ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ BÌNH

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số:60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HOC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS. TS. Phan Huy Khải

THÁI NGUYÊN, NĂM 2009

Lời nói đầu

Hình học tổ hợp là một nhánh không thể thiếu được của các bài toán tổ hợp nói chung, nó thường xuyên xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi ở mọi cấp. Khác với các bài toán trong lĩnh vực Giải tích, Đại số, Lượng giác, các bài toán của hình học tổ hợp thường liên quan nhiều đến các đối tượng là các tập hợp hữu hạn. Vì lẽ đó các bài toán này mang đặc trưng rõ nét của toán học rời rạc. (Ít sử dụng đến tính liên tục - một tính chất đặc trưng của bộ môn giải tích).

Luận án này đề cập đến các phương pháp chính để giải các bài toán về hình học tổ hợp. Ngoài phần mở đầu, danh mục tài liệu tham khảo, luận án gồm ba chương.

Chương I áp dụng Nguyên lí cực hạn vào giải các bài toán hình học tổ hợp là một phương pháp được vận dụng cho nhiều lớp bài toán khác, đặc biệt nó có ích khi giải các bài toán tổ hợp nói chung và hỗn hợp tổ hợp nói riêng. Nguyên lí này dùng để giải các bài toán mà trong đối tượng phải xét của nó tồn tại các giá tri lớn nhất, giá trị nhỏ nhất theo một nghĩa nào đó và kết hợp với những bài toán khác đặc biệt là phương pháp phản chứng, tập hợp các giá trị cần khảo sát chỉ là tập hợp hữu hạn hoặc có thể vô hạn nhưng tồn tại một phần tử lớn nhất.

Chương II Nguyên lí Dirichlet: là một trong những phương pháp thông dụng và hiệu quả để giải các bài toán hình học tổ hợp. Nguyên lí Dirichlet còn là một công cụ hết sức nhạy bén có hiệu quả cao dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Nó đặc biệt có nhiều áp dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học. Dùng nguyên lí này trong nhiều trường hợp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại của một đối tượng với tính chất xác định. Tuy rằng với nguyên lí này ta chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được vật cụ thể, nhưng thực tế nhiều bài toán ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại đã đủ.

Chương III Sử dụng tính lồi của tập hợp để áp dụng vào các bài toán tổ hợp, trong chương này chúng ta đề cập đến hai kết quả hay sử dụng nhất đó là định lí Kelli về tính giao nhau của các tập hợp lồi và sử dụng phép lấy bao lồi để giải các bài toán hình học tổ hợp là một trong những phương pháp rất hữu hiệu.

Phần còn lại của luận văn được trình bày vài phương pháp khác để giải các bài toán hình học tổ hợp.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và chỉ bảo của thầy giáo PGS.TS Phan Huy Khải. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin trân trọng cảm ơn ban lãnh đạo Khoa Toán Trường Đại học Khoa học, các thầy các cô đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện cho tôi trong thời gian học tập tại trường.

Thái Nguyên, ngày 18 tháng 9 năm 2009

Tác giả

Lê Thị Bình

Mục lục

Chương I: NGUYÊN LÍ CỰC HẠN

Nguyên lí 1: Trong tập hợp hữu hạn và khác rỗng các số thực luôn có thể chọn được số bé nhất và số lớn nhất.

Nguyên lí 2: Trong một tập hợp khác rỗng các số tự nhiên luôn luôn có thể chọn được số bé nhất.

Sử dụng nguyên lí cực hạn là một phương pháp được vận dụng cho nhiều lớp bài toán khác, đặc biệt nó có ích khi giải các bài toán tổ hợp nói chung và hỗn hợp tổ hợp nói riêng. Nguyên lí này dùng để giải các bài toán mà trong tập hợp những đối tượng phải xét của nó tồn tại các giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất theo một nghĩa nào đó. Nguyên lí cực hạn thường được sử dụng kết hợp với các phương pháp khác, đặc biệt là phương pháp phản chứng, được vận dụng trong trường hợp tập các giá trị cần khảo sát chỉ là tập hợp hữu hạn (Nguyên lí 1) hoặc có thể vô hạn nhưng tồn tại một phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất. (Nguyên lí 2). Để sử dụng nguyên lí cực hạn giải các bài toán hình học tổ hợp, người ta thường dùng một lược đồ chung để giải sau:

- Đưa bài toán đang xét về dạng có thể sử dụng nguyên lí 1 (hoặc nguyên lí 2) để chứng tỏ rằng trong tất cả các giá trị cần khảo sát của bài toán cần có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất), xét bài toán tương ứng khi nó nhận giá lớn nhất (nhỏ nhất).

-Chỉ ra mâu thuẫn, hoặc đưa ra giá trị còn lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) mà ta đang khảo sát.

Theo nguyên lí của phương pháp phản chứng, ta sẽ suy ra điều phải chứng minh.

Các ví dụ được trình bày dưới đây sẽ minh hoạ cho phương pháp này.

Ví dụ 1.1: Trên một đường thẳng đánh dấu n điểm khác nhau $A_1, A_2, \ldots, A_n$ theo thứ tự từ trái qua phải ($n \geq 4$). Mỗi điểm được tô bằng một trong 4 màu khác nhau và cả bốn màu đều được dùng. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng chứa đúng hai điểm của hai màu và ít nhất hai điểm của hai màu còn lại.

***Giải*:** Xét tập hợp sau:

$A = \{\ k \mid 1 \leq\ k\ \leq\ n\ \}$.

Tập $A \neq \varnothing$ (vì theo giả thiết dùng cả bốn màu) và A hữu hạn nên theo nguyên lí cực hạn, tồn tại chỉ số i nhỏ nhất mà $i \in A$.

Theo định nghĩa của tập hợp A, vì do i là chỉ số bé nhất thuộc A, nên màu của điểm A_i sẽ khác với màu của tất cả các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$.

Chú ý rằng bây giờ trong dãy $A_1, A_2, \ldots, A_i$ lại có đủ bốn màu.

Xét tiếp tập sau:

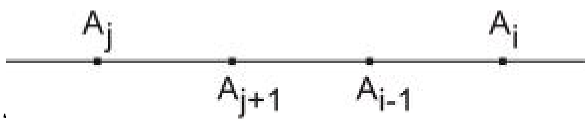
$B = \{k \mid 1 \leq\ k\ \leq i$ và giữa các điểm $A_k, A_{k+1}, \ldots, A_i$ có mặt đủ bốn màu$\}$.

Tập $B \neq \varnothing$ (vì dãy $A_1, A_2, \ldots, A_i$ có đủ bốn màu),

và B hữu hạn nên theo nguyên lí

cực hạn, tồn tại chỉ số j lớn nhất mà .

Theo định nghĩa của tập hợp B, và d



H - 1.1

j là chỉ số lớn nhất thuộc B, nên màu của điểm A_j sẽ khác với màu của tất cả các điểm $A_{j+1}, \ldots, A_i$.

Xét đoạn $[A_j A_i]$. Khi đó đoạn thẳng này chứa đúng hai điểm của hai màu (đó là A_j và A_i), và ít nhất hai điểm của hai màu còn lại $A_{j+i}, \ldots, A_{i-1}$.□

<u>Ví dụ 1.2:</u> Cho ABC là tam giác nhọn. Lấy một điểm P bất kì trong tam giác.

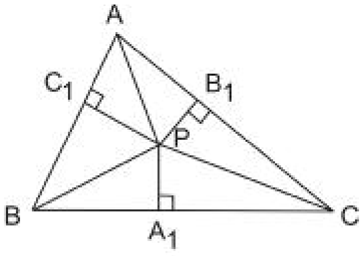
Chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P tới ba điểm A , B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ P tới ba cạnh của tam giác đó.

***Giải*:** Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là hình chiếu của P xuống BC, AC, AB.

Ta có: $A\hat{P}C_1 + C_1\hat{P}B + B\hat{P}A_1 + A_1\hat{P}C + C\hat{P}B_1 + B_1\hat{P}A = 360^o$. (1)

Theo nguyên lí cực hạn, tồn tại:

$\max\left\{\widehat{APC_1}, \widehat{C_1PB}, \widehat{BPA_1}, \widehat{A_1PC}, \widehat{CPB_1}, \widehat{B_1PA}\right\} = \widehat{BPA_1}$. (2)



H - 1.2

Từ (1) và (2) dễ suy ra: $\widehat{PBA_1} \ge 60^o$ (3)

Từ (3) ta đi đến cos $\widehat{PBA_1} = \dfrac{PA_1}{PB} \le \dfrac{1}{2}$.

Như vậy $PB \ge 2PA_1$. (4)

Từ (4) suy ra max $\{PA, PB, PC\} \ge PB \ge 2PA_1 \ge 2\,min\{PA_1, PB_1, PC_1\}$. □

Ví dụ 1.3: Chứng minh rằng trên mặt phẳng toạ độ, không thể tìm được năm điểm nguyên là đỉnh của một ngũ giác đều.

(Một điểm $M(x\,;\,y)$ trên mặt phẳng toạ độ được gọi là "điểm nguyên" nếu cả hai toạ độ x , y của nó đều là những số nguyên).

Giải: Giả thiết trái lại, tồn tại một ngũ giác đều sao cho năm đỉnh của nó đều là những "điểm nguyên".Ta xét tập hợp sau:

$\Omega = \{a^2 \mid a$ là cạnh của ngũ giác đều có năm đỉnh là các "điểm nguyên"$\}$.

Dễ thấy, do a là cạnh của ngũ giác đều với các đỉnh nguyên nên a^2 là số nguyên dương.

Thật vậy, giả sử $A_1A_2A_3A_4A_5$ là đa giác đều thuộc Ω. Giả sử $A_i\ (x_i\,;\,y_i)$, $i = \overline{1,5}$, thì nếu gọi a là cạnh của ngũ giác đều này, ta có:

$$a^2 = A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

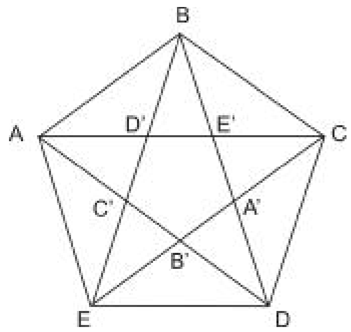
Do x_i, $y_i \in$ ¢, $\forall i = \overline{1,5}$ nên a^2 là số nguyên dương. Như thế tập $\Omega \neq \varnothing$, điều này suy ra từ giả thiết phản chứng.

Tập Ω các số tự nhiên, khác rỗng, nên theo nguyên lí cực hạn suy ra tồn tại phần tử nhỏ nhất, tức là tồn tại ngũ giác đều $ABCDE$ sao cho a_*^2 là nhỏ nhất, ở đây a_* là cạnh của ngũ giác đều này. Dễ thấy $ABCB'$; $BCDC'$; $CDED'$;

DEAE' và *AEBA'* đều là các hình bình hành với $BD \cap CE = A'$, $AD \cap CE = B'$, $AD \cap BE = C'$, $AC \cap BE = D'$,$AC \cap DE = E'$.

Từ hình bình hành *EABA'* suy ra:

$$\begin{cases} x_{A'} = x_B + x_E - x_A \\ y_{A'} = y_B + y_E - y_A \end{cases} \quad (1)$$



H-1.3

Do *A, B, C, D, E* là các "điểm nguyên" nên x_A, x_E, x_B ; y_A, y_E, y_B đều là các số nguyên. Vì thế (1) suy ra $x_{A'}$, $y_{A'}$ cũng là các số nguyên. Như thế *A'* là "điểm nguyên". Tương tự *B'* , *C'* , *D'* , *E'* cũng là các "điểm nguyên" Rõ ràng *A'B'C'D'E'* là ngũ giác đều với các đỉnh của nó đều là các "điểm nguyên", tức là $A'B'C'D'E' \in \Omega$. Mặt khác, nếu gọi *a'* là cạnh của ngũ giác đều, thì rõ là:

$$a' < a_* \Rightarrow a'^2 < a_*^2 . \quad (2)$$

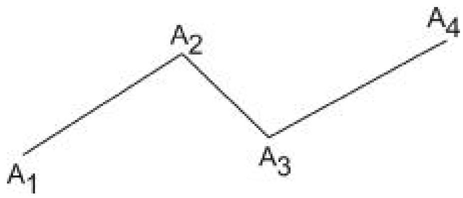
Bất đẳng thức (2) mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của a_*. Vậy giả thiết phản chứng là sai. Như thế không tồn tại một ngũ giác đều với các đỉnh đều là "điểm nguyên".

<u>Ví dụ 1.4:</u> Trên mặt phẳng cho 2005 điểm, khoảng cách giữa các điểm này đôi một khác nhau. Nối điểm nào đó trong số các điểm này với điểm gần nhất. Cứ tiếp tục như thế. Hỏi với cách nối đó có thể nhận được một đường gấp khúc khép kín không?

Giải: Giả sử xuất phát từ một điểm A_1 bất kỳ. Theo nguyên lí cực hạn, trong số tất cả các đoạn thẳng có đầu mút A_1 thì tồn tại điểm gần A_1 nhất. Điểm này là duy nhất, vì theo giả thiết khoảng cách giữa các điểm là khác nhau khi cặp điểm khác nhau. Gọi điểm này là A_2. Tiếp tục xét như vậy với các đoạn thẳng xuất phát từ A_2. Có hai khả năng xảy ra:

1.Nếu A_1 là điểm gần A_2 nhất. Khi đó đường gấp khúc dừng lại ngay tại A_2. Rõ ràng ta thu được đường gấp khúc với một khúc A_1A_2 và dĩ nhiên nó không khép kín.

2.Nếu tồn tại duy nhất điểm A_3 và A_2A_3 là ngắn nhất. Khi đó ta có đường gấp khúc $A_1A_2A_3$ với $A_1A_2 > A_2A_3$.



H –1.4

Giả sử đã có đường gấp khúc $A_1A_2\ldots A_n$ và theo lập luận trên ta có:

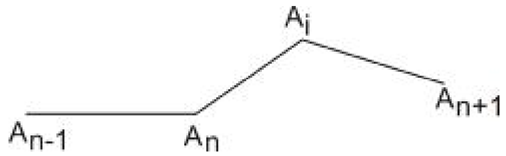
$$A_1A_2 > A_2A_3 > \ldots > A_{n-1}A_n.$$

Chú ý rằng điểm A_n không thể nối được với điểm A_i nào đó mà $1 \le i \le n - 2$. Thật vậy nếu trái lại ta nối được A_n với A_i (ở đây $1 \le i \le n - 2$). Theo định nghĩa về cách nối điểm ta được:

$$A_nA_i < A_{n-1}A_n < A_iA_{i+1}. \quad (1)$$

Nhưng theo cách nối từ A_i ta lại có:

$$A_iA_{i+1} < A_nA_i. \quad (2)$$



H -1.5

Từ (1) và (2) suy ra vô lí. Vậy không bao giờ đường khấp khúc $A_1A_2\ldots A_n$ là khép kín.

Ta có câu trả lời phủ định: Không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín, nếu nối theo quy tắc trên.

<u>Ví dụ 1.5:</u> Cho các số nguyên m, n với $m < p$, $n < q$ cho $p \times q$ số thực đôi một khác nhau. Điền các số đã cho vào các ô vuông con của bảng ô vuông kích thước $p \times q$ (gồm p hàng, q cột) sao cho mỗi số được điền vào một ô và mỗi ô được điền vào một số. Ta gọi một ô vuông con của bảng là ô "xấu" nếu số nằm ô đó bé hơn ít nhất m số nằm cùng cột với nó và đồng thời bé ít nhất n

số nằm cùng hàng với nó. Với mỗi cách điền số nói trên, gọi *s* là số ô "xấu" của bảng số nhận được. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của *s*.

Giải: Bằng phương pháp quy nạp ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$s \geq (p - m)\,(q - n) \qquad (1)$$

Ta quy nạp theo số $p + q$.

- Nếu $p + q = 2$, tức $p = q = 1$ (bảng có duy nhất một số). Khi đó kết luận của bài toán là đúng (hiểu theo nghĩa ở đây m , n không có hoặc có thể hiểu theo nghĩa không có trường hợp này).
- Tương tự $p + q = 3$.
- Với $p + q = 4 \Rightarrow p = q = 2$ và $m = n = 1$.

Xét một cách điền bất kì bốn số đôi một khác *a, b, c, d* .

Không giảm tổng quát có thể cho là $a < b < c < d$ (nếu không lí luận tương tự).

a	b
c	d

Ô có số *a* là ô "xấu" (vì nó bé hơn một số nằm cùng cột và một số nằm cùng hàng, và chỉ có ô đó là "xấu" mà thôi). Ta có $s = 1$.

Mặt khác, trong trường hợp này: $(p - m)(q - n) = (2 - 1)(2 - 1) = 1$.

