BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO VIỆN KHOA HỌC & CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

TRẦN ĐÌNH ĐỨC

VỀ TẬP XÁC ĐỊNH DUY NHẤT

CHO HÀM CHỈNH HÌNH NHIỀU BIẾN

Chuyên ngành: Giải tích

Mã số: 62.46.01.01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI 2011

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO VIỆN KHOA HỌC & CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

TRẦN ĐÌNH ĐỨC

VỀ TẬP XÁC ĐỊNH DUY NHẤT

CHO HÀM CHỈNH HÌNH NHIỀU BIẾN

Chuyên ngành: Giải tích

Mã số: 62.46.01.01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. Hà Huy Khoái

TS. Vũ Hoài An

HÀ NỘI 2011

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Hà Huy Khoái và TS. Vũ Hoài An. Các kết quả viết chung đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả được trình bày trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kì công trình nào khác.

Tác giả

Trần Đình Đức

Mục lục

Mở đầu

Một trong những ứng dụng sâu sắc của lý thuyết phân bố giá trị do R. Nevanlinna xây dựng là Vấn đề xác định duy nhất cho các hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ qua điều kiện ảnh ngược của tập hợp điểm. Năm 1920, G. Pólya [65] chứng minh Định lý 4 điểm sau: *Nếu hai hàm phân hình khác hằng f, g trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ có cùng ảnh ngược kể cả bội của 4 điểm phân biệt thì $f = \dfrac{ag+b}{cg+d}$ với những hằng số a, b, c, d nào đó thoả mãn $ad - bc \neq 0$.*

Năm 1926, R. Nevanlinna đã chứng minh: *Nếu hai hàm phân hình khác hằng f, g trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ có cùng ảnh ngược không tính bội của 5 điểm phân biệt thì $f \equiv g$.* Ngày nay, kết quả này được gọi là Định lý 5 điểm Nevanlinna.

Cho đến nay, có hai hướng nghiên cứu sau đây nhằm mở rộng Định lý 4 điểm, Định lý 5 điểm.

1) Xét nghịch ảnh riêng rẽ của điểm cho các hàm và nghịch ảnh của siêu phẳng, siêu mặt cho các ánh xạ chỉnh hình, với các tình huống không tính bội, có tính bội hoặc tính với bội bị chặn, trong các trường hợp phức và p-adic.

2) Xét nghịch ảnh của tập hợp điểm cho các hàm và nghịch ảnh của tập hợp siêu phẳng, siêu mặt cho các ánh xạ chỉnh hình, với các tình huống không tính bội, có tính bội hoặc tính với bội bị chặn, trong các trường hợp phức và p-adic.

Hướng thứ nhất là sự mở rộng tự nhiên của Định lý 4 điểm và Định lý 5 điểm. Kết quả đầu tiên trong trường hợp phức thuộc về H. Fujimoto [31]. Năm 1975, ông chứng minh được: *Nếu hai ánh xạ phân hình khác hằng $f, g : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có cùng ảnh ngược tính cả bội của $3n+1$ siêu phẳng* *ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thì tồn tại một biến đổi tuyến tính xạ ảnh L của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho $L(f) = g$.*

Trong trường hợp p-adic W. Adams và E. Straus [7] đã nhận được kết quả sau tương tự như Định lý 5 điểm của Nevanlinna:

Định lý A.[7] *Giả sử f, g là hai hàm phân hình p-adic khác hằng sao cho đối với 4 giá trị phân biệt a_1, a_2, a_3, a_4 ta có $f(z) = a_i$ khi và chỉ khi $g(z) = a_i, i = 1, 2, 3, 4$. Khi đó $f \equiv g$.*

P.C. Hu-C.C. Yang [39], M. Ru [54] mở rộng Định lý A cho các đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính. Các ông đã chứng minh:

Định lý B. [39] *Giả sử $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là hai đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính, $H_i, 1 \leqslant i \leqslant 3n + 1$ là 3n+1 siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ thoả mãn $f^{-1}(H_i) \bigcap f^{-1}(H_j) = \emptyset$ với mọi $i \neq j$, $f^{-1}(H_i) = g^{-1}(H_i)$ với mọi $i = 1, ..., 3n + 1$ và $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \bigcup_{i=1}^{3n+1} f^{-1}(H_i)$. Khi đó $f \equiv g$.*

Từ đó, Vấn đề xác định duy nhất theo hướng thứ nhất được nghiên cứu liên tục và mạnh mẽ với kết quả của H. Fujimoto [32], [33], [34], M. Ru [54], L. Smiley [59], M. Shirosaki [57], Tran Van Tan [62], P. C. Hu - C. C. Yang [40], G. Dethloff - T.V. Tan [25], D.D. Thai - S. D. Quang [61], Z. Chen - Y. Li - Q. Yan [20], P. D. Thoan - P. V. Duc - S. D. Quang [64]...

Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ta định nghĩa

$$E_f^{m_0}(S) = \bigcup_{a \in S} \Big\{(z, m) \in \mathbb{C}\text{x}\mathbb{N} : f(z) = a \text{ với bội } n \text{ và } m = \min(m_0, n)\Big\}.$$

Trong trường hợp $m_0 = \infty$(tương ứng $m_0 = 1$), chúng ta viết

$$E_f^{\infty}(S) = E_f(S), (\text{tương ứng } E_f^1(S) = \overline{E}_f(S)).$$

Ký hiệu: $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là không gian xạ ảnh n chiều trên trường số phức $\mathbb{C}$.

Đường cong chỉnh hình f là ánh xạ $f = [f_1 : ... : f_{n+1}] : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

với $f_1, ..., f_{n+1}$ là các hàm nguyên, không có không điểm chung. Ánh xạ $\widetilde{f} = (f_1, ..., f_{n+1}) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ gọi là một biểu diễn rút gọn của f.

Nếu $\widetilde{f} = (f_1, ..., f_{n+1})$, $\widetilde{g} = (g_1, ..., g_{n+1})$ là hai biểu diễn rút gọn của f, thì tồn tại hàm nguyên c không có không điểm sao cho $f_i = cg_i$ với mọi i.

Nếu $f(z) = [c_1 : ... : c_{n+1}]$, ở đó $c_1, ..., c_{n+1}$ là các hằng số không đồng thời bằng 0, thì f được gọi là đường cong hằng.

Giả sử H là một siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được xác định bởi phương trình $F = 0$, sao cho ảnh của f không chứa trong H. Đặt

$$E_f(H) = E_{F_\circ \tilde{f}}(0), \;\; \overline{E}_f(H) = \overline{E}_{F_\circ \tilde{f}}(0),$$
$$\overline{E}_f(H, \leqslant k) = \big\{z \in \mathbb{C} : F_\circ \tilde{f}(z) = 0 \text{ không tính bội}, \; v_{F_\circ \tilde{f}}(z) \leqslant k\big\}.$$

F. Gross [37] là người khởi xướng hướng nghiên cứu thứ hai. Năm 1977, ông đưa ra ý tưởng mới là không xét ảnh ngược của các điểm riêng rẽ mà xét ảnh ngược của các tập hợp điểm trong $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ông đưa ra hai câu hỏi sau:

1) Tồn tại hay không tập S của $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sao cho với bất kỳ các hàm phân hình f, g thoả mãn điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$, ta có $f \equiv g$?

2) Tồn tại hay không hai tập $\{S_1, S_2\}$ của $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sao cho bất kỳ các hàm phân hình f, g thoả mãn điều kiện $E_f(S_i) = E_g(S_i), i = 1, 2$, thì $f \equiv g$?

Tập S thoả mãn 1) gọi là tập xác định duy nhất (viết tắt là URS).

Tương tự S_1, S_2 thoả mãn 2) gọi là *song xác định duy nhất* (viết tắt là bi-URS).

Kết quả đầu tiên thuộc về F. Gross và C. C. Yang [38]. Năm 1982, hai ông đã chứng minh tập $S = \{z \in \mathbb{C} : z + e^z = 0\}$, có vô hạn phần tử, là URS cho các hàm nguyên.

Năm 1994, H. X. Yi lần đầu tiên đưa ra URS hữu hạn có 15 phần tử.

Năm 1998, G. Frank và M. Reinders, xây dựng URS có 11 phần tử.

Đối với hàm phân hình p-dic, năm 1999, P.C. Hu-C. C. Yang [40] xây dựng URS có 10 phần tử.

Đối với câu hỏi thứ hai của F. Gross, năm 1998, A. Boutaba - A. Escassut [19] chỉ ra tồn tại các cặp bi-URS cho các hàm phân hình dạng $(\{z_1, ..., z_n\}, w)$ với mọi $n \geq 5$. Cho đến nay, các tập bi-URS tốt nhất là dạng $(\{z_1, ..., z_n\}, w)$ với mọi $n \geq 4$ thuộc về Hà Huy Khoái-Tạ Thị Hoài An [45].

Cho đến nay, đã có nhiều kết quả sâu sắc theo hướng thứ hai như của G. Frank - M. Reinders [30], H. Fujimoto [34], C. C. Yang - X. Hua [67], H. X. Yi [68], Mues E. - Reinders M. [51], A. Escassut - L. Haddad - R Vidal [28], Ha Huy Khoai - T. T. H. An [44], [45], W. Cherry- C. C. Yang [24], Ta Thi Hoai An [8], T. T. H. An - J.T.Y.Wang - P.M.Wong [10], [11]...

Theo hai hướng nghiên cứu nói trên, trong luận án này chúng tôi xét các vấn đề sau:

Giả sử $H_1, ..., H_q$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n$, $k_1, ..., k_q$ là các số nguyên dương. Gọi A là tập các đường cong chỉnh hình khác hằng từ $\mathbb{C}$ tới $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $f, g \in A$, thoả mãn các điều kiện sau:

$$1) \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) = \overline{E}_g(H_i, \leqslant k_i),$$

$$2) f = g \text{ trên } \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \text{ với mọi } i = 1, ..., q \text{ và } g \in A.$$

Vấn đề 1. Tìm mối liên hệ giữa q với k_i và n để $\#A = 1$.

Vấn đề 2. Tìm siêu mặt X trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho nếu $E_f(X) = E_g(X)$ thì $f \equiv g$.

Vấn đề 3.

3.1. Tương tự Vấn đề 1 và Vấn đề 2 trong trường hợp p-adic.

3.2. Tương tự Định lý 4 điểm, Định lý 5 điểm và thiết lập bi-URS cho trường hợp p-adic nhiều biến.

Trong các vấn đề trên, nếu số q và bậc của siêu mặt càng nhỏ, lớp xác định các siêu mặt càng rộng thì kết quả tìm được càng có ý nghĩa.

Đối với mục tiêu di động và $f, g : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình khác hằng: *Giả sử* $\{a_i\}_{i=1}^q$ *là các ánh xạ phân hình từ* $\mathbb{C}^m$ *vào* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *ở vị trí tổng quát sao cho* a_i *là nhỏ đối với* f, $(f, a_i) \not\equiv 0, i = 1, ..., q$ *và thoả mãn:*

a) $\mathit{dim}\{z \in \mathbb{C}^m | (f, a_i)(z) = (f, a_j)(z) = 0\} \leqslant m - 2 \ (1 \leqslant i < j \leqslant q)\}$,

b) $\mathit{min}(v_{(f,a_j)}, d) = \mathit{min}(v_{(g,a_j)}, d),\ 1 \leqslant j \leqslant q$,

c) $f(z) = g(z)$ *trên* $\bigcup\limits_{i=1}^{q}\{z \in \mathbb{C}^m | (f, a_i)(z) = 0\}$.

Năm 2007, Z. Chen - Y.Li - Q.Yan [20] đã chứng minh: Nếu $q = 4n^2 + 2n$ và $n \geq 2$ thì $f \equiv g$.

P. D. Thoan - P. V. Duc - S. D. Quang [64] đã chứng minh: Nếu $q = 4n^2 + 2n - 2(\overline{d} - 1)$ thì $f \equiv g$, ở đó $\overline{d} = \min\{d, n\}$, với d là số nguyên dương cho trước.

Đối với mục tiêu cố định và $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là hai đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính: *Giả sử* $\{H_i\}_{i=1}^q$ *là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *thoả mãn* $f^{-1}(H_i) \bigcap f^{-1}(H_j) = \emptyset$ *với mọi* $i \neq j$, $f^{-1}(H_i) = g^{-1}(H_i)$ *với mọi* $i = 1, ..., q$ *và* $f(z) = g(z)$ *với mọi* $z \in \bigcup\limits_{i=1}^{q} f^{-1}(H_i)$.

Năm 1983, L.Smiley [59] chứng minh, nếu $q = 3n + 2$ thì $f \equiv g$.

Năm 2009, Z. Chen - Q.Yan [21] chứng minh, nếu $q = 2n + 3$ thì $f \equiv g$.

Trong Vấn đề 1 của luận án được chúng tôi xét cho các đường cong chỉnh hình khác hằng với mục tiêu cố định, không cần giả thiết a), và từ đó suy ra được Định lý 5 điểm của Nevanlinna, kết quả của L.Smiley. Chúng tôi chọn cách tiếp cận khác các tác giả trên. Chúng tôi cải tiến Định lý chính thứ 2 của E. I. Nochka đối với đường cong chỉnh hình k- không suy biến tuyến tính để đưa ra các ước lượng giữa các hàm đặc trưng thông qua ước lượng giữa hàm đặc trưng với hàm đếm, nhờ đó chúng tôi nhận được Định lý sau:

Định lý 1.2.3. *Giả sử* $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là hai đường cong chỉnh hình* *khác hằng, $k_1, \ldots, k_q \in \mathbb{N}^*$ và $H_1, \ldots, H_q$ là các siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát, $f(\mathbb{C}) \not\subset H_i$, $g(\mathbb{C}) \not\subset H_i$, $i = 1, \ldots, q$. Giả sử*

$$f(z) = g(z) \ \text{ với mọi } \ z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \text{ và } z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_g(H_i, \leqslant k_i). \qquad (1.5)$$

Nếu $q > 2n^2 + n + 1 + \sum_{i=1}^{q} \dfrac{n}{k_i + 1}$ *thì* $f \equiv g$.

Trong Định lý 1.2.3, thêm giả thiết $\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$, với mọi $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$, chúng tôi nhận được Hệ quả 1.2.4 nói rằng: Nếu $q > 3n + 1 + \sum_{i=1}^{q} \dfrac{n}{k_i + 1}$ thì $f \equiv g$.

Từ Hệ quả 1.2.4, nhận được kết quả của L.Smiley khi cho $k_i \to \infty$, và nhận được Định lý 5 điểm của R.Nevanlinna khi $k_i \to \infty$ và $n = 1$.

Sử dụng Bổ đề 1.2.2 kết hợp Bổ đề Borel chúng tôi nhận được Định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số mà giả thiết xuất hiện ảnh ngược tính cả bội của siêu mặt Fermat và ảnh ngược không tính bội của họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát (Định lý 1.3.4), ở đó (1.5) trong Định lý 1.2.3 được thay bởi $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i)$.

M. Shirosaki là người đầu tiên xem xét Vấn đề 2. Trong [56], [57], ông sử dụng hai Định lý chính và đưa ra hai lớp siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số.

Khi nghiên cứu Vấn đề 2 chúng tôi không sử dụng trực tiếp hai Định lý chính mà dùng hai kiểu Bổ đề Borel để xét sự suy biến của đường cong chỉnh hình. Từ đó đưa Vấn đề 2 về việc xét tính duy nhất nghiệm phân hình của phương trình hàm. Kết quả chúng tôi nhận được là hai lớp đa thức duy nhất và siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số (Định lý 1.3.9, Định lý 1.3.10).

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2m + 9$, $(n, m) = 1$, $m \geq 2$, $P_i(z) = z^n - a_i z^{n-m} + b_i$, $0 \neq a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, ..., s$ và $b_i^{2d} \neq b_j^d b_l^d$ với $i \neq j$, $i \neq l$. Xét các đa thức thuần nhất sau:

$$Q_i = \widetilde{P}_i(z_i, z_{s+1}) = z_i^n - a_i z_i^{n-m} z_{s+1}^m + b_i z_{s+1}^n, i = 1, 2, ..., s.$$

và: $$P_{s+1,d} = Q_1^d + ... + Q_s^d,\ d \geq (2s-1)^2. \qquad (1.11)$$

Khi đó, $P_{s+1,d}$ là đa thức thuần nhất bậc nd có hệ số thuộc $\mathbb{C}$.

Định lý 1.3.9. *Giả sử $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và X là một siêu mặt của $\mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ xác định bởi $P_{s+1,d} = 0$. Giả sử rằng $E_f(X) = E_g(X)$. Khi đó $f \equiv g$.*

Siêu mặt được xác định trong Định lý 1.3.9, tổng quát hơn và có bậc nd, $d \geq (2s-1)^2$ nhỏ hơn bậc của các siêu mặt được xác định bởi M. Shirosaki [56], [57].

Khi giải quyết Vấn đề 3.1, chúng tôi cải tiến Định lý chính thứ hai trong trường hợp p-adic cho các đường cong chỉnh hình k-không suy biến tuyến tính (Bổ đề 2.2.2) để đưa ra các ước lượng giữa các hàm độ cao thông qua ước lượng giữa hàm này với hàm đếm. Kết quả chúng tôi nhận được là Định lý 2.2.3, tương tự Định lý 1.2.3 nhưng được xét trong trường hợp p-adic, tương tự kết quả của Adams-E. Straus [7], M. Ru [54], P.C. Hu-C. C. Yang [39] đối với các đường cong chỉnh hình p-adic.

Sử dụng Bổ đề 2.2.2 và Định lý không điểm Hilbert [66], chúng tôi nhận được Định lý 2.2.7 nói rằng, với giả thiết của Định lý 2.2.3, thêm điều kiện f, g có chung ảnh ngược tính cả bội của $n+1$ siêu mặt bậc d ở vị trí tổng quát, và điều kiện $f(z) = g(z)$ với $z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i)$ và $z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_g(H_i, \leqslant k_i)$ của Định lý 2.2.3 thay bởi $f(z) = g(z)$ với $z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i)$, ta cũng được $f \equiv g$. Trong trường hợp phức chưa có kết quả tương tự Định lý 2.2.7.

Chú ý rằng Định lý chính thứ hai trong trường hợp p-adic khác trường hợp phức, và số q trong Định lý 2.2.3 nhỏ hơn trong Định lý 1.2.3.

Chúng tôi sử dụng hai Định lý chính trong trường hợp p-adic để xét sự suy biến của đường cong chỉnh hình, từ đó đưa vấn đề nghiên cứu về vấn đề duy nhất nghiệm phân hình của phương trình hàm p-adic. Kết quả, chúng tôi nhận được là hai lớp siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic không suy biến đại số theo hướng trả lời câu hỏi thứ 2 của F. Gross trong trường hợp p-adic (Định lý 2.3.3, Định lý 2.3.4).

Có hai hướng giải quyết Vấn đề 3.2:

Hướng thứ nhất: Sử dụng nhát cắt thích hợp, chuyển hàm p-adic nhiều biến về hàm một biến, nhờ đó nhận được Mệnh đề 3.3.2, nói rằng *Đa thức $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ là đa thức duy nhất (tương ứng, đa thức duy nhất mạnh) cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$ nếu và chỉ nếu nó là đa thức duy nhất (tương ứng, đa thức duy nhất mạnh) cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.* Từ đó, thu được các kết quả đối với đa thức duy nhất trong trường hợp nhiều biến, khi đã biết kết quả trong trường hợp một biến. Nhờ đó, nhận được các Định lý 3.3.3, Định lý 3.3.4. Đối với hướng thứ nhất, nhận xét và kết quả của phản biện là thực sự có ý nghĩa. Phản biện cũng nêu ý tưởng cho tác giả chứng minh Mệnh đề 3.2.5 là tương tự Mệnh đề 3.3.2, nhưng được xét đối với tập xác định duy nhất. Từ đó, nhận được Định lý 3.2.7, Định lý 3.2.8.

Hướng thứ hai: Thiết lập Định lý chính thứ 2 cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến (Định lý 3.4.2). Sử dụng Định lý 3.4.2 với các kỹ thuật đánh giá giữa hàm độ cao với hàm đếm không tính bội, cùng việc sử dụng các kỹ thuật chứng minh trong [45], chúng tôi cũng nhận được các Định lý 3.2.7, Định lý 3.2.8, Định lý 3.3.3, Định lý 3.3.4 nói trên.

Định lý 3.2.7 nói rằng: *Hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ trùng nhau, nếu chúng có chung ảnh ngược không tính bội của 4 điểm phân biệt.*

Định lý 3.2.8 cho thấy: *Hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ trùng nhau, nếu chúng có chung ảnh ngược tính cả bội riêng của 3 điểm phân biệt.*

Định lý 3.3.4 và Định lý 3.3.5 lần lượt là điều kiện đủ của lớp đa thức duy nhất mạnh và *bi*-URS cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến dạng $\Big(\{a_1, ..., a_q\}, \{u\}\Big)$, với mọi $q \geq 4$ và $u \in \mathbb{C}_p$.

Luận án được chia thành ba chương cùng với phần mở đầu, kết luận và 68 tài liệu tham khảo.

Chương I: Chúng tôi nghiên cứu Vấn đề 1, Vấn đề 2. Nội dung được viết dựa trên bài báo [15]. Các kết quả chính của chương là: Định lý 1.2.3, Hệ quả 1.2.4, Định lý 1.3.4, Định lý 1.3.6, Định lý 1.3.9, Định lý 1.3.10.

Chương II: Chúng tôi nghiên cứu Vấn đề 3.1. Nội dung được viết dựa trên bài báo [13]. Các kết quả chính của chương là: Định lý 2.2.3, Định lý 2.2.7, Định lý 2.3.2, Định lý 2.3.3, Định lý 2.3.4.

