một số vấn đề về chiều của môđun Artin, công thức bội liên kết, tính chất dịch chuyển địa phương, tập iđêan nguyên tố gắn kết cho các môđun đối đồng điều địa phương. Luận án bao gồm 4 chương.

Trong Chương 1, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ sở về môđun đối đồng điều địa phương, tính catenary của vành, chiều, tập iđêan nguyên tố gắn kết và tính chất $(*)$ của môđun Artin. Một đặc trưng mới về tính chất $(*)$ của môđun Artin thông qua hệ tham số được trình bày trong tiết cuối của chương.

Trong Chương 2, chúng tôi đặc trưng tính chất $(*)$ cho $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ qua tập giả giá thứ i của M; nghiên cứu tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ trong mối liên hệ với tính catenary phổ dụng của vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ và tính không trộn lẫn của các vành $R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$.

Trong Chương 3, chúng tôi nghiên cứu tính chất $(*)$ của môđun Artin tựa không trộn lẫn, đặc biệt là tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương tựa không trộn lẫn trong mối liên hệ với tính catenary của vành cơ sở và chiều của môđun Artin.

Trong Chương 4, chúng tôi đưa ra một số ứng dụng của tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương: đưa ra công thức bội liên kết của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ với điều kiện $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$; nghiên cứu tính chất dịch chuyển địa phương; nghiên cứu tập iđêan nguyên tố gắn kết của môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ liên hệ với tập giá và các tập giả giá của M.

Abstract

Let $(R, \mathfrak{m})$ be a commutative Noetherian local ring and let M be a finitely generated R-module. An Artinian R-module A is said to *satisfy the property* $(*)$ if

$$\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \text{ for every prime ideal } \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R A.$$

In this thesis, we study the property $(*)$ of the local cohomology modules $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ concerning catenarity, universal catenarity, and unmixedness of the base ring. We also deal with the dimension, the associativity formulae, the shifted localization principle, and the set of attached primes of local cohomology modules. The thesis is divided into four chapters.

In Chapter 1 we recall some basic knowledge on local cohomology modules, catenarity of rings, attached primes, and the property $(*)$ of Artinian modules. A new characterization of the property $(*)$ of Artinian modules in terms of systems of parameters is proved in the last section of this chapter.

In Chapter 2 we characterize the property $(*)$ of $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ via ith pseudo-support of M. We study the property $(*)$ for $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ in connection with universal catenarity of the ring $R/\operatorname{Ann}_R M$ and unmixedness of the rings $R/\mathfrak{p}$ for $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$.

In Chapter 3 we study the property $(*)$ for quasi unmixed Artinian modules. In particular, we study the property $(*)$ for quasi-unmixed local cohomology modules concerning catenarity of the base ring, and the dimension of these modules.

In Chapter 4 we give some applications of the property $(*)$ of local cohomology modules: give the associativity formulae for multiplicity of $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ in case $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ satisfies the property $(*)$; study the shifted localization principle and the set of attached primes of $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ concerning support and pseudo-supports of M.

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được ai công bố trong bất kì công trình nào khác.

Tác giả

Trần Nguyên An

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới thầy tôi GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường. Thầy đã chỉ dạy cho tôi từ những bài học đầu tiên của Đại số giao hoán đến những chủ đề trong nghiên cứu. Thầy đã tận tình hướng dẫn tôi từ khi tôi làm luận văn thạc sĩ và giờ đây là luận án tiến sĩ. Phương pháp đọc sách, cách phát hiện và giải quyết vấn đề, những ý tưởng trong toán học mà thầy hướng dẫn đã giúp tôi hoàn thành luận án này và trưởng thành hơn trong nghiên cứu. Thầy luôn tạo điều kiện cho tôi có dịp giao lưu quốc tế để tôi thêm tự tin. Như một người cha, thầy luôn uốn nắn tôi để tôi hoàn thiện hơn, giúp đỡ tôi cả về vật chất và tinh thần.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới cô tôi PGS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Cô là người thầy đầu tiên đã đưa tôi đến với toán hiện đại, đến với Đại số giao hoán. Cô luôn tận tình, tỉ mỉ hướng dẫn tôi từ khi tôi làm đề tài nghiên cứu khoa học sinh viên, luận văn đại học và đặc biệt là luận án tiến sĩ. Không chỉ truyền cho tôi sự say mê trong giảng dạy và nghiên cứu, cô luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong công việc, trong cuộc sống. Sự tận tâm với nghề, với học trò của cô sẽ là cái đích cho tôi học hỏi, noi theo.

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của hai người thầy GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường và PGS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Một lần nữa tôi xin tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến hai người thầy của tôi và sẽ phấn đấu hơn nữa để xứng đáng với công lao của thầy, cô, xứng đáng với niềm tin của thầy, cô đã dành cho tôi.

Tôi xin chân trọng cảm ơn GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa và TS. Fred Rohrer đã đọc và góp những ý kiến quý báu cho luận án.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Viện Toán học, các phòng chức năng, Trung tâm Đào tạo sau đại học của Viện Toán học đã cho tôi một môi trường học tập, nghiên cứu lý tưởng để tôi có thể hoàn thành luận án này.

Tôi xin cảm ơn Ban giám hiệu trường Đại học Sư phạm Đại học Thái Nguyên đã cho tôi cơ hội được đi học tập và nghiên cứu. Tôi xin cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán và tổ Đại số đã tạo điều kiện thu xếp công việc thuận lợi cho tôi trong suốt thời gian tôi làm nghiên cứu sinh.

Tôi xin cảm ơn những đồng nghiệp, các anh, chị, em đã và đang học tập và nghiên cứu tại phòng Đại số và phòng Lý thuyết số của Viện Toán học về những trao đổi, hỗ trợ và chia sẻ trong khoa học cũng như trong cuộc sống.

Cuối cùng tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới những người thân trong gia đình của mình - những người đã động viên, chia sẻ mọi khó khăn cùng tôi suốt những năm tháng qua để tôi có thể hoàn thành luận án này.

Mục lục

Mở đầu

Lý thuyết môđun đối đồng điều địa phương được A. Grothendieck đưa ra lần đầu tiên trong [18] và nhanh chóng trở thành công cụ hữu hiệu của Đại số giao hoán, Hình học đại số. Do đó lý thuyết này đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học (xem các công trình [5], [6], [18], [20], [29], [30], [32], [36], [48], [55], [56]). Môđun đối đồng điều địa phương cho ta nhiều thông tin về môđun ban đầu cũng như về vành cơ sở. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether và M là R-môđun hữu hạn sinh, có chiều Krull $\dim M = d$. Cho I là một iđêan của R. Khi đó, Định lý triệt tiêu và không triệt tiêu của A. Grothendieck (xem [6, Định lý 6.1.2, Định lý 6.1.4]) nói rằng chiều của M là số i lớn nhất mà môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ không triệt tiêu, còn độ sâu của M trong iđêan I là số i bé nhất sao cho $H^i_I(M)$ không triệt tiêu. Tính hữu hạn sinh và tính Artin của các môđun đối đồng điều địa phương cũng liên hệ chặt chẽ với các bất biến của M và R. Cụ thể G. Faltings đã đưa ra công thức tính chỉ số đầu tiên mà môđun đối đồng điều địa phương $H^i_I(M)$ không hữu hạn sinh thông qua độ sâu của môđun $M_{\mathfrak{p}}$ và độ cao của iđêan $I + \mathfrak{p}/\mathfrak{p}$, với $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố trong $\mathrm{Supp}(M)$ ([55], [56]); năm 2001, R. Lü và Z. Tang đã chỉ ra rằng độ sâu lọc của M trong iđêan I (tức là cận trên của các độ dài của các dãy lọc chính quy của M trong I) là chỉ số i bé nhất mà môđun đối đồng điều địa phương $H^i_I(M)$ không Artin ([28]).

Đặc biệt, gần đây các tác giả N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn [13] đã chỉ ra mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá là iđêan cực đại và tính catenary của vành cơ sở. Tính chất $(*)$ được giới thiệu lần đầu tiên bởi N. T. Cường và L. T. Nhàn trong [12] nhằm nghiên cứu chiều của môđun Artin. Tính chất này ngày càng được quan tâm trong việc nghiên cứu môđun Artin, môđun hữu hạn sinh và cấu trúc của vành cơ sở (xem [12], [59], [60], [26], [27]). Trước hết, nhắc lại rằng một môđun Artin A được gọi là *thỏa mãn tính chất $(*)$* nếu

$$\operatorname{Ann}_R(0:_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \text{ với mỗi iđêan nguyên tố } \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R A.$$

Khi đó mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều và tính catenary của vành trong [13] được phát biểu như sau: môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ khi và chỉ khi vành $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary.

Mục đích chính của luận án là nghiên cứu tính chất $(*)$ cho các môđun đối đồng điều địa phương cấp i bất kỳ, ứng với giá là iđêan cực đại trong mối liên hệ với tính catenary, tính catenary phổ dụng và tính không trộn lẫn của vành cơ sở. Đồng thời luận án đưa ra ứng dụng của tính chất $(*)$ trong việc nghiên cứu về chiều của môđun Artin, công thức bội liên kết, tính chất dịch chuyển địa phương, tập iđêan nguyên tố gắn kết cho các môđun đối đồng điều địa phương.

Luận án được chia làm 4 chương. Chương 1 nhắc lại một số kiến thức cơ sở như môđun đối đồng điều địa phương, tính catenary của vành, chiều, tập iđêan nguyên tố gắn kết và tính chất $(*)$ của môđun Artin. Một đặc trưng mới về tính chất $(*)$ của môđun Artin thông qua hệ tham số được trình bày trong phần cuối của chương. Chương 2, 3, 4 trình bày các kết quả thu được của luận án, viết dựa trên các bài báo [39], [40] và [1].

Trong suốt luận án, chúng tôi luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether, M là một R-môđun hữu hạn sinh chiều Krull, $\dim M = d$

và A là một R-môđun Artin.

Trong Chương 2, chúng tôi trình bày những nghiên cứu về tính chất $(*)$ của các môđun đối đồng điều địa phương cấp tùy ý, mối quan hệ giữa tính chất $(*)$ của các môđun đối đồng điều địa phương với tập giả giá, tính catenary phổ dụng của vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ và tính không trộn lẫn của các vành $R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$. Nhắc lại, theo M. Brodmann và R.Y. Sharp [7], tập

$$\operatorname{Psupp}^i_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \ : \ H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0\}$$

được gọi là *tập giả giá* thứ i của M và

$$\operatorname{psd}^i_R(M) = \sup\{\dim R/\mathfrak{p} \ : \ \mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M)\}$$

được gọi là *giả chiều* thứ i của M. Khi đó, kết quả chính đầu tiên của chương chỉ ra một đặc trưng để môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ thông qua tập giả giá thứ i của M. Chú ý, ký hiệu N-dim để chỉ chiều Noether của môđun giới thiệu bởi R. N. Roberts [46].

Định lý 2.1.2. *Giả sử $i \geq 0$ là một số nguyên. Khi đó các điều kiện sau là tương tương:*

(i) *$H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$;*

(ii) $\operatorname{V}\big(\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big) = \operatorname{Psupp}^i_R M$.

Hơn nữa, nếu (i) và (ii) thỏa mãn thì

$$\operatorname{psd}^i_R M = \operatorname{psd}^i_{\widehat{R}} \widehat{M} = \text{N-dim}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \dim R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M),$$

$$\begin{aligned}&\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R M : \dim(R/\mathfrak{p}) = \operatorname{psd}^i_R M\} \\ &\qquad = \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R : \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}^i_{\widehat{R}} \widehat{M}, \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \operatorname{psd}^i_{\widehat{R}} \widehat{M}\}.\end{aligned}$$

Một ứng dụng của Định lý 2.1.2 chỉ ra rằng nếu vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng và các thớ hình thức là Cohen-Macaulay thì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi $i \leqslant d$ (Hệ quả 2.1.3). Từ đó, ta đặt ra câu hỏi: môđun M và vành cơ sở R có những tính chất gì khi các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi i? Định lý sau trả lời một phần cho câu hỏi đó.

Định lý 2.2.1. *Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi $i < d$. Khi đó $R/\mathfrak{p}$ là không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ và vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng.*

Năm 1980, M. Nagata (xem [38]) đã đưa ra câu hỏi: Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên địa phương Noether không trộn lẫn. Gọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Liệu rằng $R/\mathfrak{p}$ không trộn lẫn? Năm 1983, Brodmann và Rotthaus [4] đã xây dựng một phản ví dụ cho câu hỏi của M. Nagata. Kết quả sau đưa ra một tiêu chuẩn của tính không trộn lẫn cho vành $R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ và $\dim R/\mathfrak{p} \geq d-1$.

Định lý 2.2.4. *Giả sử M không trộn lẫn và $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi $i < d$. Khi đó $R/\mathfrak{p}$ không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ thỏa mãn $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq d-1$.*

Nhắc lại trong [13], N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn đã đưa ra mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ của một loại môđun Artin đặc biệt - môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$-và tính catenary của vành địa phương $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$. Phát triển kết quả trên chúng tôi nghiên cứu lớp môđun Artin rộng hơn, các môđun Artin *tựa không trộn lẫn*. Môđun Artin A được gọi là *tựa không trộn lẫn* nếu $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A)$ với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$. Kết quả đầu tiên của Chương 3 chỉ ra mối liên hệ giữa tính catenary của vành, tính chất $(*)$ và chiều của môđun Artin tựa không trộn lẫn.

Định lý 3.1.5. *Giả sử A là tựa không trộn lẫn. Nếu A thỏa mãn tính chất $(*)$ thì vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là catenary và $\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A)$.*

Chúng tôi đã xây dựng những ví dụ trong chương này chứng tỏ giả thiết tựa không trộn lẫn trong Định lý 3.1.5 không thể bỏ đi được (Ví dụ 3.1.6 và Ví dụ 3.1.7).

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là chiều ngược lại của Định lý 3.1.5 có còn đúng không? Gần đây chúng tôi đã xây dựng ví dụ chứng tỏ rằng điều đó không đúng (Ví dụ 3.2.2). Tuy nhiên chúng tôi đã chỉ ra điều ngược lại là đúng cho các môđun đối đồng điều địa phương tựa không trộn lẫn.

Định lý 3.2.4. *Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là tựa không trộn lẫn. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *$H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (∗);*

(ii) *Vành $R/\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ là catenary và*

$$\dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big) = \dim\big(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big).$$

Chú ý rằng, môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là môđun Artin không trộn lẫn. Thêm nữa theo [12], ta luôn có

$$\dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{m}}(M))\big) = \dim\big(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^d_{\mathfrak{m}}(M))\big).$$

Do đó kết quả chính trong [13] là trường hợp đặc biệt của Định lý 3.2.4.

Trong Chương 4, chúng tôi đưa ra một số ứng dụng của tính chất (∗) của môđun đối đồng điều địa phương. Ứng dụng đầu tiên của tính chất (∗) của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$, chúng tôi đưa ra công thức bội liên kết cho môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$, mở rộng kết quả của M. Brodmann và R. Y. Sharp trong [7]. Nhắc lại, đối với môđun hữu hạn sinh M, một trong những tính chất quan trọng của số bội là công thức sau đây, được gọi là *công thức liên kết* của số bội

$$e(\mathfrak{q}, M) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Supp} M\\ \dim R/\mathfrak{p}=d}} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}).$$

D. Kirby 1973 [24] đã chứng tỏ rằng nếu $\mathfrak{q}$ là iđêan của R và A là một R-môđun Artin sao cho $\ell(0 :_A \mathfrak{q}) < \infty$ thì $\ell_R(0 :_A \mathfrak{q}^{n+1})$ là một đa thức bậc

$s = \text{N-dim}\, A$ với hệ số hữu tỷ khi n đủ lớn và ta có biểu diễn

$$\ell(0 :_A \mathfrak{q}^{n+1}) = \frac{e(\mathfrak{q}, A)}{d!} n^s + \text{đa thức có bậc nhỏ hơn } s, \forall n \gg 0,$$

trong đó $e(\mathfrak{q}, A)$ là một số nguyên dương. Ta gọi $e(\mathfrak{q}, A)$ là *số bội của A ứng với* $\mathfrak{q}$ (xem [11]). Khi R là vành đầy đủ, đối ngẫu Matlis của A là một môđun hữu hạn sinh nên ta dễ dàng chỉ ra một công thức bội liên kết cho A. Tuy nhiên khi vành R không đầy đủ thì một công thức tương tự như vậy chưa được tìm ra. Năm 2002, M. Brodmann và R.Y. Sharp [7] đã hạn chế xét trên một lớp môđun Artin đặc biệt - các môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại. Họ đã chứng tỏ rằng khi vành R là catenary phổ dụng và có các thớ hình thức là Cohen-Macaulay thì ta có công thức sau

$$e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M) \\ \dim(R/\mathfrak{p}) = \operatorname{psd}^i(M)}} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big) e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}),$$

với iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ $\mathfrak{q}$ của R và với mọi i. Họ cũng gọi đó là công thức bội liên kết cho môđun $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ tương ứng với $\mathfrak{q}$. Chúng tôi chỉ ra rằng nếu $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (∗), với mỗi i cố định cho trước thì ta có thể xây dựng công thức bội liên kết cho môđun đó.

Định lý 4.1.1. *Giả sử $i \geq 0$ là một số nguyên và $\text{N-dim}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = s$. Với mỗi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R M$, đặt*

$$T(\mathfrak{p}) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}^i_{\widehat{R}}(\widehat{M}) : \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(R/\mathfrak{p}),\ \widehat{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}\}.$$

Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (∗). Khi đó các mệnh đề sau là đúng.

(i) $\operatorname{Psupp}^i_R M$ *là tập đóng.*

(ii) *Nếu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R M$ với $\dim(R/\mathfrak{p}) = s$ thì $T(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$, $\ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)$ có độ dài hữu hạn khác không và*

$$\ell_{\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}\big(H^{i-\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})}_{\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{M}_{\widehat{\mathfrak{p}}})\big) = \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big) \ell_{\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}})$$

với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in T(\mathfrak{p})$.

(iii) *Cho* $\mathfrak{q}$ *là một iđêan* $\mathfrak{m}$*-nguyên sơ của* R*. Giả sử* $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$*. Khi đó bội* $e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ *của* $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ *tương ứng với* $\mathfrak{q}$ *thỏa mãn*

$$e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathrm{Psupp}^i_R(M)\\ \dim(R/\mathfrak{p})=\mathrm{psd}^i(M)}} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}).$$

Ứng dụng thứ hai của tính chất $(*)$ là để nghiên cứu về tính chất dịch chuyển địa phương cho $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$, tức là đòi hỏi

$$\mathrm{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})) = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

với mọi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Khi R là một vành thương của vành địa phương Gorenstein, R.Y. Sharp [48] đã chứng tỏ rằng $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ luôn thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương. Tuy nhiên tính chất này không đúng trong trường hợp tổng quát. Chẳng hạn xét $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên địa phương Noether, chiều 2 được xây dựng bởi M. Ferrand và D. Raynaud [53] thỏa mãn $\widehat{R}$ có iđêan nguyên tố nhúng chiều 1. Khi đó $H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ không thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương. Hơn nữa cũng theo M. Ferrand và D. Raynaud [53], tồn tại một miền nguyên địa phương Noether, chiều 1 mà không thể biểu diễn được như ảnh đồng cấu của một vành địa phương Gorenstein. Ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng $H^i_{\mathfrak{m}}(N)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương với mọi R-môđun hữu hạn sinh N và mọi i. Do đó một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là với điều kiện nào thì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương. Định lý sau trả lời trọn vẹn câu hỏi trên cho các môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất.

Định lý 4.2.3. *Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ *thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương;*

(ii) *Vành* $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ *là catenary;*

(iii) $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ *thỏa mãn tính chất* $(*)$*;*

(iv) $H^{d-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ *thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương với mọi* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$;

(v) $H^{d-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ *thỏa mãn tính chất (*$*$*) với mọi* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$.

Hiện tại chúng tôi chưa tìm được điều kiện cần và đủ để các môđun đối đồng điều địa phương cấp nhỏ hơn d thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương. Vì vậy kết quả sau đây có thể đưa ra một cách tiếp cận mới.

Định lý 4.2.4. *Cho* $i \geq 0$ *là một số nguyên. Giả sử* $R/\operatorname{Ann}_R M$ *là catenary. Khi đó các điều kiện sau là tương đương.*

(i) $\min \mathrm{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \min \mathrm{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$, *với* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$.

(ii) $H^i_\mathfrak{m}(M)$ *thỏa mãn tính chất (*$*$*);*

(iii) $H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ *thỏa mãn tính chất (*$*$*) với mọi* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$.

Kết quả cuối cùng trong chương này chúng tôi vận dụng tính chất ($*$) của môđun đối đồng điều địa phương để đưa ra một số thông tin về tập các iđêan nguyên tố gắn kết của $H^i_\mathfrak{m}(M)$ liên hệ với tập giá, các tập giả giá của M (Định lý 4.3.1). Vận dụng kết quả đó chúng tôi chứng minh lại một trường hợp của Định lý triệt Faltings dưới giả thiết các môđun đối đồng điều địa phương thỏa mãn tính chất ($*$) (Hệ quả 4.3.2).

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ sở và một số kết quả đã biết về môđun đối đồng điều địa phương, tính catenary của vành, chiều, tập iđêan nguyên tố gắn kết và tính chất $(*)$ cho các môđun Artin tiện cho việc theo dõi các kết quả trong các chương sau. Trong phần cuối của chương, chúng tôi trình bày một đặc trưng mới của tính chất $(*)$ cho môđun Artin qua hệ tham số. Ta luôn kí hiệu $(R, \mathfrak{m})$ là một vành giao hoán địa phương Noether với iđêan cực đại duy nhất $\mathfrak{m}$, I ký hiệu một iđêan đã cho của R và $\mathrm{V}(I)$ là tập các iđêan nguyên tố của R chứa I.

1.1 Môđun đối đồng điều địa phương

Đối đồng điều địa phương được giới thiệu bởi A. Grothendieck vào những năm 1960 (xem [18], [6]). Ngày nay Đối đồng điều địa phương đã trở thành công cụ không thể thiếu trong Hình học đại số, Đại số giao hoán. Trước tiên ta giới thiệu khái niệm hàm tử I-xoắn (xem [6, 1.1]).

Định nghĩa 1.1.1. *Hàm tử I-xoắn* kí hiệu $\Gamma_I(-)$ được xác định bởi $\Gamma_I(M) = \bigcup_{n\geq 0}(0 :_M I^n)$ với mọi R-môđun M. Ta gọi $\Gamma_I(M)$ là *môđun con I-xoắn* của M.

Từ đó ta có định nghĩa môđun đối đồng điều địa phương (xem [6, 1.2]).