Kết luận của bài toán đúng trong trường hợp này.

Giả thiết quy nạp kết luận của bài toán đúng đến $p + q = k$

(ở đây $p > m$, $q > n$) , tức là trong trường hợp này số ô "xấu " lớn hơn hoặc bằng $(p - m)(p - n)$.

- Xét khi bảng $p \times q$ có $p + q = k + 1$.

Ta gọi một ô vuông con của bảng là "xấu theo hàng" ("xấu theo cột") nếu số nằm trong ô đó bé hơn ít nhất *n* số (tương ứng *m* số) nằm cùng hàng (tương ứng nằm cùng cột) với nó.

Lấy hàng *i* bất kì. Hàng *i* này có *q* số đôi một khác nhau (do có *q* cột).Vì thế trong hàng *i* có $(q - n)$ số, mà mỗi số này bé hơn ít nhất *n* số nằm trong cùng hàng ấy.

(Thật vậy, giả sử xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn các số trong hàng là

$x_1 < x_2 < \ldots < x_{q-n} < x_{q-n+1} < \ldots < x_{q-1} < x_q$.

Khi đó các ô chứa các số $x_1, x_2, \ldots, x_{q-n}$ là các ô "xấu theo hàng").

Như vậy: trong mỗi hàng có $(q - n)$ ô "xấu theo hàng và trong mỗi cột có $(p - m)$ ô "xấu theo cột".

Nếu trong bảng $p\times q$ nói trên các ô "xấu theo hàng" đồng thời là "xấu theo cột" và ngược lại thì số ô "xấu" s được tính bằng:

$$s = (q - n)(p - m).$$

Vậy (1) đúng trong trường hợp này.

Vì lẽ đó chỉ cần quan tâm đến các trường hợp: trong bảng $p\times q$ tồn tại các ô chỉ "xấu theo hàng"(mà không "xấu theo cột"), hoặc chỉ "xấu theo cột"(mà không "xấu theo hàng"). Do vậy, theo nguyên lí cực hạn tồn tại số *a*, đó là số nhỏ nhất ghi trong các ô như vậy. Không giảm tổng quát có thể cho là ô chứa *a* là ô "xấu theo hàng"(không "xấu theo cột")

Xét cột của bảng $p\times q$ mà chứa ô mang số *a*. Chú ý rằng trong cột này có $p - m$ ô "xấu theo cột" (trong số này không có ô chứa *a*). Các ô chắc chắn cũng phải là ô "xấu theo hàng", vì nếu trái lại các ô nào đó không phải là ô "xấu theo hàng", thì ô ấy thuộc vào tập hợp nói trên (tập hợp các ô chỉ "xấu theo một loại". Ô chứa *a* không phải là ô "xấu theo cột" nên giá trị *a* ghi trong ô đó lớn hơn tất cả các giá tri ghi trong $p - m$ ô "xấu theo cột" nói trên. (Chú ý là các ô trong bảng đôi một khác nhau). Điều này sẽ dẫn đến mâu thuẫn với định nghĩa số *a* là số bé nhất trong tập hợp nói trên. Vì vậy $(p - m)$ ô "xấu theo cột" trong cột chứa ô ghi số *a* cũng chính là $(p - m)$ ô "xấu" của bảng $p\times q$.

Bỏ cột chứa ô mang số a ta được bảng mới $p\times(q-1)$ mà một ô vuông con của bảng này là "xấu" thì nó cũng là ô "xấu" của bảng $p\times q$.

Vì $p+q-1=k+1-1=k$, nên theo giả thiết suy ra số ô "xấu"của bảng $p\times(q-1)$ – không ít hơn $(p-m)(q-1-n)$. Vì thế số ô "xấu" s của bảng $p\times q$ sẽ thoả mãn bất đẳng thức:

$$s \geq (p-m)(q-1-n)+(p-m) \text{ hay } s \geq (p-m)(q-n).$$

Vậy (1) cũng đúng khi $p+q=k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp (1) đúng với mọi bảng $p\times q$.

Còn lại ta sẽ chỉ ra một cách điền số vào bảng $p\times q$ để thu được đúng $(p-m)(q-n)$ ô "xấu".

Trước hết sắp xếp $p\times q$ số theo thứ tự tăng dần:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{pq-1} < x_{pq}.$$

Sau đó theo thứ tự này lần lượt điền các số vào các ô theo quy tắc: từ trên xuống dưới và trái qua phải.

q cột

p hàng

x_1	x_{p+1}	…	$x_{(q-1)p+1}$
x_2	x_{p+2}	…	$x_{q-1)p+2}$
…	…	…	…
x_p	x_{2p}	…	x_{qp}

Rõ ràng các ô "xấu" là: $\begin{cases} x_1, x_2, \ldots, x_{p-m} \\ x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{2p-m} \\ \ldots \\ x_{(q-n-1)p+1}, x_{(q-n-1)p+2}, \ldots, x_{(q-n)p-m}. \end{cases}$

Và các "số xấu" là $s=(p-m)(q-n)$.

Tóm lại, giá trị bé nhất cần tìm là: $s=(p-m)(q-n)$.

CHƯƠNG II: SỬ DỤNG NGUYÊN LÍ DIRICHLET

Nguyên lí những cái lồng nhốt các chú thỏ đã được biết đến từ lâu.Nguyên lí này được phát biểu đầu tiên bởi nhà toán học người Đức Pete Gustava Lejeune Dirichlet (1805-1859) như sau:

Nguyên lí Dirichlet (hay còn gọi là nguyên lí chuồng thỏ):

Nếu nhốt n + 1 con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chốt ít nhất hai con thỏ.

Tương tự như vậy, nguyên lí Dirichlet mở rộng được phát biểu như sau:

* Nguyên lí Dirichlet mở rộng:

Nếu nhốt n con thỏ vào $m \geq 2$ cái chuồng, thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\left[\frac{n+m-1}{m}\right]$ con thỏ, ở đây kí hiệu $[\alpha]$ để chỉ phần nguyên của số α.

Ta có thể dễ dàng chứng minh nguyên lí Dirichlet mở rộng như sau:

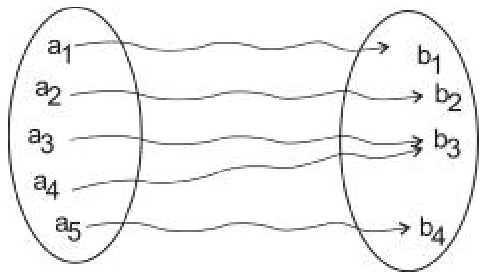
Giả sử trái lại mọi chuồng thỏ không có đến $\left[\frac{n+m-1}{m}\right]=\left[\frac{n-1}{m}+1\right]=\left[\frac{n-1}{m}\right]+1$ con, thì số thỏ trong mỗi chuồng đều nhỏ hơn hoặc bằng $\left[\frac{n-1}{m}\right]$ con.

Từ đó suy ra tổng số con thỏ không vượt quá $m\left[\frac{n-1}{m}\right] \leq n-1$ con. Đó là điều vô lí (vì có n chuồng thỏ). Vậy giả thiết phản chứng là sai.

Nguyên lí Dirichlet mở rộng được chứng minh.

Nguyên lí Dirichlet tưởng chừng đơn giản như vậy, nhưng có là một công cụ hết sức có hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả hết sức sâu sắc của toán học. Nó đặc biệt có nhiều áp dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học. Dùng nguyên lí này trong nhiều trường hợp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại của một đối tượng với tính chất xác định. Tuy rằng với nguyên lí này ta chỉ chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được vật cụ thể, nhưng thực tế nhiều bài toán ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại đã đủ .

Nguyên lí Dirichlet thực chất là một định lí về tập hợp hữu hạn. Ta có thể phát biểu nguyên lí này chính xác dưới dạng sau đây:



Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng có số phần tử hữu hạn, mà số lượng phần tử của A lớn hơn số lượng phần tử của B. Nếu mỗi quy tắc nào đó, mỗi phần tử của A cho tương ứng với một phần tử của B, thì tồn tại ít nhất hai phần tử khác nhau của A mà chúng tương ứng với cùng một phần tử của B.

Với cùng cách diễn đạt như vậy, thì nguyên lí Dirichlet mở rộng như sau:

Giả sử A và B là các tập hữu hạn và $s(A)$, $s(B)$ tương ứng kí hiệu là số lượng các phần tử của A và B. Giả sử có một số tự nhiên k nào đó mà $s(A) > k.s(B)$, và ta có một quy tắc cho tương ứng với mỗi phần tử của A với một phần tử của B. Khi đó tồn tại ít nhất $k + 1$ phần tử của A mà chúng tương ứng với một phần tử của B. Chú ý khi $k = 1$, ta có ngay lại nguyên lí Dirichlet.

Chương này dùng để trình bày phương pháp sử dụng nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán hình học tổ hợp. Vì lẽ đó, trước hết chúng tôi trình bày một số mệnh đề sau (thực chất là một số nguyên lí Dirichlet áp dụng cho độ dài các đoạn thẳng, diện tích các hình phẳng, thể tích các vật thể) rất hay được sử dụng đến trong nhiều bài toán hình học tổ hợp được đề cập đến trong chương này.

* Nguyên lí Dirichlet cho diện tích:

Nếu K là một hình phẳng, còn $K_1, K_2, \ldots, K_n$ là các hình phẳng sao cho $K_i \subseteq K$ với $i = \overline{1,n}$, và $|K| < |K_1| + |K_2| + \ldots + |K_n|$, ở đây $|K|$ là diện tích của hình phẳng K, còn $|K_i|$ là diện tích của hình phẳng K_i, $i = \overline{1,n}$; thì tồn tại ít nhất hai hình phẳng H_i , H_j ($1 \le i < j \le n$) sao cho H_i và H_j có điểm trong chung. (Ở đây ta nói rằng P là điểm trong của tập hợp A trên mặt phẳng, nếu như tồn tại hình tròn tâm P bán kính đủ bé sao cho hình tròn này nằm trọn trong A).

Tương tự như nguyên lí Dirichlet cho diện tích, ta có các nguyên lí cho độ dài đoạn thẳng, thể tích các vật thể …

Nguyên lí Dirichlet còn được phát biểu cho trường hợp vô hạn như sau:

*Nguyên lí Dirichlet vô hạn: Nếu chia một tập vô hạn các quả táo vào hữu hạn ngăn kéo, thì phải có ít nhất một ngăn kéo chứa vô hạn quả táo.

Nguyên lí Dirichlet mở rộng cho trường hợp vô hạn này đóng vai trò cũng hết sức quan trọng trong lí thuyết tập hợp điểm trù mật trên đường thẳng. Nó có vai trò quan trọng trong lí thuyết số nói riêng và toán học rời rạc nói chung (cho cả hình học tổ hợp).

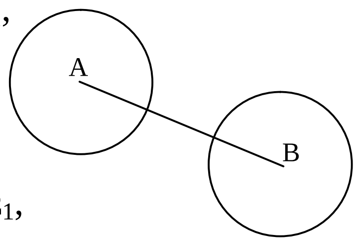
Ứng dụng to lớn của nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán hình học tổ hợp được trình bày qua các ví dụ sau đây:

<u>Vídụ 2.1:</u> Trên mặt phẳng cho 25 điểm. Biết rằng trong 3 điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1.Chứng minh rằng tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm đã cho.

Giải: Lấy A là một trong số 25 điểm đã cho. Xét hình tròn $\Omega_1(A\,;1)$ tâm A, bán kính 1. Chỉ có hai khả năng sau có thể xảy ra:

1. Nếu tất cả các điểm đã cho nằm trong Ω_1, thì kết luận của bài toán hiển nhiên đúng.

2. Tồn tại điểm $B \neq A$ (B thuộc trong số 25 điểm đã cho), sao cho $B \notin \Omega_1$, vì $B \notin \Omega_1$, nên $AB > 1$.



H – 2.1

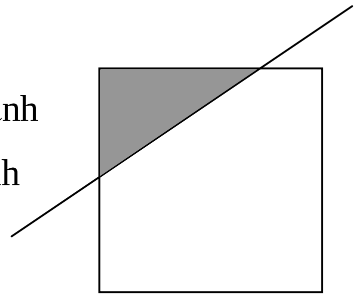
Xét hình tròn $\Omega_1(B\ ;\ 1)$ tâm B, bán kính 1. Lấy C là điểm bất kì trong số 25 điểm đã cho sao cho $C \neq A$, $C \neq B$. Theo giả thiết (và dựa vào $AB > 1$), nên $\min\{CA, CB\} < 1$. Vì thế $C \in \Omega_1$, hoặc $C \in \Omega_2$.

Điều khẳng định này chứng tỏ rằng các hình tròn Ω_1 và Ω_2 chứa tất cả 25 điểm đã cho. Vì thế nguyên lí Dirichlet, ít nhất một trong hai hình tròn nói trên chứa không ít hơn 13 điểm đã cho.

Chú ý:

Bài toán tổng quát: Cho $2n + 1$ điểm trên mặt phẳng ($n \geq 3$). Biết rằng trong ba điểm bất kỳ trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Khi đó tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn $n + 1$ điểm đã cho.

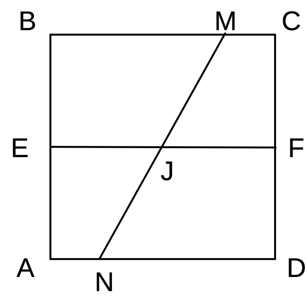
Ví dụ 2.2: Cho chín đường cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.



H – 2.2

Giải: Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông, bởi vì nếu thế chúng chia hình vuông thành một tam giác và ngũ giác (Chứ không phải chia hình vuông thành hai tứ giác). Vì lẽ đó, mọi đường thẳng (trong số chín đường thẳng) đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và dĩ nhiên không đi qua một đỉnh nào của hình vuông cả.

Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối BC và AD tại các điểm M và N.



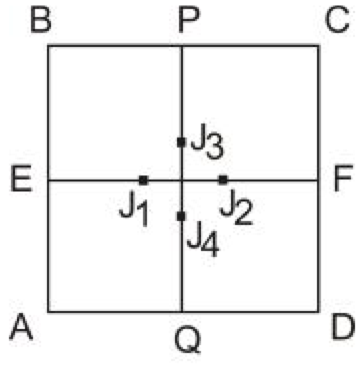
H – 2.3

Ta có: $$\frac{S_{ABMN}}{S_{MCDN}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}AB\left(BM + AN\right)}{\frac{1}{2}CD\left(MC + ND\right)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{EJ}{JF} = \frac{2}{3}.$$

(ở đây E và F là các trung điểm của AB và CD tương ứng).

Gọi E, F, P, Q tương ứng là các trung điểm của AB, CD, BC, AD. Gọi J_1, J_2, J_3, J_4 là các điểm sao cho J_1, J_2 nằm trên EF ; J_3, J_4 nằm trên PQ và thoả mãn:

$$\frac{EJ_1}{J_1F}=\frac{FJ_2}{J_2F}=\frac{PJ_3}{J_3Q}=\frac{QJ_4}{J_4P}=\frac{2}{3}.$$



H - 2.4

Khi đó từ lập luận trên ta suy ra mỗi đường thẳng có tính chất thoả mãn yêu cầu đề bài phải đi qua một trong bốn điểm J_1 , J_2 , J_3 , J_4 nói trên.

Vì có chín đường thẳng, nên theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất một trong bốn điểm J_1 , J_2 , J_3 , J_4 sao cho nó có ít nhất ba trong chín đường thẳng đã cho. Vậy có ít nhất ba đường thẳng trong số chín đường thẳng đã cho đi qua một điểm. □

Ví dụ 2.3: Cho một bảng kích thước $2n\times 2n$ ô vuông. Người ta đánh đấu vào $3n$ ô bất kì của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này.

Giải: Chọn ra n hàng có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất.

Ta chứng minh rằng các ô được đánh dấu còn lại nhỏ hơn hoặc bằng n . Giả sử trái lại không phải như vậy, tức là số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $n + 1$. Số các hàng còn lại chưa chọn là n. Vậy theo nguyên lí Dirichlet sẽ có ít nhất một hàng (trong số n hàng còn lại) chứa ít nhất hai ô đã đánh dấu.

	×		×	×	
		×		×	
	×				×
		×			
			×		

H-2.5

Chú ý rằng theo cách chọn thì n hàng đã chọn có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất. Có một hàng còn lại chưa chọn có ít nhất hai ô đánh dấu, nên suy ra mọi hàng trong số n hàng đã chọn đều có ít nhất hai ô được chọn, tức là trên n hàng đã chọn có không ít hơn $2n$ ô đã được đánh dấu.

Như vậy, số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $2n + (n + 1) \geq 3n$. Đó là điều vô lí (vì chỉ có $3n$ ô được đánh dấu). Vậy nhận xét được chứng minh.