Chương III: Chúng tôi nghiên cứu Vấn đề 3.2. Nội dung được viết dựa trên bài báo [14], [27]. Các kết quả chính của chương là: Định lý 3.2.7, Định lý 3.3.4, Định lý 3.3.5.

Các kết quả trong luận án được báo cáo tại các Hội nghị: Hội nghị quốc tế về lý thuyết số và các vấn đề liên quan, Viện Toán học, 12-2006; Đại số-Hình học-Tôpô, Vinh 12-2007; Đại hội Toán học Toàn quốc, Quy Nhơn 8-2008; Đại số-Hình học-Tôpô, Huế 9-2009; Hội nghị Nghiên cứu sinh Viện Toán học 2006, 2007, 2008.

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của GS. TSKH. Hà Huy Khoái và TS. Vũ Hoài An. Trước tiên, tác giả luận án xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến GS.TSKH. Hà Huy Khoái đã đặt ra hướng nghiên cứu cho đề tài luận án. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến TS. Vũ Hoài An, người đã gợi ý về cách thức giải quyết các Vấn đề và giúp đỡ khoa học trong nghiên cứu mà tiến sĩ dành cho tác giả.

Tác giả xin được trân trọng cảm ơn Ban Lãnh đạo Viện Toán học - Viện khoa học và Công nghệ Việt Nam, Trung tâm đào tạo sau đại học - Viện Toán học đã tạo những điều kiện thuận lợi nhất cho tác giả trong quá trình nghiên cứu tại Viện.

Tác giả xin chân thành cảm ơn GS. William Cherry về những bài giảng bổ ích của Giáo sư dành cho nhóm nghiên cứu chúng tôi tại Viện Toán học.

Tác giả xin chân thành cảm ơn GS.TSKH. Lê Tuấn Hoa, GS.TSKH. Nguyễn Tự Cường, GS.TSKH. Nguyễn Xuân Tấn, PGS. TS. Tạ Thị Hoài An, TS. Vũ Thế Khôi và các Giáo sư, các Nhà toán học thuộc phòng Giải tích, phòng Tô pô - Hình học, phòng Lý thuyết số thuộc Viện Toán học-Viện KHCN Việt Nam đã giúp đỡ và chỉ bảo tận tình cho tác giả những thắc mắc khoa học trong quá trình nghiên cứu. Xin cảm ơn TS. Hà Trần Phương, TS Lê Thanh Huệ, NCS Thuý Quỳnh và các bạn cùng nghiên cứu sinh trong Viện Toán học, đã dành cho tác giả những tình cảm và sự động viên giúp đỡ quý báu.

Tác giả xin cảm ơn Ban Giám hiệu trường Cao đẳng sư phạm Hưng Yên, các đồng nghiệp trong Phòng Đào tạo Trường Cao đẳng sư phạm Hưng Yên đã tạo những điều kiện thuận lợi cho tác giả về thời gian, tinh thần cũng như vật chất và động viên để tác giả hoàn thành luận án này.

Tác giả xin gửi những lời cảm ơn sâu sắc đến Cô Đinh Thị Cúc, người đã tạo rất nhiều thuận lợi về tinh thần cho tác giả trong thời gian học tập.

Cuối cùng, luận án này được dâng tặng bố mẹ, các anh chị em trong đại gia đình thân yêu, tặng vợ và hai con yêu dấu, những người đã chịu nhiều khó khăn và dành hết tình cảm yêu thương, động viên tác giả hoàn thành những nghiên cứu của mình.

Chương 1

Định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình phức

Năm 1926, R. Nevanlinna đưa ra hai định lý chính cho các hàm phân hình mà ứng dụng của chúng là Định lý 5 điểm.

Năm 1933, H. Cartan mở rộng kết quả của R. Nevanlinna cho các đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính.

Năm 1983, E. I. Nochka đã mở rộng kết quả của H. Cartan cho các đường cong chỉnh hình k-không suy biến tuyến tính từ $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Năm 1983, L. Smiley [59] đưa ra tập xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính.

Năm 2005, J. Noguchi nhận được một kiểu của Định lý E. I. Nochka cho các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu Vấn đề 1, Vấn đề 2. Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [15]. Cụ thể:

1. Tìm q siêu phẳng ở vị trí tổng quát để từ đó xác định duy nhất đường cong chỉnh hình khác hằng bởi ảnh ngược không tính bội.

2. Tìm siêu mặt X để từ đó xác định duy nhất đường cong chỉnh hình không suy biến đại số bởi ảnh ngược tính cả bội.

Chúng tôi đưa ra một số định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình khác hằng. Đây là tương tự Định lý 5 điểm, kết quả của L.Smiley [59], cải tiến kết quả của Z. Chen - Y. Li - Q. Yan [20] (Định lý 1.2.3, Hệ quả 1.2.4).

Chúng tôi đưa ra hai lớp đa thức duy nhất và siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số theo hướng trả lời Câu hỏi của F. Gross, và cải tiến kết quả của M. Shirosaki [57], [56] (Định lý 1.3.9, Định lý 1.3.10).

1.1 Một số khái niệm.

Các khái niệm: Đường cong chỉnh hình f, biểu diễn rút gọn $\widetilde{f}$ của f, đường cong hằng, $E_f(H), \overline{E}_f(H), \overline{E}_f(H, \leqslant k)$ định nghĩa như phần mở đầu.

Định nghĩa 1. Hàm chỉnh hình trên toàn mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ được gọi là hàm nguyên.

Giả sử f là hàm nguyên không đồng nhất không trên $\mathbb{C}$, với mỗi $a \in \mathbb{C}$, ký hiệu $v_f(a)$ là bậc của f tại điểm a, nghĩa là

$$f(z) = (z-a)^{v_f(a)} g(z),$$

ở đó $g(z)$ là hàm chỉnh hình trong một lân cận của a và $g(a) \neq 0$.

Cho k, l là các số nguyên dương và $r > 1$.

1) Hàm $v_f^{\leqslant k} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{N}$ xác định bởi $v_f^{\leqslant k}(z) = \begin{cases} v_f(z) & \text{nếu } \ v_f(z) \leqslant k, \\ 0 & \text{nếu } \ v_f(z) > k. \end{cases}$

và $\quad n_f^{\leqslant k}(r) = \sum\limits_{|z| \leqslant r} v_f^{\leqslant k}(z), \ \ n_f^{\leqslant k}(a, r) = n_{f-a}^{\leqslant k}(r).$

$$N_f^{\leqslant k}(a, r) = \int\limits_1^r \frac{n_f^{\leqslant k}(a, x)}{x} dx, \ \ N_f^{\leqslant k}(r) = N_f^{\leqslant k}(0, r),$$

$$N_{l,f}^{\leqslant k}(a, r) = \int\limits_1^r \frac{n_{l,f}^{\leqslant k}(a, x) dx}{x}, \ \text{ở đó } \ n_{l,f}^{\leqslant k}(a, r) = \sum_{|z| \leqslant r} \min\left\{ v_{f-a}^{\leqslant k}(z), l \right\}.$$

2) Hàm $v_f^{>k}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{N}$ xác định bởi $v_f^{>k}(z) = \begin{cases} v_f(z) & \text{nếu } v_f(z) > k \\ 0 & \text{nếu } v_f(z) \leqslant k, \end{cases}$

và $n_f^{>k}(r) = \sum\limits_{|z| \leqslant r} v_f^{>k}(z),\ \ n_f^{>k}(a, r) = n_{f-a}^{>k}(r),$

$$N_f^{>k}(a, r) = \int\limits_1^r \frac{n_f^{>k}(a, x)}{x} dx,\ \ N_f^{>k}(r) = N_f^{>k}(0, r),$$

$$N_{l,f}^{>k}(a, r) = \int\limits_1^r \frac{n_{l,f}^{>k}(a, r)}{x} dx,\ \text{ ở đó }\ n_{l,f}^{>k}(a, r) = \sum_{|z| \leqslant r} \min\left\{v_{f-a}^{>k}(z), l\right\}.$$

Định nghĩa 2. [53] Giả sử $N \geq n$, và $q \geq N + 1$. Họ siêu phẳng phân biệt $\{H_j\}_{j=1}^q$ của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là ở vị trí N con tổng quát nếu $N + 1$ siêu phẳng bất kỳ của $\{H_1, ..., H_q\}$ có giao bằng rỗng.

Họ $\{H_j\}_{j=1}^q$ ở vị trí n con tổng quát gọi đơn giản là ở vị trí tổng quát.

Định nghĩa 3. Một đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là *không suy biến đại số* (*không suy biến tuyến tính*) nếu không tồn tại đa thức thuần nhất P (dạng tuyến tính F) của các biến $z_1, \ldots, z_{n+1}$ sao cho $P(\widetilde{f}) = 0$, $(F(\widetilde{f}) = 0)$.

Nếu ảnh của f chứa trong một không gian con tuyến tính m-chiều nhưng không chứa trong không gian tuyến tính nào có số chiều nhỏ hơn m của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thì f được gọi là *m-không suy biến tuyến tính.*

Chú ý: Nếu $m = n$ thì f gọi là đường cong không suy biến tuyến tính.

1.2 Định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình khác hằng

Để đơn giản, từ đây đến cuối chương ta luôn giả sử $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là hai đường cong chỉnh hình có biểu diễn rút gọn tương ứng là

$\widetilde{f} = (f_1, \ldots, f_{n+1})$, $\widetilde{g} = (g_1, \ldots, g_{n+1})$, hoặc $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ có biểu diễn rút gọn tương ứng là $\widetilde{f} = (f_1, \ldots, f_{s+1})$, $\widetilde{g} = (g_1, \ldots, g_{s+1})$.

Định nghĩa 4. Hàm đặc trưng của đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có biểu diễn rút gọn là $\widetilde{f} = (f_1, ..., f_{n+1})$ xác định bởi

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log ||\widetilde{f}(re^{\imath\theta})||d\theta - \log ||\widetilde{f}(0)||,$$

ở đó $||\widetilde{f}|| = \big(|f_1|^2 + ... + |f_{n+1}|^2\big)^{1/2}$.

Giả sử H là một siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được xác định bởi phương trình $F = 0$, sao cho ảnh của f không chứa trong H. Đặt

$$T_f(H, r) = T_{F\circ\widetilde{f}}(r), \quad N_f(H, r) = N_{F\circ\widetilde{f}}(r), N_{k,f}(H, r) = N_{k,F\circ\widetilde{f}}(r),$$
$$N_{l,f}^{\leqslant k}(H, r) = N_{l,F\circ\widetilde{f}}^{\leqslant k}(r), N_{l,f}^{>k}(H, r) = N_{l,F\circ\widetilde{f}}^{>k}(r).$$

Định lý 1.2.1. *Giả sử $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là đường cong chỉnh hình m-không suy biến tuyến tính, $H_1, \ldots, H_q$ là các siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát sao cho $f(\mathbb{C}) \not\subset H_j,\ j = 1, \ldots, q$. Khi đó*

$$(q - 2n + m - 1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_{m,f}(H_j, r) + S_f(r),$$

ở đó $S_f(r) = o(T_f(r))$ với mọi r ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.

Chứng minh. Gọi $\mathbb{C}^{n+1^*}$ là không gian véc tơ đối ngẫu của không gian véc tơ $\mathbb{C}^{n+1}$. Với mỗi $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1^*}$, đặt:

$$< \widetilde{f}, \alpha >= \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_{n+1} f_{n+1}.$$

Do f là đường cong m-không suy biến tuyến tính, nên luôn tìm được cơ sở $\varepsilon = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n+1}\}$ của $\mathbb{C}^{n+1^*}$ sao cho $\varepsilon_{m+2}, ..., \varepsilon_{n+1}$ là cơ sở của $E[f] = \{\alpha \in \mathbb{C}^{n+1^*} :< \widetilde{f}, \alpha >\equiv 0\}$.

Gọi $e = \{e_1, ..., e_{n+1}\}$ là cơ sở đối ngẫu của ε, $\mathbb{V}$ là không gian véc tơ sinh bởi $e = \{e_1, ..., e_{m+1}\}$, $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ là không gian xạ ảnh được xác định bởi $\mathbb{V}$, và g là đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính từ $\mathbb{C}$ đến $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ với biểu diễn rút gọn $\widetilde{g} = (< \widetilde{f}, \varepsilon_1 >, ..., < \widetilde{f}, \varepsilon_{m+1} >)$.

Giả sử H_j được xác định bởi phương trình

$$a_j = a_{j_1}x_1 + ... + a_{j_{n+1}}x_{n+1} = 0, j = 1, ..., q.$$

Đặt:

$$b_j = \sum_{i=1}^{n+1} < e_i, a_j > \varepsilon_i = \sum_{k=1}^{n+1} a_{jk}\varepsilon_k, j = 1, ..., q,$$
$$c_j = \sum_{i=1}^{m+1} < e_i, b_j > \varepsilon_i = \sum_{k=1}^{m+1} a_{jk}\varepsilon_k, j = 1, ..., q.$$

Lấy $n+1$ véc tơ bất kỳ của họ $\{c_j\}_{j=1}^{q}$ trong $\mathbb{C}^{n+1^*}$. Không giảm tổng quát, giả sử là $\{c_j\}_{j=1}^{n+1}$ và x bất kỳ trong $\mathbb{V}^* \subset \mathbb{C}^{n+1^*}$, thì

$$x = \sum_{k=1}^{m+1} x_k\varepsilon_k. \tag{1.1}$$

Vì $\{H_j\}_{j=1}^{q}$ ở vị trí tổng quát, nên $\{b_j\}_{j=1}^{n+1}$ là cơ sở của $\mathbb{C}^{n+1^*}$, suy ra

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} y_j b_j = \sum_{j=1}^{n+1} y_j \sum_{k=1}^{n+1} a_{jk}\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} y_j a_{jk}\varepsilon_k. \tag{1.2}$$

Từ (1.1), (1.2) suy ra

$$x_k = \sum_{j=1}^{n+1} y_j a_{jk} = 0, k = m+2, ..., n.$$

Thay vào (1.2) ta được

$$x = \sum_{k=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n+1} y_j a_{jk}\varepsilon_k = \sum_{j=1}^{n+1} y_j \sum_{k=1}^{m+1} a_{jk}\varepsilon_k = \sum_{j=1}^{n+1} y_j c_j.$$

Khi đó, $\{c_j\}_{j=1}^{n+1}$ là hệ sinh của $\mathbb{V}^*$, do đó $\{c_j\}_{j=1}^{q}$ xác định họ siêu phẳng $\{X_j\}_{j=1}^{q}$ ở vị trí n con tổng quát trong $\mathbb{P}(\mathbb{V})$. Áp dụng Định lý 3.1 [53], ta có

$$(q - 2n + m - 1)T_g(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_{m,g}(X_j, r) + S_g(r). \tag{1.3}$$

Mặt khác,

$$T_f(r) = T_g(r) + O(1), \quad S_f(r) = S_g(r), \quad N_{m,f}(H_j, r) = N_{m,g}(X_j, r) + O(1).$$

Thay vào (1.3) ta được

$$(q - 2n + m - 1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_{m,f}(H_j, r) + S_f(r).$$

Định lý 1.2.1 được chứng minh. □

Bổ đề 1.2.2. *Giả sử* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là đường cong chỉnh hình* m*-không suy biến tuyến tính,* $k_1, \ldots, k_q \in \mathbb{N}^*$ *và* $H_1, \ldots, H_q$ *là các siêu phẳng của* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *ở vị trí tổng quát. Giả sử rằng* $f(\mathbb{C}) \not\subset H_i, \ i = 1, \ldots, q$. *Khi đó*

$$\Big(\sum_{i=1}^{q} \frac{k_i - m + 1}{k_i + 1} - 2n + m - 1\Big) T_f(r) \leqslant \sum_{i=1}^{q} \frac{k_i}{k_i + 1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + S_f(r).$$

ở đó $S_f(r) = o(T_f(r))$ *với mọi* r *ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.*

Chứng minh. Lấy $H_i \in \{H_1, \ldots, H_q\}$ và $k_i \in \{k_1, \ldots, k_q\}$, ta có

$$\begin{aligned}
N_{m,f}(H_i, r) &= N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + N_{m,f}^{>k_i}(H_i, r)\\
&= \frac{k_i}{k_i + 1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + \frac{1}{k_i + 1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + N_{m,f}^{>k_i}(H_i, r)\\
&\leqslant \frac{k_i}{k_i + 1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + \frac{m}{k_i + 1} N_{1,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + N_{m,f}^{>k_i}(H_i, r)\\
&\leqslant \frac{k_i}{k_i + 1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + \frac{m}{k_i + 1} N_f(H_i, r).
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có

$$N_f(H_i, r) \leqslant T_f(r) + O(1).$$

Do đó

$$N_{m,f}(H_i, r) \leqslant \frac{k_i}{k_i + 1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + \frac{m}{k_i + 1} T_f(r) + O(1).$$

Vậy

$$\sum_{i=1}^{q} N_{m,f}(H_i,r) \leqslant \sum_{i=1}^{q} \frac{k_i}{k_i+1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i,r) + \sum_{i=1}^{q} \frac{m}{k_i+1} T_f(r) + O(1). \tag{1.4}$$

Từ Định lý 1.2.1 và (1.4), ta nhận được Bổ đề 1.2.2. □

Định lý 1.2.3. *Giả sử $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là hai đường cong chỉnh hình khác hằng, $k_1, \ldots, k_q \in \mathbb{N}^*$ và $H_1, \ldots, H_q$ là các siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát, $f(\mathbb{C}) \not\subset H_i$, $g(\mathbb{C}) \not\subset H_i$, $i = 1, \ldots, q$. Giả sử rằng*

$$f(z) = g(z) \ \text{ với } \ z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \text{ và } z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_g(H_i, \leqslant k_i). \tag{1.5}$$

Nếu $q > 2n^2 + n + 1 + \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{n}{k_i+1}$ *thì* $f \equiv g$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại $f \not\equiv g$, khi đó tồn tại $h, l \in \{1, \ldots, n+1\}$, $h \neq l$, sao cho $f_h g_l - f_l g_h \not\equiv 0$. Vì f, g là các đường cong chỉnh hình khác hằng, giả sử f là k- không suy biến tuyến tính và g là m- không suy biến tuyến tính. Từ Bổ đề 1.2.2 và (1.5) ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=1}^{q} \frac{k_i - k + 1}{k_i + 1} - 2n + k - 1\Big) T_f(r) \\
&\leqslant \ \sum_{i=1}^{q} \frac{k_i}{k_i+1} N_{k,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + S_f(r) \\
&\leqslant \ \sum_{i=1}^{q} \frac{k k_i}{k_i+1} N_{1,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + S_f(r) \\
&\leqslant kn N_{f_h g_l - f_l g_h}(r) + S_f(r) \\
&\leqslant kn\big(T_f(r) + T_g(r)\big) + S_f(r).
\end{aligned}$$

Vậy

$$\Big(q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{k}{k_i+1} + k\Big) T_f(r) \leqslant kn(T_f(r) + T_g(r)) + S_f(r) \tag{1.6}$$

Tương tự ta có

$$\Big(q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{m}{k_i + 1} + m\Big) T_g(r) \leqslant mn(T_f(r) + T_g(r)) + S_g(r) \tag{1.7}$$

Không giảm tổng quát, ta giả sử $1 \leqslant m \leqslant k \leqslant n$. Từ (1.6) và (1.7) ta có

$$\Big(q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{k}{k_i + 1} + m\Big) T_f(r) \leqslant kn(T_f(r) + T_g(r)) + S_f(r),$$

và

$$\Big(q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{k}{k_i + 1} + m\Big) T_g(r) \leqslant mn(T_f(r) + T_g(r)) + S_g(r).$$

Lấy tổng các bất đẳng thức trên ta được

$$\Big(q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{k}{k_i + 1} + m - kn - mn\Big) \big(T_f(r) + T_g(r)\big) \leqslant S_f(r) + S_g(r)).$$

Từ đó ta nhận được

$$q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{k}{k_i + 1} - kn - (n-1)m \leqslant 0.$$

Xét

$$\varphi(k, m) = k\Big(- \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{k_i + 1} - n\Big) + (1 - n)m + q - 2n - 1.$$

Từ $1 \leqslant m \leqslant k \leqslant n$, $-\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{k_i + 1} - n < 0$, $1 - n \leqslant 0$ và giả thiết $q > 2n^2 + n + 1 + \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1}$, ta có

$$\varphi(k, m) \geq \varphi(n, n) = q - 2n^2 - n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1} > 0.$$

Ta nhận được mâu thuẫn, vậy $f \equiv g$. Định lý 1.2.3 được chứng minh. $\square$

Trong Định lý 1.2.3, thêm giả thiết $\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$, với mọi $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$. Lý luận tương tự (1.6), ta có

$$\Big(q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{k}{k_i + 1} + k\Big) T_f(r) \leqslant k(T_f(r) + T_g(r)) + S_f(r).$$

Bằng phương pháp chứng minh tương tự Định lý 1.2.3, ta nhận được:

Hệ quả 1.2.4. *Giả sử $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là hai đường cong chỉnh hình khác hằng, $k_1, ..., k_q \in \mathbb{N}^*$ và $H_1, ..., H_q$ là các siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát sao cho $f(\mathbb{C}) \not\subset H_i$, $g(\mathbb{C}) \not\subset H_i$, $i = 1, \ldots, q$. Giả sử*

$$\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset \text{ với mọi } 1 \leqslant i \neq j \leqslant q,$$

$$f(z) = g(z) \text{ với } z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \text{ và } z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_g(H_i, \leqslant k_i). \quad (1.8)$$

Nếu $q > 3n + 1 + \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1}$ *thì* $f \equiv g$.

Nhận xét 1. Từ Hệ quả 1.2.4 ta nhận được Định lý 5 điểm của R.Nevanlinna khi cho $k_i \to \infty$ và $n = 1$, được kết quả của Smiley [59] khi cho $k_i \to \infty$.