Định nghĩa 1.1.2. Với mỗi số nguyên $i \geq 0$, hàm tử dẫn xuất phải thứ i của $\Gamma_I(-)$, kí hiệu bởi $H_I^i(-)$, và được gọi là *hàm tử đối đồng điều địa phương thứ* i *đối với* I. Cho M là R-môđun, kết quả của tác động $H_I^i(-)$ vào M kí hiệu là $H_I^i(M)$ và gọi là *môđun đối đồng điều địa phương thứ* i *của* M *với giá* I.

Môđun đối đồng điều địa phương với giá là iđêan cực đại $\mathfrak{m}$ còn được gọi là *môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại.*

Môđun đối đồng điều địa phương cũng có thể được xây dựng là giới hạn trực tiếp của các môđun Ext, thông qua đối đồng điều của phức Čech, thông qua giới hạn trực tiếp của các môđun đồng điều của phức Koszul (xem [6]). Trong số rất nhiều những tính chất của môđun đối đồng điều địa phương, ta giới thiệu những tính chất quan trọng được sử dụng trong luận án. Trước hết là tính độc lập của môđun đối đồng điều địa phương khi chuyển vành cơ sở (xem [6, Định lý 4.2.1]).

Định lý 1.1.3 (Tính độc lập với vành cơ sở). *Cho R' là R-đại số và M' là R'-môđun. Khi đó ta có các đẳng cấu những R-môđun$H_{IR'}^i(M') \cong H_I^i(M')$ với mọi $i \geq 0$.*

Khi R' là R-đại số phẳng ta còn có định lý sau (xem [6, Định lý 4.3.2]).

Định lý 1.1.4 (Định lý chuyển cơ sở phẳng). *Cho R' là R-đại số phẳng và M là R-môđun. Khi đó ta có R'-đẳng cấu $H_I^i(M) \otimes_R R' \cong H_{IR'}^i(M \otimes_R R')$ với mọi $i \geq 0$.*

Mặc dù M là hữu hạn sinh nhưng nhìn chung môđun đối đồng điều địa phương $H_I^i(M)$ không là môđun hữu hạn sinh cũng không là môđun Artin. Trong trường hợp đặc biệt, môđun đối đồng điều địa phương với giá là iđêan cực đại hoặc tại cấp cao nhất thì các môđun đó là Artin.

Định lý 1.1.5. [6, Định lý 7.1.3, Định lý 7.1.6] (i) *Giả sử M là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó, R-môđun $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là Artin với mọi $i \in \mathbb{N}_0$.*

(ii) *Giả sử M là R-môđun hữu hạn sinh, khác không, có chiều Krull $\dim M = d$. Khi đó, R-môđun $H^d_I(M)$ là Artin.*

Phần còn lại của mục này dành để nhắc lại một số kiến thức về đối ngẫu Matlis và đối ngẫu địa phương. Ký hiệu $E(k)$ là bao nội xạ của R-môđun k với $k = R/\mathfrak{m}$. Ta kí hiệu $D_R(-)$ thay cho $\mathrm{Hom}(-, E(k))$. Với mỗi R-môđun M ta gọi $D_R(M)$ là *đối ngẫu Matlis* của M. Kết quả sau đây có thể xem trong [6, Định lý 10.2.12].

Định lý 1.1.6 (Định lý đối ngẫu Matlis)**.** *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether đầy đủ và M, A là các R-môđun. Khi đó các mệnh đề sau là đúng.*

(i) *Nếu M là môđun Noether thì $D_R(M)$ là môđun Artin và $M \cong D_R(D_R(M))$.*

(ii) *Nếu A là môđun Artin thì $D_R(A)$ là môđun Noether và $A \cong D_R(D_R(A))$.*

Khi R là vành đầy đủ, Định lý đối ngẫu Matlis cho ta tương ứng giữa phạm trù các R-môđun Artin và phạm trù các R-môđun Noether. Định lý Đối ngẫu địa phương [6, Định lý 11.2.6] cho ta mối liên hệ giữa đối đồng điều địa phương và hàm tử Ext.

Định lý 1.1.7 (Định lý đối ngẫu địa phương)**.** *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành địa phương Gorenstein $(R', \mathfrak{m}')$ chiều n' và $f : R' \longrightarrow R$ là toàn cấu vành. Giả sử M là một R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó $\mathrm{Ext}^j_{R'}(M, R')$ là R-môđun hữu hạn sinh và ta có đẳng cấu:*

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong D_R(\mathrm{Ext}^{n'-i}_{R'}(M, R')).$$

1.2 Tính catenary của vành

Tính catenary của các vành được quan tâm nghiên cứu đầu tiên bởi W. Krull từ năm 1937 [57]. Những công trình của W. Krull, M. Nagata, I. S. Cohen, D. Ferand và M. Raynaud, L. J. Ratliff, M. Brodmann, R. Heitmann, ... về tính catenary đã làm giàu đẹp lí thuyết này. Trước hết ta nhắc lại khái niệm *vành catenary*.

Định nghĩa 1.2.1. Cho $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ là các iđêan nguyên tố của R. Một dãy các iđêan nguyên tố $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ sao cho $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_{i+1}, i = 0, ..., n-1$, được gọi là một dãy iđêan nguyên tố *bão hoà* giữa $\mathfrak{q}$ và $\mathfrak{p}$ nếu với mọi i, không tồn tại một iđêan nguyên tố chèn giữa $\mathfrak{p}_i$ và $\mathfrak{p}_{i+1}$. Khi đó n được gọi là *độ dài* của dãy iđêan nguyên tố bão hòa trên.

Ta nói vành R là *catenary* nếu với mọi cặp iđêan nguyên tố $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ của R thì mọi dãy iđêan nguyên tố bão hoà giữa $\mathfrak{q}$ và $\mathfrak{p}$ đều có chung độ dài.

Nhắc lại rằng năm 1937 W. Krull đã chứng tỏ rằng mọi đại số hữu hạn sinh trên một trường là catenary (xem [57], [37, Bài 14], [52, Chương 7]). Kết quả quan trọng thứ hai được chứng minh bởi I. Cohen năm 1946 rằng mọi vành địa phương đầy đủ là catenary (xem [9]). Sau đó trong [38], M. Nagata đã chứng tỏ rằng mọi miền nguyên, địa phương tựa không trộn lẫn là catenary. Như vậy, hầu hết các vành được biết đến trong thực tế và trong những ứng dụng của Hình học đại số đều là catenary. Ví dụ đầu tiên về miền nguyên không catenary được đưa ra bởi M. Nagata năm 1956 (xem [38], [37, Ví dụ 2, trang 203-205]). Ngoài ra bằng những lập luận đơn giản ta có nếu $\dim R \leqslant 2$ thì R là catenary; R là vành catenary nếu và chỉ nếu R/I là catenary với mọi iđêan I của R; R là catenary nếu và chỉ nếu $R_{\mathfrak{p}}$ là catenary với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R, ... Đặc trưng sau của tính catenary thường được sử dụng trong luận án.

Mệnh đề 1.2.2. [42] *Giả sử* $(R, \mathfrak{m})$ *là một vành địa phương Noether. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) R *là catenary;*

(ii) $\operatorname{ht} \mathfrak{p}/\mathfrak{q} = \dim R/\mathfrak{q} - \dim R/\mathfrak{p}$ *với mọi* $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$;

(iii) $\operatorname{ht} \mathfrak{p}_3/\mathfrak{p}_1 = \operatorname{ht} \mathfrak{p}_3/\mathfrak{p}_2 + \operatorname{ht} \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1$ *với mọi* $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 \in \operatorname{Spec} R$.

Từ định nghĩa vành catenary, ta dễ thấy rằng nếu R là miền nguyên địa phương catenary thì nó thoả mãn công thức chiều

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p} = \dim R$$

với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R. Vì thế năm 1954, I. S. Cohen [10] đã hỏi rằng liệu một miền nguyên địa phương R thoả mãn công thức chiều $\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p} = \dim R$ với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R thì R có là miền catenary? Câu trả lời khẳng định được R. J. Ratliff đưa ra vào năm 1972 [43, Định lý 2.2]. Hơn nữa năm 1977, S. McAdam và R. J. Ratliff đã mở rộng kết quả trên cho các vành địa phương đẳng chiều.

Định lý 1.2.3. [35] *Giả sử* R *là vành địa phương Noether đẳng chiều. Khi đó* R *là catenary nếu và chỉ nếu với mỗi iđêan nguyên tố* $\mathfrak{p}$ *của* R *ta có*

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p} = \dim R.$$

Định nghĩa 1.2.4. *Vành* R *được gọi là catenary phổ dụng nếu mỗi* R*-đại số hữu hạn sinh là catenary.*

Giả sử S là một R-đại số hữu hạn sinh, tức là tồn tại $a_1, \ldots, a_n \in S$ sao cho $S = R[a_1, \ldots, a_n]$. Khi đó tồn tại một toàn cấu vành $\varphi : R[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow S$, trong đó $R[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến với hệ số trên R và $\varphi(x_i) = a_i, i = 1, \ldots, n$. Vì thế S đẳng cấu với một vành thương của vành đa thức $R[x_1, \ldots, x_n]$. Vì vành thương của vành catenary là catenary nên ta suy ra rằng vành R là catenary phổ dụng nếu và chỉ nếu mọi vành đa thức hữu hạn biến với hệ số trên R là catenary.

Sau đây là một số đặc trưng của vành catenary phổ dụng. Trước hết, ta nhắc lại theo M. Nagata [37] các khái niệm vành, môđun *tựa không trộn lẫn* (quasi-unmixed) và vành, môđun *không trộn lẫn* (unmixed).

Định nghĩa 1.2.5. Vành R được gọi là *tựa không trộn lẫn* (quasi-unmixed) nếu vành đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic $\widehat{R}$ của R là đẳng chiều, tức là $\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}} = \dim \widehat{R}$ với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Ass} \widehat{R}$. Vành R được gọi là *không trộn lẫn* (unmixed) nếu $\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}} = \dim \widehat{R}$ với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass} \widehat{R}$. Một R-môđun hữu hạn sinh M được gọi là *tựa không trộn lẫn* (tương ứng *không trộn lẫn*) nếu vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là tựa không trộn lẫn (tương ứng không trộn lẫn).

Định lý 1.2.6. [33, Định lý 31.6] *Giả sử R là tựa không trộn lẫn. Khi đó*

(i) *R là catenary phổ dụng.*

(ii) *$R_{\mathfrak{p}}$ là tựa không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.*

(iii) *Nếu I là iđêan của R thì R/I là đẳng chiều nếu và chỉ nếu R/I là tựa không trộn lẫn.*

Định lý 1.2.7. [33, Định lý 31.7] *Các điều kiện sau là tương đương*

(i) *R là catenary phổ dụng;*

(ii) *$R[x]$ là catenary;*

(ii) *$R/\mathfrak{p}$ là tựa không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.*

Vì mỗi vành chiều 2 là catenary nên nếu $\dim R \leqslant 1$ thì

$$\dim R[x] = \dim R + 1 \leqslant 2,$$

do đó $R[x]$ là catenary. Vì vậy theo Định lý 1.2.7 ta thấy R là catenary phổ dụng nếu $\dim R \leqslant 1$.

1.3 Biểu diễn thứ cấp và chiều của môđun Artin

Trong tiết này ta nhắc lại lý thuyết biểu diễn thứ cấp theo thuật ngữ của I. G. Macdonald [31]. Ta luôn ký hiệu M là một R-môđun hữu hạn sinh và A là một R-môđun Artin. Một R-môđun S được gọi là *thứ cấp* nếu $S \neq 0$ và với mọi $x \in R$, phép nhân bởi x trên S hoặc là toàn cấu hoặc là luỹ linh. Trong trường hợp này $\mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}_R S) = \mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố và ta gọi S là $\mathfrak{p}$-*thứ cấp*. Cho N là R-môđun. *Một biểu diễn thứ cấp* của N là một phân tích $N = S_1 + \ldots + S_n$ thành tổng hữu hạn các môđun con $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp S_i. Nếu $N = 0$ hoặc N có một biểu diễn thứ cấp thì ta nói N là *biểu diễn được*. Biểu diễn thứ cấp này được gọi là *tối tiểu* nếu các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_i$ là đôi một khác nhau và không có hạng tử S_i nào thừa, với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Dễ thấy rằng mọi biểu diễn thứ cấp của N đều có thể đưa được về dạng tối tiểu. Khi đó tập hợp $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ là độc lập với việc chọn biểu diễn thứ cấp tối tiểu của N và được gọi là *tập các iđêan nguyên tố gắn kết* của N, kí hiệu là $\mathrm{Att}_R N$. Các hạng tử $S_i, i = 1, \ldots, n$, được gọi là các thành phần thứ cấp của N. Nếu $\mathfrak{p}_i$ là tối tiểu trong $\mathrm{Att}_R N$ thì S_i được gọi là *thành phần thứ cấp cô lập*. Tương tự như tập các iđêan nguyên tố liên kết, ta có tính chất sau của tập các iđêan nguyên tố gắn kết. Giả sử $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ là dãy khớp các R-môđun biểu diễn được. Khi đó ta có $\mathrm{Att}_R N'' \subseteq \mathrm{Att}_R N \subseteq \mathrm{Att}_R N' \cup \mathrm{Att}_R N''$. Bên cạnh đó ta cần một số kết quả dưới đây.

Mệnh đề 1.3.1. *Giả sử N là một R-môđun biểu diễn được. Khi đó các điều kiện sau là đúng.*

(i) $N \neq 0$ *khi và chỉ khi* $\mathrm{Att}_R N \neq \emptyset$.

(ii) *Tập các iđêan nguyên tố tối tiểu của R chứa* $\mathrm{Ann}(N)$ *chính là tập các phần tử tối tiểu của* $\mathrm{Att}_R N$.

Phạm trù các môđun biểu diễn được bao gồm các môđun Artin. Đó là nội dung của định lý sau.

Định lý 1.3.2. [31, 5.2] *Mọi môđun Artin đều biểu diễn được.*

Nhận xét rằng R-môđun Artin A có cấu trúc tự nhiên như $\widehat{R}$-môđun. Với cấu trúc này, một môđun là môđun con của A xét như R-môđun nếu và chỉ nếu nó là môđun con của A xét như $\widehat{R}$-môđun. Do đó A là $\widehat{R}$-môđun Artin và ta có mối liên hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết như sau.

Bổ đề 1.3.3. [6, 8.2.4 và 8.2.5] $\mathrm{Att}_R(A) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \,|\, \widehat{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Att}_{\widehat{R}}(A)\}$.

Định lý sau đây được gọi là *tính chất dịch chuyển địa phương tổng quát yếu*.

Định lý 1.3.4. [48, Định lý 4.8] *Cho* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M$ *sao cho* $\dim R/\mathfrak{p} = t$. *Giả sử* $i \geq 0$ *là một số nguyên và* $\mathfrak{q}$ *là iđêan nguyên tố với* $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ *sao cho* $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}))$. *Khi đó* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}_R(H^{i+t}_{\mathfrak{m}}(M))$.

Hệ quả trực tiếp sau của Định lý 1.3.4 cũng thường được sử dụng trong luận án.

Hệ quả 1.3.5. [48, Hệ quả 4.9] *Cho* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M$ *với* $\dim R/\mathfrak{p} = t$. *Khi đó* $H^t_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ *và* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}_R\, H^t_{\mathfrak{m}}(M)$.

Đối với môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá là iđêan cực đại, I. G. Macdonald và R. Y. Sharp đã đưa ra công thức của tập các iđêan nguyên tố gắn kết cho lớp môđun này.

Định lý 1.3.6. [32, Định lý 2.2] *Giả sử* M *là* R*-môđun hữu hạn sinh, chiều* d. *Khi đó* $H^d_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ *và*

$$\mathrm{Att}_R\, H^d_{\mathfrak{m}}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R\, M \mid \dim(R/\mathfrak{p}) = d\}.$$

Giả sử A là một R-môđun Artin. Ta ký hiệu $\dim_R R/\operatorname{Ann}_R A$ là chiều Krull của vành $R/\operatorname{Ann}_R A$. Khi đó theo Mệnh đề 1.3.1, ta có

$$\dim(R/\operatorname{Ann} A) = \max\{\dim(R/\mathfrak{p}) \ : \ \mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R A\}.$$

Năm 1975 R. N. Roberts [46] đã giới thiệu một khái niệm chiều khác cho môđun Artin mà sau đó được D. Kirby [25] năm 1990 đổi tên thành chiều Noether để tránh nhầm lẫn với khái niệm chiều Krull đã quen biết như đã đề cập ở trên. Trong suốt luận án này, chúng tôi dùng thuật ngữ "chiều Noether" của Kirby [25].

Định nghĩa 1.3.7. *Chiều Noether* của A, kí hiệu bởi $\operatorname{N-dim}_R A$, được định nghĩa bằng quy nạp như sau: Khi $A = 0$, ta đặt $\operatorname{N-dim}_R A = -1$. Cho $d \geq 0$ là một số nguyên không âm. Ta đặt $\operatorname{N-dim}_R A = d$ nếu $\operatorname{N-dim}_R A < d$ là sai và với mỗi dãy tăng các môđun con $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots$ của A, tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho $\operatorname{N-dim}_R(A_n/A_{n+1}) < d$ với mọi $n > n_0$.

R. N. Roberts [46] và D. Kirby [24], [25] đã chỉ ra nhiều tính chất của chiều Noether cho các môđun Artin tương tự như các tính chất về chiều Krull cho các môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương, đặc biệt là kết quả dưới đây cho ta các cách tính chiều Noether cho các môđun Artin.

Định lý 1.3.8. *Nếu $A \neq 0$ và $\mathfrak{q}$ là iđêan sao cho $\ell(0 :_A \mathfrak{q}) < \infty$ thì có một đa thức $Q(n)$ với hệ số hữu tỷ sao cho $\ell_R(0 :_A \mathfrak{q}^{n+1}) = Q(n)$ khi $n \gg 0$ và*

$$\begin{aligned}\operatorname{N-dim}_R A &= \deg(\ell_R(0 :_A \mathfrak{q}^{n+1}))\\ &= \inf\{t \geq 0 : \exists x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{m} : \ell_R(0 :_A (x_1, \ldots, x_t)R) < \infty\}.\end{aligned}$$

Sau đây ta sẽ đưa ra so sánh giữa chiều Krull và chiều Noether của môđun Artin A. Trong trường hợp đặc biệt, ta có $\operatorname{N-dim}_R A = 0$ nếu và chỉ nếu $\dim R/\operatorname{Ann}_R A = 0$, nếu và chỉ nếu A có độ dài hữu hạn, khác 0, nếu và chỉ nếu $R/\operatorname{Ann}_R A$ là vành Artin. Trong trường hợp tổng quát, N.T. Cường và L.T. Nhàn đã đưa ra câu trả lời năm 2002.

Mệnh đề 1.3.9. [12, Mệnh đề 2.5] $\text{N-dim}_R A \leqslant \dim(R/\operatorname{Ann} A)$.

Hơn nữa, cũng trong bài báo đó họ còn chỉ ra ví dụ chứng tỏ dấu đẳng thức là không xảy ra [12, Ví dụ 4.1]. Xét $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên địa phương Noether chiều 2 được xây dựng bởi D. Ferrand và M. Raynaud [53] thoả mãn tính chất tồn tại một iđêan nguyên tố nhúng $\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Ass} \widehat{R}$ với $\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}} = 1$. Khi đó $A = H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ là môđun Artin. Ta có

$$\dim R/\operatorname{Ann}_R A = 2 > 1 = \text{N-dim}_R A.$$

Tiếp theo ta nhắc lại một kết quả về chiều của môđun đối đồng điều địa phương.

Định lý 1.3.10. [12, Định lý 3.1, Hệ quả 3.6] *Các mệnh đề sau là đúng.*

(i) $\text{N-dim}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M) \leq i$.

(ii) $\dim_R H^d_{\mathfrak{m}}(M) = d = \text{N-dim}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$.

Mệnh đề 1.3.8 cho phép ta định nghĩa khái niệm hệ tham số cho môđun Artin.

Định nghĩa 1.3.11. Một hệ $x_1, \ldots, x_s$ gồm $s = \text{N-dim}\, A$ phần tử của $\mathfrak{m}$ được gọi là *hệ tham số của* A nếu $\ell(0 :_A (x_1, \ldots, x_s)R) < \infty$. Một hệ $x_1, \ldots, x_i$, với $i \leqslant s$, các phần tử của $\mathfrak{m}$ được gọi là *một phần hệ tham số* của A nếu ta có thể bổ sung thêm các phần tử $x_{i+1}, \ldots, x_s$ của $\mathfrak{m}$ sao cho $x_1, \ldots, x_s$ là hệ tham số của A. Một phần tử $x \in \mathfrak{m}$ được gọi là *phần tử tham số của* A nếu $\text{N-dim}_R(0 :_A x) = \text{N-dim}_R A - 1$.

Các mệnh đề sau đây, được chứng minh bởi Z. Tang và H. Zakeri [51], cho ta các kết quả về đặc trưng một phần tử $x \in \mathfrak{m}$ là phần tử tham số của môđun Artin A và sự tồn tại một phần hệ tham số của môđun Artin A trong một iđêan I của R.

Mệnh đề 1.3.12. [51, Bổ đề 2.14] *Cho* $\operatorname{N-dim}_R A = s$ *và* $A = A_1 + \ldots + A_n$ *là một biểu diễn thứ cấp tối tiểu của* A *với* A_i *là* $\mathfrak{p}_i$*-thứ cấp. Cho* $x \in \mathfrak{m}$*. Khi đó* x *là phần tử tham số của* A *nếu và chỉ nếu* $x \notin \mathfrak{p}_i$ *với mọi* i *thoả mãn tính chất* $\operatorname{N-dim}_R A_i = s$.

Mệnh đề 1.3.13. [51, Mệnh đề 2.10] *Cho* I *là iđêan của* R *sao cho* $\operatorname{N-dim}_R(0 :_A I) = \operatorname{N-dim}_R A - r$*. Khi đó tồn tại một phần hệ tham số của* A *trong* I *có độ dài* r*, và mọi phần hệ tham số của* A *trong* I *có độ dài* r *đều là phần hệ tham số tối đại của* A *trong* I.

1.4 Tính chất $(*)$ cho môđun Artin

Trong suốt tiết này ta luôn giả thiết M là một R-môđun hữu hạn sinh và A là một R-môđun Artin. Ta có $\operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M) = \mathfrak{p}$ với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R M$. Rất tự nhiên, bằng cách lấy đối ngẫu, N. T. Cường và L. T. Nhàn [12] đã định nghĩa tính chất sau đối với các môđun Artin A.