Như vậy, sau khi đã chọn ra n hàng (với cách chọn như trên), theo nhận xét còn lại có không quá n ô được đánh dấu. Vì thế cùng lắm là có n cột chứa chúng. Vì lẽ đó sẽ không thấy còn ô đánh dấu nào nằm ngoài các hàng hay cột được chọn.□

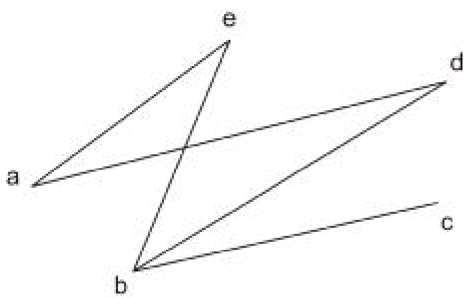
<u>Ví dụ 2.4:</u> Trong mặt phẳng cho tập hợp A có n điểm ($n \geq 2$). Một số cặp điểm được nối với nhau bằng đoạn thẳng. Chứng minh rằng tập hợp A đã cho, có ít nhất hai điểm được nối với cùng số lượng các điểm khác thuộc A.

Giải: Giả sử $a \in A$. Ta kí hiệu $S(a)$ là số lượng các điểm của A nối với a thành đoạn thẳng, ta có:

$$S(a) = 2,\ S(b) = 3,\ S(c) = 1,\ S(d) = 2,\ S(e) = 2.$$

Bài toán đã cho trở thành: Chứng minh rằng tồn tại $a_1, a_2 \in A$ ($a_1 \neq a_2$), mà $S(a_1) = S(a_2)$. Rõ ràng với mọi $a \in A$, ta có:

$$0 \leq S(a) \leq n - 1. \qquad (1)$$



H-2.6

Mặt khác, dễ thấy không tồn tại hai điểm $\bar{a} \in A, \bar{b} \in A$ mà $S\left(\bar{a}\right) = n - 1$ và $S(\bar{b}) = 0$. (2)

Thật vậy, nếu có (2), thì từ $S(\bar{a}) = n - 1$, suy ra $\bar{a}$ nối với tất cả $n - 1$ điểm còn lại, nói riêng $\bar{a}$ phải nối với $\bar{b}$. Điều đó có nghĩa là

S($\bar{b}$) $\geq$ 1, và dẫn đến mâu thuẫn với (2) (vì $S(\bar{b}) = 0$).

Gọi S là tập hợp các giá trị mà các đại lượng $S(a)$ nhận, $a \in A$, tức là:

$$S = \{m \mid m = S(a), a \in A\}.$$

Như vậy từ (1) suy ra tập hợp S có tối đa n giá trị. Tuy nhiên từ (2) suy ra (n – 1) và 0 không đồng thời thuộc S, vì thế tập S tối đa nhận (n – 1) giá trị. Theo nguyên lí Dirichlet suy ra tồn tại ít nhất $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ ($a_1 \neq a_2$), mà

$$S(a_1) = S(a_2). \square$$

<u>Ví dụ 2.5:</u> Chứng minh rằng trong mọi đa giác lồi với số cạnh chẵn, tồn tại đường chéo không song song với một cạnh nào của đa giác.

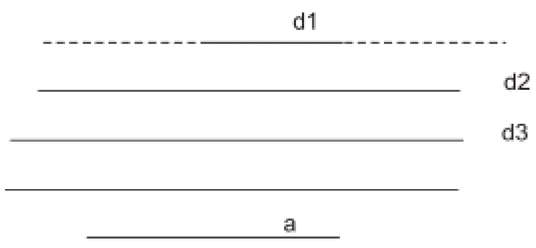
Giải: Ta biết rằng nếu một đa giác có n cạnh, thì có $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

Xét một đa giác lồi bất kì với số cạnh là chẵn (đa giác lồi $2k$ cạnh $k \geq 2$). Khi đó số đường chéo của nó là $s = \frac{2k(2k-3)}{2}$.

Ta có: $s = k(2k-3) = 2k(k-2) + k$, hay suy ra:

$$s > (k-2).2k. \qquad (1)$$

Giả sử trái lại đa giác này có tính chất: Mỗi đường chéo của nó đều song song với một cạnh nào đó của đa giác. Đa giác này có $2k$ cạnh, vì thế từ (1) suy ra tồn tại ít nhất k –1 đường chéo $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$ mà các đường chéo này cùng song song với một cạnh a nào đó của tam giác đã cho (thật vậy, nếu ngược lại mỗi cạnh tối đa là song song k – 2 đường chéo, thế thì tối đa ta chỉ có $(k-2)2k$ đường chéo và $s \geq (k-2)2k$. Điều này mâu thuẫn với (1).



H - 2.7

Như thế ta có k đường thẳng song song với nhau $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}, a$.

Chú ý rằng do đa giác là lồi, nên

các đường chéo d_1 , d_2 ,…, $d_{k\text{-}1}$ cùng nằmtrên một nửa mặt phẳng bờ xác định cạnh a.

Không giảm tổng quát có thể cho d_1 là đường chéo xa nhất đối với a. (vì nếu không thì đánh số lai các đường chéo trên). Ta có tất cả k đoạn thẳng phân biệt, nên mỗi đỉnh của đa giác đều là đầu mút của một đoạn nào đó trong số k đoạn trên.

Từ đó suy ra toàn bộ đa giác nằm hẳn về một nửa mặt phẳng xác định bởi d_1. Do d_1 là đường chéo, nên điều này mâu thuẫn với tính lồi của đa giác. Vậy giả thiết phản chứng là sai. □

<u>Ví dụ 2.6:</u> Một hình lập phương có cạnh bằng 15 chứa 11 000 điểm.
Chứng minh rằng có một hình cầu bán kính 1 chứa ít nhất sáu điểm trong số 11 000 điểm đã cho.

Giải: Chia mỗi cạnh của hình lập phương thành 13 phần bằng nhau. Như thế hình lập phương đã cho được chia thành $13^3 = 2197$ hình lập phương nhỏ. Do 11 000 > 5.2197 = 10985, nên tồn tại ít nhất một hình lập phương nhỏ, mà hình lập phương này chứa ít nhất sáu điểm. Như đã biết, nếu gọi cạnh hình lập phương bằng a, thì hình cầu ngoại tiếp có bán kính R, với $R = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Vì thế hình cầu ngoại tiếp hình lập phương nhỏ (cạnh của nó là $\frac{15}{13}$) là

$$R = \frac{1}{2}\frac{15}{13}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3\left(\frac{15}{13}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{675}{169}} \langle \frac{1}{2}\sqrt{\frac{676}{169}} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1.$$

Hình cầu bán kính 1 này dĩ nhiên chứa ít nhất sáu điểm trong số 11000 điểm đã cho. □

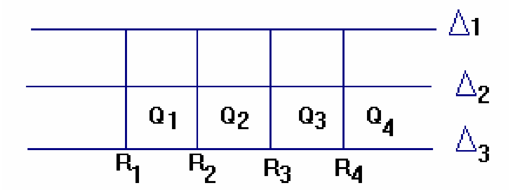
<u>Ví dụ 2.7:</u> Mỗi điểm trong mặt phẳng được bôi bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng ta luôn tạo ra được một hình chữ nhật có bốn đỉnh cùng màu.

Giải: Vẽ ba đường thẳng song song Δ_1, Δ_2 , Δ_3 ($\Delta_1 // \Delta_2 // \Delta_3$). Lấy trên Δ_1 bất kì bảy điểm. Vì mỗi điểm chỉ được bôi bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ, nên theo nguyên lí Dirichlet trên Δ_1 luôn tồn tại bốn điểm cùng màu. Không giảm tổng quát có thể cho đó là các điểm P_1, P_2, P_3, P_4 (và cùng màu đỏ).

Gọi Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 là hình chiếu vuông góc của P_1, P_2, P_3, P_4 xuống Δ_2 và R_1, R_2, R_3, R_4 là hình chiếu của P_1, P_2, P_3, P_4 xuống Δ_3.

Chỉ có các khả năng sau sảy ra:

1. Nếu tồn tại hai trong số bốn điểm Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 màu đỏ (giả sử Q_i , Q_j). Khi đó $P_i P_j Q_j Q_i$ là hình chữ nhật có bốn đỉnh cùng màu đỏ.



H - 2.8

2. Nếu tồn tại hai trong số bốn điểm R_1, R_2, R_3, R_4 màu đỏ (giả sử R_i , R_j). Khi đó $P_i P_j R_j R_i$ là hình chữ nhật có bốn đỉnh cùng màu đỏ.

3. Bốn điểm Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 và bốn điểm R_1, R_2, R_3, R_4 trong đó tối đa chỉ có một điểm đỏ. Khi đó rõ ràng theo nguyên lí Dirichlet tồn tại i , j mà Q_i , Q_j, R_i , R_j cùng xanh.

Vậy $Q_i Q_j R_j R_i$ là hình chữ nhật có bốn đỉnh cùng xanh. □

<u>Ví dụ 2.8:</u> Chứng minh rằng trong mọi khối đa diện lồi tồn tại ít nhất hai mặt có cùng số cạnh.

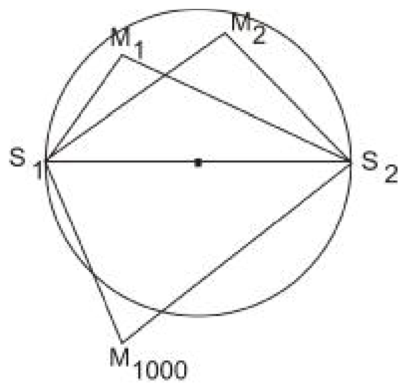
***Giải*:** Kí hiệu M là mặt có số cạnh lớn nhất của khối đa diện. Giả sử mặt M có k cạnh. Khi đó vì có k mặt có cạnh chung với M, nên đa diện có ít nhất $k + 1$ mặt. Vì M là mặt có số cạnh lớn nhất bằng k , nên mọi mặt của đa diện có số cạnh nhận một trong các giá trị $\{3,4,...,k\}$. Đa diện có ít nhất k + 1 mặt số cạnh của nó nhận một trong k – 2 giá trị. Vì thế theo nguyên lí Dirichlet suy ra có ít nhất hai mặt của đa diện cố cùng số cạnh. □

Ví dụ 2.9: Cho 1000 điểm M_1 , M_2 ,…, M_{1000} trên mặt phẳng. Vẽ một đường tròn bán kính 1 tuỳ ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn sao cho: $SM_1 + SM_2 + ... + SM_{100} \ge 1000$.

Giải: Xét đường kính S_1S_2 tuỳ ý của đường tròn, ở đây S_1 và S_2 là hai đầu của đường kính.

Vì S_1S_2 = 2, nên ta có:

$$\begin{cases} S_1M_1 + S_2M_1 \ge S_1S_2 = 2 \\ S_1M_2 + S_2M_2 \ge 2 \\ ... \\ S_1M_{1000} + S_2M_{1000} \ge 2 \end{cases}$$



H - 2.9

Cộng từng vế 1000 bất đẳng thức trên ta có:

$$\left(S_1M_1 + S_1M_2 + ... + S_1M_{1000}\right) + \left(S_2M_1 + S_2M_2 + ... + S_2M_{1000}\right) \ge 2000 \quad (1)$$

Từ (1) và theo nguyên lí Dirichlet suy ra trong hai của vế trái của (1), có ít nhất một tổng lớn hơn hoặc bằng 1000.

Giả sử $S_1M_1 + S_1M_2 + ... + S_1M_{1000} \ge 1000$, khi đó lấy $S = S_1$. □

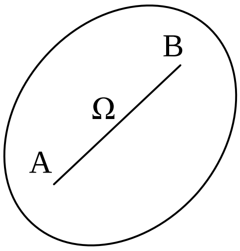
Chương III: SỬ DỤNG TÍNH LỒI CỦA TẬP HỢP

Tập hợp lồi có một đặc trưng cơ bản là khi nó chứa hai điểm, thì nó sẽ chứa toàn bộ đoạn thẳng chứa hai điểm ấy. Tính ưu việt này được tận dụng triệt để trong việc giải các bài toán hình học nói chung và các bài toán hình học tổ hợp nói riêng. Trước hết xin nhắc lại một số kiến thức cơ bản về tập hợp lồi sẽ dùng đến trong chương này.

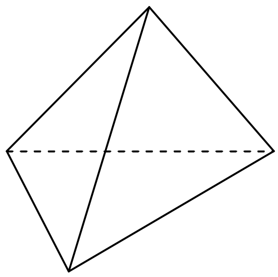
Định nghĩa tập hợp lồi: Giả sử Ω là một tập hợp cho trước (trên đường thẳng, mặt phẳng hoặc không gian).

Tập hợp Ω được gọi là tập hợp lồi với bất kì hai điểm A, $B \in \Omega$, thì cả đoạn thẳng AB (với hai đầu mút A và B) nằm trọn trong Ω.

Ví dụ:



H - 3.1



H-3.2

Tính chất tập hợp lồi: Nếu A, B là hai tập hợp lồi, thì $A \cap B$ cũng là tập hợp lồi.

Bằng quy nạp có thể chứng minh được:

Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thì $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ cũng là tập hợp lồi.

Chú ý: Hợp của hai hợp lồi A và B chưa chắc là tập hợp lồi.

§1: CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ KELLI

Định lí Kelli là một trong các định lí rất quan trọng của hình học tổ hợp. Định lí này cho ta một điều kiện đủ hữu hiệu để nhận biết rằng khi nào một ho các hình lồi có giao khác rỗng.

I. **Định lí Kelli trong không gian hai chiều ¡ ^{2}**

Trong mặt phẳng cho *n* hình lồi (*n* ≥ 4). Biết rằng giao của ba hình lồi bất kì trong chúng khác rỗng. Khi đó giao của *n* hình lồi cũng khác rỗng.

Chứng minh: Ta chứng minh bằng quy nạp theo số *n* các hình lồi.

1. Xét *n* = 4.

Gọi F_1, F_2, F_3, F_4 là bốn hình lồi có tính chất là giao của ba hình bất kì trong chúng là khác rỗng. Vì $F_2 \cap F_3 \cap F_4 \neq \varnothing$ nên tồn tại $A_1 \in F_2 \cap F_3 \cap F_4$.

Tương tự tồn tại $A_2 \in F_1 \cap F_3 \cap F_4$; $A_3 \in F_1 \cap F_2 \cap F_4$; $A_4 \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$.

Chỉ có hai khả năng sảy ra:

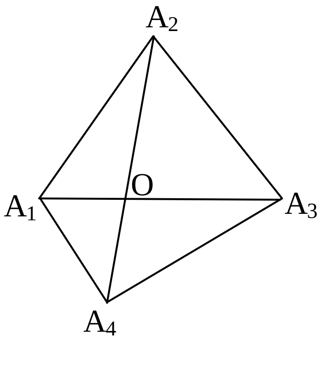
a) Nếu 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 không hoàn toàn khác nhau. Khi đó không giảm tính tổng quát ta cho là $A_1 \equiv A_2$.Từ đó suy ra:

$A_1 \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$. Nên $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \neq \varnothing$.

Vậy kết luận của định lí Kelli đúng trong trường hợp khi *n* = 4.

b) A_1, A_2, A_3, A_4 là 4 điểm phân biệt, khi đó lại có hai khả năng xảy ra:

b$_1$) Bao lồi của A_1, A_2, A_3, A_4 chính là tứ giác lồi $A_1A_2A_3A_4$.



H-3.3

Giả sử *O* là giao của hai đường chéo A_1A_2, A_3A_4.

Do $A_1 \in F_2 \cap F_3 \cap F_4$ nên $A_1 \in F_3$; $A_2 \in F_1 \cap F_3 \cap F_4$ nên $A_1 \in F_3$.

Vì F_3 lồi mà $A_1 \in F_3$, $A_2 \in F_3$ nên $[A_1, A_2] \in F_3$.

Nói riêng $O \in F_3$.

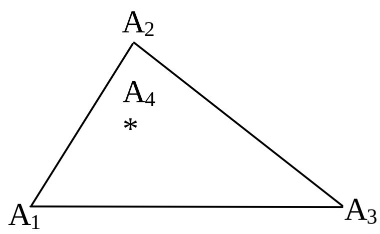
Lập luận hoàn toàn tương tự suy ra $O \in F_1$, $O \in F_2$, $O \in F_4$. Điều đó có nghĩa là: $O \in \bigcap_{i=1}^{4} F_i$ do đó $\bigcap_{i=1}^{4} F_j \neq \varnothing$.

b$_2$) Bao lồi của chúng là tam giác chứa điểm bên trong. Không giảm tổng quát ta có thể cho là $\Delta A_1A_2A_3$ chứa A_4.

Vì A_1, A_2, A_3 đều thuộc F_4, mà F_4 lồi nên toàn bộ miền trong tam giác $A_1A_2A_3$ thuộc F_4.