1.3 Tập xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số

Định nghĩa 5. Một đa thức khác hằng $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ được gọi là *đa thức duy nhất cho các hàm phân hình* trên $\mathbb{C}$ nếu với mọi cặp hàm phân hình f, g khác hằng trên $\mathbb{C}$ thoả mãn điều kiện $P(f) = P(g)$ ta có $f = g$.

Tương tự, đa thức khác hằng $P \in \mathbb{C}[z]$ được gọi là *đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình* nếu với mọi f, g là các hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và hằng số $c \neq 0$ thoả mãn $P(f) = cP(g)$, ta có $f = g$.

Đa thức duy nhất (tương ứng, duy nhất mạnh) đối với các hàm phân hình p-adic viết tắt là UPM (tương ứng, SUPM).

Định nghĩa 6. Một đa thức thuần nhất P của các biến $z_1, \dots, z_{n+1}$ là *đa thức duy nhất đối với các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số* nếu với mọi đường cong chỉnh hình không suy biến đại số $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có biểu diễn rút gọn tương ứng là $\widetilde{f}$ và $\widetilde{g}$ thoả mãn điều kiện $P(\widetilde{f}) = P(\widetilde{g})$ ta có $f = g$.

Tương tự, ta cũng gọi đa thức thuần nhất P của các biến $z_1, \dots, z_{n+1}$ là *đa thức duy nhất mạnh đối với các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số* nếu với mọi đường cong chỉnh hình không suy biến đại số $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có biểu diễn rút gọn tương ứng là $\widetilde{f}, \widetilde{g}$, và hằng số $c \neq 0$ thoả mãn điều kiện $P(\widetilde{f}) = cP(\widetilde{g})$ ta có $f = g$.

Đa thức duy nhất (tương ứng, duy nhất mạnh) cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số viết tắt là UPC (tương ứng, SUPC).

Định nghĩa 7. Siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được xác định bởi phương trình $x_1^d + ... + x_{n+1}^d = 0$ được gọi là siêu mặt Fermat.

Định lý 1.3.1. [67] *Cho* $0 \neq a, b \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(n, m) = 1$, $m \geq 2$, $n > m + 1$. *Khi đó* $P(z) = z^n - az^{n-m} + b$ *là UPM.*

Sau đây là hai dạng phát biểu của Bổ đề Borel phức.

Bổ đề 1.3.2. [36] *Giả sử* $f_1, \dots, f_{n+1}$ *là các hàm chỉnh hình không đồng nhất không thoả mãn điều kiện* $f_1^d + ... + f_{n+1}^d = 0$. *Nếu* $d \geq n^2$ *thì với mỗi* $i \in \{1, ..., n+1\}$, *tồn tại* $j \neq i$ *sao cho* $f_i = c_{ij} f_j$, *ở đó* c_{ij} *là hằng số khác không.*

Bổ đề 1.3.3. [58]. *Cho* $D_i(x_1, ..., x_{s+1})$ *là các đa thức thuần nhất bậc* q_i, $1 \leqslant i \leqslant s + 1$. *Giả sử tồn tại một đường cong chỉnh hình* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ *sao cho ảnh của* f *nằm trong đường cong được xác định bởi*

$$\sum_{i=1}^{s+1} x_i^{d-q_i} D_i(x_1, ..., x_{s+1}) = 0, \text{ và } d \geq s^2 + \sum_{i=1}^{s+1} q_i.$$

Khi đó các đa thức $x_2^{d-q_2}D_2(x_1,...,x_{s+1}),...,x_{s+1}^{d-q_{s+1}}D_{s+1}(x_1,...,x_{s+1})$ *phụ thuộc tuyến tính trên ảnh của* f.

Tiếp theo chúng tôi đưa ra Định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số mà trong giả thiết xuất hiện ảnh ngược tính cả bội của siêu mặt Fermat và ảnh ngược không tính bội của họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát.

Định lý 1.3.4. *Giả sử* $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số,* X *là siêu mặt Fermat bậc* $d, H_1, ..., H_q$ *là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. *Giả sử rằng*

$E_f(X) = E_g(X)$,

$f(z) = g(z)$ *với mọi* $z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i)$.

Nếu $q > 2n^2 + n + 1 + \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i+1}$ *và* $d \geq (2n+1)^2$ *thì* $f \equiv g$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại $f \not\equiv g$, khi đó tồn tại $l, j \in \{1, ..., n+1\}$, $l \neq j$, sao cho $f_l g_j - f_j g_l \not\equiv 0$. Từ $E_f(X) = E_g(X)$ suy ra tồn tại hàm nguyên h sao cho

$$f_1^d + ... + f_{n+1}^d = e^h(g_1^d + ... + g_{n+1}^d).$$

Đặt $l = e^{\frac{h}{d}}, h_i = lg_i, i = 1, ..., n+1$. Khi đó ta có

$$f_1^d + ... + f_{n+1}^d - h_1^d - ... - h_{n+1}^d = 0.$$

Do f, g không suy biến đại số và $d \geq (2n+1)^2$ và theo Bổ đề 1.3.2, với mỗi $t \in \{1, ..., n+1\}$ tồn tại $s \in \{1, ..., n+1\}$ sao cho

$$f_t = c_{ts}h_s, \text{ ở đó } 0 \neq c_{ts} \in \mathbb{C}.$$

Do đó

$$T_f(r) = T_g(r) + O(1). \tag{1.9}$$

Vì f là đường cong chỉnh hình không suy biến đại số nên f không suy biến tuyến tính. Tương tự (1.6) trong Định lý 1.2.3 với $k = n$ ta có

$$\big(q - n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1}\big)T_f(r) \leqslant n^2\Big(T_f(r) + T_g(r)\Big) + S_f(r). \quad (1.10)$$

Từ đây và (1.9) nhận được $\big(q - 2n^2 - n - 1 - \sum\limits_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1}\big)T_f(r) \leqslant S_f(r)$. Do đó $q - 2n^2 - n - 1 - \sum\limits_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1} \leqslant 0$, mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $f \equiv g$. Định lý 1.3.4 được chứng minh. □

Trong Định lý 1.3.4, thêm giả thiết $\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$, với mọi $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$. Lý luận tương tự (1.10), ta có

$$\big(q - n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1}\big)T_f(r) \leqslant n\Big(T_f(r) + T_g(r)\Big) + S_f(r).$$

Bằng phương pháp chứng minh tương tự Định lý 1.3.4, ta nhận được:

Hệ quả 1.3.5. *Giả sử $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số, X là siêu mặt Fermat bậc $d, H_1, ..., H_q$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Giả sử rằng*

$\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$ với mọi $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$,

$E_f(X) = E_g(X)$,

$f(z) = g(z)$ với $z \in \bigcup\limits_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i)$.

Nếu $q > 3n + 1 + \sum\limits_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1}$ và $d \geq (2n + 1)^2$ thì $f \equiv g$.

Sau đây, chúng tôi xây dựng lớp các đa thức duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số.

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2m + 9$, $(m, n) = 1$, $m \geq 2$, $P_i(z) = z^n - a_i z^{n-m} + b_i$, $0 \neq a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, ..., s$ và $b_i^{2d} \neq b_j^d b_l^d$ với $i \neq j$, $i \neq l$. Xét các đa thức thuần nhất:

$$Q_i = \widetilde{P}_i(z_i, z_{s+1}) = z_i^n - a_i z_i^{n-m} z_{s+1}^m + b_i z_{s+1}^n, \; i = 1, ..., s,$$

$$P_{s+1,d} = Q_1^d + ... + Q_s^d, d \geq (2s-1)^2. \qquad (1.11)$$

Khi đó, $P_{s+1,d}$ là đa thức thuần nhất bậc nd có hệ số thuộc $\mathbb{C}$.

Định lý 1.3.6. *Đa thức $P_{s+1,d}$ xác định bởi (1.11) là một UPC.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số f, g có biểu diễn rút gọn tương ứng là $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ thoả mãn $P_{s+1,d} \circ \widetilde{f} = P_{s+1,d} \circ \widetilde{g}$.

Ta cần Bổ đề sau:

Bổ đề 1.3.7. *Nếu $Q_i \circ \widetilde{f} = A_{ij} Q_j \circ \widetilde{g}$ thì $b_i f_{s+1}^n = A_{ij} b_j g_{s+1}^n$, ở đó A_{ij} là hằng số khác không.*

Chứng minh. Trước tiên ta giả sử $A_{ij} = 1$. Viết

$$\widetilde{P}_i(z_i, z_{s+1}) = b_i z_{s+1}^n + z_i^{n-m}(z_i^m - a_i z_{s+1}^m),$$
$$\widetilde{P}_j(z_j, z_{s+1}) = b_j z_{s+1}^n + z_j^{n-m}(z_j^m - a_j z_{s+1}^m).$$

Từ $Q_i \circ \widetilde{f} = Q_j \circ \widetilde{g}$, ta có

$$-g_j^{n-m}(g_j^m - a_j g_{s+1}^m) + b_i f_{s+1}^n + f_i^{n-m}(f_i^m - a_i f_{s+1}^m) - b_j g_{s+1}^n = 0. \qquad (1.12)$$

Chú ý rằng mỗi không điểm chung của $f_i, f_{s+1}, g_j, g_{s+1}$ cũng là không điểm chung của

$$f_{s+1}^n, f_i^{n-m}(f_i^m - a_i f_{s+1}^m), g_{s+1}^n, g_j^{n-m}(g_j^m - a_j g_{s+1}^m).$$

Do đó ta có thể bỏ qua các không điểm chung đó. Vì vậy, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử rằng

$$F = (g_j, f_{s+1}, f_i, g_{s+1})$$

xác định đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ tới $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

Từ $n \geq 2m+9, m \geq 2$ và Bổ đề 1.3.3, tồn tại các hằng số C_1, C_2, C_3 không đồng thời bằng không sao cho

$$C_1 b_i f_{s+1}^n + C_2 f_i^{n-m}(f_i^m - a_i f_{s+1}^m) + C_3 b_j g_{s+1}^n = 0. \qquad (1.13)$$

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $C_3 = 0$. Khi đó từ (1.13) ta có

$$C_1 b_i f_{s+1}^n + C_2 f_i^{n-m}(f_i^m - a_i f_{s+1}^m) = 0.$$

Do f không suy biến đại số, ta có mâu thuẫn, vậy $C_3 \neq 0$.

Trường hợp 2: $C_2 = 0$. Khi đó từ (1.13) ta có

$$C_1 b_i f_{s+1}^n + C_3 b_j g_{s+1}^n = 0. \tag{1.14}$$

Vì $C_1 C_3 \neq 0$, ta suy ra

$$g_{s+1}^n = -\frac{C_1 b_i}{C_3 b_j} f_{s+1}^n \text{ hay } \frac{g_{s+1}}{f_{s+1}} = c, c \neq 0.$$

Thay vào (1.12) ta được

$$-g_j^{n-m}(g_j^m - a_j c^m f_{s+1}^m) + f_i^{n-m}(f_i^m - a_i f_{s+1}^m) + b_i\Big(1 + \frac{C_1}{C_3}\Big) f_{s+1}^n = 0. \tag{1.15}$$

Giả sử $1 + \dfrac{C_1}{C_3} \neq 0$. Lý luận tương tự (1.12), ta có thể giả sử rằng $F_1 = (g_j, f_i, f_{s+1})$ xác định một đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ tới $\mathbb{P}^2$.

Từ $n \geq 2m + 9, m \geq 2$ và Bổ đề 1.3.3, tồn tại các hằng số C_1', C_2', $(C_1', C_2') \neq (0, 0)$, sao cho

$$C_1' f_i^{n-m}(f_i^m - a_i f_{s+1}^m) + C_2' f_{s+1}^n = 0.$$

Vì f là không suy biến đại số và $(C_1', C_2') \neq (0, 0)$, ta có mâu thuẫn, vậy

$$1 + \frac{C_1}{C_3} = 0 \text{ hay } C_1 = -C_3.$$

Từ điều này và (1.14) ta được

$$b_j g_{s+1}^n = b_i f_{s+1}^n.$$

Trường hợp 3. $C_1 = 0,\ \ C_2 \neq 0$. Từ (1.13) ta có

$$C_3 b_j g_{s+1}^n + C_2 f_i^{n-m}(f_i^m - a_i f_{s+1}^m) = 0.$$

Lý luận tương tự (1.12), ta có thể giả sử rằng $F_2 = (g_{s+1}, f_i, f_{s+1})$ xác định một đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ tới $\mathbb{P}^2$.

Do $n \geq 2m + 9, m \geq 2$ và Bổ đề 1.3.3, ta có $f_i^{n-m}(f_i^m - a_i f_{s+1}^m) = 0$. Vì f không suy biến đại số, ta có mâu thuẫn. Vậy $C_1 \neq 0$.

Trường hợp 4. $C_1 C_2 C_3 \neq 0$. Lý luận tương tự (1.15), ta được mâu thuẫn, vậy

$$b_i f_{s+1}^n = b_j g_{s+1}^n.$$

Ta tiếp tục chứng minh Bổ đề 1.3.7. Lấy B_{ij} sao cho $B_{ij}^n = A_{ij}$, Khi đó

$$Q_i(f_i, f_{s+1}) = Q_j(B_{ij} g_j, B_{ij} g_{s+1}).$$

Đặt $h_j = B_{ij} g_j$ và $h_{s+1} = B_{ij} g_{s+1}$, ta có

$$-h_j^{n-m}(h_j^m - a_j h_{s+1}^m) + b_i f_{s+1}^n + f_i^{n-m}(f_i^m - a_i f_{s+1}^m) - b_j h_{s+1}^n = 0. \tag{1.16}$$

Chú ý rằng (1.16) là tương tự (1.12), và lý luận tương tự trường hợp $A_{ij} = 1$ ta nhận được

$$b_i f_{s+1}^n = b_j h_{s+1}^n, \ \ \text{hay} \ \ b_i f_{s+1}^n = B_{ij}^n b_j g_{s+1}^n.$$

Vậy $b_i f_{s+1}^n = A_{ij} b_j g_{s+1}^n$. Bổ đề 1.3.7 được chứng minh. □

Bổ đề 1.3.8. *Nếu* $Q_i \circ \widetilde{f} = A_{ii} Q_i \circ \widetilde{g}$ *thì* $\dfrac{f_i}{g_i} = \dfrac{f_{s+1}}{g_{s+1}}$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 1.3.7, ta có $f_{s+1}^n = A_{ii} g_{s+1}^n$. Từ điều này và $\widetilde{P}(f_i, f_{s+1}) = A_{ii}\widetilde{P}(g_i, g_{s+1})$, suy ra $P\Big(\dfrac{f_i}{f_{s+1}}\Big) = P\Big(\dfrac{g_i}{g_{s+1}}\Big)$.

Từ $(m, n) = 1$, $n > m + 1, m \geq 2$ và theo Định lý 1.3.1 ta nhận được

$$\frac{f_i}{f_{s+1}} = \frac{g_i}{g_{s+1}}, \ \text{hay}\ \frac{f_i}{g_i} = \frac{f_{s+1}}{g_{s+1}} = B, \ \text{với}\ B^n = A_{ii}.$$

Bổ đề 1.3.8 được chứng minh. □

Bây giờ ta tiếp tục chứng minh Định lý 1.3.6. Xét

$$P_{s+1,d}(z_1,\dots,z_{s+1}) = Q_1^d + ... + Q_s^d,\ d \geq (2s-1)^2, \tag{1.17}$$

và

$$P_{s+1,d}(f_1,\dots,f_{s+1}) = P_{s+1,d}(g_1,\dots,g_{s+1}).$$

Do f, g là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và $d \geq (2s-1)^2$, từ Bổ đề 1.3.2 suy ra, với mỗi $i = 1, 2, ..., s$, tồn tại duy nhất một $j \in \{1,\dots,s\}$ sao cho

$$Q_i(f_i, f_{s+1}) = A_{ij}Q_j(g_j, g_{s+1}), \tag{1.18}$$

ở đó A_{ij} là hằng số khác không. Từ (1.17) và (1.18) ta nhận được $A_{ij}^d = 1$.

Bây giờ ta chứng minh $i = j$.

Giả sử ngược lại $i \neq j$, khi đó tồn tại $l \neq i$ sao cho

$$\begin{cases} Q_i(f_i, f_{s+1}) = A_{ij}Q_j(g_j, g_{s+1}) \\ Q_l(f_l, f_{s+1}) = A_{li}Q_i(g_i, g_{s+1}). \end{cases}$$

Từ Bổ đề 1.3.7 ta nhận được

$$\begin{cases} b_i f_{s+1} = A_{ij} b_j g_{s+1} \\ b_l f_{s+1} = A_{li} b_i g_{s+1}. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} b_i^d f_{s+1}^d = A_{ij}^d b_j^d g_{s+1}^d \\ b_l^d f_{s+1}^d = A_{li}^d b_i^d g_{s+1}^d. \end{cases}$$

Vì $A_{ij}^d = A_{li}^d = 1$, nên $b_i^{2d} = b_j^d b_l^d$. Ta được mâu thuẫn. Vậy $i = j$, và

$$Q_i(f_i, f_{s+1}) = A_{ii}Q_i(g_i, g_{s+1}),$$

với mọi $i = 1, 2, ..., s$. Từ Bổ đề 1.3.8 ta nhận được

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = ... = \frac{f_{s+1}}{g_{s+1}}.$$

Vậy $f \equiv g$. Định lý 1.3.6 được chứng minh. $\square$

Định lý 1.3.9. *Giả sử $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số, X là một siêu mặt của $\mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ xác định bởi $P_{s+1,d} = 0$. Nếu $E_f(X) = E_g(X)$ thì $f \equiv g$.*

Chứng minh. Từ $E_f(X) = E_g(X)$, tồn tại một hàm nguyên h sao cho

$$P_{s+1,d} \circ \widetilde{f} = e^h (P_{s+1,d} \circ \widetilde{g}).$$

Đặt

$$l = e^{\frac{h}{nd}} \text{ và } \widetilde{h} = (lg_1, ..., lg_{s+1}).$$

Khi đó $\widetilde{h}$ là một biểu diễn rút gọn của g và $P_{s+1,d} \circ \widetilde{f} = P_{s+1,d} \circ \widetilde{h}$. Theo Định lý 1.3.6 ta được $f \equiv g$. Định lý 1.3.9 được chứng minh. □

Tiếp theo, ta đưa ra lớp siêu mặt thứ hai xác định duy nhất đường cong chỉnh hình không suy biến đại số.

Cho $0 \neq a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2m + 9, m \geq 2, (m, n) = 1$, xét đa thức $P(z) = z^n - az^{n-m} + b$, và đặt $\widetilde{P}(z_i, z_j) = z_i^n - az_i^{n-m} z_j^m + bz_j^n$. Ta xác định các đa thức thuần nhất sau đây:

$$\begin{aligned} R_1(z_1, z_2) &= \widetilde{P}(z_1, z_2) = z_1^n - az_1^{n-m} z_2^m + bz_2^n, \\ R_2(z_1, z_2, z_3) &= R_1\Big(R_1(z_1, z_2), \widetilde{P}(z_2, z_3)\Big), \\ &\dots \\ R_s(z_1, \dots, z_{s+1}) &= R_1\Big(R_{s-1}(z_1, \dots, z_s), \widetilde{P}^{n^{(s-2)}}(z_s, z_{s+1})\Big) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Khi đó, R_s là đa thức thuần nhất bậc n^s có hệ số thuộc $\mathbb{C}$.

Định lý 1.3.10. *Giả sử $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và Y là siêu mặt của $\mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ xác định bởi $R_s = 0$. Nếu $E_f(Y) = E_g(Y)$ thì $f \equiv g$.*

Chứng minh. Giả sử $R_s(f_1, \dots, f_{s+1}) = AR_s(g_1, \dots, g_{s+1})$, $0 \neq A \in \mathbb{C}$. Bằng quy nạp ta chứng minh:

$$\frac{f_1}{g_1} = ... = \frac{f_{s+1}}{g_{s+1}} = A_s, \text{ với } A_s^{n^s} = A. \tag{1.20}$$

Với $s = 1$, ta có phương trình

$$R_1(f_1, f_2) = AR_1(g_1, g_2). \tag{1.21}$$

Theo Bổ đề 1.3.8 ta có $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = B$, tức là $f_1 = Bg_1$, và $f_2 = Bg_2$ với $B^n = A$. Như vậy (1.20) đúng với $s = 1$.

Giả sử (1.20) đúng với $s - 1$, tức là nếu

$$R_{s-1}(f_1, \ldots, f_s) = AR_{s-1}(g_1, \ldots, g_s),$$

thì

$$\frac{f_1}{g_1} = ... = \frac{f_s}{g_s} = A_{s-1}, \text{ với } A_{s-1}^{n^{s-1}} = A. \tag{1.22}$$

Ta chứng minh (1.20) đúng với s.

Từ định nghĩa của $R_s(z_1, \ldots, z_{s+1})$ và tương tự (1.21) ta có

$$\frac{R_{s-1}(f_1, ..., f_s)}{R_{s-1}(g_1, ..., g_s)} = \frac{\widetilde{P}^{n^{(s-2)}}(f_s, f_{s+1})}{\widetilde{P}^{n^{(s-2)}}(g_s, g_{s+1})} = B, \text{ ở đó } B^n = A.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} &R_{s-1}(f_1, \ldots, f_s) = BR_{s-1}(g_1, \ldots, g_s), \\ &\widetilde{P}^{n^{s-2}}(f_s, f_{s+1}) = B\widetilde{P}^{n^{s-2}}(g_s, g_{s+1}), \text{ với } B^n = A. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Từ (1.23) ta có

$$\widetilde{P}(f_s, f_{s+1}) = A_{s-1}\widetilde{P}(g_s, g_{s+1}), \text{ với } A_{s-1}^{n^{s-2}} = B.$$

Tương tự (1.21) ta có

$$\frac{f_s}{g_s} = \frac{f_{s+1}}{g_{s+1}} = A_s, \text{ với } A_s^n = A_{s-1}.$$

Do $B^n = A$ nên $A_{s-1}^{n^{s-1}} = A$ và $A_s^{n^s} = A$.