Định nghĩa 1.4.1. Một R-môđun Artin A được gọi là *thỏa mãn tính chất* $(*)$ nếu

$$\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \text{ với mọi iđêan nguyên tố } \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R A \qquad (*).$$

Giả sử R là đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic. Bằng đối ngẫu Matlis, ta có mọi môđun Artin đều thỏa mãn tính chất $(*)$. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát khẳng định đó không còn đúng nữa. Ví dụ đầu tiên về một môđun Artin không thoả mãn tính chất $(*)$ được đưa ra bởi N. T. Cường và L. T. Nhàn [12, Ví dụ 4.4]. Đó là môđun $H^1_{\mathfrak{m}}(R)$, trong đó $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên địa phương Noether được xây dựng bởi D. Ferrand và M. Raynaud trong [53].

Tính chất $(*)$ là điều kiện đủ để dấu bằng xảy ra trong Mệnh đề 1.3.9 hay nói cách khác là điều kiện đủ để chiều Krull của A bằng với chiều Noether của A.

Mệnh đề 1.4.2. [12, Mệnh đề 4.6] *Nếu A thoả mãn tính chất $(*)$ thì* $\operatorname{N-dim}_R A = \dim_R R/\operatorname{Ann}_R A$. *Đặc biệt nếu $A \neq 0$ thì*

$$\begin{aligned}\operatorname{N-dim}_R A = \operatorname{N-dim}_{\widehat{R}} A &= \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A)\\ &= \max\{\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) \ : \ \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A\}.\end{aligned}$$

Như vậy nếu $A \neq 0$ thỏa mãn tính chất $(*)$ thì

$$\begin{aligned}\operatorname{N-dim}_R A &= \deg(\ell_R(0 :_A \mathfrak{q}^{n+1}))\\ &= \inf\{t \geq 0 : \exists x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{m} : \ell_R(0 :_A (x_1, \ldots, x_t)R) < \infty\}.\\ &= \dim R/\operatorname{Ann}_R A\\ &= \max\{\dim R/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R A\},\end{aligned}$$

trong đó $\mathfrak{q}$ là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Các ứng dụng khác của tính chất $(*)$ có thể tham khảo trong [12], [13], [26], [27], [59], [60].

Đối với các môđun hữu hạn sinh, ta luôn có

$$\operatorname{Supp} M = \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \mid \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Supp} \widehat{M}\}.$$

Do đó $\operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R M) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \mid \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(\widehat{M})\}$. Vì thế, chúng ta hỏi rằng liệu đẳng thức tương tự sau đây có xảy ra cho các R-môđun Artin

$$\operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R A) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \mid \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A\}.$$

Câu trả lời được giải quyết trong [13].

Mệnh đề 1.4.3. [13, Mệnh đề 2.2] *Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *A thỏa mãn tính chất $(*)$;*

(ii) $\operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R A) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \,|\, \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A)\}$.

Năm 2007, N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn [13] đã chỉ ra mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất và tính catenary của vành.

Định lý 1.4.4. [13] *$H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ khi và chỉ khi $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary.*

Tiếp tục hướng nghiên cứu đó, luận án đưa ra các kết quả về tính chất $(*)$ của môđun Artin và ứng dụng của nó. Các kết quả này được công bố trong [39], [40], [1].

Kết quả sau đây là mới, đưa ra một đặc trưng của tính chất $(*)$ cho môđun Artin thông qua hệ tham số. Chú ý rằng nếu A thỏa mãn tính chất $(*)$ thì theo Mệnh đề 1.4.2 $\operatorname{N-dim}_R A = \dim_R R/\operatorname{Ann}_R A$ và khi đó ta có độ dài hệ tham số của A và của vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là như nhau. Tuy nhiên chiều ngược lại không đúng [12, Ví dụ 4.7]. Sự đồng nhất toàn bộ hệ tham số của A và của vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là điều kiện cần và đủ để A thỏa mãn tính chất $(*)$.

Mệnh đề 1.4.5. *Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *A thỏa mãn tính chất $(*)$;*

(ii) *Mọi hệ tham số của A là hệ tham số của $R/\operatorname{Ann}_R A$ và ngược lại.*

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii). Lấy I là một iđêan bất kỳ của R. Hiển nhiên ta có

$$\operatorname{Rad}(\operatorname{Ann}_R(0:_A I)) \supseteq \operatorname{Rad}(I + \operatorname{Ann}_R A).$$

Giả sử $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố thỏa mãn $\mathfrak{p} \supseteq I + \operatorname{Ann}_R A$. Vì A thỏa mãn tính chất $(*)$ nên $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(0:_A \mathfrak{p}) \supseteq \operatorname{Ann}_R(0:_A I)$. Vì vậy,

$$\operatorname{Rad}(I + \operatorname{Ann}_R A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq I + \operatorname{Ann}_R A} \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Rad}(\operatorname{Ann}_R(0:_A I)).$$

Suy ra

$$\operatorname{Rad}(\operatorname{Ann}_R(0:_A I)) = \operatorname{Rad}(I + \operatorname{Ann}_R A) = \operatorname{Rad}(\operatorname{Ann}_R(R/I + \operatorname{Ann}_R A)).$$

Giả sử $\operatorname{N-dim}_R A = s$. Theo Mệnh đề 1.4.2 $\dim R/\operatorname{Ann}_R A = s$. Lấy $x_1, ..., x_s$ là một hệ tham số của A. Đặt $I = (x_1, ..., x_s)R$, ta có $\ell(0:_A I) < \infty$. Vì vậy, $\operatorname{Ann}_R(0:_A I)$ là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Điều này kéo theo $\operatorname{Ann}_R R/I + \operatorname{Ann}_R A$ là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Do đó $x_1, ..., x_s$ là một hệ tham số của $R/\operatorname{Ann}_R A$. Tương tự ta có điều ngược lại.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Theo giả thiết, ta có $\text{N-dim}_R A = \dim R/\operatorname{Ann}_R A$. Đặt $\text{N-dim}_R A = s$. Giả sử $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\operatorname{Ann}_R A)$ và $\text{N-dim}(0 :_A \mathfrak{p}) = s - r$. Theo Mệnh đề 1.3.13, tồn tại $x_1, ..., x_r \in \mathfrak{p}$ là một phần hệ tham số tối đại của A trong $\mathfrak{p}$. Gọi

$$0 :_A (x_1, ..., x_r)R = S_1 + \cdots + S_n$$

là biểu diễn thứ cấp tối tiểu của $0 :_A (x_1, ..., x_r)R$, trong đó S_i là $\mathfrak{q}_i$-thứ cấp. Theo Mệnh đề 1.3.12, ta có

$$\mathfrak{p} \subseteq \bigcup_{\text{N-dim}\, S_i = s-r} \mathfrak{q}_i.$$

Vì vậy theo Định lý tránh nguyên tố tồn tại i với $\text{N-dim}\, S_i = s - r$ và thỏa mãn $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}_i$. Theo giả thiết, $x_1, ..., x_r$ là một phần hệ tham số của $R/\operatorname{Ann}_R A$ và phần hệ tham số này là tối đại trong $\mathfrak{p}$ của $R/\operatorname{Ann}_R A$. Do đó tồn tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_R(R/(x_1, ..., x_r)R + \operatorname{Ann}_R A)$ thỏa mãn $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, $\dim R/\mathfrak{q} = s - r$. Lại vì $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(R/(x_1, ..., x_r)R + \operatorname{Ann}_R A)$ và

$$s - r = \dim R/\mathfrak{q} \le \dim R/\mathfrak{p} \le \dim R/(x_1, ..., x_r)R + \operatorname{Ann}_R A) = s - r$$

nên $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Vì S_i là $\mathfrak{q}_i$-thứ cấp và $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}_i$ nên ta có

$$s - r = \text{N-dim}\, S_i \le \dim R/\operatorname{Ann}_R S_i = \dim R/\mathfrak{q}_i \le \dim R/\mathfrak{p} = s - r.$$

Vì vậy, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_i$ và do đó $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R(0 :_A (x_1, ..., x_r)R)$. Theo Bổ đề 1.3.3, tồn tại iđêan nguyên tố $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(x_1, ..., x_r)R)$ thỏa mãn $\widehat{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}$. Điều này kéo theo

$$\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) \subseteq \operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(0 :_A \widehat{\mathfrak{p}}) \cap R = \widehat{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}.$$

Vì vậy $\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. $\square$

Chương 2

Môđun đối đồng điều địa phương thỏa mãn tính chất $(*)$

Trong suốt chương này, luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether, A là R-môđun Artin và M là R-môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$. Với mỗi iđêan I của R, kí hiệu $\mathrm{V}(I)$ là tập các iđêan nguyên tố của R chứa I.

Năm 2002, N.T. Cường và L.T. Nhàn [12] đã xét tính chất $(*)$ sau cho môđun Artin A

$$\mathrm{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \text{ với mỗi iđêan nguyên tố } \mathfrak{p} \supseteq \mathrm{Ann}_R A. \qquad (*)$$

Tính chất $(*)$ luôn đúng khi vành là đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic. Khi R không đầy đủ, họ đã chỉ ra ví dụ về môđun Artin không thỏa mãn tính chất $(*)$ (xem mục 1.4). Cũng trong bài báo [12], họ đã chỉ ra tính chất $(*)$ là điều kiện đủ để chiều Krull của A bằng chiều Noether của A. Đặc biệt, gần đây N.T. Cường, N.T. Dung và L.T. Nhàn [13] đã tìm ra mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất và tính catenary của vành: $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ khi và chỉ khi vành $R/\mathrm{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary (xem Định lý 1.4.4). Tuy nhiên tồn tại một vành là catenary và tồn tại môđun đối đồng điều địa phương của vành đó bậc nhỏ hơn d không thỏa mãn tính chất $(*)$ (xem mục 1.4 của Chương 1). Điều này là động cơ dẫn ta nghĩ đến việc nghiên cứu tính chất $(*)$ cho các môđun đối đồng điều cấp thấp hơn chiều của môđun.

Mục đích của chương này trước hết là đưa ra một đặc trưng để môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với i bất kỳ thông qua tập giả giá thứ i và đưa ra liên hệ giữa giả chiều, chiều Krull, chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương. Mục đích tiếp theo của chương là nghiên cứu tính chất $(*)$ cho đồng loạt các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ với $i = 0, 1, \ldots, d-1$. Kết quả thu được là tính catenary phổ dụng của vành thương $R/\operatorname{Ann}_R M$ và tính không trộn lẫn của một số vành địa phương $R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R M$.

Nội dung của chương được trình bày dựa theo bài báo [39].

2.1 Giả giá và giả chiều

Khái niệm giả giá và giả chiều của một môđun hữu hạn sinh được M. Brodmann và R. Y. Sharp đưa ra trong [7] nhằm xây dựng công thức bội cho các môđun đối đồng điều địa phương.

Định nghĩa 2.1.1. [7] Cho $i \geq 0$ là số nguyên. *Giả giá thứ* i (pseudo-support) của M, kí hiệu là $\operatorname{Psupp}^i_R M$, được cho bởi công thức

$$\operatorname{Psupp}^i_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \ : \ H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0\}.$$

Giả chiều thứ i (pseudo dimension) của M, kí hiệu là $\operatorname{psd}^i_R(M)$, được cho bởi công thức

$$\operatorname{psd}^i_R(M) = \sup\{\dim R/\mathfrak{p} \ : \ \mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M)\}.$$

Để xây dựng được công thức bội, M. Brodmann và R. Y. Sharp quan tâm đến câu hỏi khi nào thì giả giá $\operatorname{Psupp}^i_R M$ của M là đóng của $\operatorname{Spec} R$ với tôpô Zariski? Khi $\operatorname{Psupp}^i_R M$ đóng thì giả chiều $\operatorname{psd}^i_R(M)$ là bao nhiêu? Nhìn chung giả giá thứ i của M không là tập con đóng (xem [7, Ví dụ 3.1, Ví dụ 3.2]). Xét trường hợp R là vành đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic, bằng đối ngẫu Matlis (Định lý 1.1.6) và đối ngẫu địa phương (Định lý 1.1.7), ta có

$$H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \cong D_{R_{\mathfrak{p}}}((D_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)))_{\mathfrak{p}}).$$

Do đó $\operatorname{Psupp}^i_R(M) = \mathrm{V}\big(\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Trong trường hợp vành tổng quát đẳng thức trên cho ta một đặc trưng để môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thoả mãn tính chất $(*)$.

Định lý 2.1.2. *Giả sử $i \geq 0$ là một số nguyên. Khi đó các điều kiện sau là tương tương:*

(i) $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ *thỏa mãn tính chất* $(*)$*;*

(ii) $\operatorname{Psupp}^i_R M = \mathrm{V}\big(\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big)$.

Hơn nữa, nếu (i) và (ii) thoã mãn thì

$$\operatorname{psd}^i_R M = \operatorname{psd}^i_{\widehat{R}} \widehat{M} = \text{N-}\dim_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \dim R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M),$$

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R M : \dim(R/\mathfrak{p}) = \operatorname{psd}^i_R M\}$$
$$= \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R : \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}^i_{\widehat{R}} \widehat{M}, \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \operatorname{psd}^i_{\widehat{R}} \widehat{M}\}.$$

Chứng minh. Giả sử $i \geq 0$ là một số nguyên.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$. Lấy $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R M$. Khi đó $H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$. Theo Mệnh đề 1.3.1 (i), tồn tại iđêan nguyên tố gắn kết $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)$ với iđêan nguyên tố $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Suy ra $\mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ theo Định lý 1.3.4. Do đó ta có

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \supseteq \operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Vì vậy $\operatorname{Psupp}^i_R M \subseteq \mathrm{V}\big(\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big)$.

Ngược lại lấy $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}\big(\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big)$. Lấy iđêan nguyên tố $\mathfrak{q} \supseteq \operatorname{Ann}_R(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{p})$. Khi đó $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$. Lại vì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ nên

$$\operatorname{Ann}_R(0 :_{0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{p}} \mathfrak{q}) = \operatorname{Ann}_R(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{q}) = \mathfrak{q}.$$

Do đó $0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{p}$ cũng thỏa mãn tính chất $(*)$. Hơn nữa vì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thoả mãn tính chất $(*)$ nên $\operatorname{Ann}_R\big(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{p}\big) = \mathfrak{p}$. Điều này suy ra

$$\min \mathrm{V}\big(\operatorname{Ann}_R(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{p})\big) = \{\mathfrak{p}\}.$$

Vì vậy theo Mệnh đề 1.4.2, ta có

$$\begin{aligned}
\dim(R/\mathfrak{p}) &= \dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{p})\big)\\
&= \text{N-}\dim_R\big(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{p}\big)\\
&= \dim\big(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{p})\big)\\
&= \max\{\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) \ : \ \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}\big(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{p}\big)\}.
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ tồn tại $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}\big(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{p}\big)$ thỏa mãn $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(R/\mathfrak{p})$. Chú ý rằng $\widehat{\mathfrak{p}} \in \mathrm{V}\big(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big)$ và $\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \supseteq \mathfrak{p}$. Vì $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(R/\mathfrak{p})$, nên $\widehat{\mathfrak{p}}$ là iđêan nguyên tố tối tiểu của $\mathfrak{p}\widehat{R}$. Theo Định lý 1.1.4 $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^i_{\mathfrak{m}\widehat{R}}(\widehat{M})$ như $\widehat{R}$-môđun nên ta có thể kiểm tra

$$\operatorname{Psupp}^i_{\widehat{R}} \widehat{M} = \mathrm{V}\big(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big).$$

Do đó $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}^i_{\widehat{R}} \widehat{M}$, nghĩa là $H^{i-\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})}_{\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{M}_{\widehat{\mathfrak{p}}}) \neq 0$. Vì $\widehat{\mathfrak{p}}$ là iđêan nguyên tố tối tiểu của $\mathfrak{p}\widehat{R}$ và $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(R/\mathfrak{p})$, nên lại theo Định lý 1.1.4, ta có

$$H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \otimes \widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}} \cong H^{i-\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})}_{\mathfrak{p}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(M_{\mathfrak{p}} \otimes \widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}) \cong H^{i-\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})}_{\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{M}_{\widehat{\mathfrak{p}}}) \neq 0.$$

Vì vậy $H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$, nghĩa là $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R M$. Điều này chứng tỏ $\mathrm{V}\big(\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big) \subseteq \operatorname{Psupp}^i_R M$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Giả sử $\mathrm{V}\big(\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big) = \operatorname{Psupp}^i_R M$. Lấy $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Khi đó $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R M$, nghĩa là $H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$. Vì $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$, nên tồn tại iđêan $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$ thoả mãn $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(R/\mathfrak{p})$. Vì vậy $\widehat{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}$ và $\widehat{\mathfrak{p}}$ là iđêan nguyên tố tối tiểu của $\mathfrak{p}\widehat{R}$. Nhận xét rằng ánh xạ tự nhiên $R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}$ là hoàn toàn phẳng. Do đó theo Định lý đổi cơ sở phẳng (Định lý 1.1.4), ta có

$$H^{i-\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})}_{\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{M_{\widehat{\mathfrak{p}}}}) \cong H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \otimes \widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}} \neq 0.$$

Vì vậy $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}^i_{\widehat{R}}(\widehat{M}) = \operatorname{V}\big(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big)$. Chú ý rằng $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ luôn thỏa mãn tính chất $(*)$ khi xét như $\widehat{R}$-module. Do đó $\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \widehat{\mathfrak{p}}) = \widehat{\mathfrak{p}}$. Vì thế ta có

$$\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Ann}_R(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{p}) \subseteq \operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \widehat{\mathfrak{p}}) \cap R = \widehat{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}.$$

Điều này chứng tỏ $\operatorname{Ann}_R(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. Vậy $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$.

Cuối cùng giả sử các điều kiện (i) và (ii) thỏa mãn. Khi đó theo (ii)

$$\operatorname{psd}^i_R M = \dim(R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Theo (i) và Mệnh đề 1.4.2, ta có

$$\begin{aligned}\dim(R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)) &= \text{N-}\dim_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\\ &= \dim\big(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big)\\ &= \operatorname{psd}^i_R(\widehat{M}).\end{aligned}$$

Đặt $\text{N-}\dim_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = s$. Lấy $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R M$ thỏa mãn $\dim(R/\mathfrak{p}) = s$. Ta có $\mathfrak{p} \in \operatorname{V}\big(\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big)$ theo (i) $\Rightarrow$ (ii). Lập luận tương tự như trong (i) $\Rightarrow$ (ii), tồn tại

$$\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{V}\big(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big) = \operatorname{Psupp}^i_{\widehat{R}}(\widehat{M})$$

thoả mãn $\widehat{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}$ và $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(R/\mathfrak{p}) = s$.

Ngược lại lấy $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}^i_{\widehat{R}}(\widehat{M})$ thỏa mãn $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = s$. Khi đó $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{V}\big(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big)$. Đặt $\mathfrak{p} = \widehat{\mathfrak{p}} \cap R$. Ta có

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{V}\big(\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big) = \operatorname{Psupp}^i_R M$$

theo Mệnh đề 1.4.3 và theo (ii). Hơn nữa,

$$s = \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) \leqslant \dim(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R}) = \dim(R/\mathfrak{p}) \leqslant s.$$

Vì vậy $\dim(R/\mathfrak{p}) = s$. $\square$

Áp dụng Định lý 2.1.2 ta có hệ quả sau đưa ra mối liên hệ giữa cấu trúc vành là catenary phổ dụng và các thớ hình thức là Cohen-Macaulay và điều kiện các môđun đối đồng điều địa phương thỏa mãn tính chất $(*)$.

Hệ quả 2.1.3. *Nếu vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng và các thớ hình thức là Cohen-Macaulay thì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi $i \leqslant d$.*

Chứng minh. Vì vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng và các thớ hình thức là Cohen-Macaulay nên theo [7, Mệnh đề 2.5], ta có

$$\operatorname{V}\big(\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big) = \operatorname{Psupp}^i_R M,$$

với mọi $i \leqslant d$. Theo (ii)$\Rightarrow$(i) của Định lý 2.1.2, ta có $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi $i \leqslant d$. $\square$

Như vậy nếu vành R là catenary phổ dụng và các thớ hình thức là Cohen-Macaulay thì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi $i \leqslant d$ và với mọi R-môđun hữu hạn sinh M. Khi cố định một môđun M thì thì điều ngược lại không luôn đúng. Chẳng hạn xét vành R catenary nhưng không đồng thời là catenary phổ dụng và có các thớ hình thức là Cohen-Macaulay. Khi đó mọi R-môđun M chiều 1 luôn có các môđun đối đồng điều với giá cực đại thỏa mãn tính chất $(*)$.

Năm 2007, N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn đã đưa ra đặc trưng của tính chất $(*)$ cho môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá cực đại $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ qua tính catenary của vành $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$. Cùng với kết quả đó và Định lý 2.1.2, ta có hệ quả sau, chỉ ra điều kiện cần và đủ để tập giả giá thứ d của M là đóng.

Hệ quả 2.1.4. *Cho $\mathfrak{q}$ là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $\operatorname{Psupp}_R^d M$ *đóng.*

(ii) *Vành* $R/\operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(M))$ *là catenary.*

(iii) $H_{\mathfrak{m}}^d(M)$ *thỏa mãn tính chất* $(*)$.

(iv) $\operatorname{V}\big(\operatorname{Ann}(H_{\mathfrak{m}}^d(M))\big) = \operatorname{Psupp}_R^d M$.

Chứng minh. Theo Định lý 2.1.2, Định lý 4.1.1 và Định lý 1.4.4, ta chỉ cần chứng minh (i)⇒(ii). Giả sử $R/\operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(M))$ không catenary. Vì $R/\operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(M))$ đẳng chiều với chiều Krull d, nên theo Định lý 1.2.3, tồn tại một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(M))$ thỏa mãn

$$\dim(R/\mathfrak{p}) + \operatorname{ht}\big(\mathfrak{p}/\operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(M))\big) < d.$$

Trước hết ta chứng tỏ rằng $\dim(R/\mathfrak{p}) + \dim(M_{\mathfrak{p}}) < d$. Thật vậy, nếu trái lại sẽ tồn tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{q}$ thỏa mãn $\operatorname{Ann}_R M \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ và $\dim(R/\mathfrak{p}) + \operatorname{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = d$. Điều này kéo theo $\dim(R/\mathfrak{q}) = d$, và dẫn đến $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M$. Do đó $\mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(M))$ theo Định lý 1.3.6. Từ đó suy ra $\mathfrak{q} \supseteq \operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(M))$. Vì vậy

$$\dim(R/\mathfrak{p}) + \operatorname{ht}\big(\mathfrak{p}/\operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(M))\big) = d.$$

Điều vô lý này chứng tỏ khẳng định được chứng minh.

