GS. TSKH. VÕ NHƯ CẦU

TÍNH KẾT CẤU

THEO PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

GS. VÕ NHƯ CẦU

TÍNH KẾT CẤU THEO PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN

- *Nội dung trình bày theo quan điểm thực dụng.*
- *Lý thuyết được minh hoạ bằng nhiều thí dụ tính toán.*
- *Bài tập kèm đáp án.*
- *Hơn 31 chương trình tính ma trận và kết cấu theo ngôn ngữ Turbo Pascal 7.0*

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2004

LỜI MỞ ĐẦU

Trong vòng nửa thế kỷ nay, lý thuyết ma trận đã được ứng dụng vào các ngành khoa học như toán, lý, cơ học v.v... Dạng ma trận có ưu điểm là giúp cho việc trình bày thuật toán được ngắn gọn, đơn giản. Đồng thời, do mối quan hệ chặt chẽ giữa các đại lượng liên quan, cung cấp được những thông tin đầy đủ về những điều cần biết trong tính toán và thiết kế. Mặt khác, nó rất thuận tiện cho việc lập trình để thực hiện quá trình tính toán trên máy tính điện tử.

Cuốn sách này ra đời nhằm mục đích phục vụ cho sinh viên đại học, sinh viên cao học, nghiên cứu sinh, cán bộ giảng dạy và kỹ sư công tác trong ngành Xây dựng. Sách được trình bày theo quan điểm thực dụng. Lý thuyết được minh họa bằng nhiều thí dụ tính toán, một số lý thuyết và định lý không đi sâu chứng minh về mặt toán học, để bạn đọc dễ tiếp thu. Ngoài phương pháp chuyển vị là nội dung chủ yếu, còn có phương pháp lực, phương pháp phân phối mô men được đơn giản hóa, ma trận hóa và được lập trình. Nội dung sách phản ánh những thành tựu đã được ứng dụng trong lĩnh vực tính kết cấu và một số công trình nghiên cứu của tác giả. Cuốn sách, có các bài tập kèm đáp án và một phụ lục trình bày hơn 30 chương trình tính ma trận và tính kết cấu theo ngôn ngữ Turbo – Pascal 7.0. Sở dĩ tác giả chọn ngôn ngữ này vì nó gần với cách nói của người, rõ ràng, dễ hiểu, hơn nữa đang được giảng dạy ở các trường đại học.

Sách gồm các chương sau:

Chương một: Các kiến thức cơ bản về đại số ma trận.

Chương hai: Hệ giàn.

Chương ba: Hệ phẳng có nút cứng.

Chương bốn: Hệ dầm giao nhau.

Chương năm: Hệ gồm các phần tử không cùng thể loại.

Chương sáu: Hệ chịu tác dụng của các nguyên nhân ngoài tải trọng.

Chương bảy: Dạng ma trận của bài toán ổn định tròn hệ phẳng có nút cứng.

Chương tám: Dạng ma trận của bài toán dao động trong hệ phẳng có nút cứng.

Chương chín: Hệ không gian có nút cứng.

Chương mười: Dạng ma trận của phương pháp lực.

Chương mười một: Dạng ma trận của phương pháp phân phối mô men.

Do các nguyên nhân chủ quan và khách quan, sự xuất hiện các thiếu sót là điều không tránh khỏi, mong bạn đọc phê bình và góp ý.

Tác giả chân thành cảm ơn Ban biên tập Nhà xuất bản Xây dựng, đã tham gia biên tập và cho xuất bản bản thảo. Đặc biệt, tác giả tỏ lòng cảm ơn biên tập viên Trần Cường, đã nhiệt tình giúp đỡ và cổ vũ, để hoàn thành công việc đầy khó khăn.

Tác giả

Chương một
CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ ĐẠI SỐ MA TRẬN

Nội dung chương này trình bày các khái niệm về ma trận, các phép tính ma trận, các tính chất và định lý liên quan để áp dụng vào bài toán giải hệ phương trình tuyến tính, bài toán tính nội lực và chuyển vị, bài toán ổn định, bài toán dao động v.v...

§1.1. Định nghĩa về ma trận, các loại ma trận

1.1.1. Định nghĩa

Ma trận là một bảng hình chữ nhật hoặc hình vuông, trong đó các phần tử được xếp theo thứ tự của hàng và cột (xem bảng a). Một phần tử có 2 chỉ số i và j: chỉ số đầu biểu thị số thứ tự của hàng, chỉ số thứ 2 biểu thị số thứ tự của cột. Chẳng hạn $a_{2,3}$ là phần tử của ma trận A nằm trên hàng thứ 2 và cột thứ 3. Ma trận A cũng có thể viết dưới dạng rút gọn $[a_{ij}]$.

Cấp của ma trận được biểu thị bằng kí hiệu $m \times n$, m là số hàng của ma trận, n là số cột của ma trận. Chẳng hạn ma trận cấp 3×4 có 3 hàng và 4 cột.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m3} \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

1.1.2. Các loại ma trận

Ma trận được chia thành các loại cơ bản như sau:

– *Ma trận cột* là ma trận cấp m × 1 (chỉ có một cột)

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

Ma trận cột còn có tên là *véc tơ cột.*

– *Ma trận hàng* là ma trận cấp 1 × n (chỉ có một hàng):

$$C = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13} \quad \dots \quad c_{1n}]$$

Ma trận hàng còn có tên là véc tơ hàng.

– *Ma trận vuông* là ma trận cấp n × n (số hàng bằng số cột), thường được gọi là ma trận vuông cấp n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

– *Đường chéo chính* là đường chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

– *Ma trận chéo* là ma trận vuông trong đó $a_{ii} \neq 0$ (i = 1, 2, ..., n), $a_{ij} = 0$ với $i \neq j$ (toàn bộ các phần tử đều triệt tiêu trừ các phần tử trên đường chéo chính).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

– *Ma trận đơn vị* là ma trận vuông trong đó $a_{ii} = 1$ (i = 1, 2, ..., n), $a_{ij} = 0$ với $i \neq j$ (các phần tử trên đường chéo chính đều bằng đơn vị, các phần tử còn lại đều bằng không).

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận đơn vị thường được kí hiệu là **I**

– *Ma trận không* (kí hiệu là ma trận **O**) là ma trận trong đó toàn bộ các phần tử đều bằng 0.

– *Ma trận tam giác trên* (hoặc ma trận tam giác dưới) là ma trận vuông trong đó toàn bộ các phần tử dưới đường chéo chính (hoặc trên đường chéo chính) triệt tiêu. Thí dụ:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & s_{n4} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \text{ hoặc : } S = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & . & s_{nn} \end{bmatrix}$$

– *Chuyển vị* của ma trận A là ma trận A' trong đó hàng **i** là cột i của A và cột j là hàng j của A.

Thí dụ:

$$\left[a'_{ij}\right] = \left[a'_{ji}\right] \tag{1.1}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cần chú ý rằng nếu cấp của ma trận A là $m \times n$ thì cấp của ma trận A' là $n \times m$.

– *Ma trận đối xứng* là ma trận vuông trong đó $a_{ij} = a_{ji}$. Chẳng hạn ma trận sau đây là ma trận đối xứng:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dễ dàng chứng minh được rằng nếu A là ma trận đối xứng thì A = A'.

– *Ma trận phản đối xứng* là ma trận vuông trong đó $a_{ij} = -a_{ij}$. Dễ dàng chứng minh được rằng A = –A' và toàn bộ các phần tử trên đường chéo chính đều triệt tiêu.

§1.2. Định thức của ma trận

1.2.1. Định nghĩa

Định thức của ma trận vuông A được kí hiệu như sau:

$$|A| \text{ hoặc } \mathrm{Det}\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.2)$$

Chú ý: ở đây dùng kí hiệu *đoạn thẳng đứng* để phân biệt với dấu ngoặc vuông [ ] khi biểu thị ma trận.

Định thức của ma trận vuông cấp 2 là một số thuần túy được tính theo công thức:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} \qquad (1.3)$$

Đối với định thức cấp n > 2, dùng phương pháp Laplace để triển khai định thức theo một *hàng* bất kì hoặc theo một *cột* bất kì của ma trận để cuối cùng được định thức của một ma trận vuông cấp 2.

Ta tính định thức của một ma trận vuông cấp n theo các công thức sau:

Khi triển khai theo *hàng i* (bất kì)

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (1.4a)$$

Khi khai triển theo *cột j* (bất kì):

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (1.4b)$$

Trong đó A_{ij} là *phần phụ đại số* của phần tử a_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij} \qquad (1.5)$$

M_{ij} là định thức của ma trận vuông cấp (n−1) có được bằng cách gạch hàng thứ i và cột thứ j trong ma trận A.

Thí dụ:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ (sau khi gạch hàng thứ 2 và cột thứ 1)

$$A_{21} = (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Theo (1.4b), lần lượt tiến hành khai triển các định thức theo cột thứ nhất, ta được kết quả:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \left(a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \right)$$

$$- a_{21} \left(a_{12} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \right)$$

$$+ a_{31} \left(a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \right)$$

$$- a_{41} \left(a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \right)$$

Để được kết quả cuối cùng, ta tính định thức của các ma trận cấp 2 theo (1.3).

1.2.2. Một số tính chất chủ yếu của định thức

1) $|A| = |A'|$

2) Sau khi hoán vị 2 hàng bất kì (hoặc cột bất kì), giá trị tuyệt đối của định thức không thay đổi nhưng dấu thay đổi.

3) Nếu toàn bộ các phần tử tương ứng trong 2 hàng (hoặc 2 cột) bất kì hoàn toàn giống nhau thì định thức bằng không.

4) Nếu toàn bộ các phần tử trong một hàng (hoặc một cột) bất kì đều triệt tiêu thì định thức bằng không.

5) Nhân số γ với toàn bộ các phần tử trong một hàng (hoặc cột) bất kì của định thức tương đương với việc nhân số đó với định thức ban đầu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \gamma a_{21} & \gamma a_{22} & \gamma a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6) Nếu mỗi phần tử trong một hàng i (hoặc cột j), bất kì của định thức là tổng của 2 số thì định thức bằng tổng của 2 định thức, định thức thứ nhất có hàng i (hoặc cột j) ứng với số thứ nhất, định thức thứ hai có hàng i (hoặc cột j) ứng với số thứ hai, các hàng (hoặc cột) còn lại trong 2 định thức này vẫn không thay đổi. Thí dụ:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ (d_1 + d_2) & (e_1 + e_2) & (f_1 + f_2) \\ g & g & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g & g & i \end{vmatrix}$$

7) Nếu nhân một số với một phần tử của hàng (hoặc cột) này của định thức rồi cộng với mỗi phần tử tương ứng của hàng (hoặc cột) khác thì định thức vẫn không thay đổi:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ (d + \gamma a) & (e + \gamma b) & (f + \gamma c) \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

8) $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 \quad i \neq j \qquad (1.6)$$

A_{jk} – phần phụ đại số của phần tử tương ứng a_{jk} thuộc hàng thứ j ($j \Rightarrow i$). Cần chú ý rằng khi j = i, hệ thức (1.6) trở thành định thức của ma trận A.

Ngoài ra, căn cứ vào (1.4b), ta có thể dễ dàng chứng minh được các kết quả sau:

– Định thức của một ma trận tam giác bằng tích của các phần tử trên đường chéo chính.

– Định thức của ma trận chéo bằng tích của các phần tử trên đường chéo chính.

– Định thức của ma trận đơn vị bằng 1.

1.2.3. Hạng của ma trận. Tính chất suy biến, không suy biến của ma trận

Giả sử từ một ma trận A cấp n, ta nhặt ra tất cả các ma trận cấp k ($k \leq n$) được tạo thành bởi k hàng bất kì và k cột bất kì của ma trận a. Ta gọi định thức của ma trận cấp k này là định

thức cấp k. Lần lượt cho k biến thiên từ n, n – 1, n – 2... Ta định nghĩa *hạng của ma trận A* (được kí hiệu là r) là cấp cao nhất của định thức khác không.

Thí dụ:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow r = 3 \quad \text{vì} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow r = 2 \quad \text{vì} \quad |B| = 0 \quad \text{và} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Khi $|A| \neq 0$, ta gọi ma trận A là *không suy biến*.

Khi $|A| = 0$, ta gọi ma trận A là *suy biến*.

§1.3. Phép cộng và trừ ma trận

1.3.1. Định nghĩa:

Cho 2 ma trận cùng cấp: $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$

Ta có ma trận A bằng ma trận B khi $a_{ij} = b_{ij}$:

$$A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \tag{1.7}$$

Tổng hoặc hiệu của 2 ma trận A và B cùng cấp là ma trận cùng cấp $C = [c_{ij}]$ trong đó $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$;

$$A \pm B = C \Rightarrow [c_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{21} \pm b_{21} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

1.3.2. Một số tính chất của phép cộng hoặc trừ ma trận

Cho 3 ma trận cùng cấp A, B, C và các số α, β. Ta có các tính chất sau:

1) $A + B = B + A$

2) $A - (B + C) = (A - B) - C$

3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta.A$

5) $\alpha(\beta A) = \alpha.\beta.A$

6) $(A + B)' = A' + B'$

7) $|A + B| \neq |A| + |B|$

Thí dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \quad |A| + |B| = 1 + 1 = 2$$

§1.4. Phép nhân ma trận

1.4.1. Phép nhân một số với một ma trận

Cho một ma trận $A = [a_{ij}]$ và một số γ . Sau khi nhân số γ với ma trận A, ta được ma trận C:

$$\gamma.A = C = [c_{ij}] \text{ trong đó } c_{ij} = \gamma.a_{ij} \tag{1.9}$$

Nói một cách khác, nhân một số với ma trận A có nghĩa là nhân số đó với toàn bộ các phần tử của ma trận A.

1.4.2. Phép nhân 2 ma trận

Cho một ma trận $A = [a_{ij}]$ cấp $m \times p$ và một ma trận $B = [b_{ij}]$ cấp $p \times n$. Tích của 2 ma trận A và B là một ma trận $C = [c_{ij}]$ cấp $m \times n$ trong đó:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj} \tag{1.10}$$

Nói một cách khác, phần tử nằm trên hàng i và cột j của ma trận C là tổng của tích của các phần tử nằm trên hàng i của ma trận A lần lượt nhân với các phần tử tương ứng nằm trên cột j của ma trận B.

$$C = AB = \underset{(\text{cấp } m \times p)}{\begin{bmatrix} a_{11} & . & . & a_{1p} \\ a_{21} & . & . & a_{2p} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mp} \end{bmatrix}} \times \underset{(\text{cấp } p \times n)}{\begin{bmatrix} b_{11} & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{p1} & . & . & b_{pn} \end{bmatrix}} = \underset{(\text{cấp } m \times n)}{\begin{bmatrix} c_{11} & . & . & c_{1n} \\ c_{21} & . & . & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & . & . & c_{mn} \end{bmatrix}}$$

Thí dụ:

$$\underset{\text{cấp } 3\times 3}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} \cdot \underset{\text{cấp } 3\times 2}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}} = \underset{(\text{cấp } 3\times 2)}{\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}) \\ (a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}) & (a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}) \end{bmatrix}}$$

Qua (1.10), ta thấy rằng để có thể thực hiện được phép nhân 2 ma trậnA và B, số hàng của B bắt buộc phải bằng số cột của A. Đồng thời, số hàng của C bằng số hàng của A, số cột của C bằng số cột của B.

1.4.3. Một số tính chất chủ yếu của phép nhân ma trận

Phép nhân ma trận có những tính chất như sau:

1) $(A.B.C) = A(B.C)$

$(A + B)C = AC + BC$

$A.(B + C) = AB + AC$

(Tính chất kết hợp và phân bố)

2) $$\left.\begin{aligned} &(AB)' = B'A' \\ &(ABC \ldots MN)' = N'M' \ldots C'B'A' \end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

3) Trừ một số trường hợp đặc biệt, $AB \neq BA$ (1.12)

Thí dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

Điều này chứng tỏ phép nhân ma trận *không có tính chất giao hoán* nghĩa là khi thực hiện phép nhân ma trận, cần phải giữ nguyên vị trí của các thừa số. Để biểu thị thứ tự của các thừa số, thường dùng các tên gọi chẳng hạn như:

Nhân bên phải A với B $\Rightarrow$ A.B

Nhân bên trái A với B $\Rightarrow$ B.A

4) $I.A = A.I = A$ (1.13)

I – ma trận đơn vị; A – ma trận bất kì.

Ngoài ra, cần chú ý thêm một số tính chất như sau:

a) AB = 0, không nhất thiết A = 0 hoặc B = 0

Thí dụ:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

b) Nếu AB = AC, không nhất thiết B = C. Thí dụ:

$$[3\ 2] \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = [3\ 2] \times \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) Nếu B là ma trận *đối xứng* cấp m, A là ma trận bất kì cấp m × n đồng thời BA ≠ 0, A'B ≠ 0 thì tích:

$$C = A'.B.A \tag{1.14}$$

là ma trận đối xứng cấp n.

d) Nếu A và B là 2 ma trận đối xứng, thông thường ma trận C = A.B không có tính chất đối xứng.

e) Tích của 2 ma trận tam giác cùng loại là ma trận tam giác cùng loại.

Thí dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

f) Nếu $C = \gamma A \Rightarrow |C| \neq \gamma |A|$

g) $$|A.B.C.D| = |B.C.A.D| = ... = |A|.|B|.|C|.|D| \tag{1.15}$$

Trong đó A, B, C, D là những ma trận vuông cùng cấp. Hệ thức (1.15) cho thấy định thức của tích các ma trận vuông cùng cấp bằng tích các định thức của các ma trận vuông đó, thứ tự các thừa số trong tích ma trận có thể sắp xếp một cách tùy ý.

§1.5. Các phép tính ma trận chia khối

Sự chia khối ma trận làm cho cách trình bày thuật toán được gọn hơn và góp phần đơn giản hóa công việc tính toán. Dưới đây, giới thiệu khái niệm về sự chia khối ma trận và các phép tính ma trận chia khối.