Mặt khác, theo (1.22) ta có

$$\frac{f_1}{g_1} = ... = \frac{f_s}{g_s}.$$

Do đó
$$\frac{f_1}{g_1} = ... = \frac{f_s}{g_s} = \frac{f_{s+1}}{g_{s+1}} = A_s, \text{ với } A_s^{n^s} = A.$$
Như vậy (1.20) đúng với s.

Do $E_f(Y) = E_g(Y)$ ta luôn tìm được hàm nguyên h sao cho
$$R_s(f_1, ..., f_{s+1}) = e^h R_s(g_1, ..., g_{s+1}).$$
Đặt $l = e^{\frac{h}{n^s}}$ và $\widetilde{h} = (h_1, ..., h_{s+1})$ với $h_i = lg_i, \quad i = 1, ..., s+1$. Khi đó
$$R_s(f_1, ..., f_{s+1}) = R_s(h_1, ..., h_{s+1}). \tag{1.24}$$
Theo (1.20) ta có
$$\frac{f_1}{h_1} = ... = \frac{f_{s+1}}{h_{s+1}}.$$
Do đó
$$\frac{f_1}{g_1} = ... = \frac{f_{s+1}}{g_{s+1}}.$$
Vậy $f \equiv g$. Định lý 1.3.10 được chứng minh. □

Kết luận của Chương 1

Chúng tôi đưa ra một số định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình khác hằng, hai lớp đa thức duy nhất và siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số trên trường số phức.

Các kết quả trên là tương tự của Định lý 4 điểm, Định lý 5 điểm của Nevanlinna và theo hướng trả lời câu hỏi của F. Gross.

Chương 2

Định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu Vấn đề 3.1: Tương tự Vấn đề 1, Vấn đề 2 trong trường hợp p-dic như đã nói ở phần mở đầu. Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [13]. Cụ thể:

1. Tìm q siêu phẳng ở vị trí tổng quát để từ đó xác định duy nhất đường cong chỉnh hình p-dic khác hằng bởi ảnh ngược không tính bội.
2. Tìm siêu mặt X để từ đó xác định duy nhất đường cong chỉnh hình không suy biến đại số p-dic bởi ảnh ngược tính cả bội.

Chúng tôi đưa ra một số định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-dic khác hằng (Định lý 2.2.3, Định lý 2.2.7).

Chúng tôi đưa ra hai lớp đa thức duy nhất và siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-dic không suy biến đại số (Định lý 2.3.3, Định lý 2.3.4).

Chú ý rằng Định lý chính thứ hai trong trường hợp p-adic khác trường hợp phức, nên số q trong Định lý 2.2.3 nhỏ hơn trong Định lý 1.2.3.

Cho đến nay, chưa có kết quả tương tự Định lý 2.2.7 trong trường hợp phức.

Các Định lý trên là tương tự kết quả của W. Adams và E. Straus, P.C.Hu và C.C. Yang [39] và M. Ru [54], và theo hướng trả lời câu hỏi của F. Gross trong trường hợp p-dic.

2.1 Một số khái niệm.

Trường các số phức $p-$ adic $\mathbb{C}_p$. Cho p là số nguyên tố cố định. $\mathbb{Q}_p$ là bổ sung đầy đủ của trường hữu tỷ $\mathbb{Q}$ theo chuẩn $p-$adic. Ký hiệu $\overline{\mathbb{Q}}_p$ là bao đóng đại số của $\mathbb{Q}_p$. Khác với trường hợp phức, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ là trường không đầy đủ. Ký hiệu $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ là bổ sung đầy đủ của bao đóng đại số của $\mathbb{Q}_p$. $\mathbb{C}_p$ được gọi là *trường các số phức $p-$adic* (xem [39]).

Định lý 2.1.1. [39] *$\mathbb{C}_p$ là trường đóng đại số và đầy đủ theo chuẩn không Acsimet. $\mathbb{C}_p$ là trường khả ly nhưng không compact địa phương.*

Độ cao của hàm chỉnh hình [41].

Đặt: $$D_r = \{z \in \mathbb{C}_p : |z| \leqslant r, r > 0\}$$

Giả sử $f(z) \not\equiv 0$ là hàm chỉnh hình $p-$adic trên D_r cho bởi chuỗi hội tụ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| r^n = 0$ nên tồn tại n để $|a_n|r^n$ lớn nhất. Ký hiệu

$$|f|_r = \max_{0\leqslant n<\infty} |a_n| r^n.$$

Định nghĩa 8. Độ cao của hàm $f(z)$ trên D_r được xác định bởi

$$H_f(r) = \log|f|_r.$$

Định nghĩa 9. Các khái niệm: Hàm nguyên, $v_f(a)$, $v_f^{\leqslant k}$, $n_f^{\leqslant k}(r)$, $n_f^{\leqslant k}(a,r)$, $v_f^{>k}$, $n_f^{>k}(r)$, $n_f^{>k}(a,r)$ tương tự trường hợp phức.

1) $N_f^{\leqslant k}(a,r) = \dfrac{1}{\ln p}\displaystyle\int_\rho^r \frac{n_f^{\leqslant k}(a,x)}{x}dx, \quad N_f^{\leqslant k}(r) = N_f^{\leqslant k}(0,r).$

$$N_{l,f}^{\leqslant k}(a,r) = \frac{1}{\ln p}\int_\rho^r \frac{n_{l,f}^{\leqslant k}(a,x)dx}{x}, \text{ ở đó } n_{l,f}^{\leqslant k}(a,r) = \sum_{|z|\leqslant r} \min\{v_{f-a}^{\leqslant k}(z), l\}.$$

2) $N_f^{>k}(a,r) = \dfrac{1}{\ln p}\displaystyle\int\limits_{\rho}^{r} \dfrac{n_f^{>k}(a,x)}{x}dx, \quad N_f^{>k}(r) = N_f^{>k}(0,r),$

$$N_{l,f}^{>k}(a,r) = \frac{1}{\ln p}\int\limits_{\rho}^{r} \frac{n_{l,f}^{>k}(a,r)}{x}dx, \text{ ở đó } n_{l,f}^{>k}(a,r) = \sum_{|z|\leqslant r} \min\left\{v_{f-a}^{>k}(z), l\right\}.$$

2.2 Định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic khác hằng.

Các khái niệm: Đường cong chỉnh hình f, biểu diễn rút gọn $\widetilde{f}$ của f, đường cong hằng, $E_f(H), \overline{E}_f(H), \overline{E}_f(H, \leqslant k)$, họ siêu phẳng phân biệt ở vị trí N con tổng quát, đường cong chỉnh hình không suy biến đại số, đường cong chỉnh hình m-không suy biến tuyến tính, đa thức duy nhất, đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình, đa thức duy nhất, đa thức duy nhất mạnh cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số được định nghĩa tương tự trường hợp phức.

Nếu $\widetilde{f} = (f_1, ..., f_{n+1})$ và $\widetilde{g} = (g_1, ..., g_{n+1})$ là hai biểu diễn rút gọn của f, thì tồn tại hằng số c khác không sao cho $f_i = cg_i$ với mọi $i = 1, ..., n+1$.

Trong chương này, ta luôn giả sử $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là hai đường cong chỉnh hình có biểu diễn rút gọn tương ứng là $\widetilde{f} = (f_1, \ldots, f_{n+1})$, $\widetilde{g} = (g_1, \ldots, g_{n+1})$, hoặc $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^s(\mathbb{C}_p)$ có biểu diễn rút gọn tương ứng là $\widetilde{f} = (f_1, \ldots, f_{s+1})$, $\widetilde{g} = (g_1, \ldots, g_{s+1})$.

Định nghĩa 10. Giả sử $f : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là đường cong chỉnh hình có biểu diễn rút gọn là $\widetilde{f} = (f_1, ..., f_{n+1})$. Độ cao của f xác định bởi

$$H_f(r) = \max_{1\leqslant i\leqslant n+1} H_{f_i}(r).$$

Giả sử H là một siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ xác định bởi phương trình $F = 0$, sao cho ảnh của f không chứa trong H. Đặt

$$H_f(H,r) = H_{F\circ\widetilde{f}}(r),\ N(H,r) = N_{F\circ\widetilde{f}}(r),\ N_{k,f}(H,r) = N_{k,F\circ\widetilde{f}}(r),$$
$$N^{\leqslant k}_{l,f}(H,r) = N^{\leqslant k}_{l,F\circ\widetilde{f}}(r), N^{>k}_{l,f}(H,r) = N^{>k}_{l,F\circ\widetilde{f}}(r).$$

Định lý 2.2.1. *Giả sử $f : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là đường cong chỉnh hình m-không suy biến tuyến tính, $H_1, \ldots, H_q$ là các siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ ở vị trí tổng quát sao cho $f(\mathbb{C}_p) \not\subset H_j,\ j = 1, \ldots, q$, và $1 \leqslant m \leqslant n \leqslant 2n - m \leqslant q - 1$. Khi đó*

$$(q - 2n + m - 1)H_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_{m,f}(H_j, r) - \frac{m(n+1)}{2}\log r + O(1),$$

ở đó, O(1) là đại lượng giới nội không phụ thuộc r.

Chứng minh. Đặt $X_j = H_{j+1}, j = 0, ..., q-1$ và $p = q - 1$. Áp dụng Định lý 6.3.1 [39], ta có

$$(p - 2n + m)H_f(r) \leqslant \sum_{j=0}^{p} N_{m,f}(X_j, r) - \frac{m(n+1)}{2}\log r + O(1). \quad (2.1)$$

Thay $p = q - 1$ và $X_j = H_{j+1}, j = 0, ..., q-1$ vào (2.1) ta có

$$(q - 2n + m - 1)H_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_{m,f}(H_j, r) - \frac{m(n+1)}{2}\log r + O(1).$$

Định lý 2.2.1 được chứng minh. □

Bổ đề 2.2.2. *Giả sử $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là đường cong chỉnh hình m-không suy biến tuyến tính, $k_1, \ldots, k_q \in \mathbb{N}^*$, $H_1, \ldots, H_q$ là các siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ ở vị trí tổng quát sao cho $f(\mathbb{C}_p) \not\subset H_i,\ i = 1, \ldots, q$, và $1 \leqslant m \leqslant n \leqslant 2n - m \leqslant q - 1$. Khi đó*

$$\Big(\sum_{i=1}^{q} \frac{k_i - m + 1}{k_i + 1} - 2n + m - 1\Big)H_f(r)$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{q} \frac{k_i}{k_i + 1} N^{\leqslant k_i}_{m,f}(H_i, r) - \frac{m(n+1)}{2}\log r + O(1).$$

ở đó, O(1) là đại lượng giới nội không phụ thuộc r.

Chứng minh. Lấy $H_i \in \{H_1, \ldots, H_q\}$ và $k_i \in \{k_1, \ldots, k_q\}$, ta có

$$\begin{aligned}
N_{m,f}(H_i, r) &= N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + N_{m,f}^{>k_i}(H_i, r)\\
&= \frac{k_i}{k_i+1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + \frac{1}{k_i+1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + N_{m,f}^{>k_i}(H_i, r)\\
&\leqslant \frac{k_i}{k_i+1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + \frac{m}{k_i+1} N_{1,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + N_{m,f}^{>k_i}(H_i, r)\\
&\leqslant \frac{k_i}{k_i+1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + \frac{m}{k_i+1} N_f(H_i, r).
\end{aligned}$$

Theo [46, Định lý 3.2], ta có

$$N_f(H_i, r) + O(1) = H_f(H_i, r) \leqslant H_f(r) + O(1).$$

Do đó

$$N_{m,f}(H_i, r) \leqslant \frac{k_i}{k_i+1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + \frac{m}{k_i+1} H_f(r) + O(1).$$

Vậy

$$\sum_{i=1}^{q} N_{m,f}(H_i, r) \leqslant \sum_{i=1}^{q} \frac{k_i}{k_i+1} N_{m,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) + \sum_{i=1}^{q} \frac{m}{k_i+1} H_f(r) + O(1). \tag{2.2}$$

Theo Định lý 2.2.1 và (2.2), ta nhận được Bổ đề 2.2.2. □

Định lý 2.2.3. *Giả sử $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là hai đường cong chỉnh hình khác hằng, $k_1, \ldots, k_q \in \mathbb{N}^*$ và $H_1, \ldots, H_q$ là các siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ ở vị trí tổng quát, $f(\mathbb{C}_p) \not\subset H_i, g(\mathbb{C}_p) \not\subset H_i$, $i = 1, \ldots, q$. Giả sử*

$$f(z) = g(z) \text{ với } z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \text{ và } z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_g(H_i, \leqslant k_i). \tag{2.3}$$

Nếu $q \geqslant 2n^2 + n + 1 + \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i+1}$, thì $f \equiv g$.

Chứng minh. Giả sử $f \not\equiv g$, khi đó tồn tại $h, l \in \{1, \ldots, n+1\}$, $h \neq l$, sao cho $f_h g_l - f_l g_h \not\equiv 0$. Vì f, g khác hằng, giả sử f là đường cong chỉnh hình k-không suy biến tuyến tính và g là m-không suy biến tuyến tính, với $1 \leqslant k, m \leqslant n$. Theo Bổ đề 2.2.2 và (2.3) ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=1}^{q} \frac{k_i - k + 1}{k_i + 1} - 2n + k - 1\Big) H_f(r) \\
\leqslant\ & \sum_{i=1}^{q} \frac{k_i}{k_i + 1} N_{k,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) - \frac{k(n+1)}{2} \log r + O(1) \\
\leqslant\ & \sum_{i=1}^{q} \frac{k k_i}{k_i + 1} N_{1,f}^{\leqslant k_i}(H_i, r) - \frac{k(n+1)}{2} \log r + O(1) \\
\leqslant & kn N_{f_h g_l - f_l g_h}(r) - \frac{k(n+1)}{2} \log r + O(1) \\
\leqslant & kn\big(H_f(r) + H_g(r)\big) - \frac{k(n+1)}{2} \log r + O(1).
\end{aligned}$$

Vậy
$$\begin{aligned}
&\Big(q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{k}{k_i + 1} + k\Big) H_f(r) \\
&\leqslant kn(H_f(r) + H_g(r)) - \frac{k(n+1)}{2} \log r + O(1), \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Tương tự ta nhận được

$$\begin{aligned}
&\Big(q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{m}{k_i + 1} + m\Big) H_g(r) \\
&\leqslant mn(H_f(r) + H_g(r)) - \frac{m(n+1)}{2} \log r + O(1). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Không giảm tổng quát, ta giả sử $1 \leqslant m \leqslant k \leqslant n$. Từ (2.4) và (2.5) ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{k}{k_i + 1} + m\Big) H_f(r) \\
&\leqslant kn(H_f(r) + H_g(r)) - \frac{k(n+1)}{2} \log r + O(1),
\end{aligned}$$

và
$$\begin{aligned}
&\Big(q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{k}{k_i + 1} + m\Big) H_g(r) \\
&\leqslant mn(H_f(r) + H_g(r)) - \frac{m(n+1)}{2} \log r + O(1).
\end{aligned}$$

Lấy tổng các bất đẳng thức trên, suy ra
$\Big(q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \dfrac{k}{k_i+1} + m - kn - mn\Big)\big(H_f(r) + H_g(r)\big)$
$+\dfrac{(n+1)}{2}(k+m)\log r$ là đại lượng giới nội khi $r \to \infty$.

Do đó $q - 2n - 1 - \sum_{i=0}^{q} \dfrac{k}{k_i+1} - kn - (n-1)m < 0$. Xét

$$\varphi(k,m) = k\Big(-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{k_i+1} - n\Big) + (1-n)m + q - 2n - 1.$$

Vì $1 \leqslant m \leqslant k \leqslant n$, $-\sum_{i=1}^{q}\dfrac{1}{k_i+1} - n < 0$, $1 - n \leqslant 0$ và giả thiết $q \geqslant 2n^2 + n + 1 + \sum_{i=1}^{q}\dfrac{n}{k_i+1}$, ta có

$$\varphi(k,m) \geq \varphi(n,n) = q - 2n^2 - n - 1 - \sum_{i=1}^{q}\frac{n}{k_i+1} \geqslant 0.$$

Ta nhận được mâu thuẫn, vậy $f \equiv g$. Định lý 2.2.3 được chứng minh. $\square$

Trong Định lý 2.2.3, thêm giả thiết $\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$, với mọi $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$. Lý luận tương tự (2.4), ta có

$$\begin{aligned}&\Big(q - 2n - 1 - \sum_{i=1}^{q}\frac{k}{k_i+1} + k\Big)H_f(r)\\ \leqslant& k(H_f(r) + H_g(r)) - \frac{k(n+1)}{2}\log r + O(1),\end{aligned}$$

Bằng phương pháp chứng minh tương tự Định lý 2.2.3, ta nhận được

Hệ quả 2.2.4. *Giả sử $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là hai đường cong chỉnh hình khác hằng, $k_1, ..., k_q \in \mathbb{N}^*$ và $H_1, ..., H_q$ là các siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ ở vị trí tổng quát, $f(\mathbb{C}_p) \not\subset H_i$, $g(\mathbb{C}_p) \not\subset H_i$, $i = 1, \ldots, q$. Giả sử rằng*

$$\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset \text{ với mọi } 1 \leqslant i \neq j \leqslant q,$$

$$f(z) = g(z) \text{ với } z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \text{ và } z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_g(H_i, \leqslant k_i). \qquad (2.6)$$

Nếu $q \geq 3n + 1 + \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{n}{k_i + 1}$ *thì* $f \equiv g$.

Nhận xét 2. Khi $k_i \to \infty$ thì từ Hệ quả 2.2.4 ta nhận được kết quả của P.C. Hu-C.C. Yang [39], M. Ru [54].

Số q trong Định lý 2.2.3 nhỏ hơn trong Định lý 1.2.3.

Định lý 2.2.5. (*Định lý không điểm Hilbert* [66]) *Giả sử* $Q_1, ..., Q_{n+1}$ *là các đa thức thuần nhất bậc* $d \geq 1$ *có nghiệm chung duy nhất (0,...,0). Khi đó tồn tại các số nguyên dương* $m_k \geq d$ *sao cho*

$$x_k^{m_k} = \sum_{i=1}^{n+1} A_{i_k}(x_1, ..., x_{n+1}) Q_i(x_1, ..., x_{n+1}),$$

trong đó $1 \leqslant i, k \leqslant n+1$, A_{i_k} *là các đa thức thuần nhất bậc* $m_k - d$ *với hệ số trong* $\mathbb{C}_p$.

Bổ đề 2.2.6 sau đây cho ta thấy mối quan hệ giữa độ cao của hai đường cong chỉnh hình p-adic khác hằng khi chúng chung ảnh ngược tính cả bội của $n+1$ siêu mặt ở vị trí tổng quát.

Bổ đề 2.2.6. *Giả sử* $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ *là hai đường cong chỉnh hình khác hằng,* $\{X_1, ..., X_{n+1}\}$ *là các siêu mặt bậc* d *và* $\{Y_1, ..., Y_{n+1}\}$ *là các siêu mặt bậc* l *trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ *ở vị trí tổng quát sao cho ảnh của* f *và* g *không chứa trong* X_i, Y_i *tương ứng,* $i = 1, \ldots, n+1$. *Giả sử rằng* $E_f(X_i) = E_g(Y_i)$, $i = 1, \ldots, n+1$. *Khi đó*

$$dH_f(r) = lH_g(r) + O(1).$$

Chứng minh. Giả sử X_i được xác định bởi phương trình:

$$P_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Vì X_i ở vị trí tổng quát, theo Định lý 2.2.5, tồn tại $m_k \in \mathbb{N}^*, m_k \geq d$, sao cho

$$x_k^{m_k} = \sum_{i=1}^{n+1} A_{i_k}(x_1, \ldots, x_{n+1}) P_i(x_1, \ldots, x_{n+1}),$$

ở đó, $A_{i_k}(x_1, \ldots, x_{n+1}), 1 \leqslant i \leqslant n+1, 1 \leqslant k \leqslant n+1$, là các đa thức thuần nhất có bậc $m_k - d$ với các hệ số trong $\mathbb{C}_p$. Do đó

$$f_k^{m_k} = \sum_{i=1}^{n+1} A_{i_k}(f_1, \ldots, f_{n+1}) P_i(f_1, \ldots, f_{n+1}), \quad k = 1, \ldots, n+1.$$

Từ đó suy ra

$$H_{f_k^{m_k}}(r) = m_k H_{f_k}(r) \leqslant (m_k - d) H_f(r) + \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} H_{P_i \circ \widetilde{f}}(r) + O(1).$$

Do đó

$$dH_f(r) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} H_{P_i \circ \widetilde{f}}(r) + O(1). \tag{2.7}$$

Mặt khác:

$$H_{P_i \circ \widetilde{f}}(r) \leqslant dH_f(r) + O(1). \tag{2.8}$$

Từ (2.7) và (2.8) ta có

$$dH_f(r) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} H_{P_i \circ \widetilde{f}}(r) + O(1). \tag{2.9}$$

Tương tự, nếu Y_i được xác định bởi phương trình:

$$Q_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n+1, \text{ thì}$$

$$lH_g(r) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} H_{Q_i \circ \widetilde{f}}(r) + O(1). \tag{2.10}$$

Từ $E_f(X_i) = E_g(Y_i), i = 1, \ldots, n+1,$ suy ra $\frac{P_i \circ \widetilde{f}}{Q_i \circ \widetilde{g}}$ là hàm nguyên trên $\mathbb{C}_p$ không có không điểm. Vậy tồn tại $0 \neq a_i \in \mathbb{C}_p$, sao cho

$$P_i \circ \widetilde{f} = a_i Q_i \circ \widetilde{g}, \ i = 1, \ldots, n+1.$$

Do đó

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} H_{P_i \circ \widetilde{f}}(r) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} H_{Q_j \circ \widetilde{g}}(r) + O(1). \tag{2.11}$$

Từ (2.9), (2.10), (2.11), ta có $dH_f(r) = lH_g(r) + O(1)$. Bổ đề 2.2.6 được chứng minh. $\square$

Sau đây, chúng tôi đưa ra định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình khác hằng mà trong giả thiết xuất hiện ảnh ngược của $n+1$ siêu mặt tính cả bội và ảnh ngược của các siêu phẳng không tính bội ở vị trí tổng quát.