Ta có $\dim(M_{\mathfrak{p}}) < d - \dim(R/\mathfrak{p})$ theo khẳng định trên, nên

$$H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{d-\dim(R/\mathfrak{p})}(M_{\mathfrak{p}}) = 0,$$

nghĩa là $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Psupp}_R^d M$. Lấy $\mathfrak{p}_1 \in \min \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(M)))$ thỏa mãn $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}$. Theo Mệnh đề 1.3.1, ta có $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(M))$. Suy ra $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Ass} M$ với $\dim(R/\mathfrak{p}_1) = d$ theo Định lý 1.3.6. Từ đó kéo theo

$$H_{\mathfrak{p}_1R_{\mathfrak{p}_1}}^{d-\dim(R/\mathfrak{p}_1)}(M_{\mathfrak{p}_1}) \neq 0,$$

nghĩa là $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Psupp}_R^d M$. Vì vậy, $\operatorname{Psupp}_R^d M$ không đóng. Điều này mâu thuẫn với giả thiết (i). Vậy hệ quả được chứng minh □

Chú ý 2.1.5. Theo Định lý 2.1.2, nếu $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ thì $\operatorname{Psupp}^i_R M$ đóng. Điều ngược lại cũng đúng khi $i = d$ (theo Hệ quả 2.1.4). Tuy nhiên điều này không còn đúng khi $i < d$. Ví dụ, lấy R là miền nguyên địa phương Noether chiều 2 được xây dựng bởi Ferrand và Raynaud [53]. Vành này có tính chất tồn tại $\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Ass}\widehat{R}$, $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}}) = 1$. Khi đó $\operatorname{Psupp}^0_R R = \emptyset$, $\operatorname{Psupp}^1_R R = \{\mathfrak{m}\}$, $\operatorname{Psupp}^2_R R = \operatorname{Spec} R$. Các tập này đều đóng nhưng $H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ không thỏa mãn tính chất $(*)$.

2.2 Tính catenary phổ dụng của vành cơ sở

Trong mục này chúng tôi nghiên cứu tính chất $(*)$ cho các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ với $i < d$ liên hệ với tính catenary phổ dụng và tính không trộn lẫn của vành địa phương.

Định lý 2.2.1. *Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi $i < d$. Khi đó $R/\mathfrak{p}$ là không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ và vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ mà $R/\mathfrak{p}$ trộn lẫn, nghĩa là tồn tại $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$ thỏa mãn $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = k < \dim(R/\mathfrak{p})$. Rõ ràng $k < d$. Theo [33, Định lý 23.2 (ii)], ta có

$$\operatorname{Ass}\widehat{M} = \bigcup_{\mathfrak{q}\in\operatorname{Ass} M} \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R}).$$

Do đó $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}\widehat{M}$. Vì $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = k$ nên theo Hệ quả 1.3.5, $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^k_{\mathfrak{m}}(M))$. Từ đó theo Mệnh đề 1.4.2, ta có

$$\operatorname{N-dim}_R(H^k_{\mathfrak{m}}(M)) = \dim\big(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(H^k_{\mathfrak{m}}(M))\big) \geq \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = k.$$

Chú ý rằng $\operatorname{N-dim}_R(H^k_{\mathfrak{m}}(M)) \leqslant k$ theo Định lý 1.3.10. Vì vậy

$$\operatorname{N-dim}_R(H^k_{\mathfrak{m}}(M)) = k.$$

Theo Mệnh đề 1.3.13, tồn tại dãy các phần tử $x_1, \ldots, x_k$ của $\mathfrak{m}$ thỏa mãn môđun $0 :_{H^k_{\mathfrak{m}}(M)} (x_1, \ldots, x_k)R$ có độ dài hữu hạn. Đặt $I = (x_1, \ldots, x_k)R$. Vì $k < \dim(R/\mathfrak{p})$ nên

$$\operatorname{ht}\big((I + \mathfrak{p})/\mathfrak{p}\big) \leqslant k < \dim(R/\mathfrak{p}).$$

Do đó tồn tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{q}$ chứa $I + \mathfrak{p}$ thỏa mãn $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$. Ta có $\operatorname{Ann}_R(0 :_{H^k_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{q})$ là $\mathfrak{m}$-nguyên sơ, vì vậy $\operatorname{Ann}_R(0 :_{H^k_{\mathfrak{m}}(M)} \mathfrak{q}) \neq \mathfrak{q}$. Vì $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$ nên $\widehat{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}$ theo [33, Định lý 23.2 (i)]. Lại vì $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^k_{\mathfrak{m}}(M))$ nên theo Bổ đề 1.3.3, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R(H^k_{\mathfrak{m}}(M))$. Do đó

$$\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R(H^k_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Điều này chứng tỏ $H^k_{\mathfrak{m}}(M)$ không thỏa mãn tính chất $(*)$, vô lý. Như vậy $R/\mathfrak{p}$ là không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$.

Để chứng minh $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng, theo Định lý 1.2.7, ta cần chứng minh $R/\mathfrak{p}$ là tựa không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R M)$. Thật vậy, lấy $\mathfrak{p} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R M)$. Khi đó tồn tại $\mathfrak{q} \in \min(\operatorname{Ass} M)$ thỏa mãn $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Theo (i), ta có $R/\mathfrak{q}$ là không trộn lẫn. Vì $R/\mathfrak{p}$ đẳng chiều nên theo Định lý 1.2.6, $R/\mathfrak{p} \cong (R/\mathfrak{q})/(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})$ là tựa không trộn lẫn. □

Mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều cấp d và các môđun đối đồng điều điều cấp nhỏ hơn d được đưa ra trong hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.2. *Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi $i < d$. Khi đó $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ cũng thỏa mãn tính chất $(*)$.*

Chứng minh. Nhận xét rằng vành $R/\operatorname{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{m}}(M))$ là thương của vành $R/\operatorname{Ann}_R M$. Vì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi $i < d$, nên vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng theo Định lý 2.2.1. Do đó vành $R/\operatorname{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{m}}(M))$ là catenary. Như vậy $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ theo Định lý 1.4.4. □

Dựa vào Định lý 2.2.1 ta có thể chỉ ra ví dụ chứng tỏ rằng Hệ quả 2.1.3 không còn đúng nữa nếu giả thiết vành R là catenary phổ dụng hoặc các thớ hình thức là Cohen-Macaulay không được thỏa mãn.

Ví dụ 2.2.3. *Tồn tại vành địa phương Noether $(R, \mathfrak{m})$ thỏa mãn R không là catenary phổ dụng hoặc có một thớ hình thức không là Cohen-Macaulay nhưng tồn tại $i < d$ để $H^i_{\mathfrak{m}}(R)$ không thỏa mãn tính chất (∗).*

Chứng minh. Lấy $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên địa phương Noether catenary phổ dụng có số chiều $d \geq 3$ thỏa mãn $\widehat{R}$ có iđêan nguyên tố nhúng. Chú ý rằng miền nguyên như vậy tồn tại theo [7, Ví dụ 3.1]. Khi đó theo Định lý 2.2.1 tồn tại $i < d$ để $H^i_{\mathfrak{m}}(R)$ không thỏa mãn tính chất (∗) và R có thớ hình thức không Cohen-Macaulay.

Lấy $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên địa phương Noether catenary thỏa mãn điều kiện các thớ hình thức của R là Cohen-Macaulay nhưng R không là catenary phổ dụng. Chú ý rằng miền nguyên như vậy tồn tại theo [22, Ví dụ 28]. Khi đó theo Định lý 2.2.1 tồn tại $i < d$ để $H^i_{\mathfrak{m}}(R)$ không thỏa mãn tính chất (∗). Chú ý rằng ta có $H^d_{\mathfrak{m}}(R)$ thỏa mãn tính chất (∗). □

Năm 1980, M. Nagata [38] đã đưa ra câu hỏi: Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên địa phương Noether không trộn lẫn. Cho $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Liệu rằng $R/\mathfrak{p}$ không trộn lẫn? Năm 1983, M. Brodmann và C. Rotthaus [4] đã xây dựng một miền nguyên địa phương Noether có số chiều 3 thỏa mãn điều kiện $\widehat{R}$ là miền nguyên và tồn tại $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, $\dim R/\mathfrak{p} = 2$ để $\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R}$ có iđêan nguyên tố nhúng. Ví dụ này đưa ra câu trả lời phủ định cho câu hỏi của Nagata. Chúng tôi đưa ra một tiêu chuẩn về tính không trộn lẫn của vành $R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ và $\dim R/\mathfrak{p} \geq d - 1$ trong kết quả sau.

Định lý 2.2.4. *Giả sử M không trộn lẫn và $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (∗) với mọi $i < d$. Khi đó $R/\mathfrak{p}$ cũng không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ thỏa* *mãn* $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq d-1$.

Chứng minh. Lấy $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ thỏa mãn $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq d-1$.

Nếu $\dim(R/\mathfrak{p}) = d$ thì $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ và do đó $R/\mathfrak{p}$ không trộn lẫn theo Định lý 2.2.1.

Giả sử $\dim(R/\mathfrak{p}) = d-1$ và $R/\mathfrak{p}$ là trộn lẫn. Khi đó tồn tại $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$ thỏa mãn

$$\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = k < d-1.$$

Vì M không trộn lẫn nên $\dim(R/\mathfrak{p}) = d$ với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$. Do đó tồn tại $x \in \mathfrak{p}$ thỏa mãn x là M-chính quy. Vì $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann} M/xM$ và

$$\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(M/xM) = d-1$$

nên $\mathfrak{p} \in \min(\operatorname{Ass}(M/xM))$. Lại vì

$$\operatorname{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{M}/x\widehat{M}) = \bigcup_{\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_R(M/xM)} \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R})$$

theo [33, Định lý 23.2] suy ra $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{M}/x\widehat{M})$. Do $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = k$ nên $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^k_{\mathfrak{m}}(M/xM))$ theo Hệ quả 1.3.5. Từ dãy khớp

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0,$$

ta có dãy khớp cảm sinh

$$0 \longrightarrow H^k_{\mathfrak{m}}(M)/xH^k_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow H^k_{\mathfrak{m}}(M/xM) \longrightarrow 0 :_{H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M)} x \longrightarrow 0.$$

Vì vậy

$$\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^k_{\mathfrak{m}}(M)/xH^k_{\mathfrak{m}}(M)) \cup \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(0 :_{H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M)} x).$$

Nếu $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}\left(H^k_{\mathfrak{m}}(M)/xH^k_{\mathfrak{m}}(M)\right)$ thì $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^k_{\mathfrak{m}}(M))$. Do đó theo [6, Định lý 11.3.2], $\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^0_{\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{M_{\widehat{\mathfrak{p}}}}))$. Điều này kéo theo $\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}} \in \operatorname{Ass} \widehat{M}_{\widehat{\mathfrak{p}}}$ hay $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass} \widehat{M}$. Vì vậy theo giả thiết, ta có $\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}} = d > k$, vô lý. Suy ra

$\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(0 :_{H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M)} x)$. Điều này kéo theo $\widehat{\mathfrak{p}} \in \mathrm{V}(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M)))$. Do đó, theo Mệnh đề 1.4.2

$$\text{N-dim}_R(H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M)) = \dim \widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M) \geq \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = k.$$

Chú ý rằng $\text{N-dim}_R(H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M)) \leqslant k+1$ theo Định lý 1.3.10. Vì vậy

$$k \leq \text{N-dim}_R(H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M)) \leqslant k+1.$$

Nếu $\text{N-dim}_R(H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M)) = k+1$ thì theo Mệnh đề 1.4.2, tồn tại iđêan nguyên tố $\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}\left(H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M)\right)$ thỏa mãn $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}}) = k+1$. Tương tự như trên, ta có $\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Ass} \widehat{M}$. Vì M không trộn lẫn nên

$$\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}}) = d \neq k+1.$$

Điều này là vô lý. Vậy $\text{N-dim}_R\left(H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M)\right) = k$. Vì $\widehat{\mathfrak{p}} \in \mathrm{V}(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M))$ và $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = k$ nên ta có $\widehat{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M))$. Do đó

$$\mathfrak{p} = \widehat{\mathfrak{p}} \cap R \in \operatorname{Att}_R(H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M))$$

theo Bổ đề 1.3.3. Điều này kéo theo

$$\dim\left(R/\operatorname{Ann}_R(H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M))\right) \geq \dim(R/\mathfrak{p}) = d-1 > k = \text{N-dim}_R\left(H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M)\right).$$

Như vậy theo Mệnh đề 1.4.2 $H^{k+1}_{\mathfrak{m}}(M)$ không thỏa mãn tính chất $(*)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy định lý được chứng minh. □

Dựa vào Định lý 2.2.4 ta đưa ra ví dụ sau chứng tỏ chiều ngược lại của Định lý 2.2.1 là không đúng.

Ví dụ 2.2.5. *Tồn tại miền nguyên địa phương Noether $(R, \mathfrak{m})$ thỏa mãn $R/\mathfrak{p}$ không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R$ và R là catenary phổ dụng nhưng tồn tại $i < \dim R$ để $H^i_{\mathfrak{m}}(R)$ không thỏa mãn tính chất $(*)$.*

Chứng minh. Xét miền nguyên địa phương Noether có số chiều 3 thỏa mãn tồn tại $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, $\dim R/\mathfrak{p} = 2$ để $\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R}$ có iđêan nguyên tố nhúng (xem

[4]). Ta có R là catenary phổ dụng, không trộn lẫn, $H^0_{\mathfrak{m}}(R)$ và $H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ thỏa mãn tính chất $(*)$. Vì tồn tại $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $\dim R/\mathfrak{p} = 2$ và $R/\mathfrak{p}$ là trộn lẫn nên theo Định lý 2.2.4 ta có $H^2_{\mathfrak{m}}(R)$ không thỏa mãn tính chất $(*)$. Chú ý rằng $H^3_{\mathfrak{m}}(R)$ thỏa mãn tính chất $(*)$. □

Kết luận Chương 2

Trong chương này chúng tôi đã thu được các kết quả sau.

- Đưa ra một đặc trưng để môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ thông qua tập giả giá của M. Đưa ra mối liên hệ giữa giả chiều thứ i của M, chiều Krull và chiều Noether của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$. Cũng từ đó chứng tỏ rằng nếu một vành là catenary phổ dụng và các thớ hình thức là Cohen-Macaulay thì các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi R-môđun hữu hạn sinh M và với mọi i.

- Chứng tỏ rằng nếu các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi i, trong đó M là một R-môđun hữu hạn sinh cho trước thì vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng và các vành $R/\mathfrak{p}$ là không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$.

- Chỉ ra rằng nếu môđun M là không trộn lẫn thì các vành $R/\mathfrak{p}$ cũng là không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ thỏa mãn $\dim R/\mathfrak{p} \geq d-1$ với điều kiện các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_m(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$.

Chương 3

Môđun đối đồng điều địa phương tựa không trộn lẫn

Trong suốt chương này, chúng tôi luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether với iđêan cực đại duy nhất $\mathfrak{m}$. Cho A là một R-môđun Artin. Cho M là một R-môđun hữu hạn sinh với chiều Krull, $\dim M = d$.

Nhắc lại trong [13], N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn đã đưa ra mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ của một loại môđun Artin đặc biệt - môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ và tính catenary của vành địa phương $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$. Cụ thể $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ khi và chỉ khi vành $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary. Nhận xét rằng $H^d_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^d_{\mathfrak{m}\widehat{R}}(\widehat{M})$ như các $\widehat{R}$-môđun. Hơn nữa theo Định lý 1.3.6

$$\operatorname{Att}_{\widehat{R}} H^d_{\mathfrak{m}}(M) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M} \mid \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = d\}.$$

Từ đó, dựa vào các khái niệm tựa không trộn lẫn, không trộn lẫn đã được định nghĩa cho các môđun hữu hạn sinh (xem Định nghĩa 1.2.5), chúng tôi định nghĩa và nghiên cứu lớp *môđun Artin tựa không trộn lẫn*, lớp *môđun Artin trộn lẫn*. Phát triển ý tưởng trong [13], chúng tôi đã chỉ ra rằng nếu A là môđun Artin tựa không trộn lẫn, A thỏa mãn tính chất $(*)$ thì vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là catenary và $\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A)$. Các ví dụ đã được xây dựng để chỉ ra rằng giả thiết tựa không trộn lẫn là không bỏ đi được. Từ đó một câu hỏi tự nhiên đặt ra là liệu rằng chiều ngược lại của kết quả trên vẫn đúng? Chúng tôi đã chỉ ra ví dụ chứng tỏ rằng chiều ngược lại là sai. Mặt khác chúng tôi cũng chỉ ra rằng chiều ngược lại là đúng cho một lớp môđun Artin, đó là lớp môđun đối đồng điều địa phương với giá là iđêan cực đại và tựa không trộn lẫn. Đây là một sự mở rộng của kết quả chính trong [13].

Nội dung chính của chương được trình bày dựa theo bài báo [40].

3.1 Môđun Artin tựa không trộn lẫn

Trước hết chúng tôi đưa ra định nghĩa môđun Artin tựa không trộn lẫn và một số lớp môđun liên quan, đưa ra một số nghiên cứu về môđun Artin tựa không trộn lẫn làm cơ sở cho việc trình bày kết quả chính trong Tiết 2 của chương này.

Định nghĩa 3.1.1. Môđun Artin A được gọi là *đẳng chiều* nếu $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R/\operatorname{Ann}_R A)$ với mọi iđêan nguyên tố gắn kết $\mathfrak{p} \in \min \operatorname{Att}_R A$ và A được gọi là *tựa không trộn lẫn* nếu $\widehat{R}$-môđun A là đẳng chiều, tức là $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A)$ với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$. Nếu $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A)$ với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$ thì ta nói A là *không trộn lẫn.*

Như vậy rõ ràng nếu A là không trộn lẫn thì A là tựa không trộn lẫn. Một ví dụ quen thuộc về lớp môđun Artin không trộn lẫn là môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá cực đại $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$. Hơn nữa theo Định lý 1.1.5, với iđêan I tuỳ ý của R, ta cũng có $H^d_I(M)$ là R-môđun Artin và theo [15, Định lý A],

$$\operatorname{Att}_{\widehat{R}} H^d_I(M) \subseteq \{\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M} \mid \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = d\}.$$

Vì thế $H^d_I(M)$ cũng là môđun Artin không trộn lẫn.

Ta biết rằng nếu môđun Noether M là tựa không trộn lẫn thì với mọi phần hệ tham số $(x_1, \ldots, x_r)$ của M, môđun $M/(x_1, \ldots, x_r)M$ cũng là tựa không trộn lẫn. Sau đây chúng ta chỉ ra rằng điều tương tự cũng đúng cho các môđun Artin tựa không trộn lẫn. Đây là một kết quả bổ trợ cho việc chứng minh kết quả chính của tiết.

Bổ đề 3.1.2. *Nếu A là tựa không trộn lẫn thì $0 :_A (x_1, \ldots, x_r)R$ cũng là tựa không trộn lẫn với mọi phần hệ tham số $(x_1, \ldots, x_r)$ của A.*

Chứng minh. Cho $\text{N-dim}_R A = s$ và $(x_1, \ldots, x_r)$ là một phần hệ tham số của A. Theo Bổ đề 1.4.2 ta có $\dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A) = s$ và

$$\begin{aligned}\dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(0 :_A (x_1, \ldots, x_r)R)) &= \text{N-dim}(0 :_A (x_1, \ldots, x_r)R) \\ &= s - r.\end{aligned}$$

Lấy $\widehat{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(0 :_A (x_1, \ldots, x_r)R)$. Khi đó, theo Bổ đề 1.4.2 ta suy ra $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) \leq s - r$. Chú ý rằng $\widehat{\mathfrak{p}} \supseteq \operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A$. Do đó $\widehat{\mathfrak{p}_1} \subseteq \widehat{\mathfrak{p}}$, với $\widehat{\mathfrak{p}}_1 \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$ nào đó. Mặt khác do A là tựa không trộn lẫn nên $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}_1}) = s$. Lại có $\widehat{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{V}(\widehat{\mathfrak{p}_1} + (x_1, \ldots, x_r)\widehat{R})$ nên $\operatorname{ht}(\widehat{\mathfrak{p}}/\widehat{\mathfrak{p}_1}) \leq r$ theo [33, Định lý 13.5]. Do đó ta có

$$\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = s - \operatorname{ht}(\widehat{\mathfrak{p}}/\widehat{\mathfrak{p}_1}) \geq s - r.$$

Vì thế $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = s - r$. □

Chú ý rằng nếu môđun Noether M là tựa không trộn lẫn thì M là đẳng chiều. Thật vậy, giả sử $\mathfrak{p} \in \min \operatorname{Ass} M$. Vì

$$\operatorname{Ass} M = \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \mid \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass} \widehat{M}\}$$

nên tồn tại $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass} \widehat{M}$ sao cho $\widehat{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}$. Gọi $\widehat{\mathfrak{q}} \in \min \operatorname{Ass} \widehat{M}$ sao cho $\widehat{\mathfrak{q}} \subseteq \widehat{\mathfrak{p}}$. Đặt $\mathfrak{q} = \widehat{\mathfrak{q}} \cap R$. Khi đó $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M$ và $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Do $\mathfrak{p}$ là tối tiểu nên $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Vì thế $\mathfrak{p} = \widehat{\mathfrak{q}} \cap R$ với $\widehat{\mathfrak{q}} \in \min \operatorname{Ass} \widehat{M}$. Do M là tựa không trộn lẫn nên

$$d \geq \dim(R/\mathfrak{p}) \geq \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}}) = \dim \widehat{M} = d.$$

Vì thế $\dim(R/\mathfrak{p}) = d$. Do đó M là đẳng chiều. Tuy nhiên, đối với các môđun Artin tựa không trộn lẫn thì điều tương tự là không đúng, tức là có những môđun Artin tựa không trộn lẫn không là đẳng chiều. Sau đây là một ví dụ.

Ví dụ 3.1.3. *Tồn tại môđun Artin A tựa không trộn lẫn nhưng không đẳng chiều.*

Chứng minh. Cho R là miền nguyên Noether địa phương có chiều là 3 được xây dựng bởi M. Brodmann và C. Rotthaus [4] sao cho $\widehat{R}$ là miền nguyên và có một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ để $R/\mathfrak{p}$ là trộn lẫn. Khi đó tồn tại $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$ với $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) < \dim(R/\mathfrak{p})$. Vì $\widehat{R}$ là miền nguyên nên ta suy ra $\mathfrak{p} \neq 0$ và $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. Do đó $\dim(R/\mathfrak{p}) = 2$ và $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = 1$. Lấy $0 \neq x \in \mathfrak{p}$ và chọn $y, z \in \mathfrak{m}$ sao cho (x, y, z) là một hệ tham số của R. Chọn $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(R/(y, z)R)$ sao cho $\dim(R/\mathfrak{q}) = 1$. Đặt $A = B \oplus C$, trong đó $B = H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p})$ và $C = H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{q})$. Khi đó A là R-môđun Artin (xem Định lý 1.1.5). Theo Hệ quả 1.3.5, $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}} B$. Do vậy $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R B$ theo Bổ đề 1.3.3 và do đó ta có $\min \operatorname{Att}_R B = \{\mathfrak{p}\}$. Theo Định lý 1.3.6, ta có $\operatorname{Att}_R C = \{\mathfrak{q}\}$. Vì $\dim(R/\mathfrak{q}) = 1$ và $\dim(R/\mathfrak{p}) = 2$ nên ta có $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Ta chứng minh $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$. Thật vậy, nếu $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ thì

$$\dim(R/\mathfrak{q}) \leq \dim(R/(x, y, z)R) = 0.$$

Điều này là vô lí. Do đó $\min \operatorname{Att}_R A = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}$. Vì thế A là không đẳng chiều. Chú ý rằng có các đẳng cấu $\widehat{R}$-môđun $H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p}) \simeq H^1_{\mathfrak{m}\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$ và $H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{q}) \simeq H^1_{\mathfrak{m}\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R})$. Do đó $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}}) \leq 1$ với mọi $\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$. Do vậy A là tựa không trộn lẫn. □

Kết quả dưới đây đưa ra một điều kiện để một môđun Artin tựa không trộn lẫn là đẳng chiều. Đây cũng là một kết quả bổ trợ cho việc chứng minh kết quả chính của tiết.