1.5.1. Sự chia khối ma trận

Một ma trận bất kì có thể được chia thành nhiều khối, mỗi khối tạo thành một ma trận con. Cách chia khối tùy thuộc vào các yêu cầu cụ thể. Trong quá trình thực hiện các phép tính ma trận chia khối, các ma trận con này được xem như các phần tử mới (thường được kí hiệu tô đậm) của ma trận gốc. Thí dụ:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right]$$

Trong đó:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix}$$

Ma trận A ở trên được chia thành 4 khối tạo thành 4 ma trận con A_1, A_2, A_3, A_4. Trong quá trình tính toán, các ma trận này sẽ được xem như các phần tử mới của ma trận A.

1.5.2. Phép cộng ma trận chia khối

Trong phép cộng ma trận chia khối, việc chia khối cần được thực hiện sao cho các ma trận con tương ứng phải có cấp như nhau:

Thí dụ:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ \hline -3 & 8 & -1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ \hline 8 & -3 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ \hline A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{array}\right] = 5\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

1.5.3. Phép nhân ma trận chia khối

Trong phép nhân ma trận chia khối, việc chia khối cần được thực hiện sao cho số cột ứng với các phần tử mới trong ma trận đầu phải bằng số hàng ứng với các phần tử mới trong ma

trận thứ hai. Ngoài ra, vì các phần tử mới là các ma trận con, việc chia khối cũng phải phù hợp với quy tắc nhân 2 ma trận con với nhau. Thí dụ:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix};\ C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Trong đó: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ (1.16)

Cách chia khối như trên là đúng vì a có n cột, ma trận B có n hàng. Phép nhân tiến hành như thường lệ, kết quả là ma trận C cấp m × p. Theo (1.16), các ma trận a_{ik} và b_{kj} được nhân với nhau nên khi phân khối, cần chú ý đến số cột của a_{ik} phải bằng số hàng của b_{kj}.

Thí dụ:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right] (m = 2,\ n = 2);\ B = \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 6 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_{11} \\ \hline b_{21} \end{array}\right] \quad (n = 2,\ p = 1)$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + [2].\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 10 \end{bmatrix}$$

$$C = \left[\begin{array}{cc} 12 & 6 \\ 4 & 3 \\ \hline 14 & 10 \end{array}\right]$$

15.4. Ma trận khối chéo

Một ma trận vuông chia khối được gọi là *ma trận khối chéo* khi các ma trận con được phân bố trên đường chéo chính, các ma trận con còn lại là những ma trận không. Thí dụ:

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{33} \end{bmatrix}$$

Kết quả của phép nhân 2 ma trận khối chéo cùng cấp là một ma trận khốichéo cùng cấp trong đó mỗi phần tử trên đường chéo chính là tích của các phần tử tương ứng trong các ma trận khối chéo được nhân với nhau. Thí dụ:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & & & 0 \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & & & \\ & c_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Trong đó: $c_{11} = a_{11}.b_{11}$; $c_{22} = a_{22}.b_{22}$; ...$c_{nn} = a_{nn}.b_{nn}$ (1.17)

1.5.5. Chuyển vị của ma trận khối

Chuyển vị của ma trận chia khối A là ma trận chia khối A' trong đó hàng i là cột i của A, cột j là hàng j của A đồng thời các ma trận con đều được chuyển vị:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{21} & \dots & a'_{n1} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{21} \\ . & . & . & . \\ a'_{m1} & a'_{m3} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

§.1.6. Nghịch đảo của ma trận

Trong quá trình giải hệ phương,trình đại số tuyến tính, ta thường gặp nghịch đảo của ma trận. Dưới đây, giới thiệu khái niệm về nghịch đảo của ma trận và một số tính chất của nó.

1.6.1. Định nghĩa

Cho ma trận vuông A không suy biến (tức $|A| \neq 0$). Ta gọi ma trận vuông B là *nghịch đảo* của A nếu thỏa mãn điều kiện:

$$A.B = I \qquad (1.18)$$

Trong đó, I là ma trận đơn vị. Nghịch đảo của A được kí hiệu là A^{-1} do đó (1.18) có dạng:

$$A.A^{-1} = 1 \tag{1.19}$$

Cách tìm nghịch đảo của ma trận như sau:

Theo (1.4a), ta có hệ thức (xem mục 1.2.1):

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \tag{1.4a}$$

Trong đó: |A| là định thức của ma trận A; A_{ij} là phần phụ đại số của phần tử a_{ij}.

Theo (1.6), ta có hệ thức (xem mục 1.2.2):

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 \qquad i \neq j \tag{1.6}$$

A_{jk} là phần phụ đại số của phần tử a_{jk} khác hàng với a_{ik}.

Kết hợp (1.4a) với (1.6), ta có:

$$\sum a_{ik} \cdot \frac{A_{jk}}{|A|} \begin{cases} = 1 & \text{khi} \quad i = j \\ = 0 & \text{khi} \quad i \neq j \end{cases} \tag{1.20}$$

Nếu viết (1.20) dưới dạng khai triển, ta có:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & 1 & & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = I \tag{1.21}$$

Vậy theo (1.19), ta có:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

Theo (1.22), ta tìm nghịch đảo của ma trận theo các bước sau:

– Thay các phần tử của ma trận A bằng các pần phụ đại số tương ứng.

– Chuyển vị ma trận vừa được thay thế, ta được ma trận có kí hiệu là adj A:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \text{adj}\,A \qquad (1.23)$$

– Chia adj A cho |A|, ta được A^{-1}.

Đối với các ma trận cấp thấp, cách tìm nghịch đảo ma trận theo cách trình bày trên không phức tạp lắm. Đối với những ma trận cấp cao, thông thường không dùng phương pháp đó. Một số phương pháp đơn giản hơn sẽ được trình bày trong phần sau.

Thí dụ 1.1: Cho ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Tìm nghịch đảo của ma trận A.

Giải:

Trước hết, ta tính các phần phụ đại số của toàn bộ các phần tử trong ma trận A theo (1.5). Kết quả:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = +3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = +10, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +2$$

Theo (1.23), ta có:

$$\text{adj } A = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -3 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

Theo (1.22), ta có:

$$|A| = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -3 & 10 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -3 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1.6.2. Một số tính chất về nghịch đảo của ma trận

1. Nghịch đảo của ma trận có tính chất duy nhất. Thực vậy, nếu X là một ma trận sao cho:

$$X.A = I$$

Thì $X.A.A^{-1} = I.A^{-1} = A^{-1}$ hay $XI = A^{-1}$

tức là: $X = A^{-1}$

2. Nếu A, B, C... là các ma trận vuông cùng cấp thì nghịch đảo của tích của chúng bằng tích của các nghịch đảo của chúng nhưng số thứ tự đảo ngược lại:

$$\left.\begin{aligned} (AB)^{-1} &= B^{-1}.A^{-1} \\ (A.B.C...N)^{-1} &= N^{-1}...C^{-1}.B^{-1}.A^{-1} \end{aligned}\right\} \quad (1.24)$$

CM: Giả sử X = AB. Nhân bên trái 2 vế của đẳng thức này với X^{-1}, ta có:

$$I = X^{-1}.AB$$

Nhân bên phải 2 vế với B^{-1}:

$$B^{-1} = X^{-1}.A.B.B^{-1} = X^{-1}.A.$$

Nhân bên phải 2 vế với A^{-1}:

$$B^{-1}.A^{-1} = X^{-1}.A.A^{-1} = X^{-1}. \text{ Vậy: } B^{-1}A^{-1} = (A.B)^{-1}$$

3. Định thức của nghịch đảo của ma trận bằng nghịch đảo của định thức:

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

CM: Theo (1.15) (xem §1.4), ta có:

$$|A^{-1}|.|A| = |A^{-1}.A| = |I| = 1 \text{ vậy}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1} \qquad (1.25)$$

4) Chuyển vị của nghịch đảo của ma trận bằng nghịch đảo của chuyển vị của ma trận.

$$(A^{-1})' = (A')^{-1} \qquad (1.26)$$

Thật vậy:

$$(A^{-1})'.A' = (A.A^{-1})' = I' = I$$

Vậy: $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

5. Nghịch đảo của ma trận đối xứng là một ma trận đối xứng. Giả sử A là ma trận đối xứng. Theo (1.26), ta có:

$(A')^{-1} = (A^{-1})'$ nhưng vì A đối xứng nên

$(A')^{-1} = A^{-1}$ vậy

$A^{-1} = (A^{-1})' \Rightarrow A^{-1}$ là ma trận đối xứng.

6. Nghịch đảo của ma trận chéo là ma trận chéo trong đó mỗi phần tử trên đường chéo chính là nghịch đảo của phần tử tương ứng trong ma trận gốc. Thí dụ:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & & \\ & \frac{1}{a_{22}} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \qquad (1.27)$$

7. Nghịch đảo của ma trận khối chéo là một ma trận khối chéo trong đó các ma trận con trên đường chéo chính là nghịch đảo của các ma trận con tương ứng trong ma trận gốc. Thí dụ:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & & & \\ & a_{22}^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} \qquad (1.28)$$

8. Nghịch đảo của ma trận tam giác A (tam giác trên hoặc tam giác dưới) là ma trận tam giác B cùng loại trong đó các phần tử trên đường chéo chính là nghịch đảo của các phần tử tương ứng trên đường chéo chính của A. Chứng minh điều này như sau:

Theo định nghĩa, A.B = I:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdot & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdot & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdot & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdot & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và so sánh với các số ở vế phải, ta được các kết quả:

$$a_{11}.b_{11} = 1 \Rightarrow b_{11} = \frac{1}{a_{11}}; b_{12} = 0; b_{13} = 0; \ldots\ b_{1n} = 0$$

$$a_{21}.b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \Rightarrow b_{21} = \frac{-a_{21}b_{11}}{a_{22}}$$

$$a_{21}.b_{12} + a_{22}b_{22} = 1 \Rightarrow b_{22} = \frac{1}{a_{22}}$$

$$a_{21}.b_{13} + a_{22}b_{23} = 0 \Rightarrow b_{23} = 0 \ldots$$

$$a_{21}.b_{2n} + a_{22}b_{2n} = 0 \Rightarrow b_{2n} = 0 \ldots$$

Bằng cách thực hiện các phép nhân tương tự, ta được kết quả cuối cùng:

Nếu A là ma trận tam giác *dưới*:

$$\left.\begin{aligned} & b_{ij} = 0 \ (i < j) \\ & b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}} = (i = j) \\ & b_{ij} = \frac{-\sum_{k=j}^{i-1} a_{ik} b_{kj}}{a_{ii}} = (i > j) \end{aligned}\right\} \qquad (1.29)$$

Nếu A là ma trận tam giác *trên*, ta có các công thức tương tự:

$$\left.\begin{aligned} & b_{ij} = 0 \ (i > j) \\ & b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}} = (i = j) \\ & b_{ij} = \frac{-\sum_{k=i+1}^{j} a_{ik} b_{kj}}{a_{ii}} \ (i < j) \end{aligned}\right\} \qquad (1.30)$$

Thí dụ 1.2: Tìm nghịch đảo của ma trận tam giác trên:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 8 \\ & -4 & 1 & -4 \\ & & 1 & 1 \\ & & & -\frac{45}{4} \end{bmatrix}$$

Giải:

Theo (1.30), tính được:

$$b_{34} = -\frac{a_{34} b_{44}}{a_{33}} = \left\{\frac{1(-4/45)}{1}\right\} = \frac{4}{45}$$

$$b_{24} = -\frac{a_{23} b_{34} + a_{24} b_{44}}{a_{22}} = -\left\{\frac{1 \times 4/45 + 4 \times 4/45}{-4}\right\} = \frac{1}{9}$$

$$b_{23} = -\frac{a_{23} b_{33}}{a_{22}} = -\frac{1 \times 1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$b_{14} = -\frac{a_{12} b_{24} + a_{13} b_{34} + a_{14} b_{44}}{a_{11}} = -\left\{\frac{6 \times 1/9 + 2 \times 4/45 + 8(-4/45)}{4}\right\} = -\frac{1}{30}$$

$$b_{13} = -\frac{a_{12} b_{23} + a_{13} b_{33}}{a_{11}} = -\frac{6 \times (1/4) + 2 \times 1}{4} = -\frac{7}{8}$$

$$b_{12} = -\frac{a_{12} b_{22}}{a_{11}} = -\left\{\frac{6 \times (-1/4)}{4}\right\} = -\frac{3}{8}, \text{ vậy:}$$

$$A^{-} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{-7}{8} & \frac{-1}{30} \\ 4 & & & \\ & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ & & 1 & \frac{4}{45} \\ & & & \frac{4}{45} \end{bmatrix}$$

§1.7. Hệ phương trình đại số tuyến tính

Trong tính toán kết cấu, ta thường gặp một hệ phương trình đại số tuyến tính:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (1.31)$$

Hệ phương trình trên có thể viết dưới dạng ma trận:

$$AX = B \qquad (1.32)$$

Trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (1.33)$$

$x_1, x_2, \ldots x_n$ là các biến; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số hạng tự do; a_{ik} là các hằng số ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$).

Giả sử ma trận A không suy biến ($|A| \neq 0$), ta giải phương trình ma trận (1.32) bằng cách nhân bên trái 2 vế của nó với A^{-1}:

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \quad \Rightarrow \quad I.X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}.B \qquad (1.34)$$

I – ma trận đơn vị

Hệ thức (1.34) cho thấy muốn tìm giá trị của các biến $x_1, x_2, ..., x_n$, ta phải nghịch đảo ma trận A là ma trận các hệ số của các biến.

Đối với các ma trận cấp cao, việc tính toán rất phức tạp, khối lượng tính toán rất lớn. Dưới đây, trình bày một số phương pháp nghịch đảo ma trận được sử dụng nhiều trong thực tế.

Ngoài ra, còn có một số phương pháp khác có thể giải được hệ phương trình (1.32) mà không cần nghịch đảo ma trận. Đó là phương pháp Gauss hoặc phương pháp tính lặp.

1.7.1. Phương pháp Gauss

1.7.1.1. Trường hợp ma trận bất kì

Thực chất của phương pháp Gauss là khử dần các phần tử của ma trận A sao cho cuối cùng nó trở thành một ma trận tam giác trên. Quá trình chia làm nhiều vòng. Ở mỗi vòng tính, bắt đầu từ hàng thứ 2 của ma trận, ta lấy hàng đó trừ đi hàng thứ nhất nhân với phần tử đầu tiên của hàng đó và chia cho phần tử đầu tiên của hàng đầu.

Sau vòng tính thứ nhất, ta có:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & . & . & . & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & . & . & . & a_{3n}^{(1)} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & . & . & . & a_{nm}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Sau vòng tính thứ hai, ta có:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & . & . & . & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & . & . & . & a_{3n}^{(2)} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & . & . & . & a_{nm}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Tiếp tục các vòng tính như trên, cuối cùng ta có:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(n-2)} \end{bmatrix}$$

Các số trong dấu ngoặc biểu thị số thứ tự vòng tính.

Sau khi thực hiện các vòng tính như trên đối với ma trận A và ma trận B (các số hạng tự do), ta có hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & & a_{2n}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & & a_{3n}^{(2)} \\ 0 & & & & \\ \text{(Các phần tử còn lại} & & & & \\ \text{triệt tiêu)} & & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Thuật toán có thể tóm tắt một cách tổng quát như sau:

Ứng với mỗi vòng tính:

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{sj}^{(k-1)} \times \frac{a_{is}^{(k-1)}}{a_{ss}^{(k-1)}} \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - b_s^{(k-1)} \times \frac{a_{is}^{(k-1)}}{a_{ss}^{(k-1)}} \\ k &= 1,2,\ldots n-1 \\ i &= k+1, k+2,\ldots n \\ j &= k+1, k+2,\ldots n \end{aligned}\right\} \qquad (1.35)$$

Các ẩn số tính như sau:

$$\left.\begin{aligned}
&x_n = b_n^{(n-1)} \Big/ a_{nn}^{(n-1)} \\
&x_{n-1} = \left(b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n\right) \Big/ a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \\
&x_j = \left(b_j^{(j-1)} - a_{j,n}^{(j-1)} x_n - \dots - a_{j,j+1}^{(j-1)} X_{j+1}\right) \Big/ a_{jj}^{(j-1)} \\
&j = n-2, n-3, \dots 1
\end{aligned}\right\} \qquad (1.36)$$

Chú thích: Các công thức trên xuất phát từ giả thiết các phần tử trên đường chéo chính của ma trận A được sắp xếp sao cho chúng đều không triệt tiêu.

Thí dụ 1.3: Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 4 \\
2x + 3y + z &= 9 \\
x - y - z &= -2
\end{aligned}$$

Giải:

Đưa ma trận các hệ số về dạng tam giác (công thức 1.35)

Vòng tính 1:

$$a_{22}^{(1)} = 3 - 1*2/1 = 1 \qquad a_{23}^{(1)} = 1 - 1*2/1 = -1 \qquad b_2^{(1)} = 9 - 4*2/1 = 1$$
$$a_{32}^{(1)} = -1 - 1*1/1 = -2 \qquad a_{33}^{(1)} = -1 - 1*1/1 = -2 \qquad b_3^{(1)} = -2 - 4*1/1 = -6$$

Sau vòng tính 1, ma trận các hệ số và các số hạng tự do có dạng:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Vòng tính 2: $a_{33}^{(2)} = -2 - (-1)*(-2)/1 = -4 \quad b_3^{(2)} = -6 - 1*(-2)/1 = -4$

Sau vòng tính 2, ma trận các hệ số và các số hạng tự do có dạng:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

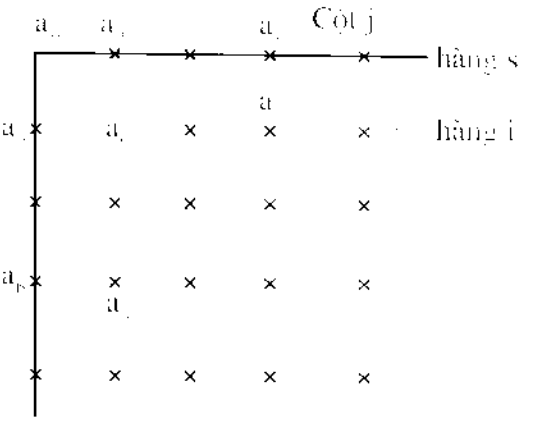
Áp dụng công thức (1.36), ta có:

$$x_3 = -4/-4 = 1 \quad x_2 = 1 - (-1)*1/1 = 2 \quad x_1 = 4 - 1*1 - 1*2 = 1$$

1.7.1.2. Trường hợp ma trận đối xứng

Trong trường hợp ma trận A đối xứng, cách tính tương tự như đã trình bày trong mục 1 §1.7.1. Tuy nhiên, có sự khác biệt là các phần tử ở trên và ở dưới đường chéo chính có tính chất đối xứng nghĩa là $a_{ij} = a_{ji}$;

Cách khử dần các phần tử của ma trận để đưa về dạng ma trận tam giác trên như sau. Trên hình (1.1), S biểu thị số thứ tự của vòng tính. Theo công thức (1.35), ta có:



Hình 1.1

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{si}^{(k-1)} \times \frac{a_{js}^{(k-1)}}{a_{ss}^{(k-1)}}$$

$$a_{ji}^{(k)} = a_{ji}^{(k-1)} - a_{sj}^{(k-1)} \times \frac{a_{is}^{(k-1)}}{a_{ss}^{(k-1)}}$$

Trước phép biến đổi Gauss, $a_{ij} = a_{ji}$ vì ma trận đối xứng. Sau phép biến đổi, $a'_{ij} = a'_{ji}$ vì theo các biểu thức trên, $a_{is} = a_{si}$, $a_{sj} = a_{js}$ (bản thân ma trận đối xứng. Vậy trước và sau phép biến đổi Gauss, các phần tử đối xứng vẫn giữ nguyên tính đối xứng.