Định lý 2.2.7. *Giả sử $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là hai đường cong chỉnh hình khác hằng, X_i là các siêu mặt bậc d và H_j là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ sao cho ảnh của f và g không chứa trong X_i, H_j với mọi $i = 1, \ldots, n+1$ và $j = 1, \ldots, q$. Giả sử rằng*

$E_f(X_i) = E_g(X_i),\ i = 1, \ldots, n+1,$

$f(z) = g(z)$ *với* $z \in \bigcup\limits_{j=1}^{q} \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j),$

Nếu $q \geqslant 2n^2 + n + 1 + \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{n}{k_i+1}$ *thì* $f \equiv g$.

Chứng minh. Giả sử $f \not\equiv g$, khi đó tồn tại $h, j \in \{1, \ldots, n+1\}$, $h \neq j$, sao cho $f_h g_j - f_j g_h \not\equiv 0$. Vì f là đường cong chỉnh hình khác hằng k-không suy biến tuyến tính với $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 2n-k < q-1$, tương tự (2.4) trong Định lý 2.2.3 ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{q} \frac{k_i+1-k}{k_i+1} - 2n + k - 1\Big) H_f(r)$$
$$\leqslant nk\big(H_f(r) + H_g(r)\big) - \frac{k(n+1)}{2}\log r + O(1).$$

Từ $E_f(X_i) = E_g(X_i), i = 1, \ldots, n+1$, và Bổ đề 2.2.6 ta có

$$dH_f(r) = dH_g(r) + O(1),\ \text{hay}\ H_f(r) = H_g(r) + O(1),$$

Do đó $\Big(\sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{k_i+1-k}{k_i+1} - 2n + k - 1 - 2nk\Big) H_f(r) + \dfrac{k(n+1)}{2}\log r$ là đại lượng giới nội khi $r \to \infty$. Suy ra $k\Big(1 - \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{1}{k_i+1} - 2n\Big) + q - 2n - 1 < 0.$

Xét $\varphi(k) = k\Big(1 - \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{1}{k_i+1} - 2n\Big) + q - 2n - 1.$

Từ $1 - \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{1}{k_i+1} - 2n < 0$ và giả thiết $q \geqslant 2n^2 + n + 1 + \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{n}{k_i+1}$, ta có

$\varphi(k) \geqslant \varphi(n) = q - 2n^2 - n - 1 - \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1} \geqslant 0$, ta được mâu thuẫn, vậy $f \equiv g$. Định lý 2.2.7 được chứng minh. □

Trong Định lý 2.2.7, thêm giả thiết $\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$, với mọi $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$. Lý luận tương tự (2.4), ta có

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{i=1}^{q} \frac{k_i + 1 - k}{k_i + 1} - 2n + k - 1\Big) H_f(r)\\ &\leqslant k\big(H_f(r) + H_g(r)\big) - \frac{k(n+1)}{2} \log r + O(1).\end{aligned}$$

Bằng phương pháp chứng minh tương tự Định lý 2.2.7, ta nhận được

Hệ quả 2.2.8. *Giả sử $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là hai đường cong chỉnh hình khác hằng, X_i là các siêu mặt bậc d và H_j là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ sao cho ảnh của f và g không chứa trong X_i, H_j với mọi $i = 1, \ldots, n+1, j = 1, \ldots, q$. Giả sử rằng*

$\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$ với mọi $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$,

$E_f(X_i) = E_g(X_i), i = 1, \ldots, n+1$,

$f(z) = g(z)$ với $z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i)$.

Nếu $q \geqslant 3n + 1 + \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1}$ thì $f \equiv g$.

Nhận xét 3. Trong trường hợp phức, chưa có định lý nào tương tự như Định lý 2.2.7 và Hệ quả 2.2.8.

2.3 Tập xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic không suy biến đại số.

Cho $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2m + 8, m \geq 2, (m, n) = 1$, xét đa thức

$$P(z) = z^n - az^{n-m} + b,$$

ở đó $0 \neq a, b \in \mathbb{C}_p$, và $\dfrac{a^n}{b^m} \neq \dfrac{n^n}{m^m(n-m)^{n-m}}$. Đặt

$$\widetilde{P}(z_i, z_j) = z_i^n - a z_i^{n-m} z_j^m + b z_j^n.$$

ta xác định các đa thức thuần nhất $P_i(z_1, \ldots, z_{i+1}), i = 1, ...s$ như sau:

$$\begin{aligned} P_1(z_1, z_2) &= \widetilde{P}(z_1, z_2), \\ P_2(z_1, z_2, z_3) &= P_1\big(\widetilde{P}(z_1, z_2), \widetilde{P}(z_2, z_3)\big), \ldots, \\ P_s = P_s(z_1, \ldots, z_{s+1}) &= P_{s-1}\big(\widetilde{P}(z_1, z_2), \ldots, \widetilde{P}(z_s, z_{s+1})\big). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Khi đó, P_s là đa thức thuần nhất với bậc n^s có hệ số thuộc $\mathbb{C}_p$.

Bổ đề 2.3.1. *Với giả thiết trên, $P(z)$ là UPM.*

Chứng minh. Bổ đề 2.3.1 được suy ra trực tiếp từ [39, Định lý 3.21]. □

Định lý 2.3.2. *P_s được định nghĩa bởi (2.12) là SUPC.*

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh Định lý 2.3.2 với $s = 1$.

Giả sử $\widetilde{f} = (f_1, f_2)$, $\widetilde{g} = (g_1, g_2)$ sao cho $\widetilde{P}(f_1, f_2) = c\widetilde{P}(g_1, g_2),\ c \in \mathbb{C}_p$. Khi đó ta có

$$b f_2^n + f_1^{n-m}(f_1^m - a f_2^m) - c b g_2^n = g_1^{n-m}(c g_1^m - c a g_2^m). \tag{2.13}$$

Xét đường cong chỉnh hình F từ $\mathbb{C}_p$ tới $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}_p)$ có biểu diễn rút gọn là

$$\widetilde{F} = \big(b f_2^n, f_1^{n-m}(f_1^m - a f_2^m), b g_2^n\big).$$

Giả sử rằng F không suy biến tuyến tính. Xét các siêu phẳng sau đây ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}_p)$

$$H_1 : x_1 = 0; \quad H_2 : x_2 = 0; \quad H_3 : x_3 = 0;$$
$$H_4 : x_1 + x_2 - c x_3 = 0.$$

Áp dụng Định lý 2.2.1 và (2.13), chú ý $nH_f(r) \leqslant H_F(r) + O(1)$, ta có

$$\begin{aligned}
H_F(r) &\leqslant \sum_{i=1}^{4} N_{2,F}(H_i, r) - 3\log r + O(1)\\
&= N_{2,bf_2^n}(r) + N_{2,f_1^{n-m}(f_1^m - af_2^m)}(r) + N_{2,bg_2^n}(r)\\
&+ N_{2,bf_2^n + f_1^{n-m}(f_1^m - af_2^m) - bcg_2^n}(r) - 3\log r + O(1)\\
&\leqslant 2N_{f_2}(r) + 2N_{f_1}(r) + N_{2,(f_1^m - af_2^m)}(r) + 2N_{g_2}(r)\\
&+ N_{2,g_1^{n-m}(g_1^m - ag_2^m)}(r) - 3\log r + O(1)\\
&\leqslant 4H_f(r) + 4H_g(r) + N_{f_1^m - af_2^m}(r) + N_{g_1^m - ag_2^m}(r) - 3\log r + O(1)\\
&\leqslant (m+4)\big(H_f(r) + H_g(r)\big) - 3\log r + O(1).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$nH_f(r) \leqslant (m+4)\big(H_f(r) + H_g(r)\big) - 3\log r + O(1). \tag{2.14}$$

Xét đường cong chỉnh hình G từ $\mathbb{C}_p$ tới $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}_p)$ có biểu diễn rút gọn là

$$\widetilde{G} = \big(bg_2^n, g_1^{n-m}(g_1^m - ag_2^m), bf_2^n\big).$$

Giả sử rằng G không suy biến tuyến tính. Tương tự trong chứng minh của (2.14), ta nhận được

$$nH_g(r) \leqslant (m+4)\big(H_f(r) + H_g(r)\big) - 3\log r + O(1). \tag{2.15}$$

Lấy tổng (2.14) và (2.15), ta suy ra $(n - 2m - 8)(H_f(r) + H_g(r)) + 6\log r$ là đại lượng giới nội khi $r \to \infty$. Do đó $n < 2m + 8$, mâu thuẫn. Vậy F hoặc G là suy biến tuyến tính.

Không giảm tổng quát, ta có thể giả sử F là suy biến tuyến tính. Khi đó tồn tại các hằng số C_1, C_2, C_3 không đồng thời bằng không sao cho

$$C_1 bf_2^n + C_2 f_1^{n-m}(f_1^m - af_2^m) + C_3 bg_2^n = 0. \tag{2.16}$$

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu $C_3 = 0$, khi đó từ (2.16) ta có

$$C_1 b f_2^n + C_2 f_1^{n-m}(f_1^m - a f_2^m) = 0. \tag{2.17}$$

Do f khác hằng và $(C_1, C_2) \neq (0,0)$ ta được mâu thuẫn, vậy $C_3 \neq 0$.

Trường hợp 2. Nếu $C_2 = 0$. Từ (2.16) ta có $C_1 \neq 0, C_3 \neq 0$, và

$$g_2^n = -\frac{C_1}{C_3} f_2^n. \tag{2.18}$$

Từ điều này và (2.13) ta có

$$b\Big(1 + \frac{cC_1}{C_3}\Big) f_2^n + f_1^{n-m}(f_1^m - a f_2^m) = c g_1^{n-m}(g_1^m - a g_2^m).$$

Giả sử $1 + \dfrac{cC_1}{C_3} \neq 0$. Xét đường cong chỉnh hình $F_1 : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ có biểu diễn rút gọn

$$\widetilde{F}_1 = \Big(f_1^{n-m}(f_1^m - a f_2^m), b\big(1 + \frac{cC_1}{C_3}\big) f_2^n\Big).$$

Do f khác hằng, nên F_1 cũng khác hằng. Xét 3 điểm $(1,0), (0,1)$ $(1,1)$ của $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. Áp dụng Định lý 2.2.1 và chú ý $nH_f(r) \leqslant H_{F_1}(r) + O(1)$, ta có

$$\begin{aligned}
&nH_f(r) \leqslant H_{F_1}(r) + O(1)\\
\leqslant &N_{1, f_1^{n-m}(f_1^m - a f_2^m)}(r) + N_{1, f_2^n}(r) + N_{1, g_1^{n-m}(g_1^m - a g_2^m)} - \log r + O(1)\\
\leqslant &N_{1,f_1}(r) + N_{f_1^m - a f_2^m}(r) + N_{1,f_2}(r) + N_{1,g_1}(r) + N_{g_1^m - a g_2^m}(r) - \log r + O(1)\\
\leqslant &N_{f_1}(r) + N_{f_2}(r) + N_{f_1^m - a f_2^m}(r) + N_{g_1}(r) + N_{g_1^m - a g_2^m}(r) - \log r + O(1)\\
\leqslant &(m+2)H_f(r) + (m+1)H_g(r) - \log r + O(1).
\end{aligned}$$

Vậy

$$nH_f(r) \leqslant (m+2)H_f(r) + (m+1)H_g(r) - \log r + O(1). \tag{2.19}$$

Tương tự, ta được

$$nH_g(r) \leqslant (m+2)H_g(r) + (m+1)H_f(r) - \log r + O(1). \tag{2.20}$$

Lấy tổng (2.19) và (2.20), ta suy ra $(n-2m-3)\big(H_f(r)+H_g(r)\big)+2\log r$ là đại lượng giới nội khi $r\to\infty$. Ta có mâu thuẫn vì $n\geq 2m+3$. Vậy

$$1+\frac{cC_1}{C_3}=0 \text{ hay } c=-\frac{C_3}{C_1}.$$

Từ điều này và (2.18) ta được

$$f_2^n=cg_2^n.$$

Trường hợp 3. Nếu $C_1=0,\ \ C_2\neq 0$. Từ (2.16) ta có

$$C_2f_1^{n-m}(f_1^m-af_2^m)=-C_3bg_2^n.$$

Vậy

$$C_2\Big(\frac{f_1}{f_2}\Big)^n-C_2a\Big(\frac{f_1}{f_2}\Big)^{n-m}=-C_3b\Big(\frac{g_2}{f_2}\Big)^n. \tag{2.21}$$

Do $n\geq 2m+8, m\geq 2$, phương trình $C_2z^n-C_2az^{n-m}=0$ có ít nhất 3 nghiệm $z_1=0, z_2, z_3$. Do f khác hằng, nên $\dfrac{g_2}{f_2}$ cũng khác hằng.

Từ (2.21) suy ra với mỗi $i=1,2,3,$ tất cả các không điểm của $\dfrac{f_1}{f_2}-z_i$ đều có bội $\geq n$. Theo [47, Định lý 3.10] ta có $3\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)<2$, hay $n<3$.

Từ $n\geq 2m+8$, ta nhận được mâu thuẫn. Vậy $C_1\neq 0$.

Trường hợp 4. $C_1C_2C_3\neq 0$.

Xét đường cong chỉnh hình F_2 từ $\mathbb{C}_p$ tới $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_n)$ có biểu diễn rút gọn

$$\widetilde{F}_2=\big(C_2f_1^{n-m}(f_1^m-af_2^m),C_1bf_2^n\big).$$

Do f khác hằng, nên F_2 cũng vậy. Xét 3 điểm $(1,0),(0,1),(1,1)$ của $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. Áp dụng Định lý 2.2.1 và chú ý $nH_f(r)\leqslant H_{F_2}(r)+O(1)$, ta có

$$\begin{aligned}H_{F_2}(r)\leqslant & N_{1,C_2f_1^{n-m}(f_1^m-af_2^m)}(r)+N_{1,C_1bf_2^n}(r)\\ &+N_{1,C_2f_1^{n-m}(f_1^m-af_2^m)+C_1bf_2^n}-\log r+O(1)\\ \leqslant & N_{f_1}(r)+N_{f_2}(r)+N_{f_1^m-af_2^m}+N_{g_2}(r)-\log r+O(1)\\ \leqslant &(m+2)H_f(r)+H_g(r)-\log r+O(1).\end{aligned}$$

Vậy

$$nH_f(r) \leqslant (m+2)H_f(r) + H_g(r) - \log r + O(1). \tag{2.22}$$

Mặt khác, theo (2.16) ta có

$$f_1^{n-m}(f_1^m - af_2^m) = -\frac{bC_3}{C_2}g_2^n - \frac{bC_1}{C_2}f_2^n.$$

Từ điều này và (2.13) ta nhận được

$$A_1bg_2^n + A_2g_1^{n-m}(g_1^m - ag_2^m) + A_3bf_2^n = 0.$$

Nếu $A_1A_2A_3 = 0$, ta sử dụng lý luận tương tự như trên.

Giả sử $A_1A_2A_3 \neq 0$. Khi đó xét đường cong chỉnh hình G_2 từ $\mathbb{C}_p$ tới $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ có biểu diễn rút gọn

$$\widetilde{G}_2 = \big(A_2g_1^{n-m}(g_1^m - ag_2^m),\ \ A_1bg_2^n\big).$$

Do g khác hằng, nên G_2 cũng vậy. Tương tự như đối với (2.22), ta nhận được bất đẳng thức sau cho G_2

$$nH_g(r) \leqslant (m+2)H_g(r) + H_f(r) - \log r + O(1). \tag{2.23}$$

Lấy tổng (2.22) và (2.23), ta suy ra $(n-m-3)\big(H_f(r) + H_g(r)\big) + 2\log r$ là đại lượng giới nội khi $r \to \infty$. Suy ra $n < m+3$, được mâu thuẫn vì $n \geq 2m+8$. Vậy $C_1C_2C_3 = 0$. Các trường hợp trên cho ta

$$f_2^n = cg_2^n. \tag{2.24}$$

Từ (2.24) và $\widetilde{P}(f_1, f_2) = c\widetilde{P}(g_1, g_2)$, ta có $P\Big(\dfrac{f_1}{f_2}\Big) = P\Big(\dfrac{g_1}{g_2}\Big)$.
Vì $n \geq 2m+8$, $m \geq 2$, $(m,n) = 1$, theo Bổ đề 2.3.1 ta nhận được $f \equiv g$. Định lý 2.3.2 đúng với $s = 1$.

Bây giờ ta tiếp tục chứng minh Định lý 2.3.2. Xét

$$P_s(f_1, \ldots, f_{s+1}) = cP_s(g_1, \ldots, g_{s+1}).$$

Lý luận tương tự trường hợp $s = 1$ ta được

$$\frac{P_{k-1}(f_1, \ldots, f_k)}{P_{k-1}(g_1, \ldots, g_k)} = \frac{P_{k-1}(f_2, \ldots, f_{k+1})}{P_{k-1}(g_2, \ldots, g_{k+1})}, k = 2, ...s - 1.$$

Từ $\dfrac{P_1(f_1, f_2)}{P_1(g_1, g_2)} = \dfrac{P_1(f_2, f_3)}{P_1(g_2, g_3)}$, suy ra $\begin{cases} P_1(f_1, f_2) = c_1 P_1(g_1, g_2), \\ P_1(f_2, f_3) = c_1 P_1(g_2, g_3). \end{cases}$

Do đó

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} \text{ và } \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_3}{g_3}.$$

Tương tự

$$\frac{f_k}{g_k} = \frac{f_{k+1}}{g_{k+1}} \text{ và } \frac{f_{k+1}}{g_{k+1}} = \frac{f_{k+2}}{g_{k+2}}, \quad k = 1, 2, ..., s - 1.$$

Vậy $f \equiv g$. Định lý 2.3.2 được chứng minh. □

Định lý 2.3.3. *Giả sử $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^s(\mathbb{C}_p)$ là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và X là siêu mặt của $\mathbb{P}^s(\mathbb{C}_p)$ xác định bởi $P_s = 0$. Nếu $E_f(X) = E_g(X)$, thì $f \equiv g$.*

Chứng minh. Từ $E_f(X) = E_g(X)$ ta có $P_s \circ \widetilde{f} = cP_s \circ \widetilde{g}$ với $0 \neq c \in \mathbb{C}_p$. Theo Định lý 2.3.2, $f \equiv g$. Định lý 2.3.3 được chứng minh. □

Với đa thức $P(z), \widetilde{P}(z_i, z_j)$ trong Định lý 2.3.2 ta xác định các đa thức thuần nhất sau:

$$\begin{aligned} A_1(z_1, z_2) &= \widetilde{P}(z_1, z_2), \\ A_2(z_1, z_2, z_3) &= A_1\Big(A_1(z_1, z_2), \widetilde{P}(z_2, z_3)\Big), ..., \\ A_s = A_s(z_1, ..., z_{s+1}) &= A_1\Big(A_{s-1}(z_1, ..., z_s), \widetilde{P}^{n^{(s-2)}}(z_s, z_{s+1})\Big). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Khi đó A_s là đa thức thuần nhất bậc n^s có hệ số thuộc $\mathbb{C}_p$.

Định lý sau đây cho ta họ thứ hai các siêu mặt Y xác định duy nhất đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ $\mathbb{C}_p$ tới $\mathbb{P}^s(\mathbb{C}_p)$.

Định lý 2.3.4. *Giả sử $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^s(\mathbb{C}_p)$ là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và Y là siêu mặt của $\mathbb{P}^s(\mathbb{C}_p)$ xác định bởi $A_s = 0$. Nếu $E_f(Y) = E_g(Y)$ thì $f \equiv g$.*

Chứng minh. Từ $E_f(Y) = E_g(Y)$, ta có

$$A_s(f_1, \ldots, f_{s+1}) = cA_s(g_1, \ldots, g_{s+1}), \tag{2.26}$$

ở đó $0 \neq c \in \mathbb{C}_p$. Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = ... = \frac{f_{s+1}}{g_{s+1}}. \tag{2.27}$$

Với $s = 1$, từ (2.26) ta nhận được

$$A_1(f_1, f_2) = cA_1(g_1, g_2).$$

Lý luận tương tự (2.13) như khi xét Định lý 2.3.2 ta có

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}.$$

Vậy (2.27) đúng với $s = 1$.

Giả sử (2.27) đúng với $s - 1$, ta chứng minh (2.27) đúng với s.

Từ định nghĩa của $A_s(z_1, ..., z_{s+1})$ và (2.26) ta có

$$A^n_{s-1} - aA^{n-m}_{s-1}B^m_{s+1} + bB^n_{s+1} - cC^n_{s-1} + caC^{n-m}_{s-1}D^m_{s+1} - cbD^n_{s+1} = 0.$$

Lý luận tương tự (2.13) như khi xét Định lý 2.3.2 ta nhận được

$$A_{s-1} = c_{s-1}C_{s-1} \text{ và } B_{s+1} = c_{s-1}D_{s+1}.$$

Tức là

$$A_{s-1}(f_1, ..., f_s) = c_{s-1}A_{s-1}(g_1, .., g_s),$$
$$\widetilde{P}(f_s, f_{s+1}) = d_{s-1}\widetilde{P}(g_s, g_{s+1}).$$

Từ đây và giả thiết quy nạp ta nhận được

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = ... = \frac{f_s}{g_s} \quad \text{và} \quad \frac{f_s}{g_s} = \frac{f_{s+1}}{g_{s+1}}.$$

Suy ra
$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = ... = \frac{f_{s+1}}{g_{s+1}}.$$
Vậy $f \equiv g$. Định lý 2.3.4 được chứng minh. $\square$

Câu hỏi: Tồn tại hay không kết quả tương tự Định lý 2.2.7 và Hệ quả 2.2.8 trong trường hợp phức?