Bổ đề 3.1.4. *Giả sử A là tựa không trộn lẫn,* $\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \text{N-dim}\, A$ *và I là một iđêan của R. Khi đó A là đẳng chiều và*

$$\dim(R/\operatorname{Ann}_R(0 :_A I)) = \text{N-dim}(0 :_A I).$$

Chứng minh. Giả sử rằng $\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \text{N-dim}\, A = s$. Khi đó theo Mệnh đề 1.4.2, ta có $\dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A) = s$. Lấy $\mathfrak{p} \in \min \operatorname{Att}_R A$. Vì

$$\dim(R/\operatorname{Ann} A) = \max\{\dim(R/\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R A\}$$

nên $\dim R/\mathfrak{p} \leq s$. Theo Bổ đề 1.3.3, tồn tại $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$ sao cho $\widehat{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}$. Khi đó $\widehat{\mathfrak{p}} \supseteq \widehat{\mathfrak{q}}$ với một $\widehat{\mathfrak{q}} \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$ nào đó. Do vậy $\widehat{\mathfrak{q}} \cap R \in \operatorname{Att}_R A$ theo Bổ đề 1.3.3. Vì $\mathfrak{p}$ là tối tiểu trong $\operatorname{Att}_R A$ nên $\widehat{\mathfrak{q}} \cap R = \mathfrak{p}$. Do A tựa không trộn lẫn nên $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}}) = s$. Do đó $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq s$. Suy ra $\dim(R/\mathfrak{p}) = s$. Vậy A là đẳng chiều.

Tiếp theo, cho một phần hệ tham số $(x_1, \ldots, x_r)$ của A, ta chứng minh đẳng thức

$$\dim(R/\operatorname{Ann}_R(0 :_A (x_1, \ldots, x_r)R)) = \text{N-dim}(0 :_A (x_1, \ldots, x_r)R) = s - r.$$

Ta chứng minh đẳng thức này bằng quy nạp theo r. Cho $r = 1$ và đặt $x = x_1$. Lấy $\mathfrak{p} \in \min \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R A)$ sao cho $\dim R/\mathfrak{p} = s$. Khi đó, theo Mệnh đề 1.3.1 ta suy ra $\mathfrak{p} \in \min \operatorname{Att}_R A$. Do đó, theo Bổ đề 1.3.3, tồn tại $\widehat{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$ sao cho $\mathfrak{p} = \widehat{\mathfrak{p}} \cap R$. Vì A là tựa không trộn lẫn nên $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = s$. Do

$$\dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(0 :_A x)) = \text{N-dim}(0 :_A x) = s - 1,$$

nên ta suy ra

$$\widehat{\mathfrak{p}} \not\supseteq \operatorname{Rad}(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(0 :_A x)) = \operatorname{Rad}(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A + x\widehat{R}).$$

Do đó $x \notin \widehat{\mathfrak{p}}$, và vì thế $x \notin \mathfrak{p}$. Suy ra x là phần tử tham số của vành địa phương $R/\operatorname{Ann}_R A$, tức là $\dim(R/(\operatorname{Ann}_R A + xR)) = s - 1$. Vậy

$$\dim(R/\operatorname{Ann}_R(0 :_A x)) \leqslant \dim R/\operatorname{Ann}_R A + xR = s - 1.$$

Theo Mệnh đề 1.3.9,

$$\dim(R/\operatorname{Ann}_R(0:_A x)) \geq \text{N-dim}(0:_A x) = s-1.$$

Suy ra ta có đẳng thức đúng với $r=1$. Cho $r>1$. Đặt $B = 0 :_A (x_1,\ldots,x_{r-1})R$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\text{N-dim}\, B = \dim(R/\operatorname{Ann}_R B) = s-r+1.$$

Vì B là tựa không trộn lẫn theo Bổ đề 3.1.2 và x_r là phần tử tham số của B nên áp dụng kết quả cho trường hợp $r=1$ ta nhận được

$$\text{N-dim}(0:_B x_r) = \dim(R/\operatorname{Ann}_R(0:_B x_r)) = s-r.$$

Vậy, đẳng thức trên được chứng minh.

Bây giờ ta xét I là một iđêan của R. Đặt $\text{N-dim}(0:_A I) = s-r$. Khi đó, theo Mệnh đề 1.3.13, tồn tại một phần hệ tham số $(x_1,\ldots,x_r)$ của A trong I. Vì thế, theo đẳng thức trên và theo Mệnh đề 1.3.9, ta có

$$\begin{aligned}
s-r = \text{N-dim}(0:_A (x_1,\ldots,x_r)R) &= \dim(R/\operatorname{Ann}_R(0:_A (x_1,\ldots,x_r)R) \\
&\geq \dim(R/\operatorname{Ann}_R(0:_A I)) \\
&\geq \text{N-dim}(0:_A I) = s-r.
\end{aligned}$$

Vậy, bổ đề được chứng minh. □

Định lý sau đây là kết quả chính của tiết, đưa ra mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ của môđun Artin tựa không trộn lẫn A, tính catenary của vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ và chiều của A.

Định lý 3.1.5. *Giả sử A là tựa không trộn lẫn. Nếu A thỏa mãn tính chất $(*)$ thì vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là catenary và*

$$\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \text{N-dim}_R A.$$

Chứng minh. Giả sử $\operatorname{N-dim} A = s$. Do A thỏa mãn tính chất $(*)$ nên theo Mệnh đề 1.4.2, ta có

$$\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \operatorname{N-dim} A = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A) = s.$$

Mặt khác do A là tựa không trộn lẫn và $\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \operatorname{N-dim} A$ nên theo Bổ đề 3.1.4, ta có A là đẳng chiều. Theo Mệnh đề 1.3.1 và [31, 2.3], ta suy ra vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là đẳng chiều. Vì thế, theo Định lý 1.2.3, để chứng minh vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là catenary ta chỉ cần chỉ ra rằng

$$\dim(R/\mathfrak{p}) + \operatorname{ht}(\mathfrak{p}/\operatorname{Ann}_R A) = s$$

với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R A$. Lấy $\mathfrak{p} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R A)$. Đặt $\operatorname{N-dim}(0 :_A \mathfrak{p}) = s - k$. Theo Mệnh đề 1.3.13, tồn tại một phần hệ tham số $(x_1, \ldots, x_k)$ của A chứa trong $\mathfrak{p}$. Đặt $J_0 = 0$ và $J_i = (x_1, \ldots, x_i)R$ với mọi $i = 1, \ldots, k$. Với mỗi i cho trước, theo Bổ đề 3.1.4, ta có $0 :_A J_i$ là tựa không trộn lẫn. Hơn nữa, theo Bổ đề 3.1.2

$$\dim(R/\operatorname{Ann}_R(0 :_A J_i)) = \operatorname{N-dim}(0 :_A J_i) = s - i.$$

Vì thế, theo Bổ đề 3.1.4, $0 :_A J_i$ là đẳng chiều. Vì A thoả mãn tính chất $(*)$ nên $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p})$. Suy ra $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R(0 :_A J_k)$. Theo Mệnh đề 1.3.1 (ii), ta có $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_k$ với một $\mathfrak{p}_k \in \min \operatorname{Att}_R(0 :_A J_k)$ nào đó. Tiếp tục lập luận trên, ta nhận được một dãy iđêan nguyên tố

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_k \supseteq \mathfrak{p}_{k-1} \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{p}_0 \supseteq \operatorname{Ann}_R A,$$

trong đó $\mathfrak{p}_i \in \min \operatorname{Att}_R(0 :_A J_i)$ với mọi $i = 0, \ldots, k$. Vì $0 :_A J_i$ là đẳng chiều nên $\dim(R/\mathfrak{p}_i) = s - i$. Vì thế $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_{i+1}$ với mọi i. Suy ra $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}/\operatorname{Ann}_R A) \geq k$, và do đó $\dim(R/\mathfrak{p}) + \operatorname{ht}(\mathfrak{p}/\operatorname{Ann}_R A) = s$. □

Giả thiết tựa không trộn lẫn của A trong Định lí 3.1.5 là không bỏ đi được. Các ví dụ sau đây chỉ ra điều này.

Ví dụ 3.1.6. *Tồn tại một R-môđun Artin A không là tựa không trộn lẫn sao cho A thỏa mãn tính chất* $(*)$, $\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \operatorname{N-dim}_R A$, *nhưng vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ không là catenary.*

Chứng minh. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên Noether không catenary có chiều $d \geq 3$. Chú ý rằng một miền nguyên như vậy luôn tồn tại (xem [3]). Kí hiệu $E(R/\mathfrak{m})$ là bao nội xạ của trường thặng dư $R/\mathfrak{m}$. Đặt $A = E(R/\mathfrak{m})$. Khi đó theo [6, Định lý 10.2.5]), A là R-môđun Artin. Theo [12, Bổ đề 4.4], A thỏa mãn tính chất $(*)$. Do đó $\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \operatorname{N-dim}_R A$ theo Mệnh đề 1.4.2. Vì R là miền nguyên nên theo [47, Định lý 2.6], ta có

$$\operatorname{Att}_R A = \operatorname{Ass} R = \{0\}.$$

Do đó theo Mệnh đề 1.3.1, ta có $\operatorname{Ann}_R A = 0$. Vì thế vành $R/\operatorname{Ann}_R A = R$ là không catenary.

Ta chứng minh A không là tựa không trộn lẫn. Chú ý rằng có đẳng cấu các $\widehat{R}$-môđun $E(R/\mathfrak{m}) \simeq E(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}})$. Do đó theo [47, Định lý 2.6], ta có $\operatorname{Att}_{\widehat{R}} A = \operatorname{Ass} \widehat{R}$. Suy ra $\min \operatorname{Ass}(\widehat{R}) = \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$. Vì R không catenary nên nó không catenary phổ dụng. Do đó theo Định lý 1.2.6, ta suy ra $\widehat{R}$ là không đẳng chiều. Vì thế tồn tại $\widehat{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Ass} \widehat{R} = \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$ sao cho $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) < \dim \widehat{R}$. Lại có

$$\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{m}\widehat{R})^n = 0$$

theo [50, Mệnh đề 4.23], nên

$$\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) < \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A) = \operatorname{N-dim} A.$$

Vậy A không là tựa không trộn lẫn. □

Ví dụ 3.1.7. *Tồn tại R-môđun Artin A không là tựa không trộn lẫn sao cho $R/\operatorname{Ann}_R A$ là catenary và* $\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \operatorname{N-dim} A$, *nhưng A không thỏa mãn tính chất* $(*)$.

Chứng minh. Gọi R là miền nguyên Noether địa phương chiều 3 được xây dựng bởi M. Brodmann và C. Rotthaus [4] sao cho $\widehat{R}$ là miền nguyên và $R/\mathfrak{p}$ trộn lẫn với một iđêan $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Chọn $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$ sao cho $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) < \dim(R/\mathfrak{p})$. Như trong Ví dụ 3.1.3, ta có $\dim(R/\mathfrak{p}) = 2$, $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = 1$ và $\widehat{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p}))$. Chú ý rằng thành phần $\widehat{\mathfrak{p}}$-thứ cấp của $H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p})$ không phụ thuộc vào biểu diễn thứ cấp tối tiểu của $H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p})$ (xem [31]). Gọi B là thành phần $\widehat{\mathfrak{p}}$-thứ cấp của $H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p})$ xét như $\widehat{R}$-môđun. Khi đó $\operatorname{Att}_{\widehat{R}} B = \{\widehat{\mathfrak{p}}\}$ và kéo theo $\operatorname{Att}_R B = \{\mathfrak{p}\}$. Lấy $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$ và chọn $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Ass}(R/(\mathfrak{p} + xR))$ sao cho $\dim(R/\mathfrak{p}_1) = 1$. Lấy $y \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}_1$. Khi đó $\dim(R/yR) = 2$. Chọn $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(R/yR)$ sao cho $\dim(R/\mathfrak{q}) = 2$. Đặt $C = H^2_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{q})$. Vì ta có đẳng cấu các $\widehat{R}$-môđun $H^2_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{q}) \cong H^2_{\mathfrak{m}\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R})$ nên theo Định lý 1.3.6 ta suy ra $\operatorname{Att}_R C = \{\mathfrak{q}\}$ và

$$\operatorname{Att}_{\widehat{R}} C = \{\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R}) \mid \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}}) = 2\}.$$

Đặt $A = B \oplus C$. Khi đó A là R-môđun Artin, $\operatorname{Att}_R A = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}$ và

$$\operatorname{Att}_{\widehat{R}} A = \{\widehat{\mathfrak{p}}\} \cup \{\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R}) \mid \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}}) = 2\}.$$

Vì $y \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}_1$ và $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_1$ nên ta có $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Do đó $\widehat{\mathfrak{q}} \not\subseteq \widehat{\mathfrak{p}}$ với mọi $\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}} C$. Vì thế $\widehat{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$. Vậy A không là tựa không trộn lẫn.

Vì $\widehat{R}$ là miền nguyên nên R là catenary phổ dụng theo Định lý 1.2.6. Vì thế vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là catenary. Hơn nữa theo Bổ đề 1.3.1, ta có $\dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A) = 2$ và $\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = 2$. Cuối cùng ta chứng minh A không thoả mãn $(*)$. Chú ý rằng $\mathfrak{p}_1 \supseteq \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R A$. Vì $y \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}_1$ nên ta suy ra $\mathfrak{p}_1 \not\supseteq \mathfrak{q}$. Chú ý rằng $\operatorname{Att}_R C = \{\mathfrak{q}\}$ và $\dim(R/\mathfrak{p}_1) = 1$. Vì thế

$$\begin{aligned}\dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(0:_C \mathfrak{p}_1)\big) &\leqslant \dim\big(R/(\mathfrak{p}_1 + \operatorname{Ann}_R C)\big)\\ &= \dim\big(R/(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{q})\big) = 0.\end{aligned}$$

Do đó $\operatorname{Ann}_R(0:_C \mathfrak{p}_1)$ là $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Vì thế $\operatorname{Ann}_R(0:_C \mathfrak{p}_1) \neq \mathfrak{p}_1$. Từ dãy khớp

$$0 \longrightarrow R/\mathfrak{p} \xrightarrow{x} R/\mathfrak{p} \longrightarrow R/(\mathfrak{p} + xR) \longrightarrow 0,$$

ta có dãy khớp cảm sinh

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}\big(R/(\mathfrak{p} + xR)\big) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p}) \xrightarrow{x} H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p}).$$

Suy ra $0 :_{H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p})} x \cong H^0_{\mathfrak{m}}\big(R/(\mathfrak{p} + xR)\big)$ và do đó $0 :_{H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p})} x$ có độ dài hữu hạn. Vì $x \in \mathfrak{p}_1$ nên $0 :_B \mathfrak{p}_1$ là R-môđun có độ dài hữu hạn. Suy ra $\mathrm{Ann}_R(0 :_B \mathfrak{p}_1) \neq \mathfrak{p}_1$. Vì thế

$$\mathrm{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}_1) = \mathrm{Ann}_R(0 :_B \mathfrak{p}_1) \cap \mathrm{Ann}_R(0 :_C \mathfrak{p}_1) \neq \mathfrak{p}_1.$$

Vậy A không thoả mãn tính chất $(*)$. $\square$

3.2 Môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là chiều ngược lại của Định lý 3.1.5 còn đúng không? Chúng tôi sẽ chỉ ra ví dụ chứng tỏ rằng nhìn chung chiều ngược lại là sai. Ví dụ này được xây dựng dựa trên miền nguyên chiều 3 đưa ra bởi C. Huneke [21]. Để thuận lợi cho việc trình bày ví dụ, ta nhắc lại khái niệm môđun đối hữu hạn. Giả sử I là một iđêan của R. Một R-môđun N được gọi là *I-đối hữu hạn* nếu $\mathrm{Supp}(N) \subseteq \mathrm{V}(I)$ và $\mathrm{Ext}^i_R(R/I, N)$ là hữu hạn sinh với mọi $i \geq 0$. Sử dụng đối ngẫu Matlis (Định lý 1.1.6), ta có một môđun là $\mathfrak{m}$-đối hữu hạn nếu và chỉ nếu nó là môđun Artin. Như vậy môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là $\mathfrak{m}$-đối hữu hạn với mọi R-môđun hữu hạn sinh M. Trong [19], R. Hartshorne đã đưa ra câu hỏi $H^i_I(M)$ là I-đối hữu hạn với mọi i? Tuy nhiên R. Hartshorne đã chỉ ra rằng nhìn chung điều đó là không đúng, đồng thời ông chứng tỏ rằng nếu R là vành địa phương, chính quy, đầy đủ, $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố thỏa mãn $\dim R/\mathfrak{p} = 1$ thì $H^i_{\mathfrak{p}}(M)$ hữu hạn sinh với mọi i. D. Delfino và T. Marley [14] đã mở rộng kết quả của R. Hartshorne cho một vành giao hoán địa phương Noether và $\mathfrak{p}$ là một iđêan bất kỳ chiều 1 của R. Hơn nữa họ chỉ ra tính đối hữu hạn của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất.

Bổ đề 3.2.1. [14, Định lý 3] *Giả sử I là một iđêan của R và M là R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Khi đó $H_I^d(M)$ là I-đối hữu hạn.*

Ví dụ 3.2.2. *Cho k là một trường đặc số 0, $R = \left(\frac{k[x,y,u,v]}{(f)}\right)_{\mathfrak{m}}$, trong đó $k[x,y,u,v]$ là vành đa thức của các biến x,y,u,v, $f = xy - ux^2 - vy^2$ và $\mathfrak{m} = (x,y,u,v)$. Đặt $\mathfrak{p} = (y,u,v)R$. Ta có R là miền nguyên, catenary chiều 3, $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 2$ (xem [21, Ví dụ 6.2]). Khi đó $0 \neq H_{\mathfrak{p}}^3(R)$ là môđun Artin tựa không trộn lẫn,*

$$\dim R/\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{p}}^3(R) = \dim \widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H_{\mathfrak{p}}^3(R) = 3$$

nhưng $H_{\mathfrak{p}}^3(R)$ không thỏa mãn tính chất ($*$).

Kết quả sau bổ trợ cho việc chứng minh ví dụ trên.

Bổ đề 3.2.3. *Trong vành các chuỗi luỹ thừa hình thức $k[[x,y,u,v]]$ tồn tại sự phân tích*

$$f = xy - ux^2 - vy^2 = (x - vy + a_3 + a_4 + \cdots)(y - ux + b_3 + b_4 + \cdots),$$

trong đó a_i, b_i, với mọi $i \geq 3$ là các đa thức thuần nhất bậc i và thuộc vào iđêan sinh bởi y,u,v của $k[[x,y,u,v]]$.

Chứng minh. Ta dễ dàng chứng minh sự tồn tại của a_i, b_i, với mọi $i \geq 3$ bằng quy nạp theo i. □

Chứng minh Ví dụ 3.2.2. Gọi $\widehat{R}$ là đầy đủ hóa của R theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic. Một phần tử của $k[[x,y,u,v]]$ khả nghịch nếu nó chứa số hạng tự do khác không. Vì vậy dễ thấy $x - vy + a_3 + a_4 + \cdots$ và $y - uv + b_3 + b_4 + \cdots$ trong Bổ đề 3.2.3 là bất khả quy trong $k[[x,y,u,v]]$. Đặt $\widehat{\mathfrak{p}}_1 = (x - vy + a_3 + a_4 + \cdots)\widehat{R}$ và $\widehat{\mathfrak{p}}_2 = (y - uv + b_3 + b_4 + \cdots)\widehat{R}$. Ta có các iđêan đó là nguyên tố và

$$\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}_1 = \dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}_2 = 3.$$

Mặt khác theo Bổ đề 3.2.3, ta có $(f)\widehat{R} = \widehat{\mathfrak{p}}_1 \cap \widehat{\mathfrak{p}}_2$. Do đó $\operatorname{Assh} \widehat{R} = \{\widehat{\mathfrak{p}}_1, \widehat{\mathfrak{p}}_2\}$. Vì $\mathfrak{p}\widehat{R} + \widehat{\mathfrak{p}}_1 = \mathfrak{m}\widehat{R}$, nên theo Định lý triệt tiêu Lichtenbaum-Hartshorne [6, Định lý 8.2.1], ta có $H^3_{\mathfrak{p}}(R) \neq 0$. Lại vì

$$\mathfrak{p}\widehat{R} + \widehat{\mathfrak{p}}_2 = \mathfrak{p}\widehat{R} \subsetneq \mathfrak{m}\widehat{R}$$

nên theo [15, Hệ quả 2], ta có $\operatorname{Att}_{\widehat{R}} H^3_{\mathfrak{p}}(R) = \{\widehat{\mathfrak{p}}_1\}$. Vì vậy $\widehat{\mathfrak{p}}_1 \cap R \in \operatorname{Att}_R H^3_{\mathfrak{p}}(R)$ theo Bổ đề 1.3.3. Vì $0 \subseteq \widehat{\mathfrak{p}}_1 \cap R$ là các iđêan nguyên tố của R và

$$\dim R/\widehat{\mathfrak{p}}_1 \cap R \geq \dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}_1 = 3$$

nên $0 = \widehat{\mathfrak{p}}_1 \cap R \in \operatorname{Att}_R H^3_{\mathfrak{p}}(R)$. Điều này kéo theo $\operatorname{Ann}_R H^3_{\mathfrak{p}}(R) = 0$. Vì vậy $\mathfrak{p} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H^3_{\mathfrak{p}}(R))$. Vì $H^3_{\mathfrak{p}}(R)$ là môđun Artin nên theo Bổ đề 3.2.1 môđun $0 :_{H^3_{\mathfrak{p}}(R)} \mathfrak{p} = \operatorname{Hom}(R/\mathfrak{p}; H^3_{\mathfrak{p}}(R))$ có độ dài hữu hạn. Điều này chứng tỏ $\operatorname{Ann}_R(0 :_{H^3_{\mathfrak{p}}(R)} \mathfrak{p}) \neq \mathfrak{p}$, hay $H^3_{\mathfrak{p}}(R)$ không thỏa mãn tính chất $(*)$. $\square$

Sau đây chúng tôi sẽ chứng tỏ rằng chiều ngược lại của Định lý 3.1.5 vẫn còn đúng cho một lớp môđun Artin. Đó là các môđun đối đồng điều địa phương với giá là iđêan cực đại và tựa không trộn lẫn. Đây là kết quả chính của tiết và cũng là của chương. Cũng cần chú ý thêm rằng luôn tồn tại môđun đối đồng điều địa phương với giá là iđêan cực đại nhưng không là tựa không trộn lẫn. Chẳng hạn, xét vành $R = k[[x, y, z]]$ vành các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường k. Khi đó R là một vành đầy đủ theo tôpô (x, y, z)-adic. Đặt

$$\mathfrak{m} = (x, y, z),\ M' = (x, y),\ M'' = R/(z),\ M = M' \oplus M''.$$

Ta có theo Định lý 1.3.6 $\operatorname{Att}_R H^2_{\mathfrak{m}}(M'') = \{(z)\}$. Từ dãy khớp

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow R \longrightarrow R/(x, y) \longrightarrow 0,$$

ta có $H^2_{\mathfrak{m}}(M') \cong H^1_{\mathfrak{m}}(R/(x, y))$. Theo Định lý 1.3.6Suy ra

$$\operatorname{Att}_R H^2_{\mathfrak{m}}(M') = \operatorname{Att}_R H^1_{\mathfrak{m}}(R/(x, y)) = \{(x, y)\}.$$

Vì $H^2_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^2_{\mathfrak{m}}(M') \oplus H^2_{\mathfrak{m}}(M'')$ nên dễ thấy

$$\min \operatorname{Att}_R H^2_{\mathfrak{m}}(M) = \{(z), (x, y)\}.$$

Vậy $H^2_{\mathfrak{m}}(M)$ không là tựa không trộn lẫn.