Do đó, thuật toán khử dần các phần tử của ma trận chỉ tiến hành từ ma trận tam giác trên. Áp dụng công thức (1.35) và cho $a_{is} = a_{si}$, ta có:

$$\left.\begin{aligned} & a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{si}^{(k-1)} \times a_{si}^{(k-1)} \Big/ a_{ss}^{(k-1)} \\ & b_i^{(k)} = b_{is}^{(k-1)} - b_s^{(k-1)} \times a_{si}^{(k-1)} \Big/ a_{ss}^{(k-1)} \\ & i = s+1, s+2, \ldots n \\ & j = i+1, i+2, \ldots n \end{aligned}\right\} \qquad (1.37)$$

Cách giải các ẩn tương tự như đã trình bày trong mục 1.7.1.1 (áp dụng công thức (1.36).

Thí dụ 1.4. Giải hệ phương trình cho trên hình (1.2)

Giải

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ & 3 & 5 & 6 & 0 \\ & & 7 & 8 & 9 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & 1 & 2 \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Hình 1.2

Tổng số vòng tính bằng $s = n - 1 = 5 - 1 = 4$.

Phép tính thực hiện trên ma trận tam giác biểu thị trên hình (1.2).

Lần lượt áp dụng các công thức (1.37) và (1.36).

Vòng 1 ($s = 1$; $a_{ss} = 1$; $b_s = 2$)

Hàng đầu giữ nguyên.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ & 1 & -1 & 6 & 0 & -1 \\ & & -2 & 8 & 9 & 2 \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Hình 1.3 (vòng 1)

Hàng 2 $\left(c = \dfrac{a_{si}}{a_{ss}} = \dfrac{2}{1} = 2\right)$

$a_{33}^{(1)} = 3 - 2 \times 2 = -1$

$a_{34}^{(1)} = 5 - 3 \times 2 = -1$

$a_{34}^{(1)} = 6 - 0 \times 2 = 6$

$a_{35}^{(1)} = 0 - 0 \times 2 = 0$

$b_3^{(1)} = 3 - 2 \times 2 = -1$

Hàng 3: ($a_{si} = 3$); $c = \dfrac{a_{si}}{a_{ss}} = \dfrac{3}{1} = 3$; $a = \dfrac{a_{si}}{a_{ss}} = 3$ $\quad a_{33}^{(1)} = 7 - 3 \times 3 = -2$;

$a_{34}^{(1)} = 8 - 0 \times 3 = 8 \quad a_{35}^{(1)} = 9 - 0 \times 3 = 9$;

$b_3^{(1)} = 4 - 2 \times 3 = -2$

Hàng 4: ($a_{si} = 0$) $\quad c = 0 \quad a_{44}^{(1)} = 1 - 0 = 1 \quad a_{45}^{(1)} = 2 - 0 = 2; \quad b_4^{(1)} = 1 - 0 = 1$

Hàng 5: $c = 0 \quad a_{55}^{(1)} = 3 - 0 = 3 \quad b_5^{(1)} = 5 - 0 = 5$

Kết quả ghi trên hình (1.3).

Vòng 2: ($s = 2$; $a_{ss} = -1$, $b_s = -1$)

Hàng 1 và 2 giữ nguyên

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ & -1 & -1 & 6 & 0 & -1 \\ & & -1 & 2 & 9 & -1 \\ & & & 37 & 2 & -5 \\ & & & & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Hình 1.4 (vòng 2)

Hàng 3 $\quad (a_{si} = -1) \quad c = \dfrac{a_{si}}{a_{ss}} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

$a_{33}^{(2)} = -2 - (-1) \times 1 = -1$

$a_{34}^{(2)} = 8 - 6 \times 1 = 2$; $\quad a_{35}^{(2)} = 9 - 0 = 9$; $\quad b_3^{(2)} = -2 - (-1) \times 1 = -1$

Hàng 4: $\quad (a_{si} = 6)$; $\qquad c = \dfrac{a_{si}}{a_{ss}} = \dfrac{6}{-1} = -6$; $a_{33}^{(2)} = 1 - 6 \times (-6) = 37$; $a_{45}^{(2)} = 2 - 0 = 2$

$b_4^{(2)} = 1 - (-1) \times (-6) = -5$

Hàng 5: $\quad (a_{si} = 0)$: $c = 0$; $a_{55}^{(2)} = 3 - 0 = 3$; $b_5^{(2)} = 5 \times 0 = 5$

Kết quả ghi trên hình 1.4.

Vòng 3: ($s = 3$; $a_{ss} = -1$, $b_s = -1$): giữ nguyên 3 hàng đầu tiên.

Hàng 4: ($a_{si} = 2$) $c = \dfrac{2}{-1} = -2$; $a_{44}^{(3)} = 37 - 2\times(-2) = 41$

$a_{45}^{(3)} = 2 - 9\times(-2) = 20$; $b_4^{(3)} = -5 - (-1)\times(-2) = -7$

Hàng 5: ($a_{si} = 9$) $c = \dfrac{9}{-1} = -9$; $a_{55}^{(5)} = 3 - 9\times(-9) = 84$

$b_5^{(3)} = 5 - (-1)\times(-9) = -4$

Kết quả ghi trên hình 1.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ & -1 & -1 & 6 & 0 \\ & & -1 & 2 & 9 \\ & & & 41 & 20 \\ & & & & 84 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hình 1.5 (vòng 3)

Vòng 4: ($s = 4$; $a_{ss} = 41$, $b_s = -7$)

Giữ nguyên 4 hàng đầu tiên.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 74,24 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -7 \\ -0,59 \end{bmatrix}$$

Hình 1.6 (vòng 4)

Hàng 5 ($a_{si} = 20$) : $c = 20/41$; $a_{55}^{4} = 84 - 20\times\dfrac{20}{41} = 74,24$; $b_5^{(4)} = -4 - (-7)\dfrac{20}{41} = -0.59$

Kết quả ghi trên hình (1.6)

Tìm các ẩn:

Áp dụng công thức (1.36), ta có:

$x_5 = -\dfrac{0,59}{74,24} = -0,01$; $x_4 = (-7 - 20\times(-0,01))/41 = -0.17$

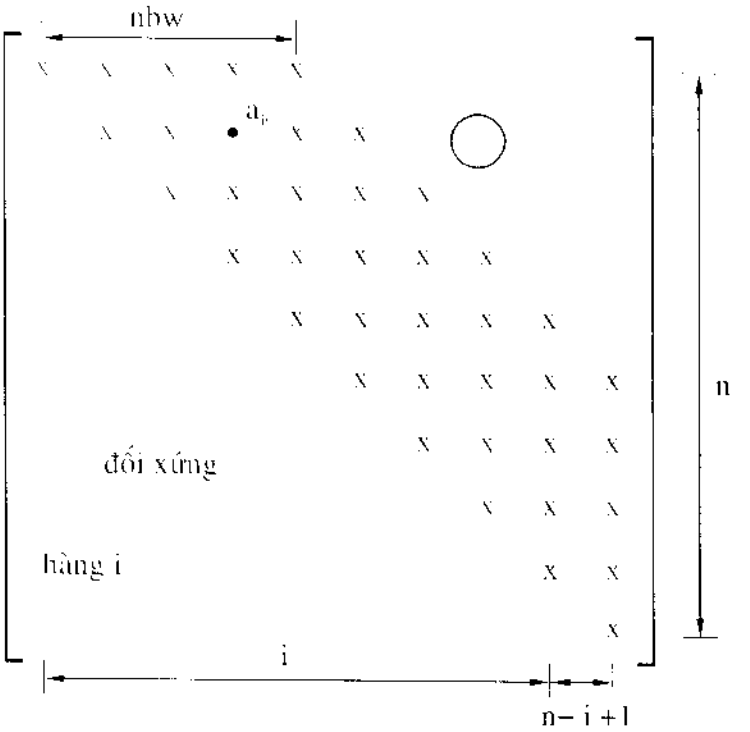
$x_3 = (-1 - 2\times(-0,17) + 9(-0,01))/-1 = -0,60$

$x_2 = (-1 - (-1)\times 0,60 - 6\times(-0,17 - 0)/-1 = -0,60$

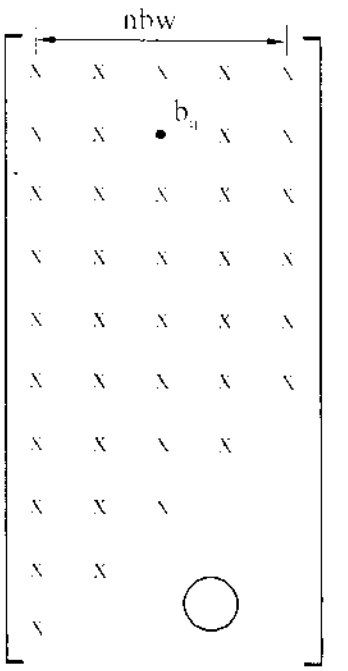
$x_1 = (2 - 2\times(-0,60) - 3\times 0,57 - 0 - 0)/1 = 1,41$

1.7.1.3. Trường hợp ma trận dải đối xứng

Ma trận dải đối xứng là một ma trận trong đó các phần tử tập trung vào 2 dải đối xứng nhau, dải này nằm trên đường chéo chính, dải kia nằm dưới đường chéo chính (hình 1.7); các phần tử còn lại đều triệt tiêu. Để tiết kiệm bộ nhớ trong máy tính, các phần tử được lưu trữ trong một ma trận hình chữ nhật (hình 1.8). Số hàng trong ma trận gốc bằng số hàng trong ma trận chữ nhật, số cột trong ma trật chữ nhật bằng bề rộng lớn nhất của dải nbw (xem 2 hình 1.7 và 1.8). Cùng một phần tử nằm trong 2 ma trận có chung chỉ số hàng còn các chỉ số cột có mối liên hệ như sau:



Hình 1.7



Hình 1.8

$$j' = j - i + 1 \tag{1.38}$$

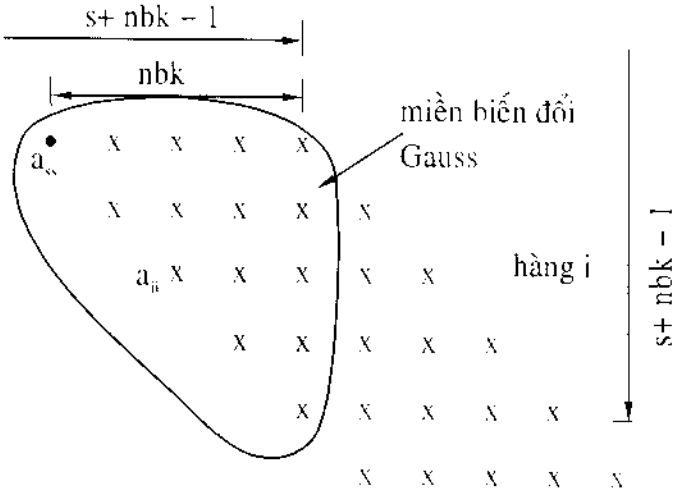
j' – chỉ số cột trong ma trận chữ nhật; j – chỉ số cột trong ma trận vuông (xem 2 hình 1.8 và 1.9).

Số phần tử nằm ngang trên dải ứng với hàng i bằng nbk:

$$\left.\begin{array}{ll} nbk = nbw & \text{khi } n - i + 1 > nbw \\ nbk = n - i = 1 & \text{khi } n - i + 1 < nbw \end{array}\right\} \tag{1.39}$$

n – cấp của ma trận vuông; nbw – bề rộng lớn nhất của dải (xem hình 1.7).

Cách tính tương tự như đã trình bày trong 1.7.1.2 vì ma trận có tính chất đối xứng. Tuy nhiên, miền tính toán nằm trong khu vực khoanh tròn trên hình (1.9). Vì sau các phép biến đổi, các phần tử còn lại bằng 0 hoặc không thay đổi giá trị (do $a_{si} = 0$ (xem công thức 1.37). Vậy là trong mỗi



Hình 1.9: vòng tính s

vòng tính, chỉ số hàng i biến thiên từ s + 1 đến s + nbk − 1 và j biến thiên từ i đến s + nbk − 1, nbk tính theo công thức 1.39.

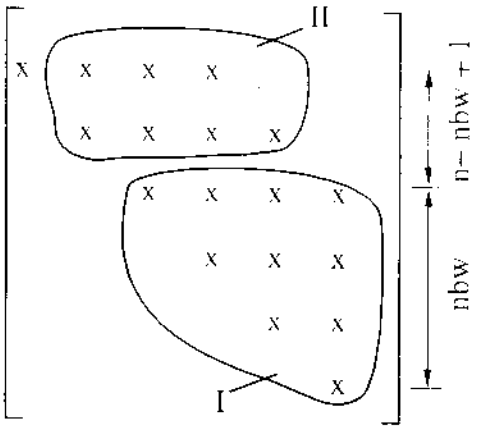
Cách khử dần các phần tử của ma trận tương tự như công thức (1.37)

$$\left.\begin{aligned}
&a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{sj}^{(k-1)} \times a_{si}^{(k-1)} \Big/ a_{ss}^{(k-1)} \\
&b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - b_s^{(k-1)} \times a_{si}^{(k-1)} \Big/ a_{ss}^{(k-1)} \\
&k = 1, 2, \ldots n-1 \\
&i = s+1, s+2, \ldots . s+nbk-1 \\
&j = i, i+1, \ldots . s+nbk-1 \\
&k = 1, 2, \ldots\ldots, n-1
\end{aligned}\right\} \qquad (1.40)$$

Cách tính các ẩn tiến hành trong 2 miền I và II (xem hình 1.10).

Miền I:

$$\left.\begin{aligned}
&x_n = bn \Big/ a_{nn} \\
&x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right) \Big/ a_{ii} \\
&i = n-1, n-2, \ldots n-nbw+1
\end{aligned}\right\} \qquad (1.41)$$



Hình 1.10

Miền II:

$$\left.\begin{aligned}
&x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{i+nbw-1} a_{ij}x_j\right) \Big/ a_{ii} \\
&i = v, v-1, v-2, \ldots 1 \\
&v = n - nbw
\end{aligned}\right\} \qquad (1.42)$$

Thí dụ 1.5:

Đầu đề như trên hình 1.11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ & 3 & 5 & 6 & 0 \\ & & 7 & 8 & 9 \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Hình 1.11

Giải:

Đưa ma trận trên hình 1.11 về dạng ma trận dải đối xứng hình 1.12.

nbw = 3 n = 5

i = 1 $n - i + 1 = 5 - 1 + 1 = 5 > 3 \Rightarrow$ nbk = 3

i = 2 $n - i + 1 = 5 - 2 + 1 = 4 > 3 \Rightarrow$ nbk = 3

i = 3 $n - i + 1 = 5 - 3 + 1 = 3 = nbw \Rightarrow$ nbk =

i = 4 $n - i + 1 = 5 - 4 + 1 = 2 < nbw \Rightarrow$ nbk = 2

i = 5 $n - i + 1 = 5 - 5 + 1 < nbw \Rightarrow$ nbk = 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & \\ 3 & 5 & 6 & & \\ & 7 & 8 & 9 & \\ & & 1 & 2 & \\ & & & 3 & \end{bmatrix}$$

Khử dần các phần tử của ma trận:

Vòng 1 ($s = 1$, $a_{ss} = 1$, $b_1 = 2$)

Miền biến đổi nằm trong khoanh tròn (hình 1.12)

Hàng đầu giữ nguyên. Áp dụng công thức (1.41)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & \\ & 3 & 5 & 6 & \\ & & 7 & 8 & 9 \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Hình 1.13

Hàng 2 (i = 2):

$$c = \frac{a_{si}}{a_{ss}} = 2/1 = 2\ ;\ a_{22}^{(1)} = 3 - 2\times 2 = -1\ ;\ a_{23}^{(1)} = 5 - 3\times 2 = -1$$

$$b^{(2)} = 3 - 2\times 2 = 1$$

Hàng 3 (i = 3):

$$c = 3/1 = 3 \qquad a_{33}^{(1)} = 7 - 3\times 3$$

$$b_3^{(1)} = 4 - 2\times 3 = -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & \\ & -1 & -1 & 6 & \\ & & -2 & 8 & 9 \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Hình 1.14

Các phần tử khác có giá trị không đổi. Kết quả ghi trên hình 1.13.