Mặt khác $A_4 \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \Rightarrow A_4 \in \bigcap_{i=1}^{4} F_i$.

Từ đó suy ra $\bigcap_{i=1}^{4} F_i \neq \varnothing$.



H-3.4

Vậy định lí Kelli đúng khi n = 4.

2. Giả sử kết luận của định lí Kelli đúng đến $n \geq 4$.

3. Xét trường hợp khi có n + 1 hình lồi, tức là ta có n + 1 hình lồi $F_1, F_2, ..., F_n, F_{n+1}$ với giả thiết bất kì 3 hình lồi nào trong chúng đều có giao nhau khác rỗng.

Xét các hình sau:

$$
\begin{aligned}
&F_1' = F_1\\
&F_2' = F_2\\
&\ldots\\
&F_{n-1}' = F_{n-1}\\
&F_n' = F_n \cap F_{n+1}
\end{aligned}
$$

Rõ ràng F_i' là lồi với mọi $i = \overline{1, n-1}$ (vì $F_i' = F_i$), còn F_n' cũng là lồi vì nó là giao của hai hình lồi F_n và F_{n+1}.

Xét ba hình lồi bất kì F_i', F_j', F_k' trong n hình lồi $F_1', F_2', ..., F_n'$.

Nếu trong chúng không có $F_n^{'}$ thì theo giả thiết

$$F_i^{'} \cap F_j^{'} \cap F_k^{'} = F_i \cap F_j \cap F_k \neq \varnothing .$$

Nếu trong chúng có $F_n^{'} = F_n \cap F_{n+1}$. Khi đó có thể cho là $F_k^{'} = F_n^{'}$

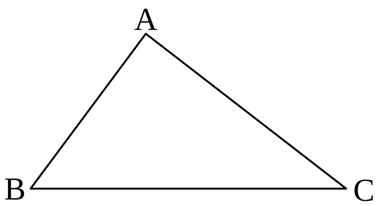
Từ đó $F_i^{'} \cap F_j^{'} \cap F_k^{'} = F_i \cap F_j \cap F_n \cap F_{n+1}$.

Vì giao của ba hình lồi trong các hình lồi F_1, F_j, F_n, F_{n+1} là khác rỗng (giả thiết), nên theo trường hợp ***n*** = 4 ta có $F_i \cap F_j \cap F_n \cap F_{n+1} \neq \varnothing$. Vậy với ***n*** hình lồi $F_1^{'}, F_2^{'}, ..., F_n^{'}$ thoả mãn điều kiện giao của ba hình lồi bất kì trong chúng khác rỗng, nên theo giả thiết quy nạp suy ra:

$$F_1^{'} \cap F_2^{'} \cap ... \cap F_n^{'} \neq \varnothing .$$

Điều đó có nghĩa là $F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n \cap F_{n+1} \neq \varnothing$.

Định lí Kelli đúng trong trường hợp có ***n*** + 1 hình lồi. Theo nguyên lí quy nạp suy ra định lí Kelli đúng với mọi ***n*** ≥ 4. Định lí Kelli được chứng minh trong $\mathbb{R}^2$.



H-3.5

Chú ý*: **Ta thấy rằng điều kiện ***n ≥ 4 là cần thiết. Thật vậy, hãy xét mệnh đề tương tự với ***n*** = 3.

"Cho một họ ***n*** hình lồi (***n*** ≥ 3) trong mặt phẳng. Biết rằng giao của hai hình lồi bất kì trong chúng khác rỗng. Khi đó giao của ***n*** hình lồi cũng khác rỗng".

Rõ ràng mệnh đề này không chắc đúng.

Thật vậy, xét với ***n*** = 3. Xét ba hình lồi: đoạn thẳng *AB*, đoạn thẳng *BC*, đoạn thẳng *CA*.

Rõ ràng giao của hai hình lồi bất kì trong chúng khác rỗng.

Nhưng $AB \cap AC \cap BC = \varnothing$.

II. Định lí Kelli trong không gian một chiều $\mathbb{R}^1$.

Trên đường thẳng cho *n* hình lồi (*n* ≥ 3) trong mặt phẳng. Biết rằng giao của hai hình lồi bất kì trong chúng khác rỗng. Khi đó giao của *n* hình lồi cũng khác rỗng.

Chứng minh: Ta biết rằng hình lồi trên đường thẳng chỉ có thể là đoạn thẳng $[a\,;\,b]$, khoảng $(a\,;\,b)$, hay $[a\,;\,b)$, $(a\,;\,b]$ (ở đây a có thể là $-\infty$, còn b có thể là $+\infty$).

Ta chỉ xét với các hình lồi là các đoạn thẳng, các trường hợp còn lại chứng minh hoàn toàn tương tự.

Giả sử có *n* đoạn thẳng $[a_i\,;\,b_i]$, $i=\overline{1,n}$ có tính chất sau: Bất kì giao của hai đoạn thẳng nào trong chúng cũng khác rỗng, tức là $[a_i\,;\,b_i] \cap [a_j\,;\,b_j] \neq \varnothing$ **,** với mọi $i \neq j$. Ta sẽ chứng minh : $\bigcap_{i=1}^{n}[a_i\,;\,b_i] \neq \varnothing$.

Chú ý rằng $[a_i\,;\,b_i] \cap [a_j\,;\,b_j] \neq \varnothing \Leftrightarrow \min\{b_i, b_j\} \geq \max\{a_i, a_j\}$.

Thật vậy, giả sử $[a_i\,;\,b_i] \cap [a_j\,;\,b_j] \neq \varnothing$, khi đó tồn tại $c \in [a_i\,;\,b_i] \cap [a_j\,;\,b_j]$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_i \leq c \leq b_i \\ a_j \leq c \leq b_j \end{cases}$$

hay $\max\{a_i, a_j\} \leq c \leq \min\{b_i, b_j\}$.

Đảo lại, giả sử $\max\{a_i, a_j\} \leq \min\{b_i, b_j\}$. Khi đó rõ ràng ta có thể chọn c sao cho $\max\{a_i, a_j\} \leq c \leq \min\{b_i, b_j\}$. (1)

Từ (1) suy ra $a_i \leq c \leq b_i \Rightarrow c \in [a_i\,;\,b_i]$; $a_j \leq c \leq b_j \Rightarrow c \in [a_j\,;\,b_j]$.

Đều đó có nghĩa là $[a_i\,;\,b_i] \cap [a_j\,;\,b_j] \neq \varnothing$. Nhận xét được chứng minh.

Từ đó suy ra $\min\limits_{1\leq i\leq n} b_i \geq \max\limits_{1\leq i\leq n} a_i$ (2)

Từ (2) suy ra tồn tại c sao cho $\min\limits_{1\leq i\leq n} b_i \geq c \geq \max\limits_{1\leq i\leq n} a_i$. (3)

Bất đẳng thức (3) chứng tỏ rằng $c \in [a_i\,;\,b_i]$ với mọi $i = \overline{1,n}$.

Nói cách khác $\bigcap_{i=1}^{n} [a_i \,;\, b_i] \neq \varnothing$.

Định lí Kelli trong $\mathbb{R}^1$ được chứng minh hoàn toàn.

Dưới đây chúng tôi sẽ trình bày các ví dụ minh hoạ cho việc vận dụng định lí Kelli vào giải các bài toán của hình học tổ hợp liên quan đến tính giao khác rỗng của các hình lồi.

<u>Ví dụ 3.1.1</u>: Cho bốn nửa mặt phẳng lấp đầy mặt phẳng. Chứng minh rằng tồn tại ba nửa mặt phẳng trong bốn nửa mặt phẳng ấy, sao cho chỉ riêng ba nửa mặt phẳng này cũng lấp đầy mặt phẳng.

Giải: Gọi P_1, P_2, P_3, P_4 là bốn nửa mặt phẳng.Từ giả thiết ta có:

$$P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = \mathbb{R}^2 . \qquad (1)$$

Rõ ràng P_i lồi với mọi $i = \overline{1,4}$.

Từ (1) suy ra $\overline{P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4} = \varnothing$. (2)

(Ở đây $\overline{A}$ dùng để chỉ phần bù của tập hợp A).

Theo quy tắc Demorgan từ (2) có $\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3} \cap \overline{P_4} = \varnothing$. (3)

Vì P_i lồi nên $\overline{P_i}$ cũng lồi với mọi $i = \overline{1,4}$.

Giả thiết phản chứng không tồn tại ba nửa mặt phẳng nào trong số các P_i, $(i = \overline{1,4})$, mà ba nửa mặt phẳng này lấp đầy mặt phẳng. Điều đó có nghĩa là với mọi ***i, j, k*** phân biệt, mà ***i, j, k*** $\in$ {1, 2, 3, 4} thì $p_i \cup p_j \cup p_k \neq \mathbb{R}^2$.

Nói cách khác $\overline{P_i \cup P_j \cup P_k} \neq \varnothing$. (4)

Theo quy tắc Demorgan thì (4) có $\overline{P_i} \cap \overline{P_j} \cap \overline{P_k} \neq \varnothing$. (5)

Từ (5) và áp dụng định lí Kelli suy ra $\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3} \cap \overline{P_4} \neq \varnothing$. (6)

Bây giờ từ (3) và (4) suy ra mâu thuẫn, tức là phản chứng là sai. □

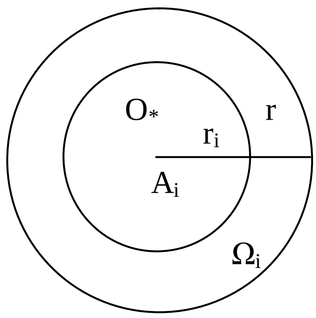
Chú ý: Giả sử $\mathbb{R}^2$ là cả mặt phẳng. Cho A là một mặt phẳng trong $\mathbb{R}^2$. Khi đó kí hiệu $\overline{A}=\left\{x\in \mathbb{R}^2 : x\notin A\right\}$. $\overline{A}$ gọi là phần bù của tập hợp A trong $\mathbb{R}^2$. Ta dễ dàng chứng minh quy tắc sau (gọi là quy tắc Demorgan của phép lấy phần bù) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Bằng quy nạp, có thể mở rộng quy tắc Demorgan cho n tập hợp (ví dụ $\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}$).

dụ 3.1.2: Trên mặt phẳng cho n hình tròn ($n\geq 4$). Giả sử cứ mỗi ba hình tròn đều có một hình tròn bán kính r cắt ba hình tròn này. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính r cắt cả n hình tròn.

Giải: Gọi S_i là hình tròn tâm A_i, bán kính r_i ($i=\overline{1,n}$), S_i = (A_i ; r_i).

Gọi Ω_i là hình tròn tâm A_i, bán kính $r_i + r$ ($i=\overline{1,n}$), Ω_i = (A_i ; $r_i + r$).



H-3.6

Như vậy tâm của tất cả các hình tròn có bán kính r mà cắt S_i đều nằm trong Ω_i.

Xét n tập hợp lồi $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_n$.

Với i, j, k tuỳ ý mà $i, j, k\in\{1, 2, 3,\ldots, n\}$.

Theo giả thiết tồn tại hình tròn ($O_{i,j,k}$; r) cắt cả S_i, S_j, S_k, tức là $O_{i,j,k}\in\Omega_i\cap\Omega_j\cap\Omega_k$. Điều đó chứng tỏ rằng $\Omega_i\cap\Omega_j\cap\Omega_k\neq\varnothing$ với mọi i, j, $k\in\{1, 2, 3,\ldots, n\}$. Theo định lí Kelli suy ra $\bigcap_{i=1}^{n}\Omega_1\neq\varnothing$.Vậy tồn tại $O_*\in\bigcap_{i=1}^{n}\Omega_1$. Xét hình tròn tâm O_* và bán kính r , (O_* ; r).

Hình tròn này rõ ràng cắt S_i với mọi $i=\overline{1,n}$. □

Ví dụ 3.1.3: Trên mặt phẳng có một họ hữu hạn các hình chữ nhật có các cạnh tương ứng song song với hai trục tạo độ. Chứng minh rằng nếu hai hình bất kì trong chúng có giao khác rỗng thì cả họ có giao khác rỗng.

Giải: Lấy hệ tọa độ có các trục song song với các cạnh hình chữ nhật. Chiếu các hình này nên *Ox* và *Oy*. Ta có sự tương ứng 1–1 sau đây:

$$F_i \Leftrightarrow \begin{cases} [a_i; b_i] \subset Ox \\ [c_i; d_i] \subset Oy. \end{cases}$$

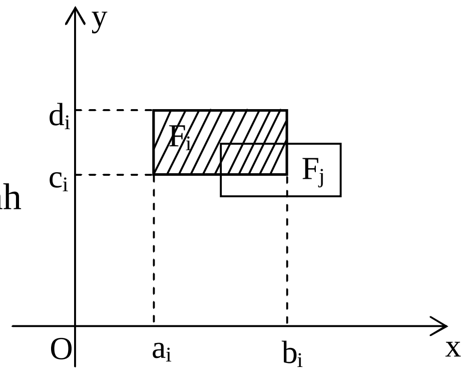
Như vậy ta có:

Họ các đoạn thẳng $[a_i ; b_i] \subset Ox$, và họ các đoạn thẳng $[c_i ; d_i] \subset Oy$, $\forall i = \overline{1,n}$. Do $F_i \cap F_j \neq \varnothing$ với mọi $i \neq j$ ($i , j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$),

cho nên $[a_i ; b_i] \cap [a_j ; b_j] \neq \varnothing$ ($i, j \in \{1, 2,\ldots, n\}$).

Từ đó theo định lí Kelli thì $\bigcap_{i=1}^{n} [a_i; b_i] \neq \varnothing$.

Vì thế ta đã chứng minh được sự tồn tại $a^* \in \bigcap [a_i ; b_i]$. Tương tư , ta cũng chứng minh được sự tồn tại $b^* \in \bigcap_{i=1}^{n} [c_i ; d_i]$.



H - 3.7

Điều đó chứng tỏ rằng $(a^* ; b^*) \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$. □

<u>Ví dụ 3.1.4</u>: Trên một đường tròn đơn vị có một họ các cung có độ dài nhỏ hơn π, có tính chất là giao của ba cung bất kì đều khác rỗng. Chứng minh rằng giao của tất cả các cung khác rỗng.

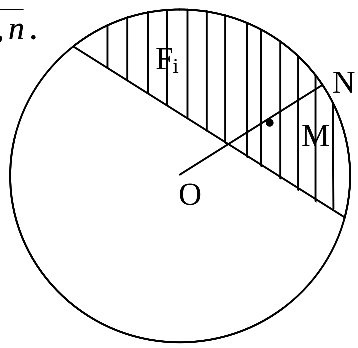
Giải: Tương ứng với mỗi cung l_i, xét hình viên phân F_i tạo bởi cung và dây trương cung. Rõ ràng F_i là hình lồi, với mọi $i = \overline{1,n}$.

Theo giả thiết thì với mọi i, j, k, ta có:

$l_i \cap l_j \cap l_k \neq \varnothing$, ở đây $l_i \subset F_i$, $l_j \subset F_j$, $l_k \subset F_k$.

Điều đó có nghĩa là $F_i \cap F_j \cap F_k \neq \varnothing$, với mọi i, j, k ($l \leq i < j < k \leq n$).

Theo định lý Kelli, suy ra: $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n \neq \varnothing$.



H- 3.8

Từ đó suy ra tồn tại $M \in F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n$.

Gọi N là ảnh của M qua phép chiếu xuyên tâm O lên đường tròn. Do $M \in F_i$ với mọi $i = \overline{1,n}$, nên $N \in l_i$ với mọi $i = \overline{1,n}$. Điều đó chứng tỏ rằng: $\bigcap_{i=1}^{n} \neq \varnothing$. □

§2. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG PHÉP LẤY BAO LỒI

Phương pháp sử dụng phép lấy bao lồi của một tập hợp để giải các bài toán hình học tổ hợplà một trong những phương pháp hữu hiệu.

Trước hết xin nhắc lại khái niệm bao lồi của một tập hợp:

Cho tập hợp *D*, tập hợp lồi nhỏ nhất chứa *D* thì gọi là bao lồi của tập hợp *D*.

Nói cách khác $D = \cap D_a$, trong đó D_α là tập hợp lồi chứa *D*.

Các ví dụ sau đây minh hoạ cho phương pháp sử dụng phép lấy bao lồi để giải các bài toán hình học tổ hợp.

Ví dụ 3.2.1: Trên mặt phẳng cho một số hữu hạn điểm. Chứng minh rằng luôn luôn tìm được một điểm sao cho nó gần nhất có không quá ba điểm đã cho.

Giải: Giả sử A_1, A_2 ,…, A_n là n điểm đã cho. Theo nguyên lí cực hạn, thì tồn tại $d = \min_{i \neq j\ ;\ i,j = \overline{1,n}} (A_i, A_j)$.