Định lý 3.2.4. *Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là tựa không trộn lẫn. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *$H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (∗).*

(ii) *Vành $R/\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ là catenary và*

$$\dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big) = \dim\big(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big).$$

Chứng minh. (i)⇒(ii) được suy ra từ Định lí 3.1.5. Ta chứng minh (ii)⇒(i). Theo Định lý 2.1.2, ta chỉ cần chứng minh $\operatorname{Psupp}^i_R(M) = \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Cho $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R M$. Khi đó $H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$. Vì thế tồn tại

$$\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)$$

với $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ nào đó. Theo Định lý 1.3.4, ta có $\mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Vì thế

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \supseteq \operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Suy ra $\operatorname{Psupp}^i_R M \subseteq \operatorname{V}\big(\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big)$.

Ngược lại, cho $\mathfrak{p} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)))$. Đặt $\operatorname{N-dim} H^i_{\mathfrak{m}}(M) = k$. Khi đó $\dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = k$ theo Mệnh đề 1.4.2 và

$$\dim(R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = k$$

theo giả thiết. Theo (ii) của Mệnh đề 1.3.1, ta có $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$ với $\mathfrak{q} \in \min \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ nào đó. Vì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là đẳng chiều theo Bổ đề 3.1.4, nên ta có $\dim(R/\mathfrak{q}) = k$. Vì $\mathfrak{q} \in \min \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ nên tồn tại $\widehat{\mathfrak{q}} \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ sao cho $\widehat{\mathfrak{q}} \cap R = \mathfrak{q}$. Do $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là không trộn lẫn nên $\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}} = k$. Chú ý rằng $\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Vì thế $\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Psupp}^i_{\widehat{R}}(\widehat{M})$.

Suy ra $H^{i-\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}}}_{\widehat{\mathfrak{q}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{q}}}}(\widehat{M_{\mathfrak{q}}}) \neq 0$. Vì đồng cấu tự nhiên $R_{\mathfrak{q}} \longrightarrow \widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{q}}}$ là phẳng nên theo Định lí chuyển cơ sở phẳng (Định lý 1.1.4) ta có

$$H^{i-\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}}}_{\widehat{\mathfrak{q}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{q}}}}(\widehat{M_{\mathfrak{q}}}) \cong H^{i-\dim R/\mathfrak{q}}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) \otimes \widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{q}}}.$$

Do đó $H^{i-\dim R/\mathfrak{q}}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) \neq 0$ và vì thế $\operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{q}}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{q}}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}})) \neq \emptyset$. Theo Định lý 1.3.4, ta suy ra

$$\operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{q}+\operatorname{ht}\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})) \neq \emptyset.$$

Do đó $H^{i-\dim R/\mathfrak{q}+\operatorname{ht}\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$. Vì $R/\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ là catenary và

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \supseteq \operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$$

nên ta có theo Mệnh đề 1.2.2

$$i - \dim R/\mathfrak{q} + \operatorname{ht}\mathfrak{p}/\mathfrak{q} = i - \dim R/\mathfrak{p}.$$

Do đó $H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$, tức là $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M)$. Vậy

$$\operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \operatorname{Psupp}^i_R M$$

hay $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$. $\square$

Chú ý 3.2.5. (i) Môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là không trộn lẫn và theo Định lý 1.3.10, ta có

$$\dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^d_{\mathfrak{m}}(M)) = \dim(R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)) = d.$$

Vì thế, từ Định lí 3.2.4, ta có thể nhận lại kết quả chính trong [13]: $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thoả mãn điều kiện $(*)$ nếu và chỉ nếu $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là vành catenary.

(ii) Điều kiện $\dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big) = \dim\big(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big)$ trong Định lí 3.2.4 là không thể bỏ đi được. Thật vậy, xét miền nguyên địa phương Noether, chiều 2, được xây dựng bởi M. Nagata [37], thỏa mãn $\widehat{R} \cong \frac{k[[x,y,z]]}{(x)\cap(y,z)}$. Đặt $\widehat{\mathfrak{p}_1} = (x)/\mathfrak{s}$, $\widehat{\mathfrak{p}_2} = (y,z)/\mathfrak{s}$, trong đó $\mathfrak{s} = (x) \cap (y,z)$. Theo [6, Hệ quả 11.3.5 và Bài tập 11.3.9], ta có $\operatorname{Att}_{\widehat{R}} H^1_{\mathfrak{m}}(R) = \{\widehat{\mathfrak{p}_2}\}$. Do đó $H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ là tựa không trộn lẫn. Rõ ràng vành $R/\operatorname{Ann}_R H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ là catenary. Mặt khác tương tự như [12, Ví dụ 4.1 và Ví dụ 4.2], ta có $H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ không thỏa mãn tính chất $(*)$,

$$\dim R/\operatorname{Ann}_R H^1_{\mathfrak{m}}(R) = 2 > \dim \widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^1_{\mathfrak{m}}(R) = 1.$$

(iii) Cho đến nay chúng tôi chưa xây dựng được ví dụ chứng tỏ rằng giả thiết tựa không trộn lẫn của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ trong Định lý 3.2.4 là cần thiết.

Một hệ quả của Định lý 3.2.4 cho ta đặc trưng sau của vành catenary.

Hệ quả 3.2.6. *Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *R là catenary;*

(ii) *Với mọi R-môđun hữu hạn sinh M, nếu $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là tựa không trộn lẫn và $\dim(R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ thì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$, với mọi $i = 0, ..., \dim M$;*

(iii) *Với mọi R-môđun hữu hạn sinh M, nếu $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là không trộn lẫn và $\dim(R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ thì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$, với mọi $i = 0, ..., \dim M$;*

(iv) *Môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^{\dim M}_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi R-môđun hữu hạn sinh M.*

Chứng minh. (i)⇒(ii). Lấy $i \in \{0, ..., \dim M\}$. Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là tựa không trộn lẫn và

$$\dim(R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Vì R là catenary nên vành $R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary. Do đó $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ theo Định lý 3.2.4.

(ii)⇒(iii) là hiển nhiên.

(iii)⇒(iv). Giả sử M là một R-môđun hữu hạn sinh. Ta có $H_{\mathfrak{m}}^{\dim M}(M)$ là không trộn lẫn. Hơn nữa

$$\begin{aligned}\dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^{\dim M}(M))\big) &= \dim M\\ &= \dim \widehat{M}\\ &= \dim\big(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(H_{\mathfrak{m}}^{\dim M}(M))\big),\end{aligned}$$

theo Định lý 1.3.10 (ii). Do đó $H_{\mathfrak{m}}^{\dim M}(M)$ thỏa mãn tính chất (∗) theo (iii).

(iv)⇒(i). Ta chỉ cần chứng minh $R/\mathfrak{p}$ là catenary, với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R$. Thật vậy, giả sử $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R$. Đặt $\dim(R/\mathfrak{p}) = k$. Theo giả thiết $H_{\mathfrak{m}}^k(R/\mathfrak{p})$ thỏa mãn tính chất (∗). Vì $H_{\mathfrak{m}}^k(R/\mathfrak{p})$ là không trộn lẫn nên theo Định lý 3.1.4, ta có vành $R/\operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^k(R/\mathfrak{p}))$ là catenary. Vì $\operatorname{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^k(R/\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\}$ theo Định lý 1.3.6 nên ta có $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^k(R/\mathfrak{p}))$. Do đó $R/\mathfrak{p}$ là catenary. □

Kết luận Chương 3

Trong chương này chúng tôi đã thu được các kết quả sau.

- Nghiên cứu một số tính chất cơ bản của lớp môđun Artin tựa không trộn lẫn, từ đó chứng tỏ rằng nếu A thỏa mãn tính chất (∗) thì vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là catenary và $\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A)$ với điều kiện A là tựa không trộn lẫn. Xây dựng các ví dụ chứng tỏ rằng giả thiết A tựa không trộn lẫn trong khẳng định trên là không thể bỏ đi được. Chỉ ra ví dụ chứng tỏ rằng chiều ngược lại của kết quả này là không đúng.

- Chỉ ra rằng môđun đối đồng điều địa phương $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ tựa không trộn lẫn thì $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ thỏa mãn tính chất (∗) nếu và chỉ nếu $R/\operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M))$ là catenary và $\dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M))\big) = \dim\big(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H_{\mathfrak{m}}^i(M))\big)$ với i là một số nguyên không âm cho trước. Đây là một sự mở rộng kết quả chính trong [13].

Chương 4

Ứng dụng của tính chất $(*)$

Trong suốt chương này, chúng tôi luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether với iđêan tối đại duy nhất $\mathfrak{m}$. Cho M là một R-môđun hữu hạn sinh với chiều Krull $\dim M = d$.

Trong chương này, chúng tôi đưa ra một số ứng dụng của tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương. Ứng dụng đặc trưng của tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương trong Định lý 2.1.2, chúng tôi thu được tính chất đóng cho các tập giả giá và công thức bội liên kết cho các môđun $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ với mỗi i cho trước, mở rộng kết quả của M. Brodmann và R. Y. Sharp trong [7]. Thông qua tính chất $(*)$ của các môđun đối đồng điều, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ để môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương và đưa ra điều kiện cần và đủ để các môđun $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương cho tập các iđêan nguyên tố tối tiểu. Bên cạnh đó, chúng tôi đưa ra một số tính chất của tập các iđêan nguyên tố gắn kết cho các môđun đối đồng điều địa phương trong mối liên hệ với các tập giả giá và tập giá của M dưới điều kiện các môđun đối đồng điều địa phương thỏa mãn tính chất $(*)$.

Nội dung của chương được trình chủ yếu theo bài báo [1] và một phần bài báo [39].

4.1 Bội của môđun đối đồng điều địa phương

Nhắc lại rằng với $\mathfrak{q}$ là iđêan của R sao cho $\ell(M/\mathfrak{q}M) < \infty$ thì hàm $\ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M)$ (theo biến nguyên dương n) là một đa thức bậc d với hệ số hữu tỷ khi n đủ lớn. Ta có thể biểu diễn đa thức này dưới dạng

$$\Sigma_M^{\mathfrak{q}}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) = \frac{e(\mathfrak{q}, M)}{d!}n^d + \text{đa thức có bậc nhỏ hơn } d$$

khi $n \gg 0$, trong đó $e(\mathfrak{q}, M)$ là một số nguyên dương và được gọi là *số bội của M ứng với* $\mathfrak{q}$ (xem [33, Chương 5] hoặc [8, Chương 4]). Lí thuyết bội đóng một vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương. Một trong những tính chất cơ bản của số bội là công thức sau đây, được gọi là *công thức liên kết* của số bội (xem [33, Định lý 14.7])

$$e(\mathfrak{q}, M) = \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M, \dim R/\mathfrak{p} = d} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}).$$

Đối với R-môđun Artin A, theo suy nghĩ đối ngẫu, chúng ta cũng dễ dàng định nghĩa được số bội thông qua đa thức Hilbert-Samuel của nó. Nhắc lại rằng theo [24], nếu $\mathfrak{q}$ là iđêan của R sao cho $0 :_A \mathfrak{q}$ có độ dài hữu hạn thì $\ell(0 :_A \mathfrak{q}^{n+1})$ là một đa thức bậc $\operatorname{N-dim} A$ với hệ số hữu tỷ khi n đủ lớn, ký hiệu $\theta_A^{\mathfrak{q}}(n)$. Đặt $\operatorname{N-dim} A = s$, ta có thể biểu diễn

$$\theta_A^{\mathfrak{q}}(n) = \ell(0 :_A \mathfrak{q}^{n+1}) = \frac{e(\mathfrak{q}, A)}{s!}n^s + \text{đa thức có bậc nhỏ hơn } s$$

khi $n \gg 0$, trong đó $e(\mathfrak{q}, A)$ là một số nguyên dương. Ta gọi $e(\mathfrak{q}, A)$ là *số bội của A ứng với* $\mathfrak{q}$ (xem[11], [7]). Cho đến nay người ta chưa xây dựng được một công thức bội liên kết cho các môđun Artin tương tự như công thức bội liên kết cho các môđun hữu hạn sinh. M. Brodmann và R. Y. Sharp (2002) đã tìm cách xây dựng công thức bội liên kết cho một loại môđun Artin đặc biệt, đó là môđun $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$. Để làm được điều này, trước hết họ giới thiệu khái niệm tập *giả giá thứ i* của M (xem Định nghĩa 2.1.1). Họ đã chứng minh rằng nếu R là vành catenary phổ dụng và có các thớ hình thức là Cohen-Macaulay thì tập giả giá $\mathrm{Psupp}^i_R(M)$ là tập con đóng và ta có công thức liên kết của bội $e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ cho $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ tương ứng với iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ $\mathfrak{q}$ của R, với mọi M và với mọi i

$$e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathrm{Psupp}^i_R(M)\\ \dim(R/\mathfrak{p})=\mathrm{psd}^i_R(M)}} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}).$$

Ứng dụng Định lý 2.1.2, chúng tôi mở rộng kết quả trên của M. Brodmann và R. Y. Sharp cho trường hợp $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thoả mãn tính chất (∗).

Định lý 4.1.1. *Giả sử $i \geq 0$ là một số nguyên và $\text{N-dim}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = s$. Với mỗi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^i_R M$, đặt*

$$T(\mathfrak{p}) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Psupp}^i_{\widehat{R}}(\widehat{M}) : \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(R/\mathfrak{p}),\ \widehat{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}\}.$$

Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (∗). Khi đó các mệnh đề sau là đúng.

(i) $\mathrm{Psupp}^i_R M$ *là tập đóng.*

(ii) *Nếu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^i_R M$ với $\dim(R/\mathfrak{p}) = s$ thì $T(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$, $\ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)$ có độ dài hữu hạn khác không và*

$$\ell_{\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}\big(H^{i-\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})}_{\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{M}_{\widehat{\mathfrak{p}}})\big) = \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)\ell_{\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}})$$

với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in T(\mathfrak{p})$.

(iii) *Cho $\mathfrak{q}$ là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$. Khi đó bội $e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ tương ứng với $\mathfrak{q}$ thỏa mãn*

$$e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathrm{Psupp}^i_R(M)\\ \dim(R/\mathfrak{p})=\mathrm{psd}^i(M)}} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}).$$

Chứng minh. Khẳng định (i) được suy ra từ Định lý 2.1.2.

(ii) và (iii). Đặt $\theta^{\mathfrak{q}}_A(n) := \ell_R(0 :_A \mathfrak{q}^{n+1})$, $\Sigma^{\mathfrak{q}}_M(n) := \ell_R(M/\mathfrak{q}^{n+1}M)$ lần lượt là các đa thức bậc s và d khi n đủ lớn.

Trường hợp đặc riêng. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành địa phương Gorenstein $(R', \mathfrak{m}')$, $\dim R = n, \dim R' = n'$ và $f : R' \longrightarrow R$ là toàn cấu. Đặt $K_M^i = \operatorname{Ext}_{R'}^{n'-i}(M, R')$. Theo Định lý Đối ngẫu địa phương (Định lý 1.1.7)

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \cong D_R(K_M^i).$$

Từ đó theo [49, Bổ đề 2.4], ta có

$$0 :_{H_{\mathfrak{m}}^i(M)} \mathfrak{q}^{n+1} \cong 0 :_{D_R(K_M^i)} \mathfrak{q}^{n+1} \cong D_R(K_M^i/\mathfrak{q}^{n+1}K_M^i).$$

Vì vậy khi n đủ lớn

$$\begin{aligned}\theta^{\mathfrak{q}}_{H_{\mathfrak{m}}^i(M)}(n) = \ell_R(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^i(M)} \mathfrak{q}^{n+1}) &= \ell_R(D_R(K_M^i/\mathfrak{q}^{n+1}K_M^i)) \\ &= \ell_R(K_M^i/\mathfrak{q}^{n+1}K_M^i) \\ &= \Sigma^{\mathfrak{q}}_{K_M^i}(n).\end{aligned}$$

Điều này kéo theo

$$e(\mathfrak{q}, H_{\mathfrak{m}}^i(M)) = e(\mathfrak{q}, K_M^i) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R^i(K_M^i) \\ \dim(R/\mathfrak{p}) = \dim K_M^i}} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}(K_M^i)_{\mathfrak{p}} e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}).$$

Với mỗi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, đặt $\mathfrak{p}' = f^{-1}(\mathfrak{p})$. Khi đó $\dim R'/\mathfrak{p}' = \dim R/\mathfrak{p}$, $R'_{\mathfrak{p}'}$ là vành Gorenstein, $\dim R'_{\mathfrak{p}'} = n' - \dim R/\mathfrak{p}$ và f cảm sinh ánh xạ

$$f' : R'_{\mathfrak{p}'} \longrightarrow R_{\mathfrak{p}}, f'(r'/s') = f(r')/f(s'),$$

với mọi $r' \in R', s' \in R' \setminus \mathfrak{p}'$. Hơn nữa, ta có

$$\operatorname{Ext}_{R'_{\mathfrak{p}'}}^{n'-i}(M_{\mathfrak{p}}, R'_{\mathfrak{p}'}) \cong (\operatorname{Ext}_{R'}^{n'-i}(M, R'))_{\mathfrak{p}} \cong (K_M^i)_{\mathfrak{p}}.$$

Do đó theo Định lý đối ngẫu địa phương (Định lý 1.1.7), ta có

$$\begin{aligned}H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) &\cong D_{R_{\mathfrak{p}}}(\operatorname{Ext}_{R'_{\mathfrak{p}'}}^{\dim R'_{\mathfrak{p}'} - (i - \dim R/\mathfrak{p})}(M_{\mathfrak{p}}, R'_{\mathfrak{p}'})) \\ &\cong D_{R_{\mathfrak{p}}}(\operatorname{Ext}_{R'_{\mathfrak{p}'}}^{n'-i}(M_{\mathfrak{p}}, R'_{\mathfrak{p}'})) \\ &\cong D_{R_{\mathfrak{p}}}((K_M^i)_{\mathfrak{p}}).\end{aligned}$$

Điều này kéo theo $\operatorname{Psupp}_R^i(M) = \operatorname{Supp}(K_M^i)$. Suy ra

$$\begin{aligned}\min \operatorname{Psupp}_R^i(M) &= \min \operatorname{Supp}(K_M^i)\\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(K_M^i) \mid \ell_{R_\mathfrak{p}}(K_M^i(M)_\mathfrak{p})\\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}_R^i(M) \mid \ell_{R_\mathfrak{p}}(H_\mathfrak{p}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) < \infty\},\end{aligned}$$

và theo Định lý 2.1.2, ta có

$$s = \text{N-}\dim_R(H_\mathfrak{m}^i(M)) = \operatorname{psd}_R^i(M) = \dim K_M^i.$$

Vậy

$$e(\mathfrak{q}, H_\mathfrak{m}^i(M)) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \operatorname{Psupp}_R^i(M)\\ \dim(R/\mathfrak{p})=s}} \ell_{R_\mathfrak{p}}\big(H_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}(M_\mathfrak{p})\big)e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}).$$

Trường hợp tổng quát. Giả sử $H_\mathfrak{m}^i(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$. Ta có, theo Định lý 2.1.2

$$\operatorname{psd}_R^i(M) = \text{N-dim}\, H_\mathfrak{m}^i(M) = \operatorname{psd}_R^i(\widehat{M}) = s.$$

Lấy $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}_R^i(M), \dim R/\mathfrak{p} = s$. Khi đó $\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}} = s$, với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in T(\mathfrak{p})$. Từ Trường hợp riêng, ta có

$$0 \neq \ell_{\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(H_{\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}^{i-\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}}(\widehat{M_{\widehat{\mathfrak{p}}}})) = \ell_{\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}((K_{\widehat{M}}^i)_{\widehat{\mathfrak{p}}}) < \infty.$$

Hơn nữa

$$H_{\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}^{i-\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}}(\widehat{M_{\widehat{\mathfrak{p}}}}) \cong H_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \otimes \widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}$$

nên ta có (ii).