Vòng 2: ($s = 2$, $a_{ss} = -1$, $b_s = -1$)

Hàng 3: $c = -1/-1 = 1$

$$a_{33}^{(2)} = -2\times(-1)\times 1 = -1$$

$$a_{34}^{(2)} = 8 - 6\times 1 = 2$$

$$b_3^{(2)} = -2 - (-1)\times 1 = -1$$

Hàng 4: $c = 6/-1 = -6$

$$a_{44}^{(2)} = 1 - 6\times(-6) = 37$$

$$b_4^{(2)} = 1 - (-1)\times(-6) = -5$$

Kết quả ghi trên hình (1.14)

Vòng 3 ($s = 3$, $a_{ss} = -1$, $b_s = -1$)

Miền biến đổi được khoanh tròn trên hình 1.14

Hàng 4 ($i = 4$):

$$c = \frac{2}{-1} = -2$$

$$a_{44}^{(3)} = 37 - 3 \times (-2) = 41$$

$$a_{45}^{(3)} = 2 - 9 \times (-2) = 20$$

$$b_4^{(3)} = -5 - (-1) \times (-2) = -7$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & \\ & -1 & -1 & 6 & \\ & & 1 & 2 & 9 \\ & & & 37 & 2 \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Hình 1.14

Hàng 5 ($i = 5$)

$$c = 9/-1 = -9$$

$$a_{55}^{(4)} = 3 - 9 \times (-9) = 84$$

$$b_5^{(4)} = 5 - (-1) \times (-9) = -4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & \\ & -1 & -1 & 6 & \\ & & -1 & 2 & 9 \\ & & & 41 & 20 \\ & & & & 84 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Hình 1.15

Kết quả ghi trên hình 1.15.

Vòng 4 ($s = 4$):

Miền biến đổi được khoanh tròn trên hình 1.15.

Hàng 5 ($i = 5$) : $c = 20/41$

$$a_{55}^{(4)} = 84 - 20 \times \frac{20}{41} = 74,24$$

$$b_5^{(4)} = -4 - (-7) \times \frac{20}{41} = -0,59$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & \\ & -1 & -1 & 6 & \\ & & -1 & 2 & 9 \\ & & & 41 & 20 \\ & & & & 74,24 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -7 \\ -0.59 \end{bmatrix}$$

Hình 1.16

Kết quả ghi trên hình 1.16

Tính các ẩn số:

Áp dụng các công thức (1.41) và (1.42)

Miền I: $x_5 = -0,59/74,24 = -0,01$

$x_4 = (-7 - 20 \times (-0,01)/41 = -0,17$

$x_3 = (-1 - 2 \times (-0,17) - 9 \times (-0,01)/-1 = 0,60$

Miền II: $x_2 = (-1 - (-1) \text{ x } 0,60 = 6 \text{ x } (-0,17)/-1 = -0,60$

$x_1 = (2 - 2(-0,60) - 3(0,60)/1 = 1,41$

Kết quả tính hoàn toàn giống thí dụ (1.4) nhưng ở đây, cách tính đơn giản hơn.

1.7.1.4. Phép biến đổi Gauss theo từng cột

1. Ma trận đối xứng bất kì

Trong mục 1.7.1.2, ta đã đưa ma trận đối xứng về dạng tam giác trên và thực hiện phép biến đổi theo từng hàng. Trong mục này, ta sẽ biến đổi theo từng cột.

Giả sử cho ma trận đối xứng trên hình 1.17. Ta hãy thực hiện phép biến đổi trên 3 cột đầu tiên của ma trận. Tương tự như công thức 1.37, ta có:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ & & & \cdots\cdots & \cdots \\ & \text{đối xứng} & & & \cdots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Hình 1.17.

Cột 1: Phần tử a_{11} không đổi

Cột 2:

Vòng 1: a_{12} không đổi

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{12} \times \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

Cột 3:

Vòng 1: a_{13} không đổi

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{13} \times \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

$$a_{33}^{(1)} = a_{13} - a_{13} \times \frac{a_{13}}{a_{11}}$$

Vòng 2: $a_{23}^{(1)}$ không đổi

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{23}^{(1)} \times a_{23}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$$

Qua các phép tính trên, ta thấy rằng sau phép biến đổi, giá trị các phần tử trong cột 3 phụ thuộc vào giá trị đã tính từ trước của các phần tử trong cột 3 và các cột đứng trước nó.

Đồng thời, ứng với cột j và ứng với số thứ tự vòng tính k, ta chỉ thực hiện phép biến đổi trên các hàng k + 1, k + 2, k + 3, ... j. Ứng với hàng i, số vòng tính biến thiên từ 1 đến i – 1. Một cách tổng quát, thuật toán như sau:

$$\left.\begin{array}{l} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{kj}^{(k-1)}.a_{ki}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - b_k^{(k-1)}.a_{ki}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \\ k - \text{số thứ tự vòng tính} \\ j = 2, 3 \ldots n \,;\, j = k+1, k+2, \ldots j_1 \\ k = 1, 2, \ldots n-1 \end{array}\right\} \quad (1.43)$$

Cách tính ẩn số tiến hành theo công thức 1.36.

Thí dụ 1.6. Đầu đề ghi trên hình 1.18. Giải hệ phương trình.

Giải

Áp dụng công thức 1.43

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ & 3 & 5 & 6 & 0 & 3 \\ & & 7 & 8 & 9 & 4 \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Hình 1.18.

Vòng 1

Cột 2:

$$a_{22}^{(1)} = 3 - 2.\frac{2}{1} = -1; b_2^{(1)} = 3 - 2\frac{2}{1} = -1$$

Cột 3:

$$a_{23}^{(1)} = 5 - 3.\frac{2}{1} = -1$$

$$a_{33}^{(1)} = 7 - 3.\frac{3}{1} = -2; b_3^{(1)} = 4 - 2.\frac{3}{1} = -2;$$

Cột 4:

$$a_{24}^{(1)} = 6 - 0 = 6$$

$$a_{34}^{(1)} = 8 - 0 = 8$$

$$a_{44}^{(1)} = 1 - 0 = 1 \; b_4^{(1)} = 1 - 0 = 1$$

Cột 5:

$$a_{25}^{(1)} = 0 - 0 = 1 \; ; a_{35} = 9 - 0 = 9$$

$$a_{45}^{(1)} = 2 - 0 = 2; a_{55}^{(1)} = 3 - 0 = 3 \; ; b_5^{(1)} = 5 - 0 = 5$$

Kết quả tính ghi trên hình 1.19.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ & -1 & -1 & 6 & 0 & -1 \\ & & -2 & 8 & 9 & -2 \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Hình 1.19. vòng 1

Vòng 2:

Cột 3:

$$a_{33}^{(2)} = -2 - (-1)\left(\frac{-1}{-1}\right) = -1$$

$$b_3^{(2)} = -2 - (-1) \times 1 = -1$$

Cột 4: $b_{34}^{(2)} = 8 - 6(-1/-1) = 2$

$$b_{44}^{(2)} = 1 - 6 \times (6/-1) = 37$$

$$b_{45}^{(2)} = 2 - 0 = 2$$

$$b_4^{(2)} = 1 - (-1) \times (6/-1) = -5$$

Cột 5: $a_{35}^{(2)} = 9 - 0 = 9; a_{45}^{(2)} = 2 - 0 = 2$;

$$a_{55}^{(2)} = 3 - 0 = 3;\ b_5^{(2)} = 5 - 0 = 5$$

Kết quả ghi trên hình 1.20.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ & -1 & -1 & 6 & 0 \\ & & -1 & 2 & 9 \\ & & & 37 & 2 \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Hình 1.20. Vòng 2

Vòng 3:

Cột 4: $a_{44}^{(3)} = 37 - 2 \times (2/-1) = 41$

Cột 5: $a_{45}^{(3)} = 2 - 9 \times (2/-1) = 20$

$$b_4^{(3)} = -5 - (-1) \times (-2) = -7$$

$$a_{55}^{(3)} = 3 - 9 \times (9/-1) = 84$$

$$b_5^{(3)} = 5 - (-1) \times (-9) = -4$$

Kết quả ghi trên hình 1.21

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ & -1 & -1 & 6 & 0 \\ & & -1 & 2 & 9 \\ & & & 41 & 20 \\ & & & & 84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Hình 1.21. Vòng 5

Vòng 4:

Cột 5: $a_{55}^{(4)} = 84 - 20.\dfrac{20}{41} = 74,24$

$$b_5^{(4)} = -4 - (-7) \times \frac{20}{41} = -0,59$$

Kết quả ghi trên hình 1.22.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ & -1 & -1 & 6 & 0 \\ & & -1 & 2 & 9 \\ & & & 41 & 20 \\ & & & & 74,84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -7 \\ -0,59 \end{bmatrix}$$

Hình 1.22. Vòng 4

Tính ẩn số:

Áp dụng công thức 1.36, ta được:

$x_1 = 1,41;\ x_2 = -0,60;\ x_3 = 0,60;\ x_4 = -0,17;\ x_5 = -0,01$

Kết quả tính hoàn toàn giống thí dụ 1.4 nhưng khối lượng ít hơn.

2. Trường hợp ma trận đối xứng có nhiều phần tử triệt tiêu ở phía trên

Khi ma trận đối xứng có nhiều phần tử triệt tiêu ở phía trên (hình 1.23), ta không cần lưu trữ các con số không vào máy tính, mà chỉ cần lưu trữ các phần tử khác không (các phần tử nằm dưới hình bậc thang trên hình 1.23).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & a_{34} & 0 & a_{36} & 0 & 0 \\ & & & a_{44} & 0 & a_{46} & 0 & a_{48} \\ & & & & a_{55} & a_{56} & a_{57} & 0 \\ & \text{đối xứng} & & & & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ & & & & & & a_{77} & a_{78} \\ & & & & & & & a_{88} \end{bmatrix}$$

Hình 1.23

Cách nhập số liệu như sau:

a) Thống kê số lượng phần tử triệt tiêu trên mỗi cột:

Nhập Z_j $\quad j = 1, 2, 3, \ldots n\}$ $\quad$ (1.44)

b) Nhập các phần tử của ma trận theo từng cột:

$$\left.\begin{array}{l} - \text{ nếu } Z_{j'} = 0 \\ \quad \text{Nhập } a_{ij'} \qquad i = 1, 2, \ldots j' \\ - \text{ Nếu } Z_{j'} \neq 0: \\ \quad \text{Nhập } a_{ij'} \quad i = Z_{j'+1}, Z_{j'+2} \ldots j'' \end{array}\right\} \qquad (1.45)$$

Cách giải hệ phương trình tuyến tính hoàn toàn giống như đã trình bày trong mục 1 (1.7.1.4).

1.7.2. Phương pháp Gauss - Jordan

Thực chất của phương pháp Gauss – Jordan là khử dần các biến. Dưới dạng ma trận, ta tiến hành phương pháp này như sau:

Giả sử có một ma trận vuông cấp n không suy biến:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ta lập ma trận K_1 trong đó cột thứ nhất được biến đổi từ cột thứ nhất của A, các phần tử còn lại trên đường chéo chính bằng đơn vị, các phần tử khác đều triệt tiêu.

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & & \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}} & 1 & & & \\ \frac{-a_{31}}{a_{11}} & & 1 & & \\ . & & & . & \\ . & & & & . \\ \frac{-a_{n1}}{a_{11}} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Nhân bên trái ma trận A với ma trận K_1, ta được ma trân A_1:

$$A_1 = K_1A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Trong đó, chỉ số trong dấu ngoặc biểu thị số thứ tự của vòng tính.

Tiếp tục lập ma trận K_2 trong đó cột thứ hai được biến đổi từ cột thứ hai của A_1, các phần tử còn lại trên đường chéo chính bằng đơn vị, các phần tử còn lại đều triệt tiêu:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-a_{12}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & & & \\ & \frac{1}{a_{22}^{(1)}} & & & \\ & \frac{-a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & & \\ & \cdot & & \cdot & \\ & \cdot & & & \cdot \\ & \frac{-a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Tiếp tục nhân bên trái ma trân A_1 với ma trận K_2, ta được ma trận A_2:

$$A_2 = K_2A_1 = \begin{bmatrix} 1 & & a_{13}^{(2)} & . & a_{1n}^{(2)} \\ & 1 & a_{23}^{(2)} & . & a_{2n}^{(2)} \\ & & a_{33}^{(2)} & . & a_{3n}^{(2)} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & a_{n3}^{(2)} & . & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Tiếp tục lập ma trận K_3, từ ma trận A_2 theo cách trên rồi nhân bên trái ma trận A_2 với ma trận K_3, ta được ma trận A_3... Cách làm tổng quát là xuất phát từ ma trận A_i để lập ma trận K_{i+1} rồi nhân bên trái ma trận A_i với ma trận K_{i+1} để được ma trận A_{i+1}. Giả sử đến vòng tính thứ n, ta có hệ thức:

$$A_n = K_nA_{n-1} = (K_n.K_{n-1}...K_2K_1).A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & . & & \\ & & & & . & \\ & & & & & . \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = I \qquad (1.46)$$

Hệ thức trên chứng tỏ tích trong dấu ngoặc là nghịch đảo của ma trận A nghĩa là:

$$A^{-1} = K_n.K_{n-1}...K_2.K_1 \qquad (1.47)$$

Qua các hệ thức 1.46 và 1.47, ta thấy rằng các ma trận A_i và K_{i+1} phải được tính song song cho đến khi nào ma trận A_n trở thành ma trận đơn vị. Lúc này, áp dụng công thức 1.47 để tính A^{-1}. Bảng 1.1 biểu thị quá trình tính toán song song nói trên.

Bảng 1.1

A	I
$A_1 = K_1(A)$	$K_1(I)$
$A_2 = K_2(A_1)$	$K_2(K_1)$
$A_3 = K_3(A_2)$	$K_3(K_2K_1)$
.	.
.	.
.	.
$A_n = K_n(A_{n-1}) = I$	$K_n(K_{n-1} \dots K_2K_1) = A^{-1}$

Trong bảng trên, I biểu thị ma trận đơn vị.

Trong thực tế, ta có thể cùng một lúc thực hiện các phép tính biến đổi trên ma trận A và ma trận đơn vị I. Khi ma trận A trở thành ma trận đơn vị, ma trận đơn vị trở thành nghịch đảo của ma trận A. Điều này được minh hoạ qua thí dụ dưới đây.

Thí dụ 1.7: Tìm nghịch đảo của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Quá trình tính toán được thực hiện trên bảng 1.2. Ma trận A và ma trận đơn vị được biểu thị trong hàng đầu tiên của bảng 1.2. Các số khoanh tròn trong cột "trình tự" biểu thị số thứ tự của các hàng trong ma trận A và ma trận đơn vị sau khi thực hiện các phép tính biến đổi. Các phép tính biến đổi được biểu thị trong cột "Các phép tính biến đổi". Thí dụ ① : 4 = chia toàn bộ các phần tử của hàng 1 cho 4; ② – 6 × ⑤ = lấy mỗi phần tử của hàng 2 trừ đi 6 lần mỗi phần tử tương ứng của hàng 5. Các phép tính biến đổi đều được thực hiện đồng thời trên ma trận A và ma trận đơn vị I. Cột cuối cùng ghi tổng đại số của các phần tử của 2 ma trận trong hàng tương ứng. Thí dụ trong hàng đầu tiên 4 + 6 + 2 + 8 + 1 = 21 (kí hiệu là Σ). Các phép tính biến đổi cũng được thực hiện đối với tổng Σ để kiểm tra các phép tính số học có đúng hay không. Nếu sau khi thực hiện một phép tính biến đổi, tổng Σ ở cột cuối cùng bằng tổng các phần tử của 2 ma trận ở hàng tương ứng thì các phép tính số học là đúng.

Bảng 1.2

Trình tự		Các phép tính biến đổi	A_i				$K_i...K_2K_1$				Σ
	①		4	6	2	8	1				21
	②		6	5	4	8		1			24
	③		4	2	4	5			1		16
	④		2	8	5	3				1	19
I	⑤	① : 4	1	3/2	1/2	2	1/4	0	0	0	21/4
	⑥	② − 6 × ⑤	0	−4	1	−4	−3/2	1	0	0	−15/2
	⑦	③ − 4 × ⑤	0	−4	2	−3	−1	0	1	0	−5
	⑧	④ − 2 × ⑤	0	5	4	−1	−1/2	0	0	1	17/2
II	⑨	⑤ : (−4)	0	1	−1/4	1	3/8	−1/4	0	0	15/8
	⑩	⑥ − $\frac{3}{2}$ × ⑨	1	0	7/8	1/2	−5/16	3/8	0	0	39/16
	⑪	⑦ + 4 × ⑨	0	0	1	1	1/2	−1	1	0	5/2
	⑫	⑧ − 5 × ⑨	0	0	21/14	−6	−19/8	−5/4	0	1	7/8
III	⑬	⑪ : 1	0	0	1	1	1/2	−1	1	0	5/2
	⑭	⑨ + $\frac{1}{4}$ × ⑬	0	1	0	5/4	1/2	−1/2	1/4	0	5/2
	⑮	⑩ − $\frac{7}{8}$ × ⑬	1	0	0	−3/8	−3/4	5/4	−7/8	0	1/4
	⑯	⑫ − $\frac{21}{4}$ × ⑬	0	0	0	−45/4	−5	13/2	−21/4	1	−14
IV	⑰	⑯ : $\frac{-45}{4}$	0	0	0	1	20/45	−26/45	21/45	−4/45	56/45
	⑱	⑬ − 1 × ⑰	0	0	1	0	5/90	−19/45	24/45	4/45	113/90
	⑲	⑭ − $\frac{5}{4}$ × ⑰	0	1	0	0	−5/90	20/90	−30/90	10/90	−85/90
	⑳	⑮ + $\frac{3}{8}$ × ⑰	1	0	0	0	−105/180	186/180	−126/180	−6/180	129/180
V	㉑	⑳	1	0	0	0	−105/180	186/180	−126/180	−6/180	
	㉒	⑲	0	1	0	0	−10/180	40/180	−60/180	20/180	
	㉓	⑱	0	0	1	0	10/180	−76/180	96/180	16/180	
	㉔	⑰	0	0	0	1	80/180	−104/180	84/180	−16/180	

Đến vòng tính thứ năm, ta có các kết quả cuối cùng trên hàng V của bảng 1.2. Ma trận A trở thành ma trận đơn vị, ma trận đơn vị trở thành ma trận dưới đây. Vậy:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-105}{180} & \frac{186}{180} & \frac{-126}{180} & \frac{-6}{180} \\ \frac{-10}{180} & \frac{40}{180} & \frac{-60}{180} & \frac{20}{180} \\ \frac{10}{180} & \frac{-76}{180} & \frac{96}{180} & \frac{16}{180} \\ \frac{80}{180} & \frac{-104}{180} & \frac{84}{180} & \frac{-16}{180} \end{bmatrix}$$