Đưa vào xét tập hợp Ω như sau: $\Omega = \{A_k \mid \exists\, j \neq k,\ A_kA_j = d\}$.

Giả sử $\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$. Dễ dàng thấy rằng $\Omega \neq \varnothing$ (vì tồn tại khoảng cách ngắn nhất d). Xét bao lồi của tập hợp Ω. Chỉ có hai khả năng sảy ra:

1. Nếu bao lồi của Ω là đoạn thẳng *AB*.

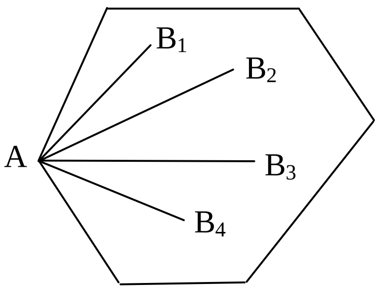
A ________________________________ B

Khi đó gần đỉnh đầu mút của nó chỉ có không quá một điểm của hệ.

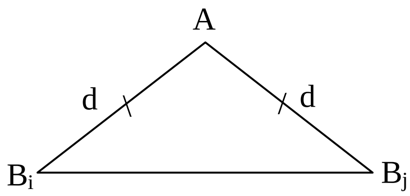
Thật vậy, mọi điểm cách *A* một đoạn bằng *d* là các điểm của tập hợp Ω, và do đó dĩ nhiên nó thuộc bao lồi của Ω, tức là thuộc *AB*. Như vậy có tối đa một điểm gần *A* nhất.

2. Nếu bao lồi của Ω là một đa giác lồi. Ta chọn ***a*** là một đỉnh của bao lồi của Ω.

Giả sử gần *A* nhất có quá ba điểm có khoảng cách bằng ***d*** tới *A*.



H - 3.9



H- 3.10

Theo định nghĩa của *d*, thì với mọi $i \neq j$, $B_iB_j \geq d$ (ở đây B_1, B_2, B_3, B_4…là các điểm có khoảng cách tới *A* đều là *d*). Xét tam giác B_iAB_j có $AB_i = AB_j = d$,

còn $B_iB_j \geq d$, từ đó suy ra $B_i\hat{A}B_j \geq 60^o$, nên $\hat{A} \geq B_1\hat{A}B_2 + B_2\hat{A}B_1 + B_3\hat{A}B_4 + ... \geq 180^o$

Do vậy $\hat{A} \geq B_1\hat{A}B_2 + B_2\hat{A}B_1 + B_3\hat{A}B_4 + ... \geq 180^o$ ($\hat{A}$ là góc của đa giác bao lồi). Rõ ràng $\hat{A} < 180^0$, mâu thuẫn này chứng tỏ giả thiết phản chứng là sai ra suy. □

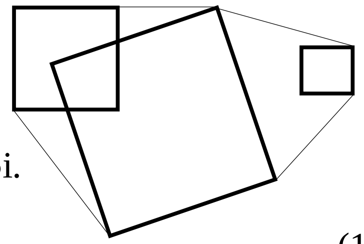
<u>Ví dụ 3.2.2</u>: Trên mặt phẳng cho một số *n* giác đều. Chứng minh rằng bao lồi của nó là một đa giác có không ít hơn *n* đỉnh.

***Giải*:** Rõ ràng bao lồi của nó là một đa giác lồi mà các đỉnh của nó nằm trong tập hợp các đỉnh của *n* giác đều đã cho. Gọi *m* là số đỉnh của đa giác bao lồi. Tổng các góc trong của đa giác lồi này là $\pi(m - 2)$.

Số đo của mỗi góc trong *n* – giác đều là: $\frac{p(n-2)}{n}$.

Chú ý rằng bao lồi của *n* – giác đều phải chứa cả *n* – giác đều ở bên trong.

Vì thế góc ở mỗi đỉnh của m – giác bao lồi đều phải lớn hơn hoặc bằng $\frac{p(n-2)}{n}$.


H - 3.11

Gọi α là góc nhỏ nhất trong m góc của đa giác bao lồi.

Khi đó hiển nhiên ta có: $\alpha \le \frac{p(m-2)}{m}$. (1)

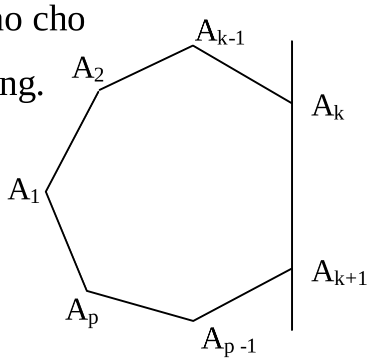
Mặt khác $\alpha \ge \frac{p(n-2)}{n}$. (2)

Vì thế (1) và (2) suy ra:

$$\frac{p(m-2)}{m} \ge \frac{p(n-2)}{n} \Leftrightarrow 1-\frac{2}{m} \ge 1-\frac{2}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \ge \frac{1}{m} \Leftrightarrow m \ge n$$

Vậy số cạnh của đa giác bao lồi không ít hơn n. □

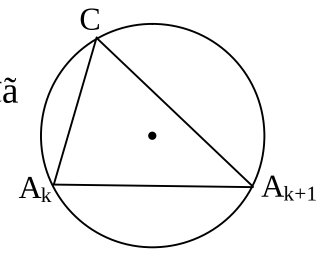
Ví dụ 3.2.3: Trên mặt phẳng cho một số hữu hạn điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm sao cho đường tròn đi qua nó không chứa điểm nào ở bên trong.



H - 3.12

Giải: Vì các số điểm đã cho không cùng nằm trên một đường thẳng, nên khi lấy bao lồi của hệ điểm, ta sẽ được một đa giác. giả sử đó là đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_p$. Như thế các điểm còn lại đã cho phải nằm trong bao lồi.

Gọi A_k , A_{k+1} là 2 đỉnh liên tiếp của đa giác bao lồi (nghĩa là xét một cạnh tuỳ ý A_kA_{k+1}). Khi đó mọi điểm đã cho đều nằm ở một nửa mặt phẳng xác định bởi A_kA_{k+1} . Từ giả thiết suy ra tập hợp các điểm đã cho không thuộc A_kA_{k+1} là khác rỗng. Vì thế theo nguyên lý cực hạn



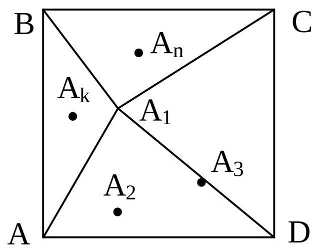
H - 3.13

tồn tại C sao cho: $A_k\hat{C}A_{k+1} = \max A_k\hat{A}_iA_{k+1}$, đây giá trị lớn nhất lấy ở theo mọi $i=\overline{1,n}$ mà $i \neq k$, $i \neq k+1$ (giả sử A_1 , A_2 , … , A_n là hệ hữu hạn điểm cho trước).

Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác CA_kA_{k+1} là đường tròn cần tìm. □

<u>Ví dụ 3.2.4:</u> Bên trong hình vuông cạnh bằng 1 cho *n* điểm. Chứng minh rằng tồn tại tam giác có đỉnh tại các điểm đã cho hoặc là đỉnh của hình vuông, sao cho diện tích của nó thoả mãn bất đẳng thức sau: $S \le \frac{1}{2(n+1)}$

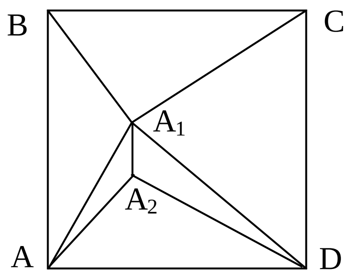
Giải: Gọi *A, B, C, D* là bốn đỉnh của hình vuông và A_1 , A_2 , … , A_n là *n* điểm nằm trong hình vuông. Nối A_1 với bốn đỉnh *A, B, C, D* . Khi đó ta được bốn tam giác.



H - 3.14

- Nếu A_2 nằm trong một trong bốn tam giác ấy (thí dụ $A_2 \in \Delta AA_1D$) . khi đó nối A_2 với A_1 , *A, D.* Khi nối xong , số tam giác tăng lên 2.

- Nếu A_2 nằm trên một cạnh chung (thí dụ $A_2 \in A_1D$ là cạnh chung của 2 tam giác A_1AD và A_1CD) . Khi đó nối A_2 với các đỉnh đối diện *A, C* của cạnh chung A_1D. Nối xong số tam giác tăng lên 2.

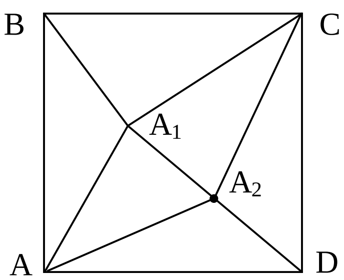


H - 3.15

Như thế, trong mọi trường hợp, số tam giác đều tăng lên 2.

Với các điểm A_3 , A_4 , …, A_n ta đều làm tương tự, và chú ý rằng sau mỗi bước làm số tam giác tăng lên 2.

Với cách làm như thế ta đã tạo thành $4 + 2(n - 1) = 2n + 2$ tam giác.



H - 3.16

Các tam giác này đều có đỉnh tại các điểm đã cho , hoặc là đỉnh của hình vuông.

Theo cách xác định như trên thì tổng số diện tích của (2n + 2) tam giác này chính bằng diện tích của hình vuông cạnh bằng 1. Theo nguyên lý cực hạn, tồn tại tam giác có diện tích nhỏ nhất trong (2n + 2) tam giác ấy. Gọi diện tích này là S, rõ ràng ta có: $S \le \frac{1}{2(n+1)}$. □

Chương IV: VÀI PHƯƠNG PHÁP KHÁC GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP

Trong chương này đề cập đến các bài toán hình học tổ hợp được giải bằng các phương pháp khác nhau. Tuỳ theo từng bài cụ thể, mà ta có những phương pháp giải thích hợp. Phương pháp này rất đa dạng và tỏ rõ hiệu quả trong nhiều bài toán của hình học tổ hợp như: bài toán tô màu, bài toán tính số lượng đối tượng hình, bài toán tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trong hình học tổ hợp, bài toán cắt và ghép hình, bài toán phủ bàn cờ…

Các thí dụ minh hoạ dưới đây sẽ làm rõ ý tưởng của việc sử dụng các phương pháp khác để giải các bài toán hình học tổ hợp.

Ví dụ 4.1: Trên đoạn thẳng AB (với trung điểm là O), người ta thả vào đó $2n$ điểm sao cho chúng chia thành n cặp điểm, mỗi cặp gồm hai điểm đối xứng với nhau qua O. Bôi đỏ tuỳ ý n điểm, còn lại bôi xanh. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ A tới các điểm đỏ bằng tổng khoảng cách từ B tới các điểm xanh.

Giải: Định hướng bằng đường thẳng từ A tới B và giả sử O là gốc, điểm B có toạ độ là 1 còn điểm A có toạ độ là –1. Giả sử $X_1, X_2,\dots, X_n$ là các điểm được bôi đỏ, còn $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ là các điểm được bôi xanh.

Điểm X_i có tọa độ là x_i, còn điểm Y_i có tọa độ là y_i ($i = \overline{1,n}$).

Để ý đến giả thiết: $2n$ điểm chia thành n cặp điểm, mỗi cặp gồm hai điểm đối xứng với nhau qua O, ta có: $\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$. (1)

Khoảng cách từ A tới điểm đỏ X_i là $x_i - (-1) = x_i + 1$.

Vì thế nếu S là tổng các khoảng cách từ A tới các điểm đỏ X_i, thì:

$$S = \sum_{i=1}^{n}(x_i + 1) = n + \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (2)$$

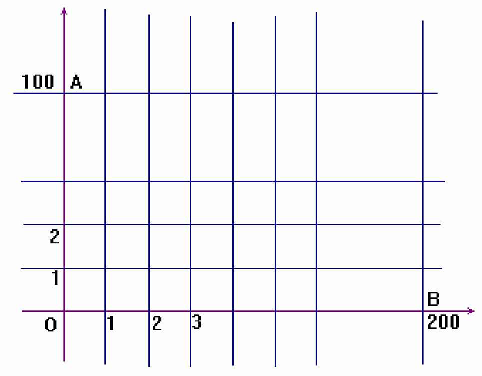
Vì khoảng cách từ B tới điểm xanh Y_j là $1 - y_j$, nên nếu gọi S' là tổng các khoảng cách từ B tới các điểm xanh Y_j, thì:

$$S = \sum_{i=1}^{n}(1-y_j) = n - \sum_{j=1}^{n} y_j . \qquad (3)$$

Từ (1) suy ra: $\sum_{i=1}^{n} x_i = -\sum_{j=1}^{n} y_j$. (4)

Kết hợp (2), (3), (4) ta đi đến $S = S'$. □

Ví dụ 4.2: Một mạng lưới ô vuông gồm 100 đường ngang và 200 đường dọc. Có hai quân cờ đặt ở hai đỉnh đối diện của một hình chữ nhật 100×200. Mỗi lượt người ta chuyển cả hai quân cờ theo đường đến nút lưới bên cạnh. Hỏi rằng có thể sau một số lần di chuyển thì hai quân cờ có thể ở hai nút lưới cạnh nhau được không.

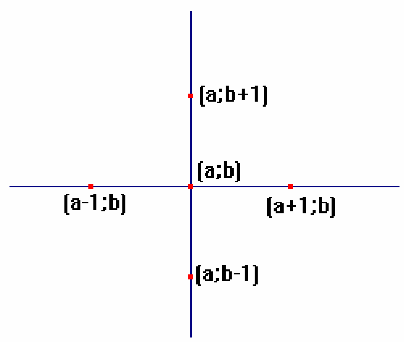


H - 4.1

Giải: Lấy hai cạnh của hình chữ nhật là hai trục tọa độ, dựng hệ trục tọa độ vuông góc như sau:

Khi đó giả sử hai quân cờ ở hai vị trí $A(0 ; 100)$ và $B(200 ; 0)$.

(Dĩ nhiên có thể giả sử hai quân cờ ở vị trí (0 ; 0) và (200 ; 100), khi ấy lập luận không có gì thay đổi).



Giả sử một quân cờ lúc nào đó ở vị trí $(a ; b)$. Lượt di chuyển tiếp theo vị trí của nó chỉ có thể ở vào một trong bốn bước sau:

$(a + 1 ; b)$, $(a - 1 ; b)$, $(a ; b + 1)$, $(a ; b - 1)$.

Lúc bấy giờ trước khi di chuyển thì tổng tọa độ của quân cờ là $a + b$. Sau khi di chuyển thì tổng tọa độ của quân cờ thuộc vào tập hợp $\{a + b + 1$,

$a + b - 1\}$. Như thế sau một lần di chuyển tính chẵn lẻ của tổng $a + b$ thay đổi. Vì thế sau một lần di chuyển thì tính chẵn lẻ của tổng của hai quân cờ không thay đổi.

Tại thời điểm ban đầu do $A(0\ ;\ 100)$ và $B(200\ ;\ 0)$ nên tổng các tọa độ của hai quân cờ là 300 – đó là một số chẵn.

Giả thiết sau một số nước đi hai quân cờ có thể đứng cạnh nhau. Khi đó , nếu hai quân cờ cùng hàng thì toạ độ của chúng sẽ có dạng $(a\ ;\ b)$, $(a\ ;\ b + 1)$

Lúc này tổng các toạ độ là $2(a + b) + 1$ – đó là số lẻ.

Nếu hai quân cờ cạnh nhau và cùng cột thì toạ độ của chúng sẽ có dạng $(a\ ;\ b)$, $(a\ ;\ b + 1)$.

Lúc này tổng các toạ độ là $2(a + b) + 1$ – đó là số lẻ.

Ta đều thu được mâu thuẫn vì tổng toạ độ của hai quân cờ ban đầu đều là số chẵn.

Vậy giả thiết hai quân cờ sau một số lần di chuyển có thể ở cạnh nhau là sai. Bài toán có câu trả lời phủ định : Sau nhiều lần di chuyển thì lúc nào hai quân cờ cũng không thể đứng cạnh nhau. □

<u>Ví dụ 4.3</u>: Nền nhà hình chữ nhật được lát kín bằng các viên gạch hình chữ nhật kích thước 1×3 và 3 miếng hình chữ nhật 1×1. Hỏi có thể lát lại nền nhà ấy chỉ bằng một loại gạch 1×3 hay không?

***Giải*:**

Ta có nhận xét sau: Nền nhà có ít nhất một kích thước là số nguyên chia hết cho 3. Thật vậy, giả thiết phản chứng không phải như vậy, khi đó hoặc kích thước của nền nhà có dạng:

a) $3k + 1$; $3l + 1$. Khi đó diện tích S của nền nhà là:

$$S = (3k + 1)(3l + 1) \Rightarrow S \not\vdots\ 3.$$

b) $3k + 1$; $3l + 2$. Khi đó: $S = (3k + 1)(3l + 2) \Rightarrow S \not\vdots\ 3$.

c) $3k + 2$; $3l + 2$. Khi đó: $S = (3k + 2)(3l + 2) \Rightarrow S \not\vdots\, 3$.