Ta chứng minh (iii). Theo Định lý 2.1.2, ta có

$$\bigcup_{\substack{\mathfrak{p}\in \operatorname{Psupp}_R^i M\\ \dim(R/\mathfrak{p})=s}} T(\mathfrak{p}) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}_{\widehat{R}}^i(\widehat{M}) : \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = s\}.$$

Hơn nữa, nếu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}_R^i M$ với $\dim(R/\mathfrak{p}) = s$ thì

$$T(\mathfrak{p}) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R}) : \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = s\}.$$

Mặt khác, với n đủ lớn $\theta_A^{\mathfrak{q}}(n) = \theta_A^{\mathfrak{q}\widehat{R}}(n)$. Do đó

$$\begin{aligned}
e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M)) &= e(\mathfrak{q}\widehat{R}, H^i_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M}))\\
&= \sum_{\substack{\widehat{\mathfrak{p}}\in \mathrm{Psupp}^i_R(\widehat{M})\\ \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})=s}} \ell_{\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}\big(H^{i-\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})}_{\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{M_{\widehat{\mathfrak{p}}}})\big)e(\mathfrak{q}\widehat{R}, \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})\\
&= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathrm{Psupp}^i_R(M)\\ \dim(R/\mathfrak{p})=s}} \Big(\ell_{R_{\mathfrak{p}}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}))\sum_{\widehat{\mathfrak{p}}\in T(\mathfrak{p})}\ell_{\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}})e(\mathfrak{q}\widehat{R}, \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})\Big)\\
&= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathrm{Psupp}^i_R(M)\\ \dim(R/\mathfrak{p})=s}} \Big(\ell_{R_{\mathfrak{p}}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}))\sum_{\substack{\widehat{\mathfrak{p}}\in \mathrm{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})\\ \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})=s}}\ell_{\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}})e(\mathfrak{q}\widehat{R}, \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})\Big)\\
&= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathrm{Psupp}^i_R(M)\\ \dim(R/\mathfrak{p})=s}} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)e(\mathfrak{q}\widehat{R}, \widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})\\
&= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathrm{Psupp}^i_R(M)\\ \dim(R/\mathfrak{p})=s}} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}).
\end{aligned}$$

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Áp dụng Hệ quả 2.1.4 và Định lý 4.1.1, ta có thể thiết lập công thức bội liên kết cho môđun đối đồng điều cấp cao nhất khi vành là catenary. Hơn nữa áp dụng Hệ quả 2.1.3 và Định lý 4.1.1, ta thu lại được kết quả chính của M. Brodmann và R.Y. Sharp trong [7].

Hệ quả 4.1.2. *Giả sử R là vành catenary phổ dụng và có các thớ hình thức là Cohen-Macaulay. Khi đó với mọi M và với mọi i, ta có*

(i) $\mathrm{Psupp}^i_R(M)$ *là tập đóng.*

(ii) $e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \displaystyle\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathrm{Psupp}^i_R(M)\\ \dim(R/\mathfrak{p})=\mathrm{psd}^i_R(M)}} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}).$

4.2 Tính chất dịch chuyển địa phương

Địa phương hóa là một công cụ hữu hiệu trong việc nghiên cứu môđun hữu hạn sinh. Nhắc lại một tính chất quen thuộc chỉ ra mối liên hệ giữa tập các iđêan nguyên tố liên kết của môđun hữu hạn sinh M và địa phương hoá của nó tại một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$

$$\operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_R M, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

Đối với các môđun Artin ta cũng muốn tìm một công thức tương tự như vậy cho tập các iđêan nguyên tố gắn kết. Tuy nhiên một công thức như vậy chưa được tìm ra. Năm 1975, R.Y. Sharp [48] đã xét tính chất sau cho tập các iđêan nguyên tố gắn kết hạn chế trên các môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại

$$\operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, với mọi i. Trong [48], R.Y. Sharp đã chứng tỏ bao hàm thức sau luôn đúng

$$\operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) \subseteq \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, với mọi i và ông gọi đó là *tính chất dịch chuyển địa phương tổng quát yếu* (xem [6, 11.3.8]. Hơn nữa, khi R là một vành thương của vành địa phương Gorenstein, ông đã chứng tỏ dấu đẳng thức xảy ra và gọi đó là *tính chất dịch chuyển địa phương* (xem [6, 11.3.2]). Mở rộng ta nói rằng môđun $H^i_\mathfrak{m}(M)$, với mỗi $i \geq 0$ cho trước, thỏa mãn *tính chất dịch chuyển địa phương* nếu đẳng thức

$$\operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

này thỏa mãn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Tính chất dịch chuyển địa phương không đúng trong trường hợp tổng quát. Chẳng hạn xét $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên, địa phương Noether chiều 2 được xây dựng bởi M. Ferrand và D. Raynaud [53] thỏa mãn $\widehat{R}$ có iđêan nguyên tố nhúng $\widehat{\mathfrak{p}}$ chiều 1. Rõ ràng $\widehat{\mathfrak{p}} \cap R = 0$. Lại có theo Hệ quả 1.3.5, $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}} H^1_{\mathfrak{m}}(R)$. Vì vậy theo Bổ đề 1.3.3, ta có

$$0 = \widehat{\mathfrak{p}} \cap R \in \operatorname{Att}_R H^1_{\mathfrak{m}}(R).$$

Lấy $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố có độ cao 1 của R, ta có $0R_{\mathfrak{p}} \notin \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}} H^0_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}})$. Vì nếu trái lại ta có

$$1 = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \dim R_{\mathfrak{p}}/0R_{\mathfrak{p}} \leq \dim R_{\mathfrak{p}}/\operatorname{Ann}_{R_{\mathfrak{p}}} H^0_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) \leq 0,$$

vô lý. Vậy $H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ không thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương. Hơn nữa cũng theo M. Ferrand và D. Raynaud [53], tồn tại một miền nguyên địa phương Noether, chiều 1 mà không thể biểu diễn được như ảnh đồng cấu của một vành địa phương Gorenstein. Khi đó $H^i_{\mathfrak{m}}(N)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi R-môđun hữu hạn sinh N. Vì vậy một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là với điều kiện nào thì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương? Để trả lời câu hỏi đó, trước hết ta đưa ra một số kết quả bổ trợ về tập giả giá và tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương.

Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành địa phương Gorenstein $(R', \mathfrak{m}')$, $\dim R = n, \dim R' = n'$. Đặt $K^i_M = \operatorname{Ext}^{n'-i}_{R'}(M, R')$, $i = 0, 1, \ldots, d$. Đó là các R-môđun hữu hạn sinh. Hơn nữa theo Định lý đối ngẫu địa phương (Định lý 1.1.7), ta có đẳng cấu

$$\begin{aligned} H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) &\cong D_{R_{\mathfrak{p}}}(\operatorname{Ext}^{\dim R'_{\mathfrak{p}'} - (i - \dim R/\mathfrak{p})}_{R'_{\mathfrak{p}'}}(M_{\mathfrak{p}}, R'_{\mathfrak{p}'})) \\ &\cong D_{R_{\mathfrak{p}}}(\operatorname{Ext}^{n'-i}_{R'_{\mathfrak{p}'}}(M_{\mathfrak{p}}, R'_{\mathfrak{p}'})) \\ &\cong D_{R_{\mathfrak{p}}}(\operatorname{Ext}^{n'-i}_{R'}(M, R')_{\mathfrak{p}}) \\ &\cong D_{R_{\mathfrak{p}}}((K^i_M)_{\mathfrak{p}}). \end{aligned}$$

Vì vậy $\operatorname{Psupp}^i_R(M) = \operatorname{Supp}(K^i_M)$, $\operatorname{Psupp}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{Supp}(K^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{M_{\mathfrak{p}}})$. Theo [58] $K^i(M)_{\mathfrak{p}} \cong K^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{M_{\mathfrak{p}}}$. Vì K^i_M là các môđun hữu hạn sinh nên

$$\operatorname{Supp} K^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{M_{\mathfrak{p}}} = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Supp}(K^i_M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Bổ đề sau đưa ra tính chất tương tự cho tập giả giá với điều kiện vành là catenary.

Bổ đề 4.2.1. *Giả sử* $i \geq 0$ *là một số nguyên. Nếu vành* $R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ *là catenary thì*

$$\operatorname{Psupp}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \supseteq \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. *Dấu đẳng thức xảy ra nếu* $R/\operatorname{Ann}_R M$ *là catenary.*

Chứng minh. Lấy $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ và $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Nếu $\mathfrak{q} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M)$ theo chứng minh (i) $\Rightarrow$ (ii) của Định lý 2.1.2, ta có $\mathfrak{q} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Vì vậy

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \supseteq \operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M).$$

Vì $R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary nên

$$\begin{aligned}(i - \dim R/\mathfrak{p}) - \dim R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} &= (i - \dim R/\mathfrak{p}) - \operatorname{ht} \mathfrak{p}/\mathfrak{q} \\ &= (i - \dim R/\mathfrak{p}) - (\dim R/\mathfrak{q} - \dim R/\mathfrak{p}) \\ &= i - \dim R/\mathfrak{q}.\end{aligned}$$

Ta có $\mathfrak{q} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M)$ suy ra $H^{i-\dim R/\mathfrak{q}}_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) \neq 0$, suy ra

$$H^{(i-\dim R/\mathfrak{p})-\dim R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p}}_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) \neq 0$$

và suy ra $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$. Vì vậy

$$\operatorname{Psupp}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \supseteq \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

Nếu $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ thì $H^{(i-\dim R/\mathfrak{p})-\operatorname{ht}\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) \neq 0$ vì $(M_\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p}} \cong M_\mathfrak{q}$. Điều này kéo theo $\mathfrak{q} \in \operatorname{Psupp}^{i+\dim R/\mathfrak{q}-\dim R/\mathfrak{p}-\operatorname{ht}\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}_R(M)$. Do đó, chứng minh như (i) $\Rightarrow$ (ii) của Định lý 2.1.2, ta có

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \supseteq \operatorname{Ann}_R H^{i+\dim R/\mathfrak{q}-\dim R/\mathfrak{p}-\operatorname{ht}\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}_{\mathfrak{m}}(M) \supseteq \operatorname{Ann}_R M.$$

Vì $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary nên

$$\begin{aligned}(i-\dim R/\mathfrak{p})-\dim R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} &= (i-\dim R/\mathfrak{p})-\operatorname{ht}\mathfrak{p}/\mathfrak{q}\\ &= (i-\dim R/\mathfrak{p})-(\dim R/\mathfrak{q}-\dim R/\mathfrak{p})\\ &= i-\dim R/\mathfrak{q}.\end{aligned}$$

Ta có $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}_{R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})$ suy ra $H_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}^{(i-\dim R/\mathfrak{p})-\dim R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{q}}) \neq 0$, suy ra $H_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}^{i-\dim R/\mathfrak{q}}(M_{\mathfrak{q}}) \neq 0$ và suy ra $\mathfrak{q} \in \operatorname{Psupp}_R^i(M)$. Điều này chứng tỏ $\operatorname{Psupp}_{R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) \subseteq \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Psupp}_R^i(M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$, với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ và với mọi i. Nếu vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary thì vành $R/\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ cũng là catenary. Vì vậy dấu đẳng thức xảy ra. □

Chú ý rằng giả thiết về tính catenary của vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ trong Bổ đề 4.2.1 không thể bỏ đi được. Ví dụ, xét $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên địa phương Noether, chiều 3, không catenary (xem [3]). Khi đó theo Định lý 1.2.3, tồn tại $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ thỏa mãn $\dim R/\mathfrak{p} + \operatorname{ht}\mathfrak{p} = 2$. Vì vậy $\dim R/\mathfrak{p} = \operatorname{ht}\mathfrak{p} = 1$. Lấy $\mathfrak{q} = 0$. Ta có thể chứng tỏ rằng $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}_{R_{\mathfrak{p}}}^{2-\dim R/\mathfrak{p}}(R_{\mathfrak{p}})$ nhưng $\mathfrak{q} \notin \operatorname{Psupp}_R^2(R)$.

Mệnh đề sau chỉ ra mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ cho môđun đối đồng điều địa phương của M và môđun đối đồng điều địa phương của địa phương hóa của nó, mối liên hệ giữa giả giá của M và của $\widehat{M}$.

Mệnh đề 4.2.2. *Cho $i \geq 0$ là một số nguyên. Giả sử $R/\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ là catenary. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *$H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$;*

(ii) *$H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})$ thỏa mãn tính chất $(*)$, với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$;*

(iii) $\operatorname{Psupp}_R^i(M) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \mid \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}_{\widehat{R}}^i(\widehat{M})\}$.

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii). Lấy $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$. Theo Định lý 2.1.2, ta chỉ cần chứng minh

$$\operatorname{Psupp}_{R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_{R_{\mathfrak{p}}} H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})).$$

Theo chứng minh (i) $\Rightarrow$ (ii) của Định lý 2.1.2, ta có

$$\operatorname{Psupp}_{R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) \subseteq \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_{R_{\mathfrak{p}}} H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})).$$

Ngược lại, lấy $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_{R_{\mathfrak{p}}} H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}))$. Khi đó theo Mệnh đề 1.3.1, tồn tại $\mathfrak{q}'R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}))$ thỏa mãn $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \supseteq \mathfrak{q}'R_{\mathfrak{p}}$. Vì vậy

$$\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{q}' \in \operatorname{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M)$$

theo Định lý 1.3.4. Vì $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ nên theo Định lý 2.1.2, ta có

$$\mathfrak{q} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M)) = \operatorname{Psupp}_R^i(M).$$

Vì vậy $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}_{R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})$ theo Bổ đề 4.2.1.

(ii) $\Rightarrow$ (i) là hiển nhiên.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Giả sử $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}_R^i(M)$. Khi đó $H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$. Lấy $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass} \widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R}$, thỏa mãn $\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}} = \dim R/\mathfrak{p}$. Ta có $\widehat{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}$ và đồng cấu tự nhiên $R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}$ là hoàn toàn phẳng. Do đó theo Định lý 1.1.4,

$$H_{\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}^{i-\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}}(\widehat{M}_{\widehat{\mathfrak{p}}}) \cong H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) \otimes \widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}} \neq 0.$$

Điều này kéo theo $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}_{\widehat{R}}^i(\widehat{M})$. Vì vậy $\operatorname{Psupp}_R^i(M) \subseteq \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \,|\, \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}_{\widehat{R}}^i(\widehat{M})\}$.

Ngược lại, lấy $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}_{\widehat{R}}^i(\widehat{M})$. Vì $\operatorname{Psupp}_{\widehat{R}}^i(\widehat{M}) = \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(H_{\mathfrak{m}}^i(M)))$, nên theo Bổ đề 1.3.1, tồn tại $\widehat{\mathfrak{q}} \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}} H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ thỏa mãn $\widehat{\mathfrak{p}} \supseteq \widehat{\mathfrak{q}}$. Do đó

$$\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \supseteq \widehat{\mathfrak{q}} \cap R \in \operatorname{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M),$$

theo Bổ đề 1.3.3. Vì vậy theo Mệnh đề 1.3.1 (ii) và Định lý 2.1.2, ta có

$$\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M)) = \operatorname{Psupp}_R^i(M).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Theo Định lý 2.1.2 và chứng minh (i) $\Rightarrow$ (ii) của định lý này, ta chỉ cần chứng minh

$$\mathrm{V}(\mathrm{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \subseteq \mathrm{Psupp}^i_R(M).$$

Lấy $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Khi đó theo (ii) của Mệnh đề 1.3.1, tồn tại

$$\mathfrak{q} \in \min \mathrm{Att}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M),\ \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}.$$

Theo Bổ đề 1.3.3, tồn tại $\widehat{\mathfrak{q}} \in \mathrm{Att}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn $\widehat{\mathfrak{q}} \cap R = \mathfrak{q}$. Vì $\mathrm{Psupp}^i_{\widehat{R}}(\widehat{M}) = \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{m}}(M)))$ nên $\widehat{\mathfrak{q}} \in \mathrm{Psupp}^i_{\widehat{R}}(\widehat{M})$. Vì vậy theo giả thiết, ta có $\mathfrak{q} \in \mathrm{Psupp}^i_R(M)$, tức là $H^{i-\dim R/\mathfrak{q}}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) \neq 0$. Vì $R_{\mathfrak{q}}$-môđun $H^{i-\dim R/\mathfrak{q}}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}})$ là môđun Artin khác không nên nó phải có một iđêan nguyên tố gắn kết (xem Mệnh đề 1.3.1). Chú ý rằng $R_{\mathfrak{q}} \cong (R_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}}$. Do đó áp dụng Định lý 1.3.4 trên vành địa phương $R_{\mathfrak{p}}$ ta có

$$H^{i-\dim R/\mathfrak{q}+\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0.$$

Vì $R/\mathrm{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary nên $\dim R/\mathfrak{q} - \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}/\mathfrak{q} = \dim R/\mathfrak{p}$. Do đó

$$\begin{aligned} 0 \neq H^{i-\dim R/\mathfrak{q}+\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{p}}) &= H^{i-(\dim R/\mathfrak{p}+\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}))+\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \\ &= H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}). \end{aligned}$$

Vậy $\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^i_R(M)$. $\square$

Kết quả chính đầu tiên của tiết đưa ra điều kiện cần và đủ để môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương.

Định lý 4.2.3. *Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ *thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương;*

(ii) *Vành* $R/\mathrm{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ *là catenary;*

(iii) $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ *thỏa mãn tính chất* $(*)$*;*

(iv) $H^{d-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ *thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương với mọi* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$;

(v) $H^{d-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ *thỏa mãn tính chất (∗) với mọi* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$.

Chứng minh. (i) ⇒ (iii). Theo Định lý 2.1.2 và chứng minh (i) ⇒ (ii) của định lý này, ta chỉ cần chứng minh $\mathrm{V}(\operatorname{Ann}_R(H^d_\mathfrak{m}(M)) \subseteq \operatorname{Psupp}^d_R M$. Lấy $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\operatorname{Ann}_R(H^d_\mathfrak{m}(M))$. Vì vậy

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \in \min \operatorname{Ann}_R H^d_\mathfrak{m}(M).$$

Do đó $\mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R H^d_\mathfrak{m}(M)$ theo Mệnh đề 1.3.1 (ii). Khi đó theo giả thiết, ta có

$$\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}} H^{d-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}).$$

Điều này kéo theo $H^{d-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0$. Do đó $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^d_R(M)$.

(iii) ⇔ (ii) theo Định lý 1.4.4.

(ii) ⇒ (i). Lấy $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Ta cần chứng minh

$$\operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{d-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^d_\mathfrak{m}(M)),\ \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Theo Định lý 1.3.4, ta chỉ cần chứng minh

$$\operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{d-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) \supseteq \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^d_\mathfrak{m}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Lấy $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ và $\mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^d_\mathfrak{m}(M))$. Theo Định lý 1.3.6, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_R(M)$ và $\dim R/\mathfrak{q} = d$. Điều này kéo theo $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$. Vì $R/\operatorname{Ann}_R(H^d_\mathfrak{m}(M))$ là catenary nên

$$\dim R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} = \operatorname{ht} \mathfrak{p}/\mathfrak{q} = \dim R/\mathfrak{q} - \dim R/\mathfrak{p} = d - \dim R/\mathfrak{p}.$$

Từ đó suy ra theo Hệ quả 1.3.5, $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{d-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}))$.

(iii) ⇔ (v) theo Mệnh đề 4.2.2.

(iv) ⇔ (v) tương tự (i) ⇔ (iii). □

Hiện tại chúng tôi chưa tìm được điều kiện cần và đủ để các môđun đối đồng điều địa phương cấp nhỏ hơn d thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương. Vì vậy kết quả sau đây có thể đưa ra một cách tiếp cận mới.

Định lý 4.2.4. *Cho $i \geq 0$ là một số nguyên. Giả sử $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary. Khi đó các điều kiện sau là tương đương.*

(i) $\min \operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \min \operatorname{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$, *với* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

(ii) $H^i_\mathfrak{m}(M)$ *thỏa mãn tính chất* $(*)$;

(iii) $H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ *thỏa mãn tính chất* $(*)$ *với mọi* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$.

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii) tương tự như chứng minh (i) $\Rightarrow$ (iii) của Đinh lý 4.2.3.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Lấy $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \min \operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}))$. Vì $H^i_\mathfrak{m}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ nên $H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ cũng thỏa mãn tính chất $(*)$ theo Mệnh đề 4.2.2. Do đó theo Định lý 2.1.2,

$$\operatorname{Psupp}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_{R_\mathfrak{p}} H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})).$$

Vì vậy $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \min \operatorname{Psupp}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ theo Mệnh đề 1.3.1. Mặt khác theo Định lý 1.3.4, ta có $\mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M))$. Lấy $\mathfrak{q}_1 \in \min \operatorname{Att}_R H^i_\mathfrak{m}(M)$ thỏa mãn $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{q}_1$. Vì $H^i_\mathfrak{m}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ nên theo Định lý 2.1.2,

$$\operatorname{Psupp}^i_R(M) = \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H^i_\mathfrak{m}(M)).$$

Do đó $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Psupp}^i_R(M)$. Theo Bổ đề 4.2.1, ta có $\mathfrak{q}_1 R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$. Vì $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}_1 R_\mathfrak{p}$ và tính chất tối tiểu của $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p}$, ta có $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1$. Vì vậy

$$\min \operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) \subseteq \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \,|\, \mathfrak{q} \in \min \operatorname{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M)),\ \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Ngược lại, lấy $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ thỏa mãn $\mathfrak{q} \in \min \operatorname{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M))$. Khi đó theo Mệnh đề 1.3.1, $\mathfrak{q} \in \min \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H^i_\mathfrak{m}(M))$. Do đó $\mathfrak{q} \in \min \operatorname{Psupp}^i_R(M)$ theo Định lý 2.1.2. Theo Bổ đề 4.2.1, ta có $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}_{R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})$. Giả sử

$$\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \supseteq \mathfrak{q}_1 R_{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Psupp}_{R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}).$$

Do vậy $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{q}_1$ và $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Psupp}_R^i(M)$ theo Bổ đề 4.2.1. Tính tối tiểu của $\mathfrak{q}$ kéo theo $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1$. Do đó

$$\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}_1 R_{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Psupp}_{R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}).$$

Theo Mệnh đề 4.2.2, $H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})$ thỏa mãn tính chất $(*)$. Vì vậy theo Định lý 2.1.2 và Mệnh đề 1.3.1,

$$\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Psupp}_{R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) = \min \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})).$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (ii) theo Mệnh đề 4.2.2. □

Hệ quả sau chỉ ra mối liên hệ giữa cấu trúc của vành và tính chất dịch chuyển địa phương của các môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại, tính chất $(*)$ cho các môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại của một môđun hữu hạn sinh và tính chất $(*)$ cho các môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại của địa phương hoá môđun đó.

Hệ quả 4.2.5. *Các mệnh đề sau là đúng:*

(i) *Nếu $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương với mọi i thì vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng và $R/\mathfrak{p}$ là không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$.*

(ii) *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là catenary phổ dụng và có các thớ hình thức là Cohen-Macaulay. Khi đó*

$$\min \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})) = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \min \operatorname{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

với mọi i và với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Hơn nữa, nếu $\operatorname{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M) = \min \operatorname{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ với mọi i thì $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương với mọi i.

(iii) $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ *thỏa mãn tính chất* $(*)$ *với mọi* i *nếu và chỉ nếu* $H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M)$ *thỏa mãn tính chất* $(*)$ *với mọi* i *và với mọi* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$.

Chứng minh. (i) Vì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương với mọi i, nên theo (i) $\Rightarrow$ (ii) của Định lý 4.2.4, $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi i. Vì vậy theo Định lý 2.2.1, $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng và $R/\mathfrak{p}$ là không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$.