Cách tính như trên có nhược điểm là nếu ở vòng tính thứ i giá trị $a^{(i)}_{i+1,i+1} = 0$ hoặc rất bé thì $1/a^{(i)}_{i+1,i+1} = 0$ bằng ∞, hoặc rất lớn. Các phép tính phải dừng lại ở đây. Để khắc phục nhược điểm trên, ta dùng phương pháp chọn phần tử lớn nhất, nội dung như sau:

Cứ mỗi vòng tính, ta phát hiện một *phần tử lớn nhất* của ma trận A_i. Theo định nghĩa, *phần tử lớn nhất* là phần tử có giá trị tuyệt đối lớn nhất. Ta tìm cách thay nó bằng đơn vị và khử toàn bộ các phần tử còn lại trên cột chứa nó. Chẳng hạn ở vòng tính đầu, ta phát hiện phần tử a_{31} (dùng kí hiệu đóng khung) là phần tử lớn nhất:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1j} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2j} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & . & a_{3j} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & \boxed{a_{ij}} & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nj} & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ta lập ma trận K_i sau khi biến đổi cột thứ j của ma trận A:

$$K_1 = \begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & \frac{-a_{1j}}{a_{ij}} & & & & \\
& 1 & & & & & & & & \frac{-a_{2j}}{a_{ij}} & & & & \\
& & 1 & & & & & & & . & & & & \\
& & & 1 & & & & & & . & & & & \\
& & & & 1 & & & & & . & & & & \\
& & & & & 1 & & & & \frac{-a_{ij}}{a_{ij}} & & & & \\
& & & & & & 1 & & & . & & & & \\
& & & & & & & 1 & & . & & & & \\
& & & & & & & & 1 & . & & & & \\
& & & & & & & & & \frac{1}{a_{ij}} & & & & \\
& & & & & & & & & . & 1 & & & \\
& & & & & & & & & . & & 1 & & \\
& & & & & & & & & . & & & 1 & \\
& & & & & & & & & \frac{-a_{nj}}{a_{ij}} & & & & 1
\end{bmatrix}$$

Tiếp tục nhân bên trái ma trận A với ma trận K_1, ta được ma trận A_1:

$$A_1 = K_1 A = \begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & . & . & a_{1n}^{(1)} \\
a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & . & . & a_{2n}^{(1)} \\
a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & . & . & a_{3n}^{(1)} \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & . & i_{(ij)} & a_{in}^{(1)} \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & . & . & a_{nn}^{(1)}
\end{bmatrix}$$

Đến vòng tiếp theo, ta tiếp tục phát hiện phần tử lớn nhất của ma trận A_1, chẳng hạn phần tử $a_{uv}^{(1)}$ ($u \neq i$, $j \neq v$) là phần tử lớn nhất. Ta lập ma trận K_2 sau khi biến đổi cột thứ v của ma trận A_1:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Tiếp tục nhân bên trái ma trận A_1 với ma trận K_2, ta được ma trận A_2:

$$A_2 = K_2 A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & . & & . & . & & . & a_{1n}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & . & & . & . & & . & a_{2n}^{(2)} \\ . & . & . & & . & . & & . & . \\ . & . & . & 1_{(ij)} & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1_{(uv)} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}^{(2)} & a_{n2}^{(2)} & . & . & . & . & . & . & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Tiếp tục các vòng tính tương tự như trên. Đến vòng tính thứ n, xuất hiện ma trận A_n trong đó mỗi hàng và mỗi cột chỉ có một phần tử bằng đơn vị, các phần tử còn lại đều triệt tiêu. Chẳng hạn:

Bảng 1.3

Trình tự		Các phép tính biến đổi	A				$K_n...K_2K_1$				Σ
	①		4	6	2	8	1				21
	②		6	5	4	8		1			24
	③		4	2	4	5			1		16
	④		2	[8]	5	3				1	19
I	⑤	① : 8	1/4	1	5/8	3/8	0	0	0	1/8	19/8
	⑥	② − 6 · ⑤	5/2	0	−7/4	23/4	1	0	0	−3/4	27/4
	⑦	③ − 5 × ⑤	19/4	0	7/8	[49/8]	0	1	0	−5/8	97/8
	⑧	④ − 2 × ⑤	7/2	0	11/4	17/4	0	0	1	−1/4	45/4
II	⑨	⑤ : $\frac{49}{8}$ (−4)	38/49	0	1/7	1	0	8/49	0	−5/49	97/49
	⑩	⑥ − $\frac{3}{8}$ · ⑨	−2/49	1	4/7	0	0	−3/49	0	8/49	80/49
	⑪	⑦ + $\frac{23}{4}$ × ⑨	−96/49	0	[−18/7]	0	1	−46/49	0	−8/49	−227/49
	⑫	⑧ − $\frac{17}{4}$ × ⑨	10/49	0	15/7	0	0	−34/49	1	9/49	139/49
III	⑬	⑪ : $(-\frac{18}{7})$	16/21	0	1	0	−7/18	23/63	0	4/63	227/126
	⑭	⑨ + $\frac{1}{7}$ · ⑬	2/3	0	0	1	1/18	1/9	0	1/9	31/18
	⑮	⑩ − $\frac{4}{7}$ × ⑬	−10/21	1	0	0	2/9	−17/63	0	8/63	38/63
	⑯	⑫ − $\frac{15}{7}$ × ⑬	[−10/7]	0	0	0	5/6	−31/21	1	1/21	−43/42
IV	⑰	⑯ : $(-\frac{10}{7})$ ×	1	0	0	0	−7/12	31/30	−7/10	−1/30	43/60
	⑱	⑬ − $\frac{16}{21}$ · ⑰	0	0	1	0	1/18	−19/45	8/15	4/45	113/90
	⑲	⑭ − $\frac{2}{3}$ × ⑰	0	0	0	1	4/9	−26/45	7/1	−4/45	56/45
	⑳	⑮ + $\frac{10}{21}$ · ⑰	0	1	0	0	−1/1	29	−1/3	1/9	17/18
V	㉑	⑳	1				−105/180	186/180	−126/180	−6/180	
	㉒	⑲		1			−10/180	40/180	−60/180	20/180	
	㉓	⑱			1		10/180	−76/180	96/180	16/180	
	㉔	⑰				1	80/180	−104/180	84/180	−16/180	

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Đương nhiên, ma trận trên A_n chưa phải là ma trận đơn vị. Chỉ cần nhân bên trái ma trận An với ma trận $A_n^{'}$, (chuyển vị của ma trận A_n), ta sẽ được ma trận đơn vị. Cuối cùng, theo phương pháp phần tử lớn nhất, ta có nghịch đảo của ma trận A:

$$A^{-1} = A_n^{'}.K_n.K_{n-1}...K_3.K_2.K_1 \qquad (1.48)$$

Thí dụ 1.8: Tìm nghịch đảo của ma trận A trong thí dụ 1.7 theo phương pháp phần tử lớn nhất.

Quá trình tính toán được trình bày trong bảng 1.3. Các số có kí hiệu dấu ngoặc vuông là các phần tử lớn nhất ứng với mỗi vòng tính. Ở vòng tính thứ năm (hàng V), ta được các kết quả cuối cùng. Cần chú ý rằng trong hàng đó, ta đã nhân bên trái ma trận A_n với ma trận $A_n^{'}$. Kết quả hoàn toàn giống với kết quả trong bảng 1.2.

1.7.3. Phương pháp ma trận tam giác

Phương pháp ma trận tam giác có thể áp dụng để nghịch đảo ma trận đối xứng, dựa trên cơ sở nghịch đảo ma trận tam giác.

Một ma trận đối xứng A bất kì có thể viết dưới dạng tích của ma trận tam giác S và chuyển vị S' của nó:

$$A = S'.S \qquad (1.49)$$

Trong đó, S có dạng:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & . & . & . & S_{1n} \\ & S_{22} & S_{23} & . & . & . & S_{2n} \\ & & S_{33} & . & . & . & S_{3n} \\ & \ddots & & . & . & . & . \\ & & & & . & . & . \\ & & & & & . & . \\ & & & & & & S_{nn} \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận ở vế phải của 1.49 và so sánh với các phần tử của ma trận A ở vế trái, ta được các kết quả sau:

$$\left.\begin{aligned}
&S_{11} = \sqrt{a_{11}}, \qquad S_{1j} = \frac{a_{1j}}{S_{11}} \\
&S_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{ki}^2} \qquad (i > 1) \\
&S_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{ki}S_{kj}}{S_{ii}} \qquad (j > i) \\
&S_{ij} = 0 \qquad (j < i)
\end{aligned}\right\} \tag{1.50}$$

Theo 1.24, ta có:

$$A^{-1} = S^{-1}.(S')^{-1}$$

Theo 1.26: $(S')^{-1} = (S^{-1})'$. Vậy:

$$A^{-1} = S^{-1}.(S^{-1})' \tag{1.51}$$

1.51 cho thấy nghịch đảo của ma trận đối xứng A là tích nghịch đảo của ma trận tam giác và chuyển vị của nó. Về nghịch đảo của ma trận tam giác, xem các công thức 1.29, 1.30.

Thí dụ 1.9: Tìm nghịch đảo của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 13 & 12 & 8 \\ 3 & 12 & 14 & 10 \\ 1 & 8 & 10 & 18 \end{bmatrix}$$

Theo 1.29, tính các phần tử của ma trận tam giác S:

$$S_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1$$

$$S_{12} = \frac{a_{12}}{S_{11}} = 2, \quad S_{13} = \frac{a_{13}}{S_{11}} = 3, \quad S_{14} = \frac{a_{14}}{S_{11}} = 1;$$

$$S_{22} = \sqrt{a_{22} - S_{12}^2} = \sqrt{13 - 4} = 3,$$

$$S_{23} = \frac{a_{23} - S_{12}S_{13}}{S_{22}} = \frac{12 - 2 \times 3}{3} = 2,$$

$$S_{24} = \frac{a_{24} - S_{12}S_{14}}{S_{22}} = \frac{8 - 2 \times 1}{3} = 2,$$

$$S_{33} = \sqrt{a_{33} - \left(S_{13}^2 + S_{23}^2\right)} = \sqrt{14 - (9+4)} = 1$$

$$S_{34} = \frac{a_{34} - (S_{13}S_{14} + S_{23}S_{24})}{S_{33}} = \frac{10 - (3\times 1 + 2\times 2)}{1} = 3$$

$$S_{44} = \sqrt{a_{44} - \left(S_{14}^2 + S_{24}^2 + S_{34}^2\right)} = \sqrt{18 - (1+4-9)} = 2$$

Vậy:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ & 3 & 2 & 2 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

Theo 1.30, tính nghịch đảo của S:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{8}{3} \\ & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ & & 1 & \frac{-3}{2} \\ & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Theo 1.51, tính:

$$A^{-1} = S^{-1}(S^{-1})' = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 136 & 32 & -68 & 16 \\ 32 & 12 & 20 & 4 \\ -68 & -20 & 39 & -9 \\ 16 & 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

1.7.4. Phương pháp chia khối ma trận

Đối với những ma trận cấp cao, có thể áp dụng phương pháp chia khối ma trận để đưa nghịch đảo của ma trận cấp cao về nghịch đảo của những ma trận cấp thấp hơn.

Giả sử B là nghịch đảo của ma trận A. Ta có:

$$A.B = I$$

Trong đó, I là ma trận đơn vị. Phương trình trên có thể viết dưới dạng ma trận chia khối:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & I \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I \qquad (a)$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \qquad (b)$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0 \qquad (c)$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I \qquad (d)$$

Từ (b): $B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}$ (1.52)

Thay vào (d): $(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})B_{22} = I$

$\Rightarrow$ $B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$ (1.53)

Vì $BA = I \quad \Rightarrow \quad B_{21}B_{11} + B_{22}A_{21} = 0$

Vậy $B_{21} = -B_{21}A_{21}\ A_{11}^{-1}$ (1.54)

Từ (a), cuối cùng ta có:

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}.A_{12}B_{21} \qquad (1.55)$$

Tóm lại, muốn nghịch đảo một ma trận chia khối, ta thực hiện các bước tính sau:

1) Nghịch đảo ma trận A_{11} để được A_{11}^{-1}

2) Tính tích $A_{11}^{-1}.A_{12}$

3) Tính $A_{21}A_{11}^{-1}$

4) Tính $A_{21}.A_{11}^{-1}.A_{12}$

5) Tính $A_{22} - A_{21}.A_{11}^{-1}.A_{12}$

Tiếp theo, tính các phần tử của ma trận B:

6) $B_{22} = (A_{22} - A_{21}.A_{11}^{-1}.A_{12})^{-1}$

7) $B_{12} = -A_{11}^{-1}.A_{12}B_{22}$

8) $B_{21} = -B_{22}.A_{21}.A_{11}^{-1}$

9) $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}.A_{12}.B_{21}$

Theo cách trên, xuất phát từ phần tử đầu tiên ở góc bên trái rồi thêm 1 hàng 1 cột để nghịch đảo ma trận cấp lớn hơn. Cứ như thế, ta có thể nghịch đảo một ma trận bất kì theo phương pháp chia khối, dựa trên các công thức 1.52, 1.53, 1.54, 1.55.

Thí dụ 1.9: Nghịch đảo ma trận M theo phương pháp chia khối ma trận.

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Giải:

Trước hết ta nghịch đảo ma trận A = [−2]; $A^{-1} = -0,5$. Tiếp theo, nghịch đảo ma trận:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$A_{11}^{-1} = -0,5$$

$$A_{11}^{-1}A_{12} = -0,5$$

$$A_{21}A_{11}^{-1} = -0,5$$

$$A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = -0,5$$

$$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = -1,5$$

Theo các bước 6, 7, 8, 9, ta được:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,667 & -0,333 \\ -0,333 & -0,667 \end{bmatrix}$$

Tiếp theo, nghịch đảo ma trận $A = M = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} -0,667 & -0,333 \\ -0,333 & -0,667 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} -0,333 \\ -0,667 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} -0,333 & -0,667 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = (-0,6667)$$

$$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = (-1,333)$$

Theo 1.52, 1.53, 1.54, 1.55, các phần tử của ma trận $B = A^{-1} = M^{-1}$:

$$B_{22} = -\frac{1}{1,333} = -0,75$$

$$B_{12} = -\begin{bmatrix} -0,333 \\ -0,667 \end{bmatrix}(-0,75) = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,50 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -(-0,75)\begin{bmatrix} -0,333 & -0,667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,25 & 0,50 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} -0,667 & -0,333 \\ -0,333 & -0,667 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,333 \\ -0,667 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0,25 & -0,50 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0,75 & -0,5 \\ -0,5 & -1,0 \end{bmatrix}$$

Vậy
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -0,75 & -0,5 & -0,25 \\ -0,5 & -1,0 & -0,50 \\ -0,25 & -0,50 & -0,75 \end{bmatrix}$$

1.7.5. Cách nâng cao độ chính xác khi nghịch đảo ma trận

Giả sử giá trị gần đúng của A^{-1} là B. Có thể viết:

$$A^{-1} = B_1 + E \qquad (a)$$

Vì $\quad A(B_1 + E) = I$

nên $\quad E = A^{-1}(I - AB_1)$

Thay vào (a) $\quad A^{-1} = B_1 + A^{-1}(I - AB_1)$

Giả sử $\quad A^{-1} \approx B_2 \Rightarrow$

$$A^{-1} \approx B_2 = B_0 + B_1(I - AB_1) = B_1(2I - AB_1) \qquad (1.56)$$

Tiếp tục thay A^{-1} bằng giá trị gần đúng B_2 và áp dụng 1.56, ta được giá trị gần đúng B_3... Tiến hành các vòng tính cho đến khi B_{n-1} xấp xỉ với B_n.

Thí dụ 1.10: Cho ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Giá trị gần đúng của A^{-1} là:

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0,58 & 1,03 & -0,70 & -0,03 \\ -0,06 & 0,22 & -0,33 & 0,11 \\ 0,06 & -0,42 & 0,53 & 0,09 \\ 0,44 & -0,58 & 0,47 & -0,09 \end{bmatrix}$$

Theo 1.56:

$$2I - AB_1 = \begin{bmatrix} 1,04 & 0,04 & -0,04 & 0 \\ 0,02 & 1,04 & -0,03 & -0,01 \\ 0 & 0,02 & 0,99 & -0,01 \\ 0,02 & 0,02 & -0,02 & 1,00 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = B_1(2I - AB_1) = \begin{bmatrix} -0,583 & 1,033 & -7000 & -0,033 \\ -0,056 & 0,222 & -0,333 & 0,111 \\ 0,056 & -0,422 & 0,533 & 0,089 \\ 0,444 & -0,578 & 0,467 & -0,089 \end{bmatrix}$$

$$AB_2 = \begin{bmatrix} 0,996 & -0,004 & 0,004 & 0 \\ -0,002 & 0,996 & 0,003 & 0,001 \\ 0 & -0,002 & 1,001 & 0,001 \\ -0,002 & -0,002 & 0,002 & 1,000 \end{bmatrix}$$

$$2I - AB_2 = \begin{bmatrix} 1,004 & 0,004 & -0,004 & 0 \\ 0,002 & 1,004 & -0,003 & -0,001 \\ 0 & 0,002 & 0,999 & -0,001 \\ 0,002 & 0,002 & -0,002 & 1,000 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = B_2(2I - AB_2) = \begin{bmatrix} -0,58333 & 1,03333 & -0,70000 & -0,03333 \\ -0,05556 & 0,22222 & -0,33333 & 0,11111 \\ 0,05556 & -0,42222 & 0,53333 & 0,08889 \\ 0,44444 & -0,57778 & 0,46667 & -0,08889 \end{bmatrix}$$

$$AB_3 = \begin{bmatrix} 0,99996 & -0,00004 & 0,00004 & 0 \\ -0,00002 & 0,99996 & 0,00003 & 0,00001 \\ 0 & -0,00002 & 1,00001 & 0,00001 \\ -0,00002 & -0,00002 & 0,00002 & 1,00000 \end{bmatrix}$$

$$2I - AB_3 = \begin{bmatrix} 1,00004 & 0,00004 & -0,00004 & 0 \\ 0,00002 & 1,00004 & -0,00003 & -0,00001 \\ 0 & 0,00002 & 0,99999 & -0,00001 \\ 0,00002 & 0,00002 & -0,00002 & 1,00000 \end{bmatrix}$$

$$B_4 - B_3(2I - AB_3) = \begin{bmatrix} -0,58333333 & 1,03333333 & -0,70000000 & -0,03333333 \\ -0,05555556 & 0,22222222 & -0,33333333 & 0,11111111 \\ 0,05555556 & -0,42222222 & 0,53333333 & 0,08888889 \\ 0,44444444 & -0,57777778 & 0,46666667 & -0,08888889 \end{bmatrix}$$

Qua thí dụ trên, ta thấy số vòng tính càng lớn, độ chính xác khi nghịch đảo ma trận A càng được nâng cao tuỳ theo ý muốn của người tính toán.

1.7.6. Phương pháp tính lặp

Phương pháp tính lặp được dùng để giải một hệ phương trình tuyến tính theo cách tính nhiều vòng, số vòng tính càng lớn, kết quả tính toán càng chính xác.

Giả sử có hệ phương trình tuyến tính:

$$AX = Y \tag{a}$$

Có 2 phương pháp tính lặp để giải hệ phương trình trên.

1. Phương pháp tính lặp thứ nhất

Phương trình (a) có thể đưa về dạng:

$$X = (I - A)X + Y \tag{1.57}$$

Đặt $B = I - A$

$$X = BX + Y \tag{1.58}$$

Ta có thể tính gần đúng véc tơ X theo công thức:

$$X^{(k)} = BX^{(k-1)} + Y \tag{1.59}$$

Trong đó: $X^{(k)}$ – giá trị của véc tơ X ở vòng tính thứ k; $X^{(k-1)}$ – giá trị của véc tơ X ở vòng tính thứ (k–1). Theo cách tính thứ nhất, ta dùng giá trị gần đúng của X ở vòng tính trước để tính giá trị gần đúng của X ở vòng tính sau. Ở vòng đầu tiên, khi hoàn toàn chưa biết giá trị gần đúng của X có thể cho X= 0. Ta tiếp tục các vòng tính cho đến khi giá trị của X ở vòng sau xấp xỉ với giá trị của X ở vòng ngay trước đó khi kết thúc.

2. Phương pháp tính lặp thứ hai

Giả sử giá trị gần đúng ban đầu của X là $X^{(o)}$. Theo(1.58), ta có:

$$X^{(1)} = B.X^{(o)} + Y$$

$X^{(1)}$ – giá trị gần đúng của X ở vòng tính đầu tiên.

Ở vòng tính thứ 2, vẫn theo 1.58, ta có:

$$X^{(2)} = B.X^{(1)} + Y = B(BX^{(0)} + Y) + Y \Rightarrow X^{(2)} = B^2X^0 + BY + EY$$

Có thể dễ dàng chứng minh được rằng ở tính thứ k, ta có hệ thức:

$$X^{(k)} = B^k.X^{(0)} + (E + B + B^2 + ... + B^{(k-1)})Y \qquad (1.60)$$

Thông thường, cho $X^{(0)} = Y$ nên

$$X^{(k)} = Y + B.Y + B^2Y + ... + B^k.Y \qquad (1.61)$$

Thí dụ 1.11: Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$0,78x_1 - 0,02x_2 - 0,12\,x_3 - 0,14x_4 = 0,76$$

$$-0,02x_1 + 0,86x_2 - 0,04x_3 + 0,06x_4 = 0,08$$

$$-0,12x_1 - 0,04x_2 + 0,72x_3 - 0,08x_4 = 1,12$$

$$-0,14x_1 + 0,06x_2 - 0,08x_3 + 0,74x_4 = 0,68$$

Giải hệ phương trình trên theo phương pháp tính lặp.

Giải:

Dạng ma trận của hệ phương trình trên:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0,78 & -0,02 & -0,12 & -0,14 \\ -0,02 & 0,86 & -0,04 & 0,06 \\ -0,12 & -0,04 & +0,72 & -0,08 \\ -0,14 & 0,06 & -0,08 & 0,74 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,76 \\ 0,08 \\ 1,12 \\ 0,68 \end{bmatrix}}_{Y}$$

Theo (1.57):

$$B = E - A = \begin{bmatrix} 0,22 & 0,02 & 0,12 & 0,14 \\ 0,02 & 0,14 & 0,04 & -0,06 \\ 0,12 & 0,04 & 0,28 & 0,08 \\ 0,14 & -0,06 & 0,08 & 0,26 \end{bmatrix}$$

Cách giải thứ nhất:

Cho $X^{(0)} = Y$ và lần lượt áp dụng 1.59, ta được kết quả:

	x_1	x_2	x_3	x_4
$X^{(0)}$	0,76	0,08	1,12	0,68
$X^{(1)}$	1,1584	0,1104	1,5824	1,0480
$X^{(2)}$	1,3537	0,1190	1,7903	1,2346
$X^{(3)}$	1,4479	0,1213	1,8873	1,3266
$X^{(4)}$	1,4932	0,1218	1,9332	1,3713
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$X^{(11)}$	1,5349	0,1220	1,9751	1,4129

Cách giải thứ hai:

Áp dụng công thức (1.61), ta được kết quả:

Y	0,76	0,08	1,12	0,68
BY	0,3984	0,0304	0,4624	0,3680
B^2Y	0,195264	0,008640	0,207936	0,186624
B^3Y	0,09421056	0,00223488	0,09692928	0,09197568
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$B^{14}Y$	0,00002941	0	0,00002941	0,00002941

	x_1	x_2	x_3	x_4
$X^{(12)} = \sum_{i=0}^{12}$	1,53484720	0,12200958	1,97503858	1,41283762
$X^{(13)} = \sum_{i=0}^{12}$	1,53490847	0,12200958	1,97509985	1,41289889
$X^{(14)} = \sum_{i=0}^{12}$	1,53493788	0,12200958	1,97512926	1,41292830

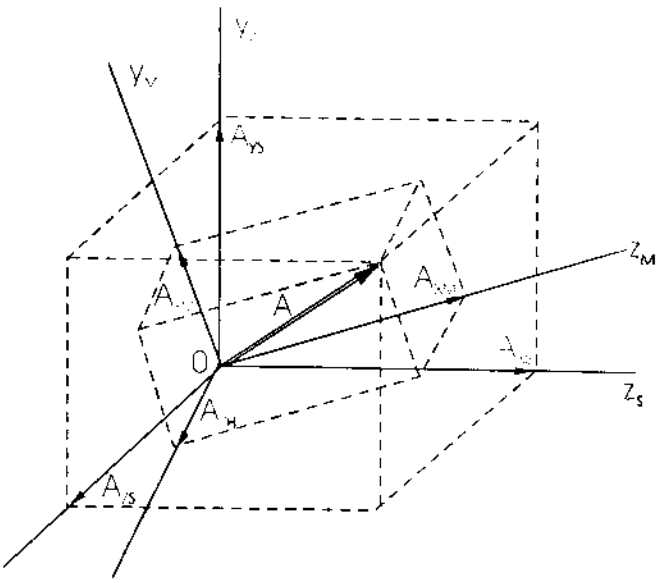
Trong đó: $\sum_{i=0}^{k} = Y + BY + B^2Y + ... + B^kY$

Nên chú ý rằng khi dùng các phương pháp tính lặp, cần phải thoả mãn điều kiện hội tụ của phương trình tuyến tính. Ta nói hệ phương trình tuyến tính AX = Y *hội tụ* khi lời giải của nó là duy nhất dù cho giá trị gần đúng ban đầu của X như thế nào. Điều kiện đủ để nó hội tụ là tổng giá trị tuyệt đối của các phần tử a_{ij} trong mỗi hàng (hoặc trong mỗi cột) của ma trận A phải nhỏ hơn đơn vị.

§1.8. Ma trận biến đổi toạ độ

Trong cơ học kết cấu, ta thường gặp trường hợp biến đổi toạ độ của một véc tơ nào đó (nội lực, ngoại lực, chuyển vị,...) từ hệ trục toạ độ này sang hệ trục toạ độ khác.

Giả sử trong trường hợp tổng quát, ta có véc tơ A và 2 hệ trục toạ độ 3 chiều: hệ trục chuẩn $x_s y_s z_s$ và hệ trục cục bộ $x_m y_m z_m$ (hình 1.25). Toạ độ của véc tơ A trên hệ trục $x_s y_s z_s$ là A_{xs}, A_{ys}, A_{zs}, trên hệ trục $x_m y_m z_m$ là A_{xm}, A_{ym}, A_{zm}.



Hình 1.24

Gọi λ_{ik} là côsin định hướng. Ta định nghĩa:

$$\lambda_{11} = \cos(X_m, X_s) \qquad \lambda_{12} = \cos(X_m, Y_s) \qquad \lambda_{13} = \cos(X_m, Z_s)$$
$$\lambda_{12} = \cos(Y_m, X_s) \qquad \lambda_{22} = \cos(Y_m, Y_s) \qquad \lambda_{23} = \cos(Y_m, X_s)$$
$$\lambda_{31} = \cos(Z_m, X_s) \qquad \lambda_{32} = \cos(Z_m, Y_s) \qquad \lambda_{33} = \cos(Z_m, X_s)$$

Hệ thức ma trận giữa A_{xm}, A_{ym}, A_{zm} và A_{xs}, A_{ys}, A_{zs} như sau:

$$\begin{bmatrix} A_{xm} \\ A_{ym} \\ A_{zm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{xs} \\ A_{ys} \\ A_{zs} \end{bmatrix} \qquad (1.62)$$

hay

$$A_M = R.A_s \qquad (1.62a)$$

trong đó:

$$A_m = \begin{bmatrix} A_{xm} \\ A_{ym} \\ A_{zm} \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \qquad A_s = \begin{bmatrix} A_{xs} \\ A_{ys} \\ A_{zs} \end{bmatrix} \qquad (1.63)$$

Trong ma trận R, chỉ số thứ nhất ứng với A_{xm}, A_{ym}, A_{zm}, chỉ số thứ 2 ứng với A_{xs}, A_{ys}, A_{zs}.

Tương tự như trên, hệ thức ma trận giữa A_{xs}, A_{ys}, A_{zs} và A_{xm}, A_{ym}, A_{zm} như sau:

$$\begin{bmatrix} A_{xs} \\ A_{ys} \\ A_{zs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{xM} \\ A_{yM} \\ A_{zM} \end{bmatrix} \qquad (1.64)$$

hay

$$A_s = R'A_m \qquad (1.64a)$$

Trong đó

$$R' = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \qquad (1.65)$$

So sánh 2 ma trận R và R', ta thấy R' là ma trận chuyển vị của R. Thay A_s từ biểu thức (1.64a) vào biểu thức (1.62a), ta có:

$$A_M = R.A_s = R.R'.A_m$$

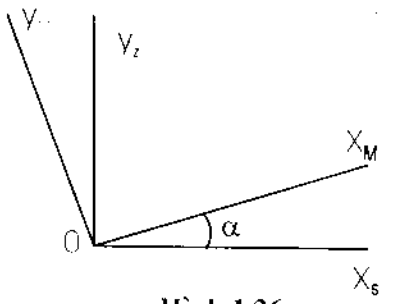
Điều này chứng tỏ RR' = I (ma trận đơn vị) nghĩa là:

$$R' = R^{-1} \qquad (1.66)$$

Vậy chuyển vị của ma trận biến đổi toạ độ R bằng nghịch đảo của nó, ta gọi R là ma trận trực giao.

Trong trường hợp hệ trục toạ độ 2 chiều, chỉ có 2 trục toạ độ X và Y nên ma trận biến đổi toạ độ R trở thành:

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \qquad (1.67)$$



Hình 1.26

Từ hình 1.26, ta thấy:

$$\lambda_{11} = \cos\gamma \quad \lambda_{12} = \sin\gamma$$
$$\lambda_{21} = -\sin\gamma \quad \lambda_{22} = \cos\gamma$$

Đặt $\quad Cx = \cos\gamma \quad Cy = \sin\gamma \qquad (1.68)$

Ta có:

$$R = \begin{bmatrix} C_x & C_y \\ -C_y & C_x \end{bmatrix} \qquad (1.69)$$

§1.9. Giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận

Trong bài toán ổn định và bài toán dao động, ta thường gặp hệ phương trình tuyến tính:

$$A.X = \lambda X \qquad (1.70)$$

Trong đó: A là ma trận vuông, X là véc tơ cột, λ là một số

1.9.1. Định nghĩa và một số định lí liên quan

Ta gọi λ là *giá trị riêng* của ma trận A, X là *véc tơ riêng* của ma trận đó.

Phương trình (1.70) có thể đưa về dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \quad \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

Dưới dạng ma trận, phương trình trên có thể viết:

$$(A - \lambda I)X = 0 \qquad (1.71)$$

Hệ phương trình thuần nhất (1.71) có nghiệm duy nhất khi định thức của ma trận $(A - \lambda I)$ triệt tiêu, nghĩa là:

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad (1.72)$$

Khai triển định thức trên, ta có đa thức của λ:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + ... + b_n$$

Nếu cho vế phải bằng không, ta có *phương trình đặc trưng* của ma trận A:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + ... + b_n = 0 \qquad (1.73)$$

Khi cấp của ma trận A bằng n, phương trình đặc trưng trên chọn giá trị riêng $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

Các nghiệm này có thể là số thực, số phức hoặc nghiệm bội (có từ 2 nghiệm trở lên bằng nhau).

Thay một giá trị riêng, chẳng hạn giá trị λ_i, vào hệ phương trình (1.70), ta được một véc tơ riêng tương ứng X_i. X_i là một véc tơ được kí hiệu như sau:

$X_1 = [x_{11}x_{21} ... x_{n1}]'$ ứng với λ_1

$X_2 = [x_{12}x_{22} ... x_{n2}]'$ ứng với λ_2

...

$X_n = [x_{1n}x_{2n} ... x_{nn}]'$ ứng với λ_n

Các véc tơ riêng thường được biểu thị dưới dạng *chuẩn hoá* nghĩa là các phần tử của X_i được chọn sao cho:

$$x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + x_{3i}^2 + ... + x_{ni}^2 = 1$$

Ma trận vuông tạo thành bởi các véc tơ riêng gọi là *ma trận các môđơ*:

$$\overline{X} = [X_1 X_2 ... X_n] \tag{1.74}$$

Ma trận chéo tạo thành bởi các giá trị riêng gọi là *ma trận phổ*:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & & . & 0 \\ 0 & \lambda & . & & . & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ 0 & . & . & . & . & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{1.75}$$

Thay $\overline{X}$ từ (1.74) vào (1.70) sau khi đã xác định được toàn bộ các giá trị riêng của ma trận A, ta được:

$$A\overline{X} = \overline{X}.D \tag{1.76}$$

do đó

$$\overline{X}^{-1}.A.\overline{X} = D \tag{1.77}$$

Sau đây là một số định lí liên quan đến giá trị riêng và véc tơ riêng, không chứng minh:

Định lí 1: Nếu ma trận vuông A có các giá trị riêng λ_i và các véc tơ riêng tương ứng X_i thì các giá trị riêng của chuyển vị của A (tức A') bằng các giá trị riêng tương ứng của A nhưng các véc tơ riêng Y_i thì lại trực giao với các véc tơ riêng X_i của A nghĩa là:

$$Y'_j.X_i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases} \tag{1.78}$$

trong đó, các véc tơ X và Y đều được chuẩn hoá.

Định lí 2: Nếu ma trận A đối xứng và toàn bộ các phần tử của nó đều là những số thực thì toàn bộ các giá trị riêng và véc tơ riêng của nó cũng là những số thực. Hơn nữa, các véc tơ riêng trực giao với nhau nghĩa là:

$$X'_i.X_j = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j; \\ 0 & \text{nếu } i \neq j. \end{cases} \tag{1.79}$$

Định lí 3: Một ma trận đối xứng A có thể được biến đổi thành một ma trận chéo trong đó

các phần tử là các giá trị riêng của nó, bằng phép biến đổi trực giao $\overline{X}^t.A.\overline{X}$, $\overline{X}$ là ma trận các môđơ của A.

Định lí 4: Nếu các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận A là λ_i và X_i thì các giá trị riêng của ma trận $B = T.A.T^{-1}$ bằng các giá trị riêng tương ứng của A còn các véc tơ riêng bằng $T^{-1}X_i$. T là một ma trận vuông không suy biến.

Định lí 5: Nếu gọi *vệt* của ma trận A là tổng các phần tử trên đường chéo chính của nó thì tổng các giá trị riêng của A bằng vệt của nó nghĩa là:

$$a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n \tag{1.80}$$

Định lí 6: Định thức của ma trận A bằng tích toàn bộ các giá trị riêng của nó nghĩa là:

$$|A| = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n \tag{1.81}$$

Định lí 7: Cho ma trận A và ma trận $B = T.A.T^{-1}$, T là một ma trận vuông bất kì không suy biến. Định thức và vệt của 2 ma trận A và B hoàn toàn như nhau nghĩa là:

$$\left.\begin{array}{l} |A| = |B| \\ a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = b_{11} + b_{22} + ... + b_{nn} \end{array}\right\} \tag{1.82}$$

Dưới đây, trình bày cách tính các giá trị riêng và véc tơ riêng của một ma trận.

1.9.2. Cách xác định các giá trị riêng của một ma trận

Như trên đã trình bày, muốn tìm các giá trị riêng của ma trận A cấp n, phải giải một phương trình đặc trưng bậc n dạng (1.73). Khi n khá lớn, việc giải trực tiếp phương trình đó quả là một việc vô cùng phức tạp. Vì vậy, ta phải dựa trên các phương pháp khác đơn giản hơn.

Trong bài toán ổn định và bài toán dao động, điều đầu tiên cần quan tâm đến là tìm giá trị riêng *bé nhất*. Giả sử các giá trị riêng của ma trận cấp n được xếp theo thứ tự $\lambda_1 < \lambda_2 < ...\lambda_n$. Ta gọi λ_1 là giá trị riêng *bé nhất*, λ_n là giá trị riêng *lớn nhất*. Bằng phương pháp tính lặp, có thể xác định được giá trị λ_1. Giá trị riêng bé nhất λ_1 xác định như sau. Nhân bên trái 2 vế của (1.70) với A^{-1}:

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.\lambda_1.X \Rightarrow$$

$$A^{-1}X = \frac{1}{\lambda_1}X = \lambda_n X \tag{1.83}$$

Vậy ta có quy tắc tìm giá trị riêng bé nhất của ma trận A: *giá trị riêng lớn nhất của nghịch đảo của A chính là giá trị riêng bé nhất của A.*

Trong bài toán dao động tự do của một hệ có n bậc tự do, ta có hệ phương trình:

$$A.X = \lambda W.X \tag{1.84}$$

Trong đó, W là một ma trận chéo được gọi là *ma trận quán tính*. Ta đưa (1.84) về dạng

$$\left.\begin{aligned} B.X &= \lambda X \\ B &= W^{-1}A \end{aligned}\right\} \tag{1.85}$$

Vậy λ là giá trị riêng của ma trận B.