Như thế ta luôn có $S \not\vdots\, 3$. (1)

Mặt khác, vì nền nhà đã cho lát kín được bằng các viên gạch 1×3 và 3 viên 1×1.

Do đó: $S = 3n + 3$, ở đây n là số viên gạch 1×3 dùng. Như thế lại có $S \vdots 3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra vô lí, vậy giả thiết phản chứng là sai. Nhận xét được chứng minh.

Quay trở lại bài toán của ta: Lát viên gạch 1×3 theo chiều cạnh của hình chữ nhật có kích thước chia hết cho 3. Làm như vậy sẽ lát kín được nền nhà đã cho, mà chỉ phải dùng một loại gạch có kích thước 1×3.

Bài toán có câu trả lời khẳng định. □

<u>Ví dụ 4.4</u>: Một dải băng kích thước $1\times n$ ($n > 4$) được tạo thành từ các ô vuông được đánh số 1, 2,..., n. Trong các ô $n - 2$, $n - 1$, n có một quân cờ. Hai người chơi một trò chơi như sau: Mỗi người chơi được phép chuyển quân cờ bất kì đến một ô bất kì còn để trống với số kí hiệu nhỏ hơn. Người thua cuộc sẽ là người không còn nước nào nữa. Chứng minh rằng người đi đầu tiên có thể luôn thắng cuộc.

***Giải*:** Chia tất cả các số nguyên bắt đầu từ 2 thành các cặp số không giao nhau $(2k ; 2k + 1)$, $k \in \mathbb{N}^+$: (2 ; 3), (4 ; 5), (6 ; 7),…

Khi đó giữa ba số n , $n - 1$, $n - 2$ có hai số tạo thành một cặp như vậy. (Cụ thể nếu n lẻ thì cặp đó là $(n - 1 ; n)$ còn nếu n chẵn thì cặp đó là $(n - 2 ; n - 1)$.Người đi trước phải đi như sau:

										~	~	~
1	2	3	4	5	6	7				n-2	n-1	n

H-4.2

- Đi quân cờ đứng ở ô có số hiệu không rơi vào cặp đó và đặt vào ô có số thứ tự 1 (thí dụ nếu n lẻ thì người thứ nhất đặt quân cờ ở ô số $n – 2$ vào ô số 1). Sau nước đi thì quân cờ này sẽ không còn chuyển động đi đâu được nữa (nghĩa là chỉ còn hai quân cờ có thể di chuyển).

~					~	~				
1	2	3	4	5	6	7		n-2	n-1	n

H-4.3

-Đến lượt người thứ hai giả sử chuyển một trong hai quân cờ còn lại sang ô thứ m.

-Người thứ nhất sẽ đặt quân cờ còn lại vào ô số $m – 1$ hoặc ô số $m + 1$ phụ thuộc vào số sẽ tạo thành với số m một cặp như trên (thí dụ người thứ hai đi quân cờ $n – 1$ vào ô số 7, thì người thứ nhất sẽ đi quân cờ n vào ô số 6).

(Trong hình trên ba quân chuyển vào các ô 1, 6, 7).

Điều này luôn luôn có thể làm được vì các cặp số không giao nhau và không giao với ô số 1.

-Như vậy người thứ nhất còn đi được, nếu người thứ hai còn đi được.

Vậy người thứ nhất không thể thua.

-Do mỗi lần chơi các quân cờ đặt vào các ô có số hiệu ngày càng nhỏ đi. Vì thế trò chơi phải kết thúc sau một số hữu hạn bước và người chơi đầu luôn thắng nếu họ tuân thủ theo quy tắc trên. □

Ví dụ 4.5: Trên tờ giấy có kẻ vô hạn các ô vuông và mỗi ô được tô bằng môt trong hai màu xanh hoặc đỏ sao cho bất cứ hình chữ nhật nào kích thước 2×3 thì có đúng hai ô màu đỏ. Xét một hình chữ nhật kích thước 2004×2005 bất kì. Tính số ô đỏ của nó.

Giải:

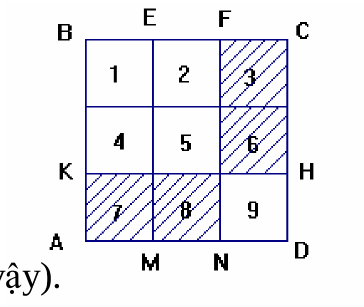
Ta có nhận xét:

Mọi hình chữ nhật kích thước 1×3 chứa đúng một ô màu đỏ.

Thật vậy, giả sử kết luận của nhận xét không đúng, tức là tồn tại hình chữ nhật 1×3 có số ô màu đỏ khác một. Không giảm tổng quát giả sử đó là hình chữ nhật. *AKHD* kích thước 1×3 có hai ô đỏ (nếu không thì không có ô đỏ nào, nhưng không thể là ba vì trong mọi hình chữ nhật 2×3 có đúng hai ô đỏ mà thôi).

Trường hợp *AKHD* không có ô đỏ nào lí luận tương tự.

Cũng có thể cho là hai ô đỏ của *AKHD* là ô 7, ô 8 (nếu ở các ô khác thì lí luận cũng như vậy).



H - 4.4

Xét hình chữ nhật *BFNA*. Đó là hình chữ nhật 2×3, nên theo giả thiết nó có đúng hai ô đỏ 7 và 8 là hai ô đỏ, do đó các ô 1, 2, 4, 5 là màu xanh.

Xét hình chữ nhật *BCHK* , từ giả thiết và do các ô 1 ,2, 4, 5 màu xanh nên các ô 3, 6 là màu đỏ.

Xét hình chữ nhật *ECDM* kích thước 2×3, ta thấy do ô 3, 6, 8 màu đỏ nên suy ra mâu thuẫn.

Vậy giả thiết phản chứng là sai. Nhận xét được chứng minh. Vì 2004 $\vdots$ 3 và 2004 : 3 = 668. Do vậy hình chữ nhật kích thước 2004×2005 chia thành 2005×668 hình chữ nhật 1×3.

Vậy số ô đỏ trong một hình chữ nhật tùy ý kích thước 2004×2005 là 2005×668 ô.

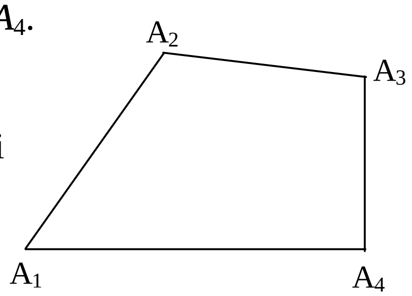
Số ô đỏ cần tìm là 1339340 ô. □

<u>Ví dụ 4.6:</u> Trên mặt phẳng cho 2*n* điểm (*n* ≥ 2), không có ba điểm nào thẳng hàng. Một số trong chúng được nối thành đoạn thẳng theo nguyên tắc sau:

Nếu điểm A được nối với điểm B, điểm B được nối với điểm C, thì A không được nối với C. Chứng minh rằng với cách nối trên ta thu được không quá n^2 đoạn thẳng.

Giải : Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp như sau:

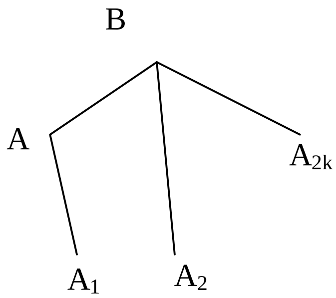
Với $n = 2$. Khi đó ta có bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4.



H - 4.5

Rõ ràng không được phép nối để tạo thành bất kì một tam giác nào. Vì thế cách nối để có tối đa các đoạn thẳng là các nối trên. Cách nối này có $4 = 2^2$ đoạn thẳng. Vậy kết luận bài toán đã đúng khi $n = 2$.

- Giả sử kết luận của bài toán đúng đến $n = k$, tức là nếu có $2k$ điểm ($k \geq 2$) và không có ba điểm nào thẳng hàng. Khi đó có không quá k^2 đoạn thẳngtrong cách nối tuân theo yêu cầu đã đặt ra.



H - 4.6

- Xét khi $n = k + 1$ tức là ta có $2k + 2$ điểm. Dĩ nhiên luôn có thể giả thiêt có hai điểm A, B được nối với nhau (vì nếu không thì số đoạn thẳng bằng 0 và kết luận đúng là tầm thường).

Xét $2k$ điểm còn lại. Theo giả thiết quy nạp với $2k$ điểm này số đoạn thẳng được nối với nhau (tuân theo quy luật nối đã cho) không vượt quá k^2.

Xét các cách nối từ A hoặc B tới các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2k}$ còn lại. Chú ý rằng nếu nối A_j với A, thì A_j không thể nối với B; còn nếu nối A_i với B, thì A_j không thể nối với A, vì thế số các đoạn thẳng nối này không vượt quá $2k$.

Vậy tổng số đoạn thẳng được nối lúc này không vượt quá $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, (A nối B).

Vậy kết luận của bài toán cũng đúng khi $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra. □

<u>Ví dụ 4.7:</u> Cho một bảng ô vuông có $n \times n$ ô, với n là một số lẻ. trong mỗi ô của bảng ta đặt ra một số 1 hoặc –1. Gọi a_k là tích các số ô các ô của cột k , còn b_k là tích các số ở các ô của hàng k ($k = \overline{1,n}$).

Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \neq 0$.

Giải: Giả thiết phản chứng kết luận của bài toán không đúng tức là ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = 0. \qquad (1)$$

Từ giả thiết suy ra với mọi $k = \overline{1,n}$ thì các số a_k, b_k đều bằng 1 hoặc –1.

Mặt khác, ta có $a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_n$ chính là bình phương của tích tất cả các số trong bảng, mà tích các số trong bảng 1 hoặc –1, do vậy

$$a_1a_2...a_nb_1b_2...b_n = 1.$$

Từ (2) suy ra trong tất cả các số a_k, b_k nói trên, số các số bằng –1 phải là số chẵn.

Từ (1) su ra các số a_k, b_k bằng –1 và bằng 1 là bằng nhau, vậy số các số a_k, b_k bằng 1 cũng phải là số chẵn.

Do vậy số các số a_k, b_k là tổng của hai số chẵn bằng nhau, nên là số chia hết cho 4, tức là $2n \vdots 4$.

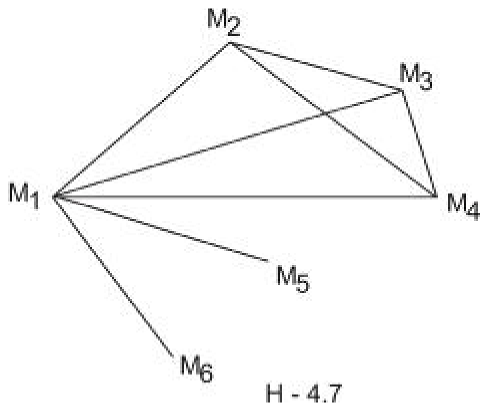
Do n là số lẻ nên $2n = 2(2m+1) = 4m+2 \not\vdots\, 4$.

Mâu thuẫn này chứng minh giả thiết phản chứng là sai, tức là (1) không thể có.

Điều đó nghĩa là: $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \neq 0$. □

<u>Ví dụ 4.8:</u> Trên mặt phẳng có sáu điểm sao cho ba điểm bất kì là đỉnh của một tam giác mà các cạnh có độ dài khác nhau. Chứng minh rằng cạnh nhỏ nhất của một trong các tam giác đồng thời là cạch lớn nhất của một tam giác khác.

***Giải*:** Giả sử M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 là sáu điểm đã cho. Trong mỗi tam giác $M_i M_j M_k$ ta tô cạnh lớn nhất bằng màu đỏ. Xuất phát từ đỉnh M_1, có năm đoạn thẳng nối M_1 với các điểm còn lại.



H - 4.7

Chỉ có hai trường hợp sau đây sảy ra:

1. Hoặc là có ít nhất ba trong năm đoạn M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4, M_1M_5, M_1M_6 tô màu đỏ. Giả sử M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4 tô màu đỏ.

Xét tam giác $M_2 M_3M_4$. Khi đó trong tam giác này có ít nhất một cạnh màu đỏ (cạnh lớn nhất). Giả sử đoạn đó là M_2M_3. Khi đó tam giác $M_1 M_2 M_3$ có ba cạnh màu đỏ.

2. Hoặc là có ít nhất ba trong năm đoạn nói trên chưa được tô màu.

Giả sử M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4 chưa được tô màu. Xét ba tam giác $M_1M_2 M_3$, $M_1 M_3 M_4$, $M_2 M_3 M_4$. Do $M_1 M_2$, $M_1 M_3$ chưa có màu, vậy $M_2 M_3$ phải màu đỏ. Vậy tam giác $M_2 M_3M_4$ có ba cạnh cùng màu đỏ. Tương tự M_3M_4, M_4M_2, phải màu đỏ.

Như vậy ta đã chứng minh được luôn luôn tồn tại một tam giác có ba cạch cùng màu đỏ. Giả sử đó là tam giác $M_i M_j M_k$ và không giảm tổng quát có thể cho là : $M_i M_j < M_j M_k < M_k M_i$ (Chú ý rằng mọi tam giác tạo thành từ sáu điểm đều có các cạch có độ dài khác nhau).

Như thế $M_i M_j$ là cạnh nhỏ nhất của tam giác $M_i M_jM_k$. Vì nó có màu đỏ, vậy nó phải là cạnh lớn nhất của tam giác khác nào đó. □

<u>Ví dụ 4.9</u>: Cho hình lập phương. Ta điền tám số nguyên dương đôi một khác nhau vào tám đỉnh của hình lập phương. Trên mỗi cạnh của hình lập phương, ta ghi *UCLN* của hai số được điền ở hai đầu mút của cạnh đó. Hỏi có thể xảy ra trường hợp tổng tám số ở tám đỉnh bằng tổng của 12 số ở 12 cạnh được không?

Giải:

Ta có nhận xét sau đây:

Gọi a , b là hai số nguyên dương khác nhau và *UCLN* $(a , b) = d$. (1)

Khi đó ta có $a + b \geq 3d$. (2)

Thật vậy từ (1) suy ra: $a = da'$; $b = db'$; với *UCLN* $(a', b') = 1$.

Do $a' \geq 1$, $b' \geq 1$, và do $a \neq b$, nên a' và b' không thể cùng bằng 1.

Từ đó có $a' + b' \geq 3$.

Vì thế $a + b = (a'+ b')d \geq 3d$, vậy (2) đúng. Dấu bằng sảy ra khi và chỉ khi $a = 2b$ hoặc $b = 2a$. Giả sử tại tám đỉnh của hình lập phương ta ghi các số nguyên dương a_i ($i = \overline{1,8}$). Chú ý rằng các số này đôi một khác nhau.

Giả sử: *UCLN* $(a_i , a_j) = d_{ij}$ $(1 \leq i , j \leq 8)$.

Theo nhận xét trên ta có: $a_i + a_j \geq 3d_{ij}$.Từ đó:

$$\sum_{1\leq i\ ,\ j\leq 8}\left(a_i+a_j\right)\geq 3\sum_{1\leq i\ ,\ j\leq 8} d_{ij} \quad . \tag{3}$$

Vì mỗi đỉnh ghi số a_i thuộc ba cạnh nên trong tổng của vế trái của (3) mỗi số a_i được tính ba lần. Từ đó $\sum_{1\leq i\ ,\ j\leq 8}\left(a_i+a_j\right)=3\sum_{i=1}^{8} a_i$. (4)

Từ (3) và (4) đi đến $\sum_{i=1}^{8} a_i \geq \sum_{1\leq i, j\leq 8} d_{ij}$. (5)

Dấu bằng trong (5) sảy ra Û $a_i = 2a_j$ hay $a_j = 2a_i$, $\forall 1 \leq i , j \leq 8$.

Nhưng điều này không thể có do $a_i \neq a_j$, $\forall i \neq j$. Vậy từ (5) có

$$\sum_{i=1}^{8} a_i > \sum_{1\leq i, j\leq 8} d_{ij} \ . \tag{6}$$

Từ (6) suy ra bài toán có câu trả lời phủ định: không thể có cách điền số vào đỉnh và cạch lập phương sao cho tổng số ở tám đỉnh bằng tổng của 12 số ở 12 cạnh của hình lập phương. □

Ví dụ 4.10: Cho bảng ô vuông kích thước $2n\times(2n+1)$ (bảng gồm $2n$ dòng và $2n+1$ cột). Hãy tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho ta có thể tô màu k ô vuông con của bảng mà với mọi hai ô vuông con nào được tô màu cũng không có đỉnh chung.