(ii) Vì $(R, \mathfrak{m})$ là catenary phổ dụng và có các thớ hình thức là Cohen-Macaulay nên theo Hệ quả 2.1.3, $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi i. Do vậy khẳng định đầu tiên của (ii) được suy ra theo (ii) $\Rightarrow$ (i) của Định lý 4.2.4. Với mệnh đề thứ hai của (ii), ta chỉ cần chứng minh

$$\operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})) = \min \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})).$$

Lấy $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}))$. Khi đó

$$\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \supseteq \mathfrak{q}'R_{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})).$$

Suy ra $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{q}' \in \operatorname{Att}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ theo Định lý 1.3.4. Từ giả thiết, ta suy ra $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. Vì vậy $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}))$.

(iii) Vì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi i nên theo Định lý 2.2.1 vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary. Vì vậy theo Mệnh đề 4.2.2, ta có $H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi i và với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$. Điều ngược lại là hiển nhiên. $\square$

4.3 Tập iđêan nguyên tố gắn kết, tập giá và tập giả giá

Giả sử X là một tập con trong $\operatorname{Spec}(R)$, ta ký hiệu $\min X$ là tập các iđêan tối tiểu của X, $\overline{X}$ là bao đóng của X theo tôpô Zariski và $\overset{\circ}{X}$ là $X \setminus \{\mathfrak{m}\}$. Khi R là ảnh đồng cấu của một vành địa phương Gorenstein, M. Brodmann và R. Y. Sharp (xem [6, Định lý 11.3.12]) đã đưa ra mối liên hệ giữa tập các iđêan nguyên tố gắn kết và tập giá như sau

$$\min\{\mathfrak{p} \in \overset{\circ}{\mathrm{Supp}}(M) : \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\}$$
$$= (\min \overset{\circ}{\mathrm{Att}}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))) \setminus \overline{\bigcup_{j=0}^{i-1} \mathrm{Att}_R(H^j_{\mathfrak{m}}(M))}.$$

Nếu $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (*) thì theo Định lý 2.1.2 $\mathrm{Psupp}^i_R(M) = \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Vì vậy $\mathrm{Psupp}^i_R(M) = \overline{\mathrm{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))}$. Định lý sau chứng minh lại kết quả trên của M. Brodmann và R. Y. Sharp với giả thiết yếu hơn, đồng thời chỉ ra mối liên hệ giữa tập các iđêan nguyên tố gắn kết, các tập giả giá và tập giá của M.

Định lý 4.3.1. *Giả sử $i \geq 0$ là một số nguyên. Khi đó các mệnh đề sau là đúng.*

(i) $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\}$
$= \mathrm{Psupp}^i_R(M) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \mathrm{Psupp}^j_R(M)$.

(ii) *Nếu $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (*) thì*

$$\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\}$$
$$= \mathrm{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \mathrm{Psupp}^j_R(M).$$

(iii) *Nếu $H^j_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (*) với mọi $j \leqslant i$ thì*

$$\min\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M) | \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\ \}$$
$$= (\min \mathrm{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_R H^j_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Chứng minh. (i) Lấy $\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^i_R(M) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \mathrm{Psupp}^j_R(M)$. Vì $\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^i_R(M)$ nên $H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$. Do đó $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ và $\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} \leq i - \dim(R/\mathfrak{p})$. Giả sử rằng

$$\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = j < i.$$

Vì $\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} = j - \dim R/\mathfrak{p}$ nên $H^{j-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$. Từ đó kéo theo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^j_R(M)$. Điều này trái với giả thiết. Vì vậy

$$\operatorname{Psupp}^i_R(M) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{Psupp}^j_R(M) \subseteq \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\}.$$

Ngược lại, lấy $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$ thỏa mãn $\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i$. Do đó $H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$. Từ đó ta có $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M)$. Giả sử tồn tại j thỏa mãn $0 \leq j < i$ và $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^j_R(M)$ thì $H^{j-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$. Điều này kéo theo

$$\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} \leq j < i.$$

Đó là điều vô lý. Vì vậy

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\} \subseteq \operatorname{Psupp}^i_R(M) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{Psupp}^j_R(M).$$

(ii) Vì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ nên $\operatorname{Psupp}^i_R(M) = \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ theo Định lý 2.1.2. Vì vậy chứng minh của (ii) là tương tự như chứng minh của (i).

(iii) Vì $H^j_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$, với mọi $j \leq i$ nên theo Định lý 2.1.2, $\operatorname{Psupp}^j_R(M) = \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H^j_{\mathfrak{m}}(M))$ với mọi $j \leq i$. Giả sử

$$\mathfrak{p} \in (\min \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Vì thế theo (i), ta có

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{Psupp}^j_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\}.$$

Giả sử rằng $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} \in \min\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\}$. Lại theo (i), ta có $\mathfrak{q} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M)$. Mặt khác,

$$\mathfrak{p} \in \min \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \min \operatorname{Psupp}^i_R(M).$$

Vì vậy

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \in \min\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\}.$$

Ngược lại, lấy $\mathfrak{p} \in \min\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\}$. Do đó

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{Psupp}^j_R(M) = \operatorname{Psupp}^i_R(M) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H^j_{\mathfrak{m}}(M))$$

theo (i) và theo giả thuyết. Khi đó tồn tại $\mathfrak{q} \in \min \operatorname{Psupp}^i_R(M)$ thỏa mãn $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$. Hiển nhiên ta có

$$\mathfrak{q} \notin \bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H^j_{\mathfrak{m}}(M)) = \bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{Psupp}^j_R(M).$$

Lại vì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ nên theo Định lý 2.1.2 và (ii) của Mệnh đề 1.3.1, ta có

$$\mathfrak{q} \in \min \operatorname{Psupp}^i_R(M) = \min \operatorname{Att}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M).$$

Do vậy theo (ii) $\mathfrak{q} \in \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\}$. Do đó $\mathfrak{q}$ là phần tử của tập $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\}$. Từ tính tối tiểu của $\mathfrak{p}$, ta có $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. □

Chú ý rằng giả thiết $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ trong mệnh đề (ii) và $H^j_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi $j \leq i$ trong (iii) của Định lý 4.3.1 không thể bỏ đi được. Ví dụ, xét $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên, địa phương, chiều 2 được xây dựng bởi M. Ferrand và D. Raynaud [53] thỏa mãn $\widehat{R}$ có một iđêan nguyên tố nhúng $\widehat{\mathfrak{p}}$ chiều 1. Ta có $H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ không thỏa mãn tính chất $(*)$ (xem [12, Ví dụ 4.1]). Dễ tính được $\operatorname{Psupp}^0_R(R) = \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H^0_{\mathfrak{m}}(R)) = \emptyset$. Vì vậy 0 thộc vế trái của các công thức trong (ii), (iii) nhưng nó không thuộc vế phải của các công thức đó.

Công thức (iii) trong Định lý 4.3.1 có mối liên hệ với Định lý triệt của Faltings. Giả sử $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ là các iđêan của R. Theo thuật ngữ của M. Brodmann và R. Y. Sharp [6, Chương 9], $\mathfrak{b}$ *-chiều hữu hạn* $f_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(M)$ *của* M *tương ứng với* $\mathfrak{a}$ được định nghĩa bởi

$$f_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(M) := \inf\{i \in \mathbb{N} : \mathfrak{b} \not\subseteq \sqrt{(\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{a}}^i(M))}\}$$

và $\mathfrak{b}$*-tối tiểu* $\mathfrak{a}$*-độ sâu điều chỉnh của* M được định nghĩa bởi

$$\lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(M) = \inf\{\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \operatorname{ht}(\mathfrak{a}+\mathfrak{p})/\mathfrak{p} \ : \ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \operatorname{V}(\mathfrak{b})\}.$$

Nếu R là catenary phổ dụng và tất cả các thớ hình thức là Cohen-Macaulay thì Định lý triệt đúng trên R, nghĩa là $f_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(M) = \lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(M)$ (xem [6, Bài tập 9.6.6]). Vận dụng Định lý 4.3.1, ta chứng minh lại được kết quả trên một cho trường hợp riêng $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ với một giả thiết khác là các môđun đối đồng điều $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$. Chú ý rằng trong Chương 2 chúng tôi đã chỉ ra luôn tồn tại một vành R catenary nhưng không thỏa mãn đồng thời các điều kiện R catenary phổ dụng và R có các thớ hình thức là Cohen-Macaulay và trên đó tồn tại R-môđun hữu hạn sinh M mà các môđun đối đồng điều với giá cực đại thỏa mãn tính chất $(*)$.

Hệ quả 4.3.2. *Giả sử* $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ *thỏa mãn tính chất* $(*)$ *với mọi* i*. Giả sử* $\mathfrak{b}$ *là một iđêan của* R*. Khi đó* $f_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{b}}(M) = \lambda_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{b}}(M)$*.*

Chứng minh. Gọi i và j là các số nguyên. Theo [6, Mệnh đề 7.2.11], ta có

$$\sqrt{\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \min \operatorname{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M)} \mathfrak{p}.$$

Vì vậy $\mathfrak{b} \not\subseteq \sqrt{\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M)}$ nếu và chỉ nếu $\min \operatorname{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M) \setminus \operatorname{V}(\mathfrak{b}) \neq \emptyset$. Mặt khác $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^j(M)}$ kéo theo $\operatorname{V}(\mathfrak{b}) \supseteq \operatorname{V}(\sqrt{\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^j(M)})$. Vì $H_{\mathfrak{m}}^j(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ nên theo Định lý 2.1.2

$$\operatorname{V}(\mathfrak{b}) \supseteq \operatorname{V}(\sqrt{\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^j(M)}) = \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M)) = \operatorname{Psupp}_R^j(M).$$

Từ những khẳng định trên và Định lý 4.3.1, ta có

$$
\begin{aligned}
f_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{b}}(M) &= \inf\{i \in \mathbb{N} : \mathfrak{b} \nsubseteq \sqrt{(\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M))}\} \\
&= \inf\{i \in \mathbb{N} : \mathfrak{b} \nsubseteq \sqrt{(\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M))} \text{ and } \mathfrak{b} \subseteq \sqrt{(\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^j(M))}, \forall j < i\} \\
&= \inf\{i \in \mathbb{N} : \min \operatorname{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M) \setminus [\bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{Psupp}_R^j(M) \cup \operatorname{V}(\mathfrak{b})] \neq \emptyset\} \\
&= \inf\{i \in \mathbb{N} : [\min \operatorname{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^i(M) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{Psupp}_R^j(M)] \setminus \operatorname{V}(\mathfrak{b}) \neq \emptyset\} \\
&= \inf\{i \in \mathbb{N} : i = \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \setminus \operatorname{V}(\mathfrak{b})\} \\
&= \inf\{\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \operatorname{V}(\mathfrak{b})\} \\
&= \lambda_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{b}}(M).
\end{aligned}
$$

Vậy $f_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{b}}(M) = \lambda_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{b}}(M)$. □

Kết luận Chương 4

Trong chương này chúng tôi đã thu được những kết quả sau.

- Đưa ra công thức bội liên kết cho môđun đối đồng điều $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ với i là số nguyên không âm cho trước dưới giả thiết $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$, trong đó $\mathfrak{q}$ là iđêan $\mathfrak{m}$ nguyên sơ.

- Đưa ra điều kiện cần và đủ cho tính chất dịch chuyển địa phương của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H_{\mathfrak{m}}^d(M)$ thông qua tính catenary của vành $R/\operatorname{Ann}_R H_{\mathfrak{m}}^d(M)$.

- Đưa ra điều kiện cần và đủ để

$$\min \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})) = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \min \operatorname{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ và i là một số nguyên không âm cho trước với điều kiện vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary.

- Đưa ra một liên hệ giữa tập các iđêan nguyên tố gắn kết của các môđun đối đồng điều địa phương với tập giá và các tập giả giá của M.

Kết luận của luận án

1. Đặc trưng tính chất gọi là tính chất $(*)$ cho môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thông qua tập giả giá $\operatorname{Psupp}^i(M)$.

2. Chỉ ra các quan hệ giữa tính chất $(*)$ của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ và tính catenary phổ dụng của vành $R/\operatorname{Ann}_R M$, tính không trộn lẫn của vành $R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$.

3. Đặc trưng tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ tựa không trộn lẫn thông qua tính catenary của vành cơ sở và chiều Noether của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$.

4. Ứng dụng của tính chất $(*)$ để đưa ra công thức bội liên kết cho $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ và chỉ ra các mối quan hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết, giả giá và giá qua địa phương hóa.

5. Một số bài toán phát triển trực tiếp của luận án: Nghiên cứu cấu trúc của lớp vành địa phương Noether $(R, \mathfrak{m})$ mà các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(R)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi i; Đặc trưng lớp vành địa phương Noether $(R, \mathfrak{m})$ mà $\operatorname{Supp}^i_R(M)$ là đóng với mọi R-môđun hữu hạn sinh M và với mọi i.

Các công trình liên quan đến luận án

1. L. T. Nhan and T. N. An (2009), "On the unmixedness and the universal catenaricity of local rings and local cohomology modules", *J. Algebra*, **321**, pp. 303-311.

2. L. T. Nhan and T. N. An (2010), "On the catenaricity of Noetherian local rings and quasi unmixed Artinian modules", *Comm. Algebra*, **38**, pp. 3728-3736.

3. T. N. An (2011), "On the attached primes and Shifted Localization Principle for local cohomology modules", *Algebra Colloquium* (to appear).

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại

- Xemina Đại số và Lý thuyết số - Viện Toán học.

- Xemina Đại số Đại số giao hoán - Đại học Thái Nguyên.

- Đại hội Toán học toàn quốc, Quy Nhơn, 08/2008.

- Hội nghị nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2008, 10/2009, 10/2010.

- Hội nghị Đại số - Hình học - Tô pô, Huế, 09/2009.

- Hội thảo liên kết Nhật Bản - Việt Nam lần thứ năm về Đại số giao hoán, Hà Nội, 01/2010.

- Xemina Đại số giao hoán, Trường đại học tổng hợp Meiji, Nhật Bản, 03/2010.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Anh

[1] T. N. An (2011), "On the attached primes and Shifted Localization Principle for local cohomology modules", *Algebra Colloquium* (to appear).

[2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald (1969), *Introduction to commutative algebra*, Reading Mass: Addison-Wesley.

[3] M. Brodmann (1978), "A particular class of regular domains", *J. Algebra*, **54**, pp. 366-373.

[4] M. Brodmann and C. Rotthaus (1983), "A peculiar unmixed domain", *Proc. AMS.*, **(4)87**, pp. 596-600.

[5] M. Brodmann, C. Rotthaus and R. Y. Sharp (2000), "On annihilators and associated primes of local cohomology modules", *J. Pure Appl. Algebra*, **153**, pp. 197-227.

[6] M. Brodmann and R. Y. Sharp (1998), *Local cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications,* Cambridge University Press.

[7] M. Brodmann and R. Y. Sharp (2002), "On the dimension and multiplicity of local cohomology modules", *Nagoya Math. J.*, **167**, pp. 217-233.

[8] W. Bruns and J. Herzog (1998), *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press (Revised edition).

[9] I. S. Cohen (1946), "On the structure and ideal theory of complete local rings", *Trans. Amer. Math. Soc.* **59**, pp. 54-106.

[10] I. S. Cohen (1954), "Length of prime ideal chains", *Amer. J. Math.* **76**, pp. 654-668.

[11] N. T. Cuong and L. T. Nhan (1999), "Dimension, multiplicity and Hilbert function of Artinian modules", *East-West J. of Mathematics*, **1**, pp. 179-196.

[12] N. T. Cuong and L. T. Nhan (2002), "On the Noetherian dimension of Artinian modules", *Vietnam J. Math.*, **(2)30**, pp. 121-130.

[13] N. T. Cuong, N. T. Dung and L. T. Nhan (2007), "Top local cohomology and the catenaricity of the unmixed support of a finitely generated module", *Comm. Algebra*, **(5)35**, pp. 1691-1701.

[14] D. Delfino and T. Marley (1997), "Cofinite modules and local cohomology", *J. Pure Appl. Algebra,* **115**, pp. 107-111.

[15] M. T. Dibaei and S. Yassemi (2005), "Attached primes of the top local cohomology modules with respect to an ideal", *Arch. Math.*, **84**, pp. 292-297.

[16] D. Eisenbud (1995), *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer - Verlag Berlin - Heidelberg - New York.

[17] K. Fujita (1975), "Some counterexamples related to prime chains in integral domains", *Hiroshima Math. J.*, **5**, pp. 473-485.

[18] A. Grothendieck (1967), *Local homology*, Lect. Notes in Math., **20**, Springer-Verlag Berlin - Heidelberg - New York.

[19] R. Hartshorne (1970), "Affine duality and cofiniteness", *Inv. Math.,* **9**, pp. 145-164.

[20] C. Huneke (1992), "Problems on local cohomology, Free resolutions in commutative algebra and algebraic geometry", (Sundance, Utah, 1990) *Res. Notes Math.,* **2**, pp. 93-108.

[21] C. Huneke and A. Taylor (2007), *Lectures on local cohomology*, Contemporary Mathematics, **436**, AMS, Providence, RI, 5199.

[22] H. C. Hutchins (1981), *Examples of commutative rings*, Polygonal, Passaic, New Jersey.

[23] I. Kaplansky (1974), *Commutative ring*, University of Chicago Press (Revised edition).

[24] D. Kirby (1973), "Artinian modules and Hilbert polynomials", *Quart . J. Math.*, **24**, pp. 47-57.

[25] D. Kirby (1990), "Dimension and length of Artinian modules", *Quart. J. Math. Oxford.*, **(2)41**, pp. 419-429.

[26] L. G. Li (2010), "Vanishing Theorem of Dual Bass Numbers", *arXiv:math.AC/1009.2229.*

[27] L. G. Li (2010), "Dual Bass Numbers and Co-Cohen Macaulay Modules", *arXiv:math.AC/1005.1754.*

[28] R. Lü and Z. Tang (2001), "The f-depth of an ideal on a module", *Proc. Amer. Math. Soc.*, (7) **130**, pp. 1905-1912.

[29] G. Luybeznik (1993), "Finiteness properties of local cohomoly modules (an application of D-modules to commutative algebra)", *Invent. Math.,* (1) **113**, pp. 41-55.

[30] G. Lyubeznik (2000), "Finiteness properties of local cohomology modules for regular local rings of mixed characteristic: The unramixed case", *Comm. Alg.,* **28**, pp. 5867-5882.

[31] I. G. Macdonald, "Secondary representation of modules over a commutative ring", *Symposia Mathematica*, **11**, pp. 23-43.

[32] I. G. Macdonald and R. Y. Sharp (1972), "An elementary proof of the non-vanishing of certain local cohomology modules", *Quart. J. Math. Oxford,* (2) **23**, pp. 197-204.

[33] H. Matsumura (1986), *Commutative ring theory*, Cambridge University Press.

[34] S. McAdam and L. J. Ratliff (1976), "Maximal chains of prime ideals in integral extension domains", *Trans. AMS.*, **224**, pp. 103-116.

[35] S. McAdam and L. J. Ratliff (1977), "Semi-local taut rings", *Indiana Univ. Math. J.*, **26**, pp. 73-79.

[36] L. Melkersson (1995), "Some applications of a criterion for Artinianness of a module", *J. Pure Appl. Algebra*, **101**, pp. 291-303.

[37] M. Nagata (1962), *Local rings*, Interscience, New York.

[38] M. Nagata (1980), "On the chain problem of prime ideal", *Nagoya Math. J.*, **80**, pp. 107-116.

[39] L. T. Nhan and T. N. An (2009), "On the unmixedness and the universal catenaricity of local rings and local cohomology modules", *J. Algebra*, **321**, pp. 303-311.

[40] L. T. Nhan and T. N. An (2010), "On the catenaricity of Noetherian local rings and quasi unmixed Artinian modules", *Comm. Algebra*, **38**, pp. 3728-3736.

[41] L. J. Ratliff (1969), "On quasi-unmixed local domains, the altitude formula, and the chain condition for prime ideals (I)", *Amer. J. Math.* **91**, pp. 508-528.

[42] L. J. Ratliff (1971), "Characterizations of catenary rings", *Amer. J. Math.* **93**, pp. 1070-1108.

[43] L. J. Ratliff (1972), "Catenary rings and the altitude formula", *Amer. J. Math.* **94**, pp. 458-466.

[44] L. J. Ratliff (1978), *Chain conjectures in ring theory*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag.

[45] L. J. Ratliff (1984), "On asymptotic prime divisors", *Pacific J. Math.*, **111**, pp. 395-413.

[46] R. N. Roberts (1975), "Krull dimension for Artinian modules over quasi local commutative rings", *Quart. J. Math. Oxford*, **(2)26**, pp. 269-273.

[47] R. Y. Sharp (1975), "Secondary representations for injective modules over commutative Noetherian, local rings ", *Edinburgh Math. Soc.,* **20**, pp. 143-151.

[48] R. Y. Sharp (1975), "Some results on the vanishing of local cohomology modules", *Proc. London Math. Soc*, **30**, pp. 177-195.

[49] R. Y. Sharp (1989), "A method for the study of Artinian modules with an application to asymptotic behavior, in: Commutative Algebra", *Math. Sci. Res. Inst. Publ.,* **15**, Spinger-Verlag, New York, pp. 443-465.

[50] D. W. Sharpe and P. Vasmos (1972), *Injective modules,* Cambridge University Press.

[51] Z. Tang and H. Zakeri (1994), "Co-Cohen-Macaulay modules and modules of generalized fractions", *Comm. Algebra*, **(6)22**, pp. 2173-2204.

[52] O. Zariski and P. Samuel (1960), *Commutative algebra*, Vol. 2, Van Nostrand, New York.

Tiếng Pháp

[53] D. Ferrand and M. Raynaud (1970), "Fibres formelles d'un anneau local Noetherian", *Ann. Sci. E'cole Norm. Sup.*, **(4)3**, pp. 295-311.

Tiếng Đức

[54] N. T. Cuong, P. Schenzel and N. V. Trung (1978), "Verallgemeinerte Cohen-Macaulay moduln", *Math. Nachr.*, **85**, pp. 57-73.

[55] G. Faltings (1978), "Über die Annulatoren lokaler Kohomologiegruppen", *Arch. Math.* **30**, pp. 473-476.

[56] G. Faltings (1981), "Der Endlichkeitssatz in der lokalen Kohomologie", *Math. Ann.* **255**, pp. 45-56.

[57] W. Krull (1937), "Zum Dimensionsbegriff der idealtheorie", *Math. Z.,* **42**, pp. 745-766.

[58] P. Schenzel (1982), *Dualisierende komplexe in der lokalen algebra und Buchsbaum - ringe*, Lect. Notes in Math., **907**, Springer-Verlag Berlin - Heidelberg - New York.

[59] H. Zöschinger (2009), "Über die assoziierten primideale des bidualen", *Comm. Algebra* **37**, pp. 1977-1994.

[60] H. Zöschinger (2010), "Über die bedingung going up für $R \subset \widehat{R}$", *Arch. Math.* **95**, pp. 225-231.