Kết luận của Chương 2

Chúng tôi đưa ra các định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic khác hằng, hai lớp đa thức duy nhất mạnh và siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic không suy biến đại số.

- Định lý 2.2.3, Hệ quả 2.2.4, Định lý 2.2.7. Hệ quả 2.2.8.

- Định lý 2.3.2, Định lý 2.3.3, Định lý 2.3.4.

Các Định lý trên là tương tự của Định lý 4 điểm, Định lý 5 điểm của Nevanlinna, tương tự các kết quả của M. Ru, P.C. Hu-C. C. Yang và theo hướng trả lời câu hỏi của F. Gross trong trường hợp p-adic.

Chương 3

Định lý duy nhất và bi-URS cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu vấn đề 3.2. Có hai hướng giải quyết Vấn đề này, đó là:

Hướng thứ nhất: Sử dụng nhát cắt thích hợp, chuyển hàm p-adic nhiều biến về hàm một biến, nhờ đó nhận được Mệnh đề 3.3.2. Từ đó, thu được các kết quả đối với đa thức duy nhất trong trường hợp nhiều biến, khi đã biết kết quả trong trường hợp một biến. Nhờ đó, nhận được các Định lý 3.3.3, Định lý 3.3.4. Đối với hướng thứ nhất, nhận xét và kết quả của phản biện là thực sự có ý nghĩa. Phản biện cũng nêu ý tưởng cho tác giả chứng minh Mệnh đề 3.2.5 là tương tự Mệnh đề 3.3.2, nhưng được xét đối với tập xác định duy nhất. Từ đó, nhận được Định lý 3.2.7, Định lý 3.2.8.

Hướng thứ hai: Thiết lập Định lý chính thứ 2 cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến (Định lý 3.4.2). Sử dụng Định lý 3.4.2 với các kỹ thuật đánh giá giữa hàm độ cao với hàm đếm không tính bội, cùng việc sử dụng các kỹ thuật chứng minh trong [45], chúng tôi cũng nhận được các Định lý 3.2.7, Định lý 3.2.8, Định lý 3.3.3, Định lý 3.3.4 nói trên.

Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [14], [27] và nhận xét cùng kết quả của phản biện. Cụ thể là:

1. Phát biểu và chứng minh các định lý tương tự Định lý 4 điểm của Nevanlinna trong trường hợp p-adic nhiều biến (Định lý 3.4.2, Định lý 3.2.7. Định lý 3.2.8).

2. Thiết lập lớp đa thức duy nhất, đa thức duy nhất mạnh và chỉ ra sự tồn tại của một bi-URS cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến dạng $(\{a_1, ..., a_q\},\ \{u\})$, với mọi $q \geq 4$ (Định lý 3.3.4, Định lý 3.3.5). Đây là tương tự kết quả của Hà Huy Khoái và Tạ Thị Hoài An trong trường hợp nhiều biến.

3.1 Một số khái niệm.

Không gian $\mathbb{C}_p^m$.

Với $z \in \mathbb{C}_p$ ta đặt $v(z) = \begin{cases} -\log|z| \text{ nếu } z \neq 0, \\ +\infty \text{ nếu } z = 0. \end{cases}$

Với m là số nguyên dương, không gian $p-$adic m chiều, ký hiệu là $\mathbb{C}_p^m$ được xác định như sau:

$$\mathbb{C}_p^m = \big\{(z_1, ..., z_m) : z_i \in \mathbb{C}_p \text{ với } i = 1, ..., m\big\},$$

Một số ký hiệu.

$$b_{(m)} = (b_1, ..., b_m), \quad b_i(b) = (b_1, ..., b_{i-1}, b, b_{i+1}, ..., b_m),$$
$$b_{(m,i_s)} = b_i(b_{i_s}), \quad \widehat{(b_i)} = (b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_m),$$
$$D_r = \big\{z \in \mathbb{C}_p : |z| \leqslant r, r > 0\big\}, \quad D_{<r>} = \big\{z \in \mathbb{C}_p : |z| = r, r > 0\big\},$$
$$D_{r_{(m)}} = D_{r_1} \times \cdots \times D_{r_m}, \quad \text{ở đó } r_{(m)} = (r_1, \ \ldots, r_m) \text{ với } r_i \in \mathbb{R}_+^*,$$
$$D_{<r_{(m)}>} = D_{<r_1>} \times \cdots \times D_{<r_m>}, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m,$$
$$z^\gamma = z_1^{\gamma_1} ... z_m^{\gamma_m}, \quad r^\gamma = r_1^{\gamma_1} ... r_m^{\gamma_m}, \quad \gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m),$$
$$\text{ở đó } \gamma_i \in \mathbb{N}, \quad |.| = |.|_p, \quad \log = \log_p.$$

Độ cao của hàm chỉnh hình p-adic nhiều biến.

Giả sử f là hàm chỉnh hình không đồng nhất không trên $D_{r_{(m)}}$ và

$$f = \sum_{|\gamma| \geq 0} a_\gamma z^\gamma, \quad |z_i| \leqslant r_i \text{ với } i = 1, \ldots, m.$$

Vì f là hàm chỉnh hình, nên $\lim\limits_{|\gamma|\to\infty} |a_\gamma| r^\gamma = 0$. Do đó tồn tại $(\gamma_1, ..., \gamma_m) \in \mathbb{N}^m$ sao cho $|a_\gamma| r^\gamma$ lớn nhất. Đặt

$$|f|_{r_{(m)}} = \max_{0 \leqslant |\gamma| < \infty} |a_\gamma| r^\gamma.$$

Định nghĩa 11. Độ cao của hàm $f(z_{(m)})$ định nghĩa bởi

$$H_f(r_{(m)}) = \log |f|_{r_{(m)}}.$$

Nếu $f(z_{(m)}) \equiv 0$, đặt $H_f(r_{(m)}) = -\infty$.

Bổ đề 3.1.1. [46] *Giả sử $f_s(z_{(m)}), s = 1, 2, \ldots, q$, là q hàm chỉnh hình p-dic không đồng nhất không trên $D_{r_{(m)}}$. Khi đó tồn tại $u_{(m)} \in D_{r_{(m)}}$ để*

$$|f_s(u_{(m)})| = |f_s|_{r_{(m)}}, s = 1, 2, \ldots, q.$$

Giả sử $f \not\equiv 0$ là hàm chỉnh hình trên $D_{r_{(m)}}$, $a = (a_1, ..., a_m) \in D_{r_{(m)}}$, và

$$f = \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} a_\gamma (z_1 - a_1)^{\gamma_1} \ldots (z_m - a_m)^{\gamma_m}, \quad z_{(m)} \in D_{r_{(m)}}.$$

Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, m$, viết: $f(z_{(m)}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,k}(\widehat{z_i - a_i})(z_i - a_i)^k$.

$$\text{Đặt: } g_{i,k}(z_1, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_m) = f_{i,k}(\widehat{z_i - a_i}),$$
$$b_{i,k} = g_{i,k}(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_m).$$

Khi đó: $$f_{i,a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{i,k}(z_i - a_i)^k.$$

$$\text{Đặt: } \quad v_{i,f}(a) = \begin{cases} \min \ \{k : b_{i,k} \neq 0\} & \text{nếu } f_{i,a}(z) \not\equiv 0 \\ \infty & \text{nếu } f_{i,a}(z) \equiv 0. \end{cases}$$

Nếu $f(a) = 0$, thì a (tương ứng a_i) gọi là không điểm của $f(z_{(m)})$ (tương ứng $f_{i,a}(z)$).

Giả sử $a_{(m)} = (a_1, ..., a_m)$ là không điểm của f với $v_{i,f}(a_{(m)}) = p_i$ và $b_{(m)} = (b_1, ..., b_m)$ là không điểm của g với $v_{i,g}(b_{(m)}) = q_i, i = 1, ..., m$.

$$\text{Ta nói } p_i, a_{(m)}) = (q_i, b_{(m)}) \text{ nếu } \begin{cases} a_i = b_i, \text{với mọi } i = 1, ..., m, \\ p_i = q_i \text{ khi } p_i, q_i \in \mathbb{N}^*, \\ p_i = \infty \text{ khi } q_i = \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

Định nghĩa 12. Giả sử f là hàm chỉnh hình không đồng nhất không trên $D_{r_{(m)}}$, $d \in \mathbb{C}_p$. Hàm $v_f^d : \mathbb{C}_p^m \to (\mathbb{N} \bigcup \{\infty\})^m$ được định nghĩa:

$$v_f^d(a_{(m)}) = v_{f-d}^0(a_{(m)}) = (v_{1,f-d}(a_{(m)}), \ldots, v_{m,f-d}(a_{(m)})).$$

Giả sử f là hàm chỉnh hình không đồng nhất không trên $D_{r_{(m)}}$ và

$$f = \sum_{|\gamma| \geq 0} a_\gamma z^\gamma, \quad |z_i| \leqslant r_i \text{ với } i = 1, \ldots, m.$$

Viết

$$f(z_{(m)}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,k}\widehat{(z_i)} z_i^k, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Đặt

$$\begin{aligned}
I_f(r_{(m)}) &= \Big\{(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{N}^m : |a_\gamma| r^\gamma = |f|_{r_{(m)}}\Big\},\\
n_{1i,f}(r_{(m)}) &= \max\Big\{\gamma_i : \exists\ (\gamma_1, \ldots, \gamma_i, \ldots, \gamma_m) \in I_f(r_{(m)})\Big\},\\
n_{2i,f}(r_{(m)}) &= \min\Big\{\gamma_i : \exists\ (\gamma_1, \ldots, \gamma_i, \ldots, \gamma_m) \in I_f(r_{(m)})\Big\},\\
n_{i,f}(0,0) &= \min\Big\{k : f_{i,k}\widehat{(z_i)} \not\equiv 0\Big\},\\
\nu_f(r_{(m)}) &= \sum_{i=1}^{m} \Big(n_{1i,f}(r_{(m)}) - n_{2i,f}(r_{(m)})\Big).
\end{aligned}$$

Gọi $r_{(m)}$ là một *điểm tới hạn* của f nếu $\nu_f(r_{(m)}) \neq 0$.

Đối với một i cố định ($i = 1, \ldots, m$), để đơn giản ta đặt

$$n_{i,f}(0,0) = l, k_1 = n_{1i,f}(r_{(m)}),\ k_2 = n_{2i,f}(r_{(m)}).$$

Khi đó tồn tại đa chỉ số $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_i, \ldots, \gamma_m) \in I_f(r_{(m)})$, và $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_m) \in I_f(r_{(m)})$ sao cho $\gamma_i = k_1$, $\mu_i = k_2$.

Xét các hàm chỉnh hình không đồng nhất không trên $D_{r_{(m)}}$ sau đây:

$$f_l(z_{(m)}) = f_{i,l}\widehat{(z_i)} z_i^l, \quad f_{k_1}(z_{(m)}) = f_{i,k_1}\widehat{(z_i)} z_i^{k_1}, \quad f_{k_2}(z_{(m)}) = f_{i,k_2}\widehat{(z_i)} z_i^{k_2}.$$

Với mỗi $i = 1, \dots, m$, đặt

$$U_{if,r_{(m)}} = \Big\{u = u_{(m)} \in D_{r_{(m)}} : |f_l(u)| = |f_l|_{r_{(m)}},\ \ |f(u)| = |f|_{r_{(m)}},$$
$$|f_{k_1}(u)| = |f_{k_1}|_{r_{(m)}},\ \ |f_{k_2}(u)| = |f_{k_2}|_{r_{(m)}}\Big\}.$$

Theo Bổ đề 3.1.1, suy ra $U_{if,r_{(m)}} \neq \emptyset$. Với mỗi $u \in U_{if,r_{(m)}}$, đặt

$$f_{i,u}(z) = f(u_1, \dots, u_{i-1}, z, u_{i+1}, \dots, u_m),\ z \in D_{r_i}.$$

Cho $a \in \mathbb{C}_p, f \not\equiv a$ là hàm chỉnh hình trên $D_{r_{(m)}}$, và $\rho_1, \dots, \rho_m$ với $0 < \rho_i \leqslant r_i,\ i = 1, \dots, m$ là các số thực dương cố định. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, đặt

$$A_i(x) = (\rho_1, \dots, \rho_{i-1}, x, r_{i+1}, \dots, r_m),$$
$$B_i(x) = (\rho_1, \dots, \rho_{i-1}, x, \rho_{i+1}, \dots, \rho_m).$$

Định nghĩa 13. Hàm đếm $N_f(a, r_{(m)})$ được xác định bởi

$$N_f(a, r_{(m)}) = \frac{1}{\ln p} \sum_{i=1}^{m} \int_{\rho_i}^{r_i} \frac{n_{i,f}(a, A_i(x))}{x} dx,\ n_{i,f}(a, r_{(m)}) = n_{1i,f-a}(r_{(m)}).$$

Nếu a=0, thì đặt $N_f(r_{(m)}) = N_f(0, r_{(m)})$. Khi đó

$$N_f(a, B_i(r_i)) = \frac{1}{\ln p} \int_{\rho_i}^{r_i} \frac{n_{i,f}(a, B_i(x))}{x} dx.$$

Với mỗi $i = 1, 2, ..., m$, đặt

$$k_{1,i} = n_{1i,f}\big(A_i(r_i)\big),\ \ k_{2,i} = n_{2i,f}\big(A_i(r_i)\big),$$
$$U^i_{if,A_i(r_i)} = \big\{u^i = u^i_{(m)} \in D_{A_i(r_i)} : |f_l(u^i)| = |f_l|_{A_i(r_i)},$$
$$|f(u^i)| = |f|_{A_i(r_i)},\ |f_{k_{1,i}}(u^i)| = |f_{k_{1,i}}|_{A_i(r_i)},\ \ |f_{k_{2,i}}(u^i)| = |f_{k_{2,i}}|_{A_i(r_i)}\big\},$$
$$\Gamma_i = \{A_i(x) : A_i(x) \text{ là một điểm tới hạn, } 0 < x \leqslant r_i\}.$$

Theo Bổ đề 3.1.1, Γ_i là tập hữu hạn. Giả sử $\Gamma_i,\ i = 1, \dots, m$, chứa n phần tử $A_i(x^j), j = 1, \dots, n$. Từ Bổ đề 3.1.1, với mọi $i = 1, \dots, m$, có

$$\mathcal{U}^i_{if,A_i(r_i)} = \{u^i = u^i_{(m)} \in U^i_{if,A_i(r_i)} : \exists u^i_i(u^j) \in U^i_{if,A_i(x^j)}, j = 1, \dots, n\} \neq \emptyset,$$

Bổ đề 3.1.2. *Giả sử $f \not\equiv 0$ là hàm chỉnh hình trên $D_{r_{(m)}}$. Khi đó*

$$H_f(r_{(m)}) - H_f(\rho_{(m)}) = N_f(r_{(m)}).$$

Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ ([46], Định lý 3.2). □

Đặt:
$$v = (u^1, \ldots, u^m), u^i \in \mathcal{U}^i_{if,A_i(r_i)},$$
$$N_{f_v}(r_{(m)}) = N_{f_{1,u^1}}(r_1) + \cdots + N_{f_{m,u^m}}(r_m).$$

Ta có: $V = \{v : N_{f_v}(r_{(m)}) = N_f(r_{(m)})\}$ là tập khác rỗng,

$$N_{f_v}(r_{(m)}) = \sum\nolimits_{\substack{1 \\ \rho_1 < |a| \leqslant r_1}} (v(a) + \log r_1) + n_{f_{1,u^1}}(0, \rho_1)(\log r_1 - \log \rho_1)$$
$$+ \cdots + \sum\nolimits_{\substack{m \\ \rho_m < |a| \leqslant r_m}} (v(a) + \log r_m) + n_{f_{m,u^m}}(0, \rho_m)(\log r_m - \log \rho_m), \quad (3.2)$$

ở đó $\sum\nolimits_{\substack{i \\ \rho_i < |a| \leqslant r_i}} (v(a) + \log r_i), i = 1, 2, ..., m$ được lấy trên mọi không điểm a của f_{i,u^i} (tính cả bội). Chú ý rằng, (3.2) là tổng hữu hạn.

Ký hiệu $\overline{N}_{f_v}(r_{(m)})$ tổng trong (3.2), ở đó không điểm a của hàm f_{i,u^i}, $i = 1, \ldots, m$, không tính bội. Đặt

$$\overline{N}_f(r_{(m)}) = \max_{v \in V} \overline{N}_{f_v}(r_{(m)}).$$

Từ [46, Định lý 3.1] suy ra có thể tìm được $u^i \in \mathcal{U}^i_{if,A_i(r_i)}$ và $v = (u^1, \ldots, u^m)$ sao cho $N_f\big(r_{(m)}\big) = N_{f_v}(r_{(m)})$, và tương tự đối với $\overline{N}_f\big(r_{(m)}\big)$.

Bây giờ cho C là điều kiện nào đó, và $U^{i*}_{i,A_i(r_i)} \subset \mathcal{U}^i_{if,A_i(r_i)}$, $U^{i*}_{i,A_i(r_i)} \neq \emptyset$. Với mỗi $r_{(m)}$ và $u^i \in U^{i*}_{i,A_i(r_i)}$, đặt

$$v_{i,f}(u^i_i(z); C) = \begin{cases} v_{i,f}(u^i_i(z)) & \text{nếu } u^i_i(z) \text{ thoả mãn điều kiện } C \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác,} \end{cases}$$
$$n_{f_{i,u^i}}(r_i; C) = \sum_{|z| \leqslant r_i} v_{i,f}(u^i_i(z); C),$$

$$N_f\big(r_{(m)}; C\big) = \min_{v \in V} \frac{1}{lnp} \sum_{i=1}^m \int_{\rho_i}^{r_i} \frac{n_{f_{i,u^i}}(x; C)}{x} dx.$$
$$N_{f_v}(r_{(m)}; C) = N_{f_{1,u^1}}(r_1; C) + \cdots + N_{f_{m,u^m}}(r_m; C).$$

Từ [46, Định lý 3.1] suy ra có thể tìm được $u^i \in U^{i*}_{i,A_i(r_i)}$ và $v = (u^1, \ldots, u^m)$ sao cho $N_f\big(r_{(m)}; C\big) = N_{f_v}(r_{(m)}; C)$.

3.2 Định lý duy nhất cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến.

Giả sử $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ là hàm phân hình trên $D_{r_{(m)}}(\mathbb{C}_p^m)$, ở đó f_1, f_2 là hai hàm chỉnh hình không có không điểm chung trên $D_{r_{(m)}}(\mathbb{C}_p^m)$.

Định nghĩa 14. Độ cao của f được xác định bởi

$$H_f(r_{(m)}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant 2} H_{f_i}(r_{(m)}).$$

Cho $d \in \mathbb{C}_p,$ ta đặt

$$N_f(d, r_{(m)}) = N_{f_1 - df_2}(r_{(m)}),$$
$$N_f(\infty, r_{(m)}) = N_{f_2}(r_{(m)}).$$

Và hàm $v_f^d : \ \mathbb{C}_p^m \longrightarrow \ (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})^m$ định nghĩa bởi

$$v_f^d(d_{(m)}) = v^0_{f_1 - df_2}(d_{(m)}), \ \ v_f^\infty(d_{(m)}) = v^0_{f_2}(a_{(m)}).$$

Cho tập con S của $\mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$, với mỗi $i = 1, 2..., m.$ ta đặt

$$E_{i,f}(S) = \bigcup_{d \in S} \big\{(q_i, a_{(m)}) \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \times \mathbb{C}_p^m | f(a_{(m)}) = d, \ v^d_{i,f}(a_{(m)}) = q_i\big\}.$$

Định nghĩa 15. Họ $S = \{S_1, ..., S_n\}$ các tập con không rỗng của $\mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ được gọi là n tập xác định duy nhất tính bội (tương ứng, không tính bội) cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$ nếu với mọi cặp hàm phân hình f và g khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ thoả mãn điều kiện $E_{i,f}(S_j) = E_{i,g}(S_j)$, (tương ứng, $\overline{E}_f(S_j) = \overline{E}_g(S_j)$), với $i = 1, \ldots, m, j = 1, ...n$, ta có $f \equiv g$.
Để ngắn gọn, n tập xác định duy nhất tính bội (tương ứng, không tính bội) được gọi là n-URS (tương ứng, n-URSIM),

1-URS (tương ứng, 1-URSIM) là URS (tương ứng, URSIM),

2-URS (tương ứng, 2-URSIM) là *bi* URS (tương ứng, *bi* URSIM).

Giả sử γ là một đa chỉ số và f là hàm phân hình của $\mathbb{C}_p^m$. Khi đó, ký hiệu $\partial^\gamma f$ là đạo hàm riêng $\dfrac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial z_1^{\gamma_1}\dots\partial z_m^{\gamma_m}}$.

Bổ đề 3.2.1. [23] *Giả sử* $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ *là hàm phân hình khác hằng trên* $\mathbb{C}_p^m$. *Khi đó tồn tại một đa chỉ số* $\gamma_1 = (0,\dots,0,\gamma_{1e},0,\dots,0)$ *với* $\gamma_{1e} = 1$ *thoả mãn* $\partial^{\gamma_1} f = \dfrac{\partial^{\gamma_{1e}} f_1.f_2 - \partial^{\gamma_{1e}} f_2.f_1}{f_2^2}$ *và Wronskian*

$$W_f^e = det\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ \partial^{\gamma_{1e}} f_1 & \partial^{\gamma_{1e}} f_2\end{pmatrix} \not\equiv 0.$$

Bổ đề 3.2.2. *Cho* f *là hàm phân hình khác hằng trên* $\mathbb{C}_p^m$ *và* $a_j \in \mathbb{C}_p$, $j = 1,\dots,q$. *Khi đó*

$$qH_f(r_{(m)}) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_f(a_j, r_{(m)}) + N_f(\infty, r_{(m)}) + O(1),$$

trong đó $O(1)$ *là đại lượng giới nội, không phụ thuộc* $r_{(m)}$.