Dưới đây trình bày cách xác định giá trị riêng lớn nhất.

1.9.3. Cách xác định giá trị riêng lớn nhất theo phương pháp tính lặp. Thương số Rayleigh.

Trước hết, ta gán cho véc tơ riêng những giá trị bất kì, chẳng hạn:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Thay vào (1.70), ta được:

$$AX^{(1)} = \lambda X^{(1)}$$

Trong vòng tính đầu tiên, ta được giá trị ban đầu gần đúng $\lambda^{(1)}$ bằng cách chia phần tử đầu tiên của ma trận cột $A.X^{(1)}$ cho phần tử đầu tiên của véc tơ riêng:

$$\lambda^{(1)} = \frac{\text{phần tử đầu tiên của } AX^{(1)}}{x_1^{(1)}} \tag{1.86}$$

Trong đó, chỉ số trong dấu ngoặc biểu thị số thứ tự của vòng tính. Giá trị gần đúng lần thứ hai của véc tơ riêng được xác định theo công thức:

$$X^{(2)} = \frac{AX^{(1)}}{\lambda^{(1)}} \tag{1.87}$$

Một cách tổng quát, ta có hệ thức:

$$A.X^{(m)} = \lambda^{(m)}.X^{(m+1)} \tag{1.88}$$

Trong đó, m biểu thị số thứ tự của vòng tính. Ta tiếp tục các vòng tính theo (1.87) và (1.88) cho đến khi giá trị của véc tơ riêng trong vòng tính cuối cùng xấp xỉ với giá trị tương ứng của nó trong vòng tính trước thì kết thúc.

Khi giá trị riêng chỉ cần độ chính xác vừa phải và véc tơ riêng là một đại lượng không quan trọng, ta tính giá trị riêng bằng công thức gần đúng sau đây gọi là *thương số Rayleigh*:

$$\lambda_o = \frac{X'.A.X}{X'X} \tag{1.89}$$

Thí dụ 1.12: Tìm giá trị riêng lớn nhất λ_n và véc tơ riêng tương ứng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Giải:

Trước hết, ta gán cho véc tơ riêng những giá trị bất kì chẳng hạn bằng đơn vị:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Thực hiện các vòng tính theo (1.86), (1.87), (1.88), ta lần lượt được các kết quả sau:

	$AX^{(m)}$	$\lambda^{(m)}$	$X^{(m+1)}$
m = 1	$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
m = 2	$\begin{bmatrix} 11 \\ -18 \\ 19 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1,63 \\ 1,72 \end{bmatrix}$
m = 3	$\begin{bmatrix} 13,24 \\ -20,63 \\ 19,54 \end{bmatrix}$	13,24	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1,56 \\ 1,48 \end{bmatrix}$
	.	.	.
	.	.	.
	.	.	.

$$m = 7 \qquad \begin{bmatrix} 12,29 \\ -18,26 \\ 16,28 \end{bmatrix} \qquad 12.29 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1.485 \\ 1.325 \end{bmatrix}$$

$$m = 8 \qquad \begin{bmatrix} 12,265 \\ -18,21 \\ 16,21 \end{bmatrix} \qquad 12,265 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1,485 \\ 1,325 \end{bmatrix}$$

Sau 8 vòng tính, ta thấy 2 véc tơ riêng cuối cùng bằng nhau. Vậy:

$$\lambda_n = 12,265 \qquad X_n = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,485 \\ 1,325 \end{bmatrix}$$

Trong vòng tính thứ 3, nếu áp dụng (1.89), ta được kết quả:

$$m = 3 \qquad X'AX = 68,87 \qquad X'X = 5,63$$

Vậy $\lambda_n = 68,87/5,63 = 12,33$. So với kết quả vừa tính ở trên, sai số không lớn.

1.9.4. Cách xác định các giá trị riêng tiếp theo

Sau khi tính được giá trị riêng λ_1 và véc tơ riêng tương ứng X_1, ta tính các giá trị riêng và các véc tơ riêng tiếp theo bằng cách khử nghiệm λ_1 trong phương trình đặc trưng:

$$|A - \lambda I| = 0$$

Theo định lí 4, các giá trị riêng của ma trận $B = T^{-1}.A.T$ bằng các giá trị riêng tương ứng của A còn các véc tơ riêng $Y_i = T^{-1}.X_i$, T là một ma trận không suy biến.

Giả sử dùng phép biến đổi sao cho ma trận B có dạng:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.90)$$

Ta có:

$$|B - \lambda I| = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda).|C - \lambda I| = 0$$ trong đó:

$$C = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.91)$$

Vậy các giá trị riêng của C cũng là các giá trị riêng của B đồng thời cũng là các giá trị riêng của A.

Ma trận T thoả mãn điều kiện (1.90) có dạng như sau:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{12} & 1 & \dots & 0 \\ x_{13} & 0 & \dots & 0 \\ . & . & & \\ x_{1n} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -x_{12} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -x_{13} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & & & \\ -x_{1n} & 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

Trong đó, cột đầu tiên của T biểu thị véc tơ riêng tương ứng với giá trị riêng λ_1. Ta xác định giá trị riêng tiếp theo λ_2 theo các bước sau:

1) Lập ma trận biến đổi T và nghịch đảo của nó theo (1.92);

2) Tính ma trận $B = T^{-1}.A.T$.

3) Chia khối ma trận B như sau:

$$B = \left[\begin{array}{c|c} b_{11} & b_{12} \\ \hline 0 & b_{22} \end{array}\right] \quad (1.93)$$

Trong đó: $b_{11} = \lambda_1$; b_{12} là hàng đầu tiên của ma trận A sau khi loại bỏ phần tử thứ nhất.

4) Tính giá trị riêng lớn nhất của ma trận $C = b_{22}$ theo phương pháp tính lặp. Giá trị này chính là giá trị riêng tiếp theo λ_2 của ma trận A.

Véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ_2 được tính như sau:

Véc tơ riêng Y_2 ứng với giá trị riêng λ_2 thoả mãn hệ thức:

$$B.Y_2 = \lambda_2.Y_2$$

Thay $b_{11} = \lambda_1$ và $B_{22} = C$ vào (1.93), ta có:

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b_{12} \\ \hline 0 & C \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} y_{12} \\ \hline Y_2 \end{array}\right] = \lambda_2 \left[\begin{array}{c} y_{12} \\ \hline Y'_2 \end{array}\right] \qquad (1.94)$$

Trong đó: y_{12} là phần tử đầu tiên của véc tơ riêng Y_2; Y'_2 là véc tơ riêng của ma trận C vì $CY_2 = \lambda_2.Y'_2$

Thực hiện phép nhân ma trận:

$$\lambda_1.y_{12} + b_{12}Y'_2 = \lambda_2.y_{12} \qquad \text{do đó}$$

$$y_{12} = \frac{b_{12}.Y_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad (1.95)$$

Véc tơ riêng X_2 ứng với giá trị riêng λ_2 của ma trận A được tính theo công thức:

$$X_2 = T.Y_2 \qquad (1.96)$$

Giá trị riêng tiếp theo λ_2 và véc tơ riêng tương ứng X_3 của ma trận A được xem như giá trị riêng thứ hai và véc tơ riêng thứ hai của ma trận C. Cứ như vậy, ta tiếp tục tính các giá trị riêng và véc tơ riêng tiếp theo cách trình bày ở trên.

Thí dụ 1.13: Xác định các giá trị riêng tiếp theo của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \text{ nếu} \qquad \lambda_1 = 12{,}265 \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}485 \\ 1{,}325 \end{bmatrix}$$

Giải:

Theo (1.92) ta có:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1{,}485 & 1 & 0 \\ 1{,}325 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1{,}485 & 1 & 0 \\ -1{,}325 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thực hiện các phép nhân ma trận:

$$AT_1 = \begin{bmatrix} 12{,}265 & -4 & 1 \\ -18{,}21 & 6 & -4 \\ 16{,}21 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = T_1^{-1}.AT_1 = \begin{bmatrix} 12{,}265 & -4 & 1 \\ 0 & 0{,}06 & -2{,}515 \\ 0 & 1{,}30 & 5{,}675 \end{bmatrix}$$

Vậy theo (1.94): $C = \begin{bmatrix} 0,06 & -2,515 \\ 1,30 & 5,675 \end{bmatrix}$

Sau khi dùng phương pháp tính lặp đối với ma trận C, ta được kết quả:

$$\lambda_2 = 5,01 \qquad Y_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,97 \end{bmatrix}$$

Vì $b_{12} = [-4, 1]$ nên sau khi áp dụng (1.95), ta được kết quả:

$$y_{12} = -\frac{B_{12}Y_2'}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{5,97}{12,265 - 5,01} = \frac{5,97}{7,255} = 0,825$$

Vậy véc tơ riêng thứ hai của B là:

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0,825 \\ 1 \\ -1,97 \end{bmatrix}$$

Theo định lí 4:

$$X_2 = T_1.Y_2 = \begin{bmatrix} 0,825 \\ -0,224 \\ -0,878 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,371 \\ -1,062 \end{bmatrix}$$

Giá trị riêng cuối cùng được xác định bằng cách khử λ_2 từ phương trình đặc trưng:

$$|C - \lambda I| = 0$$

Sau khi áp dụng (1.92) và thực hiện các phép nhân ma trận, ta được kết quả:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1,97 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1,97 & 1 \end{bmatrix} \qquad CT_2 = \begin{bmatrix} 5,01 & -2,515 \\ 9,88 & 5,675 \end{bmatrix}$$

Vậy: $D = T_2^{-1}CT_2 = \begin{bmatrix} 5,01 & -2,512 \\ 0 & 0,725 \end{bmatrix}$

Thực hiện phương pháp tính lắp đối với ma trận D, ta được kết quả: $\lambda_3 = 0,725 \quad Z'_3 = 1$. Theo (1.95):

$$z_{23} = \frac{(-2,512).1}{5,01 - 0,725} = 0,586$$

Vậy: $z_3 = \begin{bmatrix} 0,586 \\ 1 \end{bmatrix}$; $Y_3' = T_2.Z_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1,97 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,586 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,586 \\ -0,154 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,263 \end{bmatrix}$

Theo (1.95):

$$y_{13} = \frac{-\begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0,263 \end{bmatrix}}{12,265 - 0,725} = \frac{4,263}{11,54} = 0,369$$

Vậy: $$Y_3 = \begin{bmatrix} 0,369 \\ 1 \\ -0,263 \end{bmatrix}$$

Cuối cùng, véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = 0,725$ của ma trận A là:

$$X_3 = T_1 Y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1,485 & 1 & 0 \\ 1,325 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0,369 \\ 1 \\ -0,263 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,369 \\ 0,452 \\ 0,226 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,221 \\ 0,612 \end{bmatrix}$$

Thuyết minh các chương trình tính ma trận

Sau đây là 19 chương trình tính ma trận theo ngôn ngữ TURBO PASCAL 7.0

– *Chương trình CT1:* Tính tổng ma trận.

Thuật toán dựa trên công thức (1.8) (xem §1.3.1)

– *Chương trình CT2*: Tính tích ma trận

Thuật toán dựa trên công thức (1.10) (xem §1.4.2)

– *Chương trình CT3*: Tính ma trận chuyển vị

Thuật toán dựa trên công thức (1.1) (xem §1.1.2)

– *Chương trình CT4*: Đưa ma trận bất kì về dạng tam giác theo phương pháp Gauss.

Thuật toán dựa trên công thức (1.35) (xem §1.7.1.1)

– *Chương trình CT5*: Đưa ma trận đối xứng về dạng tam giác theo phương pháp Gauss.

Thuật toán dựa trên công thức (1.37) (xem §1.7.1.2)

– *Chương trình CT6*: Giải hệ phương trình tuyến tính bất kì theo phương pháp Gauss.

Thuật toán dựa trên các công thức (1.35), (1.36) (xem §1.7.1.1)

– *Chương trình CT7*: Giải hệ phương trình tuyến tính kiểu ma trận đối xứng theo phương pháp Gauss.

Thuật toán dựa trên các công thức (1.37), (1.36) (xem §1.7.1.2)

– *Chương trình CT8*: Giải hệ phương trình tuyến tính kiểu ma trận dải đối xứng theo phương pháp Gauss.

Thuật toán dựa trên các công thức (1.40), (1.41) (xem §1.7.1.3)

– *Chương trình CT9*: Giải hệ phương trình tuyến tính kiểu ma trận đối xứng theo từng cột.

Thuật toán dựa trên các công thức (1.43) và (1.36) (xem §1.7.1.4)

– *Chương trình CT10*: Giải hệ phương trình tuyến tính kiểu ma trận đối xứng có nhiều phần tử triệt tiêu.

Thuật toán dựa trên các công thức (1.44), (1.45), (1.43), (1.36) (mục 2 §1.7.1.4)

– *Chương trình CT11*: Tính định thức của ma trận bất kì. Thuật toán dựa trên các bước:

1. Đưa ma trận về dạng tam giác theo phương pháp Gauss (xem CT4).
2. Tính tích các phần tử trên đường chéo chính của ma trận tam giác nói trên. (xem các tính chất của định thức trong §1.2.2)

– *Chương trình CT12*: Tính định thức chính của ma trận đối xứng. Xem CT5 và CT11.

– *Chương trình CT13*: Tính nghịch đảo ma trận tam giác dưới.

Thuật toán dựa trên công thức (1.29) (xem mục 8 §1.6.2)

– *Chương trình CT14*: Tính nghịch đảo ma trận tam giác trên.

Thuật toán dựa trên công thức (1.30) (xem mục 8 §1.6.2)

– *Chương trình CT15*: Tính nghịch đảo ma trận đối xứng.

Thuật toán dựa trên các công thức (1.50), (1.51) (xem §1.7.3)

– *Chương trình CT16*: Tính nghịch đảo ma trận theo phương pháp Gauss–Jordan.

Thuật toán dựa trên các bước tính trình bày trong bảng 1.2 (xem §1.7.2)

– *Chương trình CT17*: Tính nghịch đảo ma trậntheo phương pháp chia khối. Thuật toán dựa trên các công thức (1.52), (1.53), (1.54), (1.55) (xem §1.7.4).

– *Chương trình CT18*: Phương pháp tính lặp giải hệ phương trình tuyến tính.

Thuật toán dựa trên các công thức (1.57), (1.58), (1.59) (xem §1.7.6)

– *Chương trình CT19*: Tính giá trị riêng lớn nhất theo phương pháp tính lặp.

Thuật toán dựa trên các công thức (1.86), (1.87), (1.88) (xem §1.9.3)

– *Chương trình CT20*: Tính giá trị riêng bé nhất theo phương pháp tính lặp.

Thuật toán dựa theo các bước sau:

– Tính nghịch đảo của ma trận gốc.

– Tính giá trị riêng lớn nhất của ma trận nghịch đảo nói trên (xem các tính chất nêu trong §1.9.2)

Chương hai
HỆ GIÀN

Giàn được tạo thành bởi các phần tử, mỗi phần tử đều có 2 khớp ở 2 đầu. Với giả thiết tải trọng tác dụng tại các nút và khớp có tính chất lí tưởng, ta có thể xem các phần tử giàn là những thanh chịu kéo thuần tuý hoặc nén thuần tuý.

Trong phương pháp chuyển vị, các thành phần chuyển vị tại các nút là các ẩn cần tìm. Nội lực trong các thanh giàn được xác định từ các thành phần chuyển vị này.

Dạng ma trận của phương pháp chuyển vị có thể biểu thị bằng hai cách.

1) Cách thứ nhất

Thành lập hệ thức ma trận giữa nội lực và chuyển vị của mỗi phần tử, tiếp theo là đổi chuyển vị của các phần tử thành chuyển vị của các nút và cuối cùng thành lập hệ thức ma trận giữa véc tơ tải trọng và véc tơ chuyển vị của các nút, dựa trên điều kiện cân bằng.

2) Cách thứ hai:

Cách này đơn giản hơn vì không cần biến đổi chuyển vị của các phần tử thành chuyển vị của các nút và có thể thành lập trực tiếp hệ thức ma trận giữa các véc tơ tải trọng và véc tơ chuyển vị của các nút, dựa trên điều kiện cân bằng.

§2.1. Dạng ma trận của phương pháp biến đổi chuyển vị

2.1.1. Hệ thức ma trận giữa véc tơ chuyển vị của phần tử và véc tơ chuyển vị của các nút

Giả sử một phần tử i bất kì của giàn biểu thị như trên hình 2.1. Đầu 1 của nó quy tụ vào nút R và đầu 2 quy tụ vào nút S.

Hệ toạ độ cục bộ là P và Q, hệ toạ độ chung là X và Y. Trục P trùng với trục của phần tử i và có chiều dương hướng từ đầu 1 đến đầu 2.

Từ hình 2.1a, ta có độ dài của phần tử i:

$$L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \qquad (2.1)$$

Giả sử do một nguyên nhân bên ngoài nào đó, các nút R và S của giàn có các chuyển vị tương ứng là x_R, y_R và x_S, y_S (Hình 2.1b).

Do các nút R, S chuyển vị, các đầu 1 và 2 của phần tử i di chuyển dọc trục những đoạn tương ứng là u_1 và u_2.