***Giải*:**

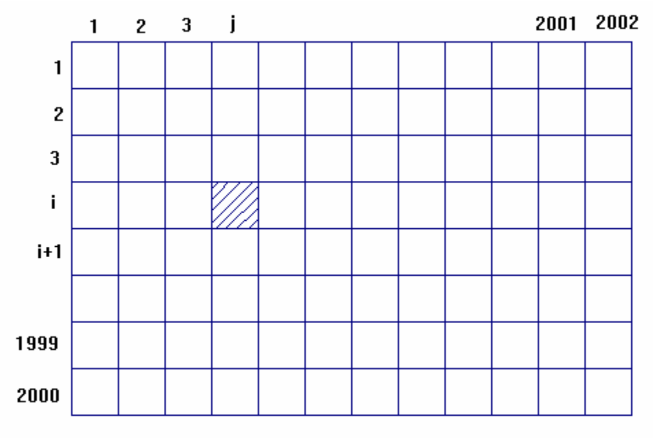
Ta đánh số các hàng và cột theo quy ước sau: Thứ tự của hàng tính từ trên xuống dưới, còn thứ tự của cột tính từ trái sang phải.

Kí hiệu $(i\,;j)$ là ô vuông nằm ở giao của hàng thứ i và cột thứ j của bảng.

Giả sử T là một cách tô màu theo yêu cầu đầu bài.

Kí hiệu $k(T)$ là số ô được tô màu của cách T.

Nếu ô $(i\,;j)$ được tô màu trong cách tô màu T $(1\le i\le 2n-1)$ thì ô $(i+1\,;j)$, và các ô kề với $(i\,;j)$ trong cùng hàng dĩ nhiên không được tô màu.



H - 4.8

Thực hiện phép biến đổi sau đối với T:

Xóa màu ở tất cả các ô $(i\,;j)$ mà $i\equiv 1 \pmod 2$, đồng thời tô màu các ô $(i+1\,;j)$ (tức là xóa màu tất cả các ô nằm ở hàng lẻ).

Rõ ràng sau khi thực hiện phép biến đổi ấy, ta có một phép tô màu mới T'. Phép tô màu này thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Hai ô vuông con nào được tô màu ở bước T' cũng không có đỉnh chung.

2. $k(T) = k(T')$.

3.Tất cả các ô nằm ở hàng thứ 1, 3, 5,…, $2n - 1$ đều không có màu.

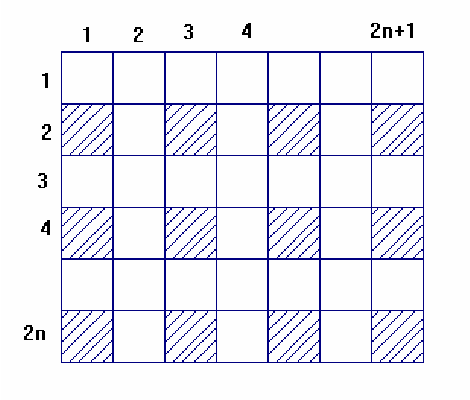
Theo cách tô màu thì số các ô được tô màu ở một hàng không vượt quá $n + 1$. Và chỉ có tối đa n hàng có màu, nên:

$k(T') \le (n + 1)n$.Vì thế $k(T) \le (n + 1)n$ với mọi cách tô màu T.

Xét cách tô màu sau:

Tô màu tất cả các ô $(2i\,;\,2j - 1)$ với $i = 1, 2, \ldots, n\,;\, j = 1, 2, \ldots, n+1$.

Rõ ràng phép tô này thỏa mãn yêu cầu đề bài. Số ô được tô là $n(n + 1)$.



H-4.9

Tóm lại, số k lớn nhất phải tìm là $n(n + 1)$.□

<u>Ví dụ 4.11</u>: Cho một tam giác đều được chia thành n^2 tam giác đều bằng nhau. Một số tam giác đó được đánh số bởi các số 1, 2, …, m, sao cho các tam giác với các số liên tiếp thì phải có cạnh chung.

Chứng minh rằng: $m \le n^2 - n + 1$.

Giải: Chia các cạnh tam giác đều thành n phần bằng nhau. Từ các điểm chia kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác.

Khi đó số tam giác đều con là:

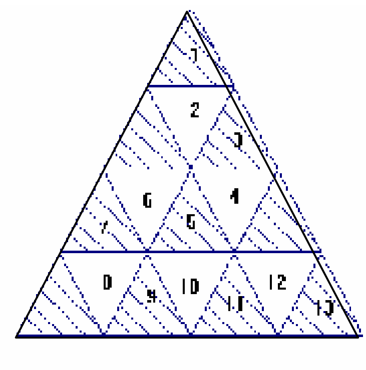
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Tô màu tam giác thành các tam giác đen, trắng xen kẽ nhau như hình vẽ. Khi đó số các ô đen là:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

còn số các ô trắng là:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$



H - 4.11

Theo cách đánh số tam giác thì hai tam giác được đánh số liên tiếp phải có cạnh chung do đó nó phải có màu khác nhau.

Vì lẽ đó, trong số các tam giác được đánh số, số các tam giác đen chỉ có thể nhiều hơn số các tam giác trắng là 1.Vậy tổng số các tam giác được đánh số m phải thỏa mãn bất đẳng thức:

$$m \le \frac{2n(n-1)}{2} + 1, \text{ hay}$$

$$m \le n^2 - n + 1. \ \square$$

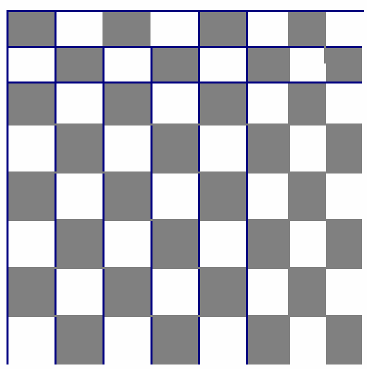
<u>Ví dụ 4.12</u>: Cho bàn cờ vua 8×8 ô. Ở mỗi bước xét một hàng hoặc một cột, sau đó trong hàng (hoặc cột) chọn ra, ta thay đổi màu tất cả các ô trong hàng (hoặc cột) ấy theo quy tắc: đen biến thành trắng và trắng biến thành đen. Hỏi bằng cách ấy, có thể đến một lúc nào đó thu được một bàn cờ chỉ có duy nhất một ô đen hay không?

Giải: Giả sử trước khi tô lại một hàng (hoặc một cột) có k ô đen và $8 - k$ ô trắng.

Sau khi tô lại hàng (hoặc cột) sẽ có k ô trắng và $8 - k$ ô đen. Vì thế sau một lần tô lại số ô đen thay đổi là:

$(8 - k) - k = 8 - 2k$, tức là thay đổi một số chẵn ô đen.

Như vậy tính chẵn, lẻ của số các ô đen không thay đổi suốt từ đầu đến cuối.

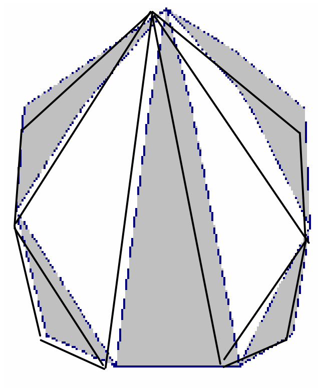


H-4.11

Lúc đầu số ô đen là 32 ô (số chẵn). Vì thế không lúc nào ta lại nhận được bàn cờ chỉ có một ô đen. Bài toán có kết quả là phủ định. □

<u>Ví dụ 4.13</u>: Một đa giác *lồi* *n* cạnh được chia thành các tam giác bằng các đường chéo không cắt nhau của nó, đồng thời tại mỗi đỉnh của nó đều hội tụ một số lẻ các tam giác. Chứng minh rằng *n* chia hết cho 3.

Giải: Theo giả thiết đa giác lồi được chia thành nhiều tam giác bởi các đường chéo không cắt nhau. Tô màu đen, trắng các tam giác sao cho hai tam giác có cạnh chung thì có màu khác nhau. Mặt khác, vì tại mỗi đỉnh đều hội tụ một số lẻ tam giác, nên khi tô màu như vậy tất cả các cạnh của đa giác sẽ thuộc các tam giác cùng màu (giả sử đó là các tam giác đen).



H – 4.12

Giả sử *m* là số cạnh của các tam giác trắng, vì hai tam giác trắng bất kì không có cạnh chung nên dĩ nhiên $m \vdots 3$.

Mặt khác , mỗi cạnh của tam giác trắng cũng là cạnh của tam giác đen và tất cả các cạnh của tam giác trắng cũng là các cạnh của tam giác đen. Ngoài ra hai tam giác đen bất kì cũng không có cạnh chung, nên tổng số cạnh của tam giác đen là $m + n$ cũng phải chia hết cho 3.

Từ $m \vdots 3$ suy ra $n \vdots 3$. □

<u>Ví dụ 4.14</u>: Trên một đường thẳng có *n* điểm màu xanh và *n* điểm màu đỏ. Chứng minh rằng tổng tất cả các khoảng cách giữa các cặp điểm cùng màu bé hơn hoặc bằng tổng tất cả các khoảng cách giữa các cặp điểm khác màu.

Giải: Giả sử *n* điểm màu đỏ trên trục số có tọa độ $x_1, x_2,\ldots, x_n$; còn *n* điểm màu xanh trên trục số có tọa độ là $y_1, y_2,\ldots,y_n$.

Gọi A_n là tổng các khoảng cách của những điểm cùng màu, còn B_n là tổng các khoảng cách của những điểm khác màu.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp.

-Nếu n = 1. khi đó A_1 = 0, còn B_1 = | x_i – y_i | ≥ 0.

Rõ ràng $A_1 \leq B_1$.

Vậy kết luận của bài toán đúng khi n = 1.

-Giả sử kết luận của bài toán đúng khi $n = k - 1$, tức $A_{k-1} \leq B_{k-1}$.

-Xét khi $n = k$. Không giảm tổng quát có thể cho là:

$x_k = \max\{x_1,\ldots,x_k\}$; $y_k = \max\{y_1,\ldots,y_k\}$ (vì nếu không thì đánh số lại).

Ta có:

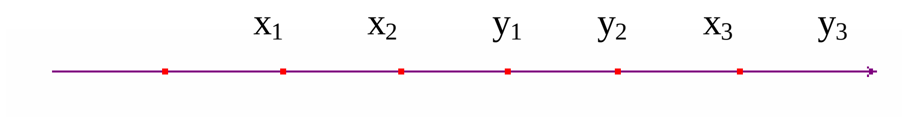
$$A_k = A_{k+1} + \sum_{i=1}^{k}(x_k - x_i) + \sum_{i=1}^{k}(y_k - y_i)$$

$$= A_{k-1} + \sum_{i=1}^{k}\left[(x_k - y_i) + (y_k - x_i)\right]. \qquad (1)$$

$$B_k = B_{k-1} + \sum_{i=1}^{k}|x_k - y_i| + \sum_{i=1}^{k}|y_k - x_i| + |x_k - y_k|. \qquad (2)$$

Theo giả thiết quy nạp, thì $A_{k-1} \leq B_{k-1}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $A_k \leq B_k$.



H – 4.13

Vậy kết luận của bài toán cũng đúng khi $n = k$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra $A_n \leq B_n$ với mọi n nguyên dương . □

<u>Ví dụ 4. 15</u>: Cho một bảng hình vuông $n \times n$ ô ($n \geq 2$). Trong mỗi ô vuông ta viết một số nguyên không âm tùy ý thỏa mãn điều kiện: Nếu một ô nào đó được viết số 0, thì tổng của tất cả các số viết ở dòng và cột chứa ô đó không nhỏ hơn n. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các số được viết trong bảng.

Giải: Với mỗi $i = \overline{1,n}$, kí hiệu a_i là tổng các số được viết ở hàng thứ i (kể từ trên xuống dưới).

Với mỗi $i = \overline{1,n}$, kí hiệu b_j là tổng các số được viết ở cột thứ j (kể từ trái sang phải).

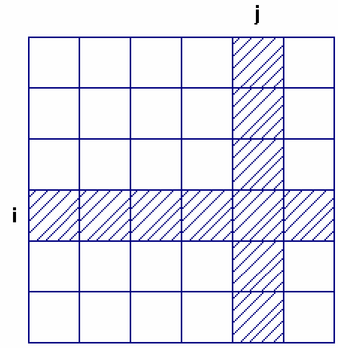
Từ giả thiết của bài toán suy ra: Với mọi $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$ ta luôn có:

$$a_i + b_j \geq n. \qquad (1)$$

Như vậy ta có:

$$T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_i + b_j\right) \geq n^3. \qquad (2)$$

Giả sử a_{ij} là số ghi ở cột (i , j) (là ô ở hàng i và cột j) thì a_{ij} nằm trong tổng a_i và b_j. Do mỗi a_i và b_j đều xuất hiện trong T n lần, do vậy "gián tiếp" mỗi số a_{ij} tham gia vào tổng T $2n$ lần.



H-4.14

Do đó nếu kí hiệu S là tổng các số được viết trong bảng, thì:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}. \qquad (3)$$

Từ (2), (3) và nhận xét trên suy ra:

$$T = 2nS \Rightarrow S \geq \frac{n^2}{2}. \qquad (4)$$

Mặt khác S là số nguyên, nên từ (4) lại có:

$$S \geq \left[\frac{n^2+1}{2}\right]. \qquad (5)$$

	1	1	1	0	0	0
k	1	1	1	0	0	0
	1	1	1	0	0	0
	0	0	0	1	1	1
k	0	0	0	1	1	1
	0	0	0	1	1	1
		k			k	

H-4.15

Bây giờ ta xét khả năng sảy ra dấu bằng trong (5). Có hai trường hợp sau:

1. Nếu n chẵn ($n = 2k$). Khi đó, xét cách ghi số vào bảng như sau:

Dễ thấy cách ghi số trong trường hợp này thỏa mãn yêu cầu đề ra lúc này tổng S các số ghi trong bảng sẽ là $S = 2k^2$.

Mặt khác, ta có:

$$\left[\frac{n^2+1}{2}\right]=\left[\frac{4k^2+1}{2}\right]=\left[2k^2+\frac{1}{2}\right]=2k^2 \ .$$

Vậy ta có trường hợp này $S=\left[\frac{n^2+1}{2}\right]$.

2.Nếu n lẻ ($n = 2k + 1$).

Khi đó, xét cách ghi số vào bảng như sau:

Rõ ràng cách ghi số này thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Lúc này tổng các số ghi trong bảng là:

$$S = (k + 1)^2 + k^2 = 2k^2 + 2k + 1.$$

	k+1						
	1	1	1	1	0	0	0
k+1	1	1	1	1	0	0	0
	1	1	1	1	0	0	0
	1	1	1	1	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	1
k	0	0	0	0	1	1	1
	0	0	0	0	1	1	1

H-4.16

Lại có: $\left[\frac{n^2+1}{2}\right]=\left[\frac{(2k+1)^2+1}{2}\right]=\left[2k^2+2k+1\right]=2k^2+2k+1.$

Như vậy trong trường hợp này ta cũng có: $S=\left[\frac{n^2+1}{2}\right]$.

Kết hợp lại suy ra giá tri nhỏ nhất của tổng S cần tìm là $S=\left[\frac{n^2+1}{2}\right]$. □

<u>Ví dụ 4.16</u>: Trên một mặt phẳng có thể xếp được bảy đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng ba đoạn thẳng khác nhau được không?

Giải: Lập bảng như hình vẽ. Ta đánh dấu vào ô (i , j) cũng như ô (j , i) dấu × nếu đoạn thẳng thứ i cắt đoạn thẳng thứ j, và đánh dấu 0 nếu chúng không cắt nhau ($1 \le i \le 7$, $1 \le j \le 7$).

(Riêng các ô (k , k), $k=\overline{1,7}$ đều đánh số 0, vì coi như đoạn thẳng thứ k không cắt chính nó).

Giả sử mỗi đoạn thẳng cắt đúng ba đoạn thẳng khác.Như vậy, ở mỗi hàng đều có ba dấu ×. Vậy toàn bảng có 21 dấu ×.

	1	2	3	4	i	j	7
1	0						
2		0					
3			0				
4				0			
i					0	×	
j					×	0	
7							0

H- 4.17

Mặt khác ở bảng trên sẽ có 7 ô (k , k) có dấu 0 (xếp theo đường chéo chính). Như đã nói, nếu ô (i , j) có dấu ×, thì ô (j , i) (đối xứng với ô (i , j) qua đường chéo chính) cùng có dấu ×. Vậy số ô được đánh dấu × phải là số chẵn. Do 21 là số lẻ, nên ta gặp mâu thuẫn. Vậy giả thiết mỗi đoạn thẳng cắt đúng ba đoạn thẳng khác là sai.