Chứng minh. Đặt $G = \{G_{\beta_1}\dots G_{\beta_q}\}$, ở đó $(\beta_1,\dots,\beta_q)$ là q số bất kỳ trong tập $\{1,\dots,q+1\}$, $G_j = f_1 - a_j f_2$ với $j = 1,\dots,q$, $G_{q+1} = f_2$, $H_G(r_{(m)}) = \max\limits_{(\beta_1,\dots,\beta_q)} H_{G_{\beta_1}\dots G_{\beta_q}}(r_{(m)})$. Giả sử với $r_{(m)}$ cố định ta có:

$$H_{G_{\beta_1}}(r_{(m)}) \geq H_{G_{\beta_2}}(r_{(m)}) \geq \dots \geq H_{G_{\beta_{q+1}}}(r_{(m)}).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} H_G(r_{(m)}) &= \max_{(\beta_1,\dots,\beta_q)} H_{G_{\beta_1}\dots G_{\beta_q}}(r_{(m)}) = \max_{(\beta_1,\dots,\beta_q)} \sum_{1\leqslant j\leqslant q} H_{G_{\beta_j}}(r_{(m)}) \\ &= H_{G_{\beta_1}}(r_{(m)}) + H_{G_{\beta_2}}(r_{(m)}) + \dots + H_{G_{\beta_q}}(r_{(m)}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Do $a_1,\dots,a_q$ là các số phân biệt trong $\mathbb{C}_p$, nên

$$f_i = b_{i_0} G_{\beta_q} + b_{i_1} G_{\beta_{q+1}},\ i = 1, 2,$$

ở đó b_{i_0}, b_{i_1} là các hằng số không phụ thuộc $r_{(m)}$. Do đó

$$\begin{aligned} H_{f_i}(r_{(m)}) &\leqslant \max\left\{H_{G_{\beta_q}}(r_{(m)}), H_{G_{\beta_{q+1}}}(r_{(m)})\right\} + O(1). \\ &\leqslant H_{G_{\beta_j}}(r_{(m)}) + O(1),\ \text{với } i = 1, 2 \text{ và } j = 1,\dots,q. \end{aligned}$$

Do đó

$$H_f(r_{(m)}) \leqslant H_{G_{\beta_j}}(r_{(m)}) + O(1), j = 1, \ldots, q. \tag{3.4}$$

Lấy tổng q bất đẳng thức trong (3.4) và từ (3.3), ta có

$$qH_f(r_{(m)}) \leqslant H_G(r_{(m)}) + O(1). \tag{3.5}$$

Vậy:

$$qH_f(r_{(m)}) \leqslant \sum_{j=1}^{q+1} H_{G_j}(r_{(m)}) + O(1).$$

Theo Bổ đề 3.1.2 ta có

$$H_{G_j}(r_{(m)}) = N_{G_j}(r_{(m)}) + O(1).$$

Do đó

$$qH_f(r_{(m)}) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_f(a_j, r_{(m)}) + N_f(\infty, r_{(m)}) + O(1),$$

Bổ đề 3.2.2 được chứng minh. □

Bổ đề 3.2.3. *Tập hữu hạn S của $\mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ là URS cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$. Khi đó $\#S \geq 2$.*

Chứng minh. Giả sử S là URS tính bội cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.

Giả sử ngược lại $S = \{a\}$. Lấy các đa thức $P(z_1), F_2(z_1), G_2(z_1)$ đôi một không có không điểm chung và $P(z_1)$ khác hằng.

Đặt $F_1(z_1) = P(z_1) + aF_2(z_1),\ \ G_1(z_1) = P(z_1) + aG_2(z_1)$, và $F = F(z_1, ..., z_m) = \dfrac{F_1(z_1)}{F_2(z_1)},\quad G = G(z_1, ..., z_m) = \dfrac{G_1(z_1)}{G_2(z_1)}$. Khi đó $F - a = \dfrac{F_1(z_1) - aF_2(z_1)}{F_2(z_1)} = \dfrac{P(z_1)}{F_2(z_1)},\qquad G - a = \dfrac{P(z_1)}{G_2(z_1)}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} E_{i,F}(S) &= \Big\{\Big(p_i, a_{(m)} = (a_1, ..., a_m)\Big) : F = a \text{ với } v^a_{i,F}(a_{(m)}) = p_i\Big\},\\ E_{i,G}(S) &= \Big\{\Big(q_i, b_{(m)} = (b_1, ..., b_m)\Big) : G = a \text{ với } v^a_{i,G}(b_{(m)}) = q_i\Big\}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

với a_i, b_i là các số tuỳ ý trong $\mathbb{C}_p$, Mặt khác, ta có

$$p_1 = q_1 = v_P^0(a_1), \text{ theo (3.1) suy ra } E_{1,F}(S) = E_{1,G}(S),$$
$$\text{và } p_i = \infty \text{ và } q_i = \infty, \text{ nên } E_{i,F}(S) = E_{i,G}(S), i = 2, ..., m. \quad (3.7)$$

Do đó: $E_{i,F}(S) = E_{i,G}(S), i = 1, ..., m$ nhưng $F \neq G$. Vậy $\#S \geq 2$. Bổ đề 3.2.3 được chứng minh. □

Bổ đề 3.2.4. *Nếu F là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$, và $\#S \geq 2$. Khi đó $E_{i,F}(S) \neq \emptyset, i = 1, ..., m$.*

Chứng minh. Do $\#S \geq 2$ nên tồn tại $a_1, a_2 \in S$.

Xét $a_1 \neq \infty$ và $a_2 \neq \infty$. Áp dụng Bổ đề 3.2.2 với a_1, a_2 ta có

$$3H_F(r_{(m)}) \leqslant \sum_{j=1}^{2} N_F(a_j, r_{(m)}) + N_F(\infty, r_{(m)}) + O(1),$$

suy ra: $$2H_F(r_{(m)}) \leqslant \sum_{j=1}^{2} N_F(a_j, r_{(m)}) + O(1).$$

Khi $r_i \to \infty, i = 1, ..., m$, thì $H_f(r_{(m)}) \to \infty$, nên $\sum\limits_{j=1}^{2} N_F(a_j, r_{(m)}) \to \infty$. Do đó, $F - a_1$ hoặc $F - a_2$ có không điểm.

Xét $a_2 = \infty$. Áp dụng Bổ đề 3.2.2 với a_1 ta có

$$2H_F(r_{(m)}) \leqslant N_F(a_1, r_{(m)}) + N_F(\infty, r_{(m)}) + O(1).$$

Tương tự trên, cũng được $F - a_1$ hoặc $F - a_2$ có không điểm.

Vậy $E_{i,F}(S) \neq \emptyset$. Bổ đề 3.2.4 được chứng minh. □

Mệnh đề 3.2.5. *Tập hữu hạn S của $\mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ là URS tính bội (tương ứng, không tính bội) cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$ khi và chỉ khi nó là URS tính bội (tương ứng, không tính bội) cho cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$.*

Chứng minh. Giả sử S là URS tính bội cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$, và $f(z_1), g(z_1)$ là hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p$ thoả mãn $E_f(S) = E_g(S)$. Đặt $F = F(z_1, ..., z_m) = f(z_1), G = G(z_1, ..., z_m) = g(z_1)$.

Tương tự (3.7) và giả thiết $E_f(S) = E_g(S)$, suy ra $E_{1,F}(S) = E_{1,G}(S)$, và $E_{i,F}(S) = E_{i,G}(S)$, $i = 2, ..., m$. Vậy

$$E_{i,F}(S) = E_{i,G}(S),\ i = 1, ..., m. \qquad (3.8)$$

Từ (3.8) và S là URS tính bội cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$, ta có $F = G$. Vậy $f = g$.

Ngược lại, giả sử S là URS tính bội cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$, và $F = \dfrac{F_1}{F_2}, G = \dfrac{G_1}{G_2}$ là hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ thoả mãn $E_{i,F}(S) = E_{i,G}(S), i = 1, ..., m$.

Vì F khác hằng, theo Bổ đề 3.2.1 tồn tại đa chỉ số $\gamma_1 = (0, \ldots, 0, \gamma_{1i}, 0, \ldots, 0)$ với $\gamma_{1i} = 1$ thoả mãn Wronskian

$$W_F^i = \det \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ \partial^{\gamma_{1i}} F_1 & \partial^{\gamma_{1i}} F_2 \end{pmatrix} \not\equiv 0.$$

Đặt $I_F = \Big\{ i \in \{1, ..., m\} : W_F^i \not\equiv 0 \Big\}$, thì $I_F \neq \emptyset$. Theo Bổ đề 3.1.1, ta có

$$\begin{aligned} X_F(r_{(m)}) = \{u = u_{(m)} \in D_{r_{(m)}} :& |F_1(u)| = |F_1|_{r_{(m)}}, |F_2(u)| = |F_2|_{r_{(m)}}, \\ & |W_F^i(u)| = |W_F^i|_{r_{(m)}}, i \in I_F\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

i) Nếu $u \in X_F(r_{(m)})$, khi đó $F_{i,u}$ khác hằng. Vì $\#S \geq 2$, theo Bổ đề 3.2.4

$$E_{F_{i,u}}(S) \neq \emptyset.$$

Do đó, tồn tại $a \in S$ sao cho $F_{i,u} - a$ có không điểm b với bội $q_i \in \mathbb{N}^*$, nghĩa là tồn tại $u_i(b) = (u_1, ..., u_{i-1}, b, u_{i+1}, ..., u_m)$ là không điểm của $F - a = \dfrac{F_1 - aF_2}{F_2}$ với $v^0_{i,F_1 - aF_2} = q_i$.

Do $E_{i,F}(S) = E_{i,G}(S)$, nên tồn tại $c \in S$ sao cho $u_i(b)$ là không điểm của $G - c = \dfrac{G_1 - cG_2}{G_2}$ với $v^0_{i,G_1 - cG_2} = q_i$. Suy ra b là không điểm của $G_{i,u} - c$ với bội q_i. Vậy $G_{i,u}$ khác hằng, và $E_{F_{i,u}}(S) \subset E_{G_{i,u}}(S)$.

Tương tự, ta cũng chứng minh được $E_{G_{i,u}}(S) \subset E_{F_{i,u}}(S)$. Vậy

$$E_{F_{i,u}}(S) = E_{G_{i,u}}(S). \qquad (3.9)$$

Từ (3.9) và giả thiết S là URS cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$, ta có

$$F_{i,u} = G_{i,u}, \text{ do đó } F(u) = G(u) \text{ với } u \in X_F(r_{(m)}), i \in I_F. \tag{3.10}$$

Ngược lại, nếu $G_{i,u}$ khác hằng, lý luận tương tự trên, $F_{i,u}$ khác hằng.

ii) Nếu $i \notin I_F$, thì $W_F^i \equiv 0$, nên $F_{i,u}$ là hằng, suy ra $G_{i,u}$ là hằng.
Từ $F_{i,u}, G_{i,u}$ là hằng và (3.10) suy ra

$$F_{i,u} = G_{i,u} = F(u), \text{ với } i \notin I_F. \tag{3.11}$$

Từ (3.10) và (3.11) suy ra

$$F_{i,u} = G_{i,u} \text{ với mọi } i = 1, ..., m. \tag{3.12}$$

Tiếp theo, ta chứng minh $F = G$.
Giả sử ngược lại $F \neq G$, khi đó $h = F_1G_2 - F_2G_1 \not\equiv 0$.
Khi đó, theo Bổ đề 3.1.1 tồn tại $u \in X_F(r_{(m)})$ sao cho $|h(u)| = |h|_{r_{(m)}} \neq 0$.

Từ (3.12), ta có $h_{i,u} \equiv 0$, suy ra $|h|_{r_{(m)}} = 0$, mâu thuẫn. Vậy $F = G$. Mệnh đề 3.2.5 được chứng minh. □

Trong trường hợp không tính bội, chứng minh tương tự.

Lý luận tương tự Mệnh đề 3.2.5 ta nhận được:

Mệnh đề 3.2.6. *Họ S là n-URS tính bội (tương ứng, không tính bội) cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$ khi và chỉ khi nó là n-URS tính bội (tương ứng, không tính bội) cho cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$.*

Áp dụng Mệnh đề 3.2.6 cho Định lý 3.1 [39], ta nhận được

Định lý 3.2.7. *Giả sử f, g là hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ sao cho $\overline{E}_f(a_i) = \overline{E}_g(a_i), a_i \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}, i = 1, 2, ..., q$. Nếu $q \geq 4$ thì $f \equiv g$.*

Áp dụng Mệnh đề 3.2.5 cho Định lý 6.3.3 [39] với hàm phân hình, ta được

Định lý 3.2.8. *Giả sử f, g là hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ sao cho $E_{i,f}(a_j) = E_{i,g}(a_j), i = 1, 2, ..., m, a_j \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}, j = 1, 2, 3$. Khi đó $f \equiv g$.*

3.3 Đa thức duy nhất và bi-URS cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến

Định nghĩa 16. Một đa thức khác hằng $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ được gọi là *đa thức duy nhất* cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$ nếu với mọi cặp hàm phân hình f, g khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ thoả mãn điều kiện $P(f) = P(g)$ thì $f = g$.

Tương tự, ta gọi đa thức khác hằng $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ là *đa thức duy nhất mạnh* cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$ nếu với mọi cặp hàm phân hình f, g khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ và mọi hằng số khác không $c \in \mathbb{C}_p$ thoả mãn điều kiện $P(f) = P(g)$ thì $f = g$.

Định nghĩa 17. Giả sử $P(x)$ là đa thức bậc q không có nghiệm bội và đạo hàm của nó có dạng

$$P'(x) = a(x - d_1)^{q_1} \dots (x - d_k)^{q_k},$$

ở đó $q_1 + \cdots + q_k = q - 1$ và $d_1, \dots, d_k$ là các không điểm phân biệt của P'. Khi đó k được gọi là *chỉ số đạo hàm* của P.

Không giảm tổng quát, có thể giả sử $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{C}_p \backslash \{0\}$.

Định nghĩa 18. [45] Đa thức khác không $P(x)$ được gọi là thoả mãn điều kiện (H) nếu $P(d_l) \neq P(d_m)$ với mọi $1 \leqslant l < m \leqslant k$.

Định nghĩa 19. [45] Đa thức khác không $P(x)$ được gọi là thoả mãn điều kiện (G) nếu $\sum_{i=1}^{k} P(d_i) \neq 0$.

Bổ đề 3.3.1. [14] *Giả sử f, g là hai hàm nguyên khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ sao cho $v_f^0 = v_g^0$ trên $\mathbb{C}_p^m$. Khi đó $f \equiv cg$, với $0 \neq c \in \mathbb{C}_p$.*

Mệnh đề 3.3.2. *Đa thức $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ là đa thức duy nhất (tương ứng, đa thức duy nhất mạnh) cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$ nếu và chỉ nếu nó là đa thức duy nhất (tương ứng, đa thức duy nhất mạnh) cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.*

Chứng minh. Giả sử P không là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$, nghĩa là tồn tại hai hàm phân hình phân biệt $f(z), g(z)$ sao cho ít nhất một hàm khác hằng và $P(f) = cP(g)$ với c là hằng số nào đó. Đặt:

$$F(z_1, ..., z_m) = f(z_1), \quad G(z_1, ..., z_m) = g(z_1).$$

Khi đó: $P(F) = cP(G)$ kéo theo P không là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.

Ngược lại: giả sử P không là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$, nghĩa là tồn tại các hàm phân hình nhiều biến phân biệt $F(z_1, ..., z_m), G(z_1, ..., z_m)$ sao cho F khác hằng và $P(F) = cP(G)$ với c là hằng số nào đó.

Do $F \neq G$ nên tồn tại $q = (q_1, ..., q_m)$ không là cực điểm cũng như điểm không xác định của F và G sao cho $F(q) \neq G(q)$. Đặt $a = F(q)$.

Do F khác hằng nên tồn tại $r = (r_1, ..., r_m) \in \mathbb{C}_p^m$, $r \neq q$ sao cho $F(r) \neq F(q)$. Đặt

$$\begin{aligned}
&a_i := r_i - q_i, i = 1, 2, ..., m, \\
&f(z) := F(q_1 + a_1 z, ..., q_m + a_m z), \\
&g(z) := G(q_1 + a_1 z, ..., q_m + a_m z).
\end{aligned}$$

Khi đó f, g là các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$, và $P(f) = cP(g)$. Mặt khác:

$f(0) = F(q_1, ..., q_m) \neq G(q_1, ..., q_m) = g(0)$ do đó $f \neq g$,

$f(0) = F(q_1, ..., q_m) \neq F(r_1, ..., r_m) = F(q_1 + a_1, ..., q_m + a_m) = f(1)$, tức là f khác hằng.

Vậy P không là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình một biến.

Khi $c = 1$ ta được khẳng định tương tự cho đa thức duy nhất.

Áp dụng Mệnh đề 3.3.2 cho Định lý 1, Định lý 2 [45] ta nhận được:

Định lý 3.3.3. *Giả sử $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ là đa thức không có nghiệm bội, có chỉ số đạo hàm $k \geq 3$ và thoả mãn điều kiện (H). Khi đó $P(x)$ là một đa thức duy nhất cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.*

Định lý 3.3.4. *Giả sử $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ là đa thức không có nghiệm bội, có chỉ số đạo hàm $k \geq 3$, thỏa mãn điều kiện (H) và (G). Khi đó $P(x)$ là một đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.*

Định lý 3.3.5. *Giả sử $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ là đa thức không có nghiệm bội, có chỉ số đạo hàm $k \geq 3$, thoả mãn điều kiện (H) và (G). Khi đó ta có*

1) Nếu $\{a_1, ..., a_q\}$ tập nghiệm của $P(x) = 0$ thì $\Big(\{a_1, ..., a_q\}, \{\infty\}\Big)$ là bi-URS cho các các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.

2) Nếu $a_i \neq u \in \mathbb{C}_p$ và $\dfrac{1}{a_i - u}, i = 1, ..., q$, là tập nghiệm của $P(x) = 0$ thì $\Big(\{a_1, ..., a_q\}, \{u\}\Big)$ là bi-URS cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.

Chứng minh. 1) Đặt $S = \{a_1, ..., a_q\}$. Từ $k \geq 3$ suy ra $q \geq 4$.

Giả sử f và g là hai hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$ thoả mãn điều kiện $E_{i,f}(S) = E_{i,g}(S),\ E_{i,f}(\infty) = E_{i,g}(\infty)$, với mọi $i = 1, \ldots, m$.

Theo Bổ đề 3.3.1, $\dfrac{P(f)}{P(g)} = c$ với c là hằng số.

Theo Định lý 3.3.4, ta có $P(x)$ là một đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$. Vậy $f = g$, nghĩa là $(S, \{\infty\})$ là bi-URS cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.

2) Đặt $b_i = \dfrac{1}{a_i - u}, i = 1, ..., q$, và $S = \{b_i\}_{i=1}^q, F = \dfrac{1}{f - u}, G = \dfrac{1}{g - u}$. Chú ý rằng

$$E_{i,F}(b_i) = E_{i,f}(a_i), E_{i,F}(\infty) = E_{i,f}(u),$$
$$E_{i,G}(b_i) = E_{i,g}(a_i), E_{i,G}(\infty) = E_{i,g}(u).$$

Do đó

$$E_{i,F}(S) = E_{i,G}(S) \text{ và } E_{i,F}(\infty) = E_{i,G}(\infty).$$

Tương tự trường hợp 1) ta có $F = G$ tức là $\dfrac{1}{f - u} = \dfrac{1}{g - u}$. Do đó $f = g$. Định lý 3.3.5 được chứng minh. □

Hệ quả 3.3.6. *Với mọi $q \geq 4$ và với mọi $u \in \mathbb{C}_p$, tồn tại bi-URS cho các hàm phân hình p-adic dạng* $\Big(\{a_1, ..., a_q\}, \{u\}\Big)$

Sau đây là một số ví dụ, phản ví dụ về đa thức duy nhất cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.

Ví dụ 1. Đa thức $P(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x$.

Ta thấy $P'(x) = 12(x+1)(x-1)(x-2)$ có chỉ số đạo hàm $k = 3$ và $P(-1) = -19 \neq P(1) = 13 \neq P(2) = 8, P(-1) + P(1) + P(2) = 2 \neq 0$. Do đó $P(x)$ thoả mãn các điều kiện của Định lý 3.3.4, nên $P(x)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.

Ví dụ 2. $P(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ có $P'(x) = 4x(x-1)(x+1)$.

P thoả mãn điều kiện (G) nhưng *không thoả mãn điều kiện* (H) vì $P(0) = 2, P(1) = P(-1) = 1$. Dễ thấy P không là đa thức duy nhất, nên không là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$. Thật vậy, với mọi hàm f và $g = -f$ thì $P(f) = P(g)$, nhưng $f \neq g$.

Ví dụ 3. $P(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$ có $P'(x) = 15(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.

P thoả mãn điều kiện (H) nhưng *không thoả mãn điều kiện* (G) vì $P(\pm 1) = \pm 38, P(\pm 2) = \pm 16$. Dễ thấy P không là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$. Thật vậy, với mọi hàm f và $g = -f$ thì $P(f) = -P(g)$, nhưng $f \neq g$.