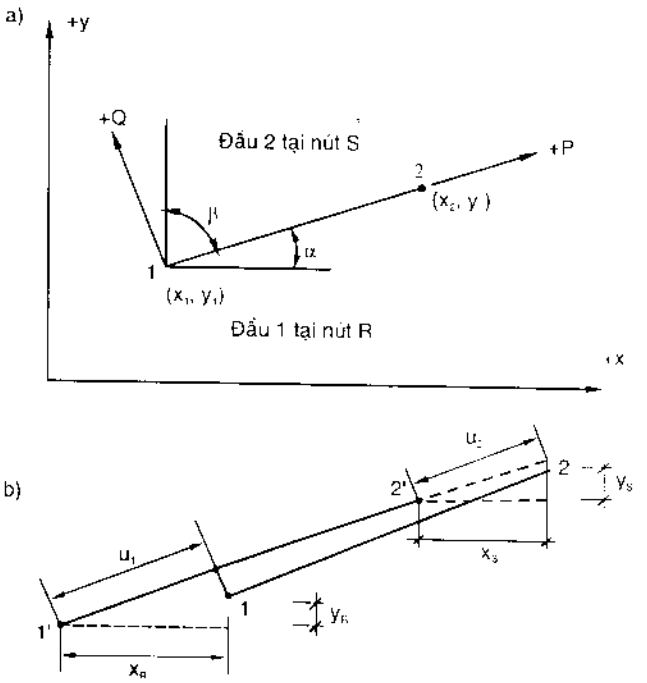
Biến dạng dọc của phần tử i là:

$$u_i = u_2 - u_1 \qquad (2.2)$$

Từ hình 2.1b, ta có

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= X_R.\cos\alpha + y_R \sin\alpha \\ u_2 &= X_S.\cos\alpha + y_S \sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Trong đó:



Hình 2.1

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{X_2 - X_1}{L} \\ \sin\alpha &= \frac{Y_2 - Y_1}{L} \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Thay u_1, u_2 từ hệ thức (2.3) vào hệ thức (2.2), ta có:

$$u_i = x_S.\cos\alpha_i + y_S.\sin\alpha_i - x_R.\cos\alpha_i - y_R.\sin\alpha_i$$

Dưới dạng ma trận, hệ thức trên có thể viết:

$$u_i = [\underbrace{-\cos\alpha_i \;\; -\sin\alpha_i}_{\text{tại nút R}} \;\; \ldots \;\; \underbrace{\cos\alpha_i \;\; \sin\alpha_i}_{\text{tại nút S}}].[x_R \;\; y_R \;\; \ldots \;\; x_S \;\; y_S]^t \qquad (2.5)$$

Véc tơ hàng $[-\cos\alpha_i \; -\sin\alpha_i \; \ldots \; \cos\alpha_i \;\; \sin\alpha_i]$ gọi là *ma trận biến đổi chuyển vị* ứng với phần tử i.

Đối với toàn bộ giàn, hệ thức ma trận giữa véc tơ biến dạng U của các phần tử và véc tơ chuyển vị X của các nút có dạng như sau:

$$U = A.X \qquad (2.6)$$

Trong đó: A – ma trận biến đổi chuyển vị ứng với toàn bộ giàn.

Phương trình (2.5), (2.6) có thể mở rộng cho hệ giàn không gian. Lúc này, biến dạng của phần tử i có dạng như sau:

$$U_i = [-\cos\alpha_i - \cos\beta_i - \cos\gamma_i \ldots \cos\alpha_i \cos\beta_i \cos\gamma_i][x_R \quad y_R \quad z_R \ldots x_R y_R z_R]' \qquad (2.7)$$

Trong đó: α, β, γ – lần lượt biểu thị các góc tạo thành giữa trục dương của phần tử i và các trục X, Y, Z của hệ toạ độ chung; x_R, y_R, z_R – chuyển vị của nút giàn R theo phương các trục X, Y, Z của hệ toạ độ chung: x_S, y_S, z_S – chuyển vị của nút giàn S theo phương các trục X, Y, Z.

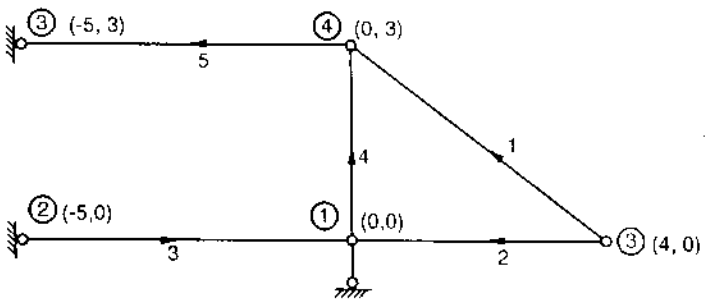
Tương tự như trên, ta có:

$$L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \qquad (2.8)$$

$$\cos\alpha = \frac{X_2 - X_1}{L}, \quad \cos\beta = \frac{Y_2 - Y_1}{L}, \quad \cos\gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{L} \qquad (2.9)$$

Thí dụ:

Cho 1 giàn như trên hình 2.2. Số thứ tự các nút giàn được đánh dấu bằng các khoanh tròn. Số thứ tự của các phần tử được đánh dấu bằng các số bên cạnh các mũi tên. Trục dương của mỗi phần tử hướng từ đầu 1 đến đầu 2 của phần tử đó.



Hình 2.2

Phần tử 1:

Áp dụng công thức 2.1, ta có:

$$L_1 = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2} = 5$$

Áp dụng công thức 2.4:

$$\cos\alpha_1 = (0 - 4)/5 = -0{,}8$$
$$\sin\alpha_1 = (3 - 0)/5 = 0{,}6$$

Đặc trưng hình học của các phần tử ghi trong bảng 2.1.

Đầu 1 của phần tử 1 quy tụ vào nút R = 5, đầu 2 quy tụ vào nút S = 4.

Do đó, áp dụng hệ thức 2.5, ta có:

$$U_1 = [-(-0{,}8) - 0{,}6 \ldots -0{,}8 \; 0{,}6].[x_5 \; y_5 \ldots x_4 y_4]'$$

Phần tử 2:

Đầu 1 của phần tử 2 quy tụ vào nút R = 5, đầu 2 quy tụ vào nút S = 1. Căn cứ vào hệ thức (2.5) và các số liệu trong bảng 2.1, ta có:

$$U_2 = [-(-0,1) \quad 0 \ldots -1].[x_5 \quad y_5 \ldots x_1]'$$

Trong phương trình ma trận trên, chuyển vị thẳng y_1 trên phương thẳng đứng tại nút 1 bằng không nên không đưa vào.

Phần tử 3:

Tương tự như trên, ta có:

$$U_3 = [1].[x_1]$$

(chú ý nút 2 không có chuyển vị)

Phần tử 4:

$$U_4 = [0 \ldots 0\ 1].[x_1 \ldots x_4 y_4]'$$

Phần tử 5:

$$U_5 = [-(-1) \quad 0].[x_4 \quad y_4]'$$

Bảng 2.1

Phần tử	L	cosα	sinα
1	5	−0,8	0,6
2	4	−1	0
3	5	1	0
4	3	0	1
5	5	−1	0

Kết hợp các hệ thức trên, hệ thức ma trận giữa véc tơ biến dạng U và véc tơ chuyển vị X của các nút giàn có thể viết:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,8 & 0,6 & 0,8 & -0,6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ y_4 \\ x_5 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

tại nút 1 tại nút 4 tại nút 5

A

2.1.2. Hệ thức ma trận giữa véc tơ nội lực và véc tơ biến dạng của một phần tử

Lực dọc trong phần tử i có thể viết:

$$N_i = \frac{E_i A_i}{L_i}.U_i \qquad (2.10)$$

Trong đó: E_i, A_i, L_i, U_i – lần lượt ứng với mô dun đàn hồi, diện tích tiết diện, chiều dài, biến dạng dọc của phần tử i.

Đối với toàn bộ giàn, hệ thức ma trận giữa véc tơ nội lực S và véc tơ biến dạng U có thể viết:

$$S = k.U \qquad (2.11)$$

hay

$$\underset{S}{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N_m \end{bmatrix}} = \underset{k}{\begin{bmatrix} E_1A_1/L_1 & & & & & 0 \\ & E_2A_2/L_2 & & & & \\ & & E_3A_3/L_3 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & \cdot & \\ & & & & & E_mA_m/L_m \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m \end{bmatrix}}$$

Trong đó, ma trận độ cứng k là ma trận chéo:

$$k = \begin{bmatrix} E_1A_1/L_1 & & & 0 \\ & E_2A_2/L_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & E_mA_m/L_m \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

Thay U từ phương trình (2.6) vào phương trình (2.11), ta có:

$$S = k.A.X \qquad (2.13)$$

2.1.3. Hệ thức ma trận giữa véc tơ tải trọng và và véc tơ chuyển vị của các nút

Gọi P là véc tơ tải trọng và X là véc tơ chuyển vị. Trong trường hợp tổng quát, ta có:

$$P = [P_{1x}\ P_{1y}\ P_{1z} \ldots P_{ix}\ P_{iy}\ P_{iz} \ldots P_{nx}\ P_{ny}\ P_{nz}]'$$

$$X = [x_1\ y_1\ z_1 \ldots x_i\ y_i\ z_i \ldots x_n\ y_n\ z_n]'$$

Trong đó: P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} – các thành phần tải trọng tại nút i trên các phương X, Y, Z của hệ toạ độ chung; x_i, y_i, z_i – các thành phần chuyển vị tương ứng tại nút i của giàn. Áp dụng nguyên lí cân bằng giữa công của ngoại lực và thế năng biến dạng đàn hồi, ta có:

$$\frac{1}{2}P'X = \frac{1}{2}.S'U$$

Thay U từ phương trình (2.6) và S từ phương trình (2.13) vào phương trình trên, ta có:

$$P'X = X'.A'.k'.A.X \Rightarrow P' = (A'.k.A.X)'$$

Đặt $$K = A'.k.A \qquad (2.14)$$

ta có: $$P = K.X \tag{2.15}$$

ta gọi K là *ma trận độ cứng toàn bộ* của giàn.

Có thể lập ma trận K bằng 2 cách sau:

a) Thực hiện các phép nhân ma trận theo trình tự nêu trong công thức (2.14).

b) Xem mỗi phần tử của giàn có phần đóng góp riêng vào ma trận K.

Như đã trình bày, phần đóng góp của phần tử i vào ma trận biến đổi chuyển vị A có dạng như sau:

$$A_i = [\underbrace{\cos\alpha_i \ -\cos\beta_i \ -\cos\gamma_i}_{\text{tại nút R}} \ldots \underbrace{a_i\cos\alpha_i \ a_i\cos\beta_i \ a_i\cos\gamma_i}_{\text{tại nút S}}] \tag{2.16}$$

Sau khi nhân bên phải ma trận k ở (2.12) với ma trận A, ta thấy phần đóng góp của phần tử i vào ma trận [kA] có dạng như sau:

$$(kA)_i = [\underbrace{-a_i\cos\alpha_i \ -a_i\cos\beta_i \ -a_i\cos\gamma_i}_{\text{tại nút R}} \ldots \underbrace{a_i\cos\alpha_i \ a_i\cos\beta_i \ a_i\cos\gamma_i}_{\text{tại nút S}}] \tag{2.17}$$

Trong đó: $$a_i = \frac{E_i A_i}{L_i} \tag{2.18}$$

Sau khi nhân A` với ma trận [kA], ta thấy phần đóng góp của phần tử i vào ma trận độ cứng toàn bộ K có dạng như sau:

$$K_i = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} K_{rr} & L & K_{rs} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ K_{sr} & & K_{ss} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{tại nút R} \\ \\ \\ \text{tại nút S} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{tại nút R} & \text{tại nút S} \end{array} & \end{array} \tag{2.19}$$

Trong đó:

$$K_{rr} = \begin{bmatrix} a_i\cos^2\alpha_i & a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i \\ a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & a_i\cos^2\beta_i & a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i \\ a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i & a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i & a_i\cos^2\gamma_i \end{bmatrix} \tag{2.20a}$$

$$K_{rs} = \begin{bmatrix} -a_i\cos^2\alpha_i & -a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & -a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i \\ -a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & -a_i\cos^2\beta_i & -a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i \\ -a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i & -a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i & -a_i\cos^2\gamma_i \end{bmatrix} \tag{2.20b}$$

$$K_{sr} = \begin{bmatrix} -a_i\cos^2\alpha_i & -a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & -a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i \\ -a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & -a_i\cos^2\beta_i & -a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i \\ -a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i & -a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i & -a_i\cos^2\gamma_i \end{bmatrix} \quad (2.20c)$$

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} a_i\cos^2\alpha_i & a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i \\ a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & a_i\cos^2\beta_i & a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i \\ a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i & a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i & a_i\cos^2\gamma_i \end{bmatrix} \quad (2.20d)$$

Đối với giàn phẳng, vì $\cos\beta_i = \sin\alpha_i$ và không có số hạng $\cos\gamma_i$ nên phần đóng góp của phần tử i vào ma trận độ cứng toàn bộ K có dạng như sau:

$$K_i = \begin{array}{c} \text{tại nút} \\ R \\ \\ \text{tại nút} \\ S \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccc} a_i\cos^2\alpha_i & a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i & L & -a_i\cos^2\alpha_i & -a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i \\ a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i & a_i\sin^2\alpha_i & L & -a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i & -a_i\sin^2\alpha_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_i\cos^2\alpha_i & -a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i & L & -a_i\cos^2\alpha_i & a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i \\ -a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i & -a_i\sin^2\alpha_i & L & ...a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i & a_i\sin^2\alpha_i \end{array} \right] \quad (2.21)$$

tại nút R — tại nút S

Sau khi thành lập phương trình cân bằng (2.15), ta giải véc tơ chuyển vị như sau:

$$X = K^{-1}.P \quad (2.22)$$

Véc tơ nội lực trong các thanh giàn xác định theo (2.13).

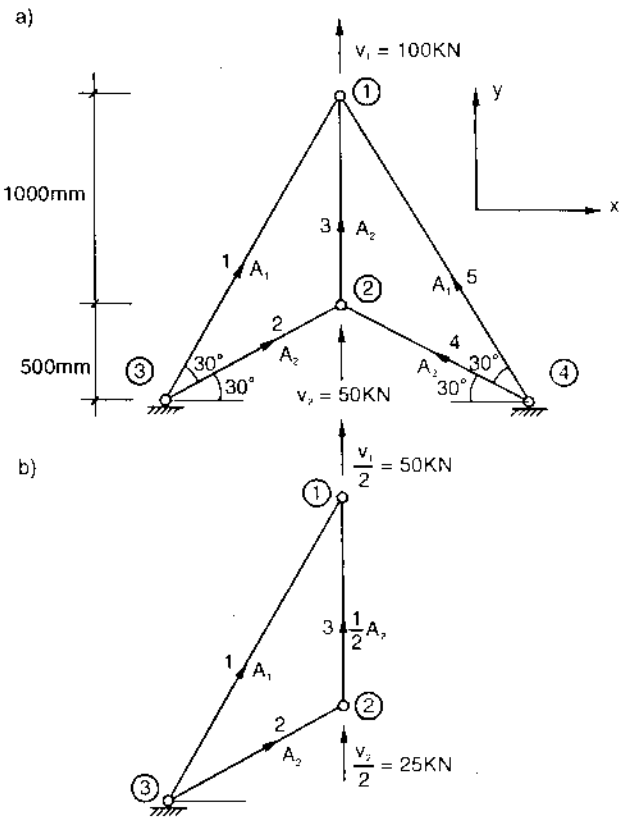
Thí dụ 2.1:

Cho hệ giàn như trên hình (2.3). Yêu cầu thành lập hệ phương trình cân bằng.

Giải:

Trước hết, ta nhận thấy giàn có tính chất đối xứng nên sơ đồ tính như trên hình (2.3b). Mặt khác, các thành phần chuyển vị thẳng trên phương nằm ngang tại các nút 1 và 2 đều triệt tiêu.

Trước hết, ta thành lập các ma trận k.A và K. Ma trận độ cứng k có dạng:



Hình 2.3

$$k = \begin{bmatrix} EA_1/1732 & & \\ & EA_2/1000 & \\ & & EA_3/2000 \end{bmatrix} \qquad (2.23)$$

Thành lập ma trận A:

Đặc trưng hình học của các phần tử 1, 2, 3 ghi trong bảng (2.2).

Bảng 2.2

Phần tử	L (mm)	cosα	sinα
1	1732	0,5	0,866
2	1000	0,866	0.5
3	1000	0	1

Phần tử 1:

Phần tử 1 quy tụ vào nút R = 3 và nút S = 1. Chú ý rằng chuyển vị tại nút 3 bằng không và tại nút 1 chỉ có thành phần chuyển vị y_1:

Áp dụng công thức (2.5), ta có:

$$U_1 = [\sin\alpha_1].[y_1] = 0.866y_1$$

Phần tử 2:

Phần tử 2 quy tụ vào nút R = 3 và nút S = 2. Nút 3 không có chuyển vị và tại nút 2 chỉ có thành phần chuyển vị y_2. Áp dụng công thức (2.5), ta có:

$$U_2 = [\sin\alpha_2].[y_2] = 0,5y_2$$

Phần tử 3:

Phần tử 3 quy tụ vào nút R = 2 và nút S = 1. Áp dụng công thức (2.5):

$$U_3 = [-\sin\alpha_3 \quad \sin\alpha_3].[y_2 \quad y_1]$$

$$U_3 = [-1 \quad 1].[y_2 \quad y_1]$$

Kết hợp các phương trình trên, ta được hệ thức ma trận:

$$\underset{U}{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 0,866 & 0 \\ 0 & 0,5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} . \underset{X}{\begin{bmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \end{bmatrix}}$$

Vậy ma trận biến đổi chuyển vị A có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} 0,866 & 0 \\ 0 & 0,5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nhân bên phải ma trận k ở hệ thức (2.23) với ma trận A, ta được:

$$k.A = \begin{bmatrix} EA_1/2000 & 0 \\ 0 & EA_2/2000 \\ EA_2/2000 & -EA_2/2000 \end{bmatrix}$$

Chuyển vị của ma trận A:

$$k.A = \begin{bmatrix} 0,866 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & -1 \end{bmatrix}$$

Nhân bên phải ma trận A' với ma trận [kA], ta được ma trận độ cứng toàn bộ:

$$K = A'.kA = \begin{bmatrix} \left(\sqrt{3}A_1 + 2A_2\right)E/4000 & -EA_2/2000 \\ -EA_2/2000 & 3EA_2/2000 \end{bmatrix}$$

Áp dụng phương trình (2.15) ta có hệ phương trình cân bằng:

$$P = \begin{bmatrix} V_{1/2} \\ V_{2/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 25 \end{bmatrix} = K.X = \begin{bmatrix} \left(\sqrt{3}A_1 + 2A_2\right)E/4000 & -EA