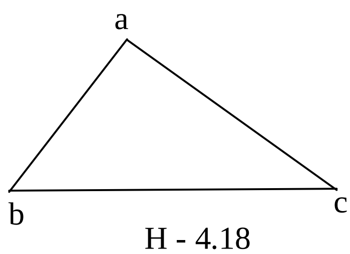
Bài toán đã cho có câu trả lời là phủ định. Không thể xếp được bảy đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng ba đoạn thẳng khác được. □

Ví dụ 4.17: Tại ba đỉnh *A*, *B*, *C* của tam giác *ABC* có ghi tương ứng ba số *a*, *b*, *c* không đồng thời bằng nhau. Người ta thực hiện phép thay đổi số tại ba đỉnh tam giác như sau:

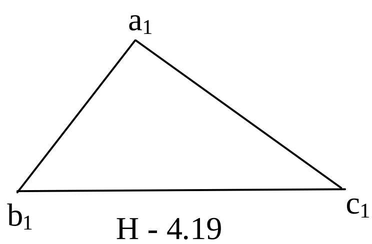
Nếu ở mỗi bước tại ba đỉnh có ghi ba số là (x ; y ; z), thì bước tiếp theo sẽ ghi ba số ($x + y - 2x$; $y + z - 2x$; $z + x - 2y$).

Chứng minh rằng xuất phát từ bộ ba (a ; b ; c), sau mỗi số lần thực hiện phép ghi trên, ta sẽ nhận được bộ ba số mà ít nhất một trong ba số của nó không nhỏ hơn 2006.

***Giải*:**



H - 4.18



H - 4.19

Với mỗi n = 1, 2,…kí hiệu (a_n ; b_n ; c_n) là bộ số ghi được sau lần thay thứ n.

Ta có hệ thức sau:

$$a_n + b_n + c_n = 0, \forall n = 1, 2,\ldots$$

Với Mỗi n = 1, 2,… đặt: $S_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2$.

Ta có:

$$S_{n+1} = a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2$$

$$=(a_n+b_n-2c_n)^2+(b_n+c_n-2a_n)^2+(c_n+a_n-2b_n)^2$$

$$=(a_n+b_n+c_n-3c_n)^2+(b_n+c_n+a_n-3a_n)^2+(c_n+a_n+b_n-3b_n)^2$$

$$=3(a_n+b_n+c_n)^2+9(c_n^2+a_n^2+b_n^2)-6(a_n+b_n+c_n)(c_n+b_n+a_n)$$

$$=9S_n.$$

(do $a_n+b_n+c_n=0,\ \forall$n =1,2,...) .

Như thế ta có: $S_{n+1}=9S_n$. (1)

Từ (1) ta đi đến với mọi n = 2 , 3,… thì :

$$S_n = 9^{n-1}S_1. \quad (2)$$

Do *a, b, c* không đồng thời bằng nhau, nên a_1, b_1, c_1 không đồng thời bằng 0. Thật vậy:

$$a_1 = b_1 = c_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-2c=0 \\ b+c-2a=0 \\ c+a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$$

Vì lẽ đó $S_1 = a_1^2+b_1^2+c_1^2>0$.

Do $S_1 > 0$, nên từ (2) suy ra: $\lim\limits_{x\to\infty} S_n=+\infty$. (3)

Từ (3) suy ra tồn tại k nguyên dương đủ lớn sao cho:

$$S_k \geq 3.(2.2006)^2. \quad (4)$$

Vì $S_k = a_k^2+b_k^2+c_k^2$, nên từ (4) theo nguyên lí Dirichlet suy ra trong ba số a_k^2, b_k^2, c_k^2 phải có ít nhất một số giả sử là a_k^2 mà:

$$a_k^2 \geq (2.2006)^2$$

$$\Rightarrow |a_k| \geq 2.2006. \quad (5)$$

Có hai khả năng sảy ra:

1. Nếu $a_k \geq 2.2006$, thì dĩ nhiên $a_k \geq 2006$,bài toán được giải quyết trong trường hợp này.

2. Nếu $a_k \leq -2.2006$, thì do $a_k + b_k + c_k = 0$, nên suy ra:

$$b_k + c_k \geq 2.2006. \qquad (6)$$

Từ (6) lại theo nguyên lí Dirichlet suy ra có ít nhất một trong hai số b_k, c_k (mà có thể giả sử đó là b_k) sao cho: $b_k \geq 2006$. Bài toán được giải hoàn toàn. □

<u>Ví dụ 4.18</u>: Cho một bảng hình chữ nhật kẻ ô vuông có 2005 hàng và 2007 cột. Kí hiệu (m, n) là ô vuông nằm ở giao của hàng thứ m và cột thứ n. Tô màu các ô vuông của bảng theo quy tắc sau: Lần thứ nhất tô ba ô vuông (r, s), $(r + 1, s + 1)$, $(r + 2, s + 2)$; với r, s là hai số cho trước thỏa mãn điều kiện $1 \leq r \leq 2005$ và $1 \leq s \leq 2007$. Từ lần thứ hai, mỗi lần tô đúng ba ô chưa có màu nằm cạnh nhau trong cùng một hàng hoặc cùng một cột. Hỏi bằng cách đó có thể tô màu được hết tất cả các ô vuông của bảng đã cho hay không?

Giải: Chia tất các ô vuông của bảng thành ba loại:

- Loại I: Gồm tất cả các ô (m, n) mà $(m - n) \equiv 0 \pmod 3$.

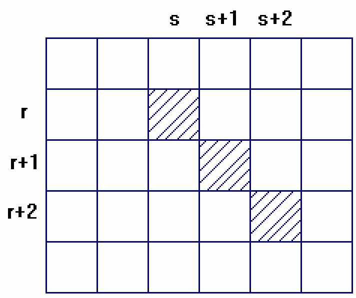
- Loại II: Gồm tất cả các ô (m, n) mà $(m - n) \equiv 1 \pmod 3$.

-Loại III: Gồm tất cả các ô (m, n) mà $(m - n) \equiv 2 \pmod 3$.

Do $2007 \vdots 3$ nên ở mỗi hàng ta đều có số ô ở mỗi loại là bằng nhau. Vì thế, ở toàn bảng số ô mỗi loại bằng nhau.

Rõ ràng kể từ lần thứ hai, trong mỗi lần tô màu, ta tô đúng một ô loại I, một ô loại II, một ô loại III (vì ba ô ở cùng một hàng hoặc cùng một cột mà lại đứng cạnh nhau).

Từ hai nhận xét trên suy ra, nếu tô màu được hết tất cả các ô của bảng, thì ở lần tô thứ nhất ta phải tô đúng một ô loại I, một ô loại II, một ô loại III.



H-4.20

Tuy nhiên do:

$$r - s = (r + 1) - (s + 1) = (r + 2) - (s + 2),$$

nên ba ô tô ở lần đầu đều cùng thuộc một loại.

Vì thế bài toán có câu trả lời phủ định: không thể tô màu được hết tất cả các ô vuông của bảng theo yêu cầu. □

Ví dụ 4.19: Hãy tìm số lượng ít nhất những mặt phẳng, mà nó chia khối lập phương không nhỏ hơn 300 phần.

Giải: Chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo *n*, kết luận rằng *n* đường thẳng chia mặt phẳng ra không quá *p*(*n*) = $\frac{n(n+1)}{2}+1$ phần, và nhận đúng *p*(*n*) khi mọi đường thẳng đều đôi một cắt nhau và không có ba đường nào có điểm chung. Tương tự quy nạp theo *n* , chứng minh được *n* mặt phẳng chia không gian ra không quá *q*(*n*) = $\frac{n^3+5n+6}{6}$ phần. *n* mặt phẳng chia đúng *q*(*n*) phần khi không có hai mặt phẳng nào song song với nhau và không có ba mặt phẳng nào có chung một đường thẳng và không có bốn mặt phẳng nào có một điểm chung. Vì *q*(12) = 299 < 300 < 378 = *q*(13), để chia không gian ra ít nhất 300 phần cần phải có 12 mặt phẳng. Dễ thấy rằng để chia một khối lập phương cũng phải cần số mặt phẳng như vậy. □

Ví dụ 4.20: Những ô của hình vuông kích thước 7×7 được tô bằng hai màu. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 21 hình chữ nhật với đỉnh cùng màu và với các cạnh song song với các cạnh của hình vuông.

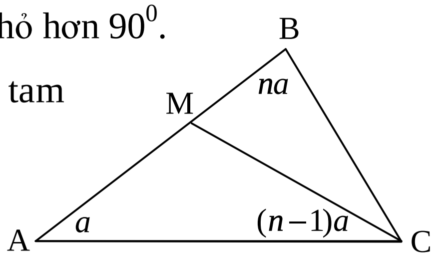
Giải: Ta cho màu được tô là trắng và đen. Cho một hàng, ta giả sử tồn tại *k* ô đen và 7- *k* ô trắng. Khi đó tồn tại.

$C_k^2 + C_{7-k}^2 = k^2 - 7k + 21 \geq 9$ = $k^2 - 7k + 21 \geq 9$, cặp ô cùng màu.Vậy tồn tại ít nhất 7.9 = 63 cặp ô cùng màu trên cùng hàng.

Tiếp theo tồn tại C_7^2 = 21 cặp cột. Vậy tồn tại 21.2 = 42 tổ hợp của màu và cặp cột. Với tổ hợp *i* = 1 đến 24, và giả sử tồn tại *ji* cặp trong cùng một tổ hợp, thì tồn tại ít nhất *ji* – 1 hình chữ nhật cho tổ hợp này. Vì tổng của *ji* ít nhất là 63, vậy tồn tại ít nhất $\sum_{i=1}^{42}(ji-1)\geq 63-42=21$. Từ đó suy ra tồn tại ít nhất 21 hình chữ nhật thoả mãn yêu cầu của đề bài.□

Ví dụ 4.21: Cho *ABC* là tam giác nhọn với $\hat{A} = n\hat{B}$ với *n* là một số nguyên dương. Chứng minh rằng tam giác này có thể tách thành những tam giác cân mà tất cả các cạnh bên của chúng đều bằng nhau.

Giải: Ta chứng minh mệnh đề với góc *A* nhỏ hơn 90^0.



H - 4.21

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo *n* mà tam giác *ABC* có thể cắt thành n tam giác cân mà những cạnh bằng nhau của nó đều bằng *AC*. Với *n* = 1 kết luân là hiển nhiên.

Giả sử kết luận đúng cho *n* – 1 và ta chứng minh nó cho *n*. Chọn *M* ∈ *AB* sao cho $\widehat{CMA}=\hat{A}$.

Khi đó tam giác *CMB* có:

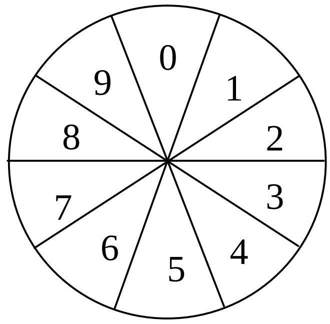
$$\widehat{MCB}=180^o-\widehat{CMB}-\widehat{CMB}=180^o-\left(180^o-n\hat{B}\right)=(n-1)\hat{B}$$

Do đó theo giả thiết quy nạp, tam giác này có thể tách thành *n – 1* tam giác cân có các cạnh bằng nhau và bằng *MC* = *CA*. Cộng thêm với tam giác *CAM* cho ta kết quả cắt tam giác *ABC*. □

Ví dụ 4.22: Một hình tròn chia thành 10 hình quạt. Mỗi hình quạt chứa một con rệp. Một lần tất cả các con rệp đồng thời chuyển sang hình quạt bên cạnh sao cho một con chuyển ngược chiều kim đồng hồ và cùng lúc đó những con rệp còn lại chuyển theo chiều thuận kim đồng hồ. Cứ lặp lại quá trình chuyển rệp như vậy. Có khả năng ở một bước nào đó tất cả các con rệp đều nằm trong một hình quạt hay không?

Giải: Đánh số các hình quạt tròn từ 0 đến 9 theo chiều kim đồng hồ. Mỗi con rệp tính điểm bằng số của hình quạt mà nó ở trong đó (thí dụ, con rệp nằm trong hình quạt thứ 5 thì con rệp đó được tính 5 điểm). Tại mỗi bước cộng điểm của cả 10 con rệp. Ở vị trí đầu tiên của 10 con rệp, mỗi con ở trong một hình quạt nên tổng só điểm là 0 + 1 + 2 +…+ 9 = 45.

Khi di chuyển theo chiều kim đồng hồ, thì số của mỗi con rệp sẽ tăng lên 1, hoặc giảm đi 9 (nếu trường hợp con rệp ở hình quạt thứ 9 chuyển theo chiều kim đồng hồ vào hình quạt thứ 0).



H – 4.23

Khi di chuyển theo chiều ngược kim đồng hồ, thì số của mỗi con rệp sẽ giảm đi 1, hoặc tăng lên 9 (nếu trường hợp con rệp ở hình quạt thứ 0 chuyển theo chiều ngược kim đồng hồ vào hình quạt thứ 9).

Ta có nhận xét sau:

Sau mỗi lần di chuyển thì tổng só điểm của các con rệp tăng hoặc giảm một số chẵn. Thật vậy, chỉ có thể sảy ra các trường hợp sau:

-Hoặc là có một con rệp chuyển đọng ngược chiều kim đồng hồ sang ô bên cạnh (không phải từ ô 0 sang ô 9), ***k*** con chuyển động cùng chiều kim đông hồ từ ô 9 sang ô 0, 9 – k con chuyển động cùng chiều kim đồng hồ sang ô bên cạnh (không phải từ ô 9 sang ô 0), ở đây 0 ≤ k ≤ 9. Khi đó tổng số điểm của 10 con rệp sau khi chuyển động thay đổi một lượng là:

$$9 - 9k + (9 - k) = 8 - 10k.$$

-Hoặc là có một con rệp chuyển động ngược chiều kim đồng hồ sang ô bên cạnh (không phải từ ô 0 sang ô 9), ở đây $0 \le k \le 9$. Khi đó tổng số điểm của 10 con rệp sau khi chuyển động thay đổi một lượng là: $-1 - 9k + (9 - k) = 8 - 10k$.

Vì 18 – 10k ; 8 –10k đều là số chẵn nên nhận xét được chứng minh.

Kí hiệu S_n là tổng số điểm của 10 con rệp ở bước n. Ta có S_1 = 45, nói riêng S_1 là số lẻ. Dựa vào nhân xét trên suy ra S_n là số lẻ với mọi n = 1, 2,…

Giả sử tai bước k nào đó của 10 con rệp đều nằm trong hình quạt thứ j. Lúc ấy ta có $S_k = 10j$. Nói riêng S_k là số chẵn. Ta nhận được điều mâu thuẫn với việc S_n là số lẻ với mọi n.

Vậy bài toán có câu trả lời là phủ định: Không có lúc nào thực hiện được phép di chuyển theo yêu cầu bài toán để cả 10 con rệp nằm trong cùng một hình quạt. □

Nhận xét. Trong bài này cái bất biến là : S_n là số lẻ với mọi n = 1,2,…

<u>Ví dụ 4.23</u>: Chứng minh rằng 2n điểm bất kỳ khác nhau trong đa giác lồi, tồn tại một phép cắt đa giác thành n+1 đa giác lồi sao cho 2n điểm nằm trên các cạnh của các đa giác này.

Giải: Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Với n = 1, chọn cách cắt được xác định bằng đường thẳng đi qua hai điểm này.

Ta giả sử mệnh đề đúng với tất cả các đa giác bên trong có chứa 2(n –1) điểm. Ta phải chứng minh mệnh đề với đa giác có 2n điểm ở trong. Ta cố định một đường thẳng d mà nó không giao với đa giác đã cho. Cho A là điểm mà nó gần d nhất và chọn B trong những điểm còn lại sao cho góc tạo bởi đường thẳng AB và d nhỏ nhất (nó có thể bằng không). Đường thẳng AB chia đa giác thành hai đa giác lồi p_1 và p_2 sao cho p_1 không chứa điểm trong là bất kỳ điểm nào từ 2n điểm, và p_2 chứa trong nó nhiều nhất 2n – 2 điểm từ các điểm đã cho. Sử dụng giả thiết quy nạp, suy ra p_2 có thể chia thành n đa giác chứa trên cạnh của chúng 2n – 2 điểm còn lại và đa giác này cùng với p_1 cho ta cách cắt đa giác cần tìm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Hữu Điển (2005), *Một số chuyên đề hình học tổ hợp*, NXB Giáo Dục.

[2] Vũ Đình Hòa (2006), *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi hình học tổ hợp*, NXB Giáo Dục.

[3] Phan Huy Khải (2007), *Giải tích lồi và các bài toán sơ cấp*, NXB Giáo Dục.

[4] Tập san Toán học tuổi trẻ các năm.

[5] Nguyễn Văn Vĩnh (2005), *23 chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp*, NXB Giáo Dục.