3.4 Một kiểu định lý chính thứ hai cho hàm phân hình p-adic nhiều biến.

Bổ đề 3.4.1. *Giả sử f là hàm nguyên không đồng nhất không trên $\mathbb{C}_p^m$ và γ là một đa chỉ số $\mid \gamma \mid > 0$. Khi đó*

$$H_{\partial^\gamma f}(B_e(r_e)) - H_f(B_e(r_e)) \leqslant - \mid \gamma \mid \log r_e + O(1).$$

Chứng minh. Suy trực tiếp từ ([23], Bổ đề 4.1). □

Định lý 3.4.2. *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ và $a_j \in \mathbb{C}_p$, $j = 1, \ldots, q$. Khi đó*

$$\begin{aligned}&(q-1)H_f(B_e(r_e))\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{q} \overline{N}_f(a_j, B_e(r_e)) + \overline{N}_f(\infty, B_e(r_e)) - N_{0,\partial^{\gamma_1}f}(B_e(r_e)) - \log r_e + O(1),\end{aligned}$$

trong đó $O(1)$ là đại lượng giới nội, không phụ thuộc r_e.

Chứng minh. Đặt: $N_{0,\partial_f^{\gamma_1}}(r_{(m)}) = N_{0,W}(r_{(m)}) = N_W(0, r_{(m)}; C)$, ở đó C là điều kiện $G_j(z_m) \neq 0$, $z_{(m)} \in \mathbb{C}_p^m$ với mọi $j = 1, ..., q+1$.

Bằng cách đặt và lý luận tương tự (3.5), Bổ đề 3.2.2, ta có thể chứng minh:

$$(q-1)H_f(r_{(m)}) \leqslant H_G(r_{(m)}) = \max_{(\beta_1,\ldots,\beta_{q-1})} H_{G_{\beta_1}\ldots G_{\beta_{q-1}}}(r_{(m)}). \tag{3.13}$$

Ký hiệu $W(g_1, g_2)$ là Wronskian của hai hàm nguyên g_1, g_2 với γ_1 xác định như Bổ đề 3.2.1. Do f khác hằng, suy ra $W(f_1, f_2) \not\equiv 0$. Giả sử (α_1, α_2) là hai số phân biệt trong $\{1, \ldots, q+1\}$, và $(\beta_1, \ldots, \beta_{q-1})$ là các số còn lại. Vì các hàm f_i có thể biểu diễn là tổ hợp tuyến tính của $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}$, nên

$$W(G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}) = c_{(\alpha_1,\alpha_2)} W(f_1, f_2), \tag{3.14}$$

ở đó $c_{(\alpha_1,\alpha_2)} = c$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào (α_1, α_2). Đặt

$$A = A(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{W(G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2})}{G_{\alpha_1} G_{\alpha_2}} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\partial^{\gamma_1} G_{\alpha_1}}{G_{\alpha_1}} & \dfrac{\partial^{\gamma_1} G_{\alpha_2}}{G_{\alpha_2}} \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

và $L_i = \dfrac{\partial^{\gamma_1} G_{\alpha_i}}{G_{\alpha_i}}$, $i = 1, 2$. Từ Bổ đề 3.4.1 và $|\gamma_1| = 1$, ta có

$$\log |L_i|_{B_e(r_e)} \leqslant -|\gamma_1| \log r_e + O(1) \leqslant -\log r_e + O(1).$$

Từ đây và (3.15) ta có

$$\log |A|_{B_e(r_e)} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant 2} \log |L_i|_{B_e(r_e)} \leqslant -\log r_e + O(1). \tag{3.16}$$

Từ $A = \dfrac{W(G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2})}{G_{\alpha_1}G_{\alpha_2}}$ ta có $\dfrac{G_1 \ldots G_{q+1}}{W(f_1, f_2)} = \dfrac{cG_{\beta_1} \ldots G_{\beta_{q-1}}}{A} \cdot$ Suy ra

$$\sum_{j=1}^{q+1} H_{G_j}(B_e(r_e)) - H_W(B_e(r_e)) = H_{G_{\beta_1} \ldots G_{\beta_{q-1}}}(B_e(r_e)) - \log |A|_{B_e(r_e)} + O(1). \tag{3.17}$$

Theo Bổ đề 3.1.2 : $$\begin{aligned} H_W(B_e(r_e)) &= N_W(B_e(r_e)) + O(1), \\ H_{G_j}(B_e(r_e)) &= N_{G_j}(B_e(r_e)) + O(1). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Từ (3.16), (3.17), (3.18), (3.13) ta có

$$\begin{aligned} &(q-1)H_f(B_e(r_e)) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{q+1} H_{G_j}(B_e(r_e)) - H_W(B_e(r_e)) - \log r_e + O(1) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{q+1} N_{G_j}(B_e(r_e)) - N_W(B_e(r_e)) - \log r_e + O(1). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Cho một $B_e(r_e)$ cố định, xét các hàm nguyên W và $G_1, \ldots, G_{q+1}$ không đồng nhất không trên $D_{B_e(r_e)}$. Theo [1], ta có thể tìm được $u \in \mathcal{U}^e_{W,B_e(r_e)}$, và $u \in \mathcal{U}^e_{G_j,B_e(r_e)}$, $j = 1, \ldots, q+1$ sao cho

$$N_{G_j}(B_e(r_e)) = N_{(G_j)_{e,u}}(r_e), N_W(B_e(r_e)) = N_{W_{e,u}}(r_e). \tag{3.20}$$

Gọi $U^{e*}_{e,B_e(r_e)}$ là tập chứa các phần tử u được mô tả trong (3.20).

Giả sử $u_e(x) \in U^{e*}_{e,B_e(r_e)}$ là không điểm của G_j có bội riêng thứ e là k, $2 \leqslant k < +\infty$. Do $\gamma_1 = (0, \ldots, 0, \gamma_{1e}, 0, \ldots, 0)$ với $\gamma_{1e} = 1$, ta nhận được $v_{e,\partial^{\gamma_1}G_j}\big(u_e(x)\big) = k - 1$. Từ đây và (3.14) suy ra $u_e(x)$ là không điểm của W có bội riêng thứ e bằng $k - 1$.

Bây giờ ta xét hàm $F = \prod\limits_{j=1}^{q+1} G_j$. Vì F khác hằng nên F có không điểm. Giả sử $u_e(x)$ là một không điểm của F. Do $a_1, \ldots, a_q$ là các số phân biệt, nên tồn tại chỉ một hàm G_j sao cho $G_j(u_e(x)) = 0$. Do đó

$$\sum_{j=1}^{q+1} N_{(G_j)_{e,u}}(r_e) - N_{W_{e,u}}(r_e) = \sum_{j=1}^{q+1} \overline{N}_{(G_j)_{e,u}}(r_e) - N_{0,W_{e,u}}(r_e). \qquad (3.21)$$

Từ (3.20) và (3.21), ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{q+1} N_{G_j}(B_e(r_e)) - N_W(B_e(r_e))\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{q+1} \overline{N}_{(G_j)_{e,u}}(r_e) - N_{0,W}(B_e(r_e))\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{q+1} \overline{N}_{G_j}(B_e(r_e)) - N_{0,W}(B_e(r_e))\\
&= \sum_{j=1}^{q} \overline{N}_f(a_j, B_e(r_e)) + \overline{N}_f(\infty, B_e(r_e)) - N_{0,\partial^{\gamma_1} f}(B_e(r_e)).
\end{aligned}$$

Từ điều này và (3.19), Định lý 3.4.2 được chứng minh. □

Nhận xét 4. Sử dụng Định lý 3.4.2 với các kỹ thuật đánh giá giữa hàm độ cao và hàm đếm không tính bội, cùng việc sử dụng các kỹ thuật chứng minh trong [45], chúng tôi cũng nhận được Định lý 3.2.7, Định lý 3.2.8, Định lý 3.3.4, Định lý 3.3.5 (xem [14] và [27]).

Kết luận của Chương 3

Trong Chương 3, chúng tôi thiết lập một số định lý duy nhất, đa thức duy nhất và bi-URS cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến sau:

- Định lý 3.4.2, Định lý 3.2.7. Định lý 3.2.8. Đây là tương tự kết quả của Adams-E. Straus cho trường hợp p-adic nhiều biến.

- Định lý 3.3.3, Định lý 3.3.4, Định lý 3.3.5. Đây là tương tự kết quả của Hà Huy Khoái và Tạ Thị Hoài An trong trường hợp nhiều biến.

Kết luận của luận án

Luận án nghiên cứu các vấn đề tập xác định duy nhất cho các hàm chỉnh hình nhiều biến phức và p-adic. Mục tiêu của luận án là thiết lập một số tập xác định duy nhất và lớp đa thức duy nhất trong các trường hợp trên. Các kết quả chính của luận án là:

1. Thiết lập một số định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình khác hằng, xây dựng hai lớp đa thức duy nhất và siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số. Các kết quả trên là tương tự Định lý 5 điểm của Nevanlinna và theo hướng đặt ra của F. Gross.

2. Chứng minh một số định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình p-adic khác hằng, xây dựng hai lớp đa thức duy nhất mạnh và siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic không suy biến đại số. Các Định lý trên là tương tự Định lý 4 điểm của Nevanlinna, tương tự các kết quả của M. Ru, P.C. Hu-C. C. Yang và F. Gross trong trường hợp p-dic.

3. Thiết lập một số định lý duy nhất, đa thức duy nhất và bi-URS đối với các hàm phân hình p-adic nhiều biến.

Danh mục các công trình liên quan đến luận án

1. Tran Dinh Duc, *Unique range sets for p-adic meromorphic functions in several variables,* East-West J.of Math, Vol. 9, No 2 (2007) pp. 99-112.

2. Vu Hoai An and Tran Dinh Duc, *Uniqueness theorems and uniqueness polynomials for p-adic holomorphic curves,* Acta Math. Vietnam 33(2008), no.2, 181-195.

3. Vu Hoai An and Tran Dinh Duc, *Uniqueness polynomials and bi-URS for p-adic meromorphic functions in several variables,* Vietnam J.Math. 36(2008), no.2, 191-207.

4. Vu Hoai An and Tran Dinh Duc, *Uniqueness theorems and uniqueness polynomials for holomorphic curves,* Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 56, Nos. 1-4, January-April 2011, 253-262.

Tài liệu tham khảo

TIẾNG VIỆT

[1] Vũ Hoài An (2001), *Phân phối giá trị cho hàm và ánh xạ chỉnh hình* $p-$*adic nhiều biến,* Luận án Tiến sỹ Toán học, Viện Toán học.

[2] Tạ Thị Hoài An (2000), *Về tập xác định duy nhất cho hàm nguyên, hàm phân hình và đa thức trên trường đóng đại số,* Luận án Tiến sỹ Toán học, Viện Toán học.

[3] Đoàn Quang Mạnh, *Các Định lý kiểu Picard và tập xác định duy nhất cho ánh xạ chỉnh hình p-adic nhiều biến,* Luận án Tiến sỹ Toán học, Viện Toán học.

[4] Nguyễn Thành Quang (1998), *Sự suy biến của các đờng cong chỉnh hình và tính Hyperbolic Body p-adic,* Luận án Tiến sỹ Toán học, Đại học Sư phạm Vinh.

[5] Nguyễn Trọng Hoà (2006), *Phương trình P(f)=Q(g) và Bi URS cho hàm phân hình trên trường Acsimet,* Luận án Tiến sỹ Toán học, Đại học Vinh.

[6] Mai Văn Tư (1995), *Lý thuyết Nevanlinna-Cartan và không gian hyperbolic Brody* $p-$*dic,* Luận án phó tiến sỹ khoa học, Đại học Sư phạm Vinh, 1995.

TIẾNG ANH

[7] Adam, W. W., and Straus, E.G., *Non-Archimedean analytic functions taking the same values at the same points*, Illinois J.Math. **15** (1971) 418-424.

[8] Ta Thi Hoai An, *A new class of unique range sets for meromorphic functions on* $\mathbb{C}$, Acta Mathematica Vietnammica. Vol. 27, No.3(2002), pp. 251-256.

[9] An, Ta Thi Hoai and Escassut, Alain, *meromorphic solutions of equations over non-Archimedean fields,* Ramanujan J (2008), no. 3, 415-433.

[10] T. T. H. An, J.T.Y.Wang, and P.M.Wong, *Unique range sets and uniqueness polynomials in positive characteristic II,* Acta Arith. **116**(2005), 115-143.

[11] Ta Thi Hoai An, J.T.Y.Wang, and P.M.Wong, *Strong uniqueness polynomials: the complex case,* Journal of Complex Variables and it's Application, **49** No. 1(2004), 25-54.

[12] Vu Hoai An, *Height of p-adic holomorphic maps in several variables and applications,* Acta Math. Vietnam **27**(2002),no.3, pp.257-269.

[13] Vu Hoai An and Tran Dinh Duc, *Uniqueness theorems and uniqueness polynomials for p-adic holomorphic curves,* Acta Math. Vietnam **33** (2008), no.2, 181-195.

[14] Vu Hoai An and Tran Dinh Duc, *Uniqueness polynomials and bi-URS for p-adic meromorphic functions in several variables,* Vietnam J.Math. **36**(2008), no.2, 191-207.

[15] Vu Hoai An and Tran Dinh Duc, *Uniqueness theorems and uniqueness polynomials for holomorphic curves,* Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 56, Nos. 1-4, January-April 2011, 253-262.

[16] Vu Hoai An and Doan Quang Manh, *On Unique Range Sets for P-Adic Holomorphic Maps*, Vietnam Journal of Mathematics **31**(2003) 241-247.

[17] Vu Hoai An and Doan Quang Manh, *p-adic Nevanlinna-Cartan theorem in several variables for Fermat type hypersurfaces,* East-West J. Math. **4**(2002), no. 1, pp. 87-99.

[18] Vu Hoai An and Doan Quang Manh, *The "abc" Conjecture for p-adic entire functions of several variables,* Southeast Asian Bulletin of Mathematics, **27**(2004), 959-972.

[19] A. Boutabaa and A. Escassut, *On uniqueness of $p-$adic meromorphic functions,* Proc. Amer. Math. Soc., **126** (9) (1998), 2557-2568.

[20] Z. Chen and Y. Li and Q. Yan, *Uniqueness problem with truncated multiplicities of meromorphic mappings for moving targets,* Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. **27** (2007), no. 3, 625-634.

[21] Z. Chen and Q. Yan, *Uniqueness theorem of meromorphic mappings into $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sharing $2n+3$ hyperplanes regardless of multiplicities*, Intern. J. Math. **6** (2009), 717-726.

[22] W. Cherry and M. Ru, *Rigid analytic Picard theorems*, Proc. Amer. Math. J. Soc., **126** (2004), 873-889.

[23] W. Cherry and Z. Ye, *Non-Archimedean Nevanlinna theory in several variables and the non-Archimedean Nevanlinna inverse problem,* Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 5043 - 5071.

[24] W. Cherry- C. C. Yang, *Uniqueness of Non-Archimedean entire functions sharing sets of values couting multiplicity,* Proc. Amer. Math. Soc., **127** (4) (1999), 967-971.

[25] G. Dethloff and Tran Van Tan, *Uniqueness problem for meromorphic mappings with truncated multiplicities and moving targets,* Nagoya Math. J., **181** (2006), 75-101.

[26] Dethloff-Tran Van Tan *Uniqueness theorems for meromorphic mappings with few hyperplanes,* Bull. Sci. Math. 133 (2009), no. 5, 501-514.

[27] Tran Dinh Duc, *Unique range sets for p-adic meromorphic functions in several variables,* East-West J.of Mathematics: Vol. 9, No 2 (2007) pp. 99-112

[28] A. Escassut, L. Haddad and R Vidal, *URS, URSIM and non-URS* $p-adic$ *functions and of polynomials,* J. Number Theory, **75** (1) (1999), 133-144

[29] A. Escassut and C. C. Yang, *The functional equation P(f)=Q(g) in a* $p-adic$ *field,* J. Number Theory, **105** (2004) No 2, 344-360.

[30] G. Frank and M. Reinders, *A unique range set for meromorphic functions with 11 elements*, Complex Variables Theory Appl., **37 (1-4)** (1998), 185-193.

[31] H. Fujimoto, *The uniqueness problem of meromorphic maps into the complex projective space,* Nagoya Math. J., **58** (1975), 1-23.

[32] H. Fujimoto, *Uniqueness problem with truncated multiplicities in value distribution theory,* Nagoya Math. J., **152** (1998), 131-152.

[33] H. Fujimoto, *Uniqueness problem with truncated multiplicities in value distribution theory,II,* Nagoya Math. J., **155** (1999), 161-188.

[34] H. Fujimoto, *On uniqueness for meromorphic functions sharing finite sets,* Amer. J. Math., **122**(2000), 1175-1203.

[35] H. Fujimoto, *Finiteness of entire functions sharing a finite set*, Nagoya Math. J., **185** (2007), 111-122.

[36] M. Green, *Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties,* Amer. J. Math., **97**(1975), pp.43-75.

[37] Gross, *Factorization of meromorphic functions and some open problems,* Complex analysis (Proc. Conf., Univ. Kentucki, Lexington, Ky., 1976) Leture Notes in Math. vol. 599, Springger-Verlag, 1977, 51-67.

[38] F. Gross and C. C. Yang, *On pre images range sets for meromorphic functions,* Proc. Japan Acad., **58** (1982), 17-20.

[39] P. C. Hu and C. C. Yang, *Meromorphic functions over non-Archimedean fields*, Kluwer Academic publishers, 2000.

[40] P. C. Hu and C. C. Yang, *A unique range set for* $p-$*adic meromorphic functions with 10 elements*, Acta Math. Vietnamica., **24** (1999),. 95-108.

[41] Ha Huy Khoai, *On p-adic meromorphic functions*, Duke Math. J. **50**(1983), 695-711.

[42] Ha Huy Khoai, *La hauteur des fonctions holomorphes p-adicques de plusieurs variables*, C.R.A.Sc. Paris **312** (1991), 751-754.

[43] Ha Huy Khoai, *Some remarks on the genericity of unque range set for meromorphic functions,* Science in China Ser. A Mathematics 2005 Vol. 48 Supp.262-267.

[44] Ha Huy Khoai and T. T. H. An, *Uniqueness problem with truncated multiplicities of meromorphic functions on a Non-Archimedean field,* Asian Bull. Math., No 3 (2003). 477-486.

[45] Ha Huy Khoai and Ta Thi Hoai An, *On uniqueness polynomials and bi-URS for p-adic meromorphic functions,* J.Number Theory. 871 (2001), pp. 211-221.

[46] Ha Huy Khoai and Vu Hoai An, *Value distribution on p-adic hypersurfaces,* Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 7, No.1, pp. 51-67, 2003.

[47] Ha Huy Khoai and Mai Van Tu, *p-adic Nevanlinna-Cartan Theorem,* Internat.J.Math. **6** (1995), 719-731.

[48] Ha Huy Khoai and C. C. Yang (2004), *On the functional equation* $P(f) = Q(g)$*,* Advances in Complex Analysis and Application, Value

Distribution Theory and Related Topics, pp.201-2008, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London.

[49] P. Li and C. C. Yang, *On the unique range sets of meromorphic functions,* Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 177-195.

[50] P. Li and C. C. Yang, *Some further results on the functional equation P(f)=Q(g),* Value distribution theory and its trends, ACAA, Kluwer Academic Publisher, 2004.

[51] Mues E. and Reinders M., *Meromorphic functions sharing one value and unique range sets,* Kodai Math. **18**, (1995), 515-522.

[52] E. I. Nochka, *On the theory of meromorphic curves,* Sov. Math. Dokl. **27**(2)(1983), 377-381.MR 851:32038.

[53] J. Noguchi, *A note on entire pseudo-holomorphic curves and the proof of Cartan Nochka's theorem.* Kodai math. J (2005), Vol. 28, No. 2, pp. 336-346.

[54] Ru, M., *Uniqueness theorems for p-adic holomorphic curves*, Illinois J. Math. **45** (2001), No.2, 487-493.

[55] M. Shirosaki, *A hypersurface which determines linearly non-degenerrate holomorphic mappings,* Kodai Math. J. **23** (2000), 105-107.

[56] M.Shirosaki, *On polynomials which determine holomorphic mappings*, J.Math. Soc.Japan **49** (1997), 289-298.

[57] M.Shirosaki, *On some hypersurfaces and holomorphic mappings,* Kodai Math. J. **21** (1998), 29-34.

[58] Y. T. Siu and S. K. Yeung, *Defects for ample divisors of Abelian varieties, Schwarz lamma, and Hyperbolic hypersurfaces of low degrees,* Amer. J. Math. **119** (1997), 1139-1172.

[59] L. Smiley, *Geometric conditions for unicity of holomorphic curves,* Contemp. Math. **25** (1983), 149-154.

[60] Do Duc Thai and Si Duc Quang, *Uniqueness problem with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex veriables for moving targets,* Internat J Math, 2005, **16**(8): 65

[61] Do Duc Thai and Si Duc Quang, *Second main theorem with truncated counting function in several complex veriabes for moving targets,* Forum Mathematicum **20**(2008), 163-179.

[62] Tran Van Tan, *Uniqueness polynomials for entire curves into complex projective space*, Analysis **25** (2005), 297-314.

[63] Tan-Quang *Normal families of meromorphic mappings of several complex veriabes into $\mathbb{C}_p^m$ for moving hypersurfaces,* Ann. Polon. Math. 94 (2008), no. 1, 97-110.

[64] Duc Thoan Pham and Viet Duc Pham and Duc Quang Si, *A unicity theorem with truncated of meromorphic mappings in several complex variabes*, Preprint.

[65] G. Pólya, *Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen,* Math. Tidsskrift B, Kbenhavn 1921, 16-21.

[66] Van der Waerden, B.L., *Algebra*, Vol 2, 7-th ed., Springer-Verlag, New York, 1991.

[67] C. C. Yang and X. Hua, *Uniqueness polynomials of entire and meromorphic functions,* Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya, **3** (1997), 391-398.

[68] H. X. Yi, *On a question of Gross,* Sci. China, Ser., **A 38** (1995), 8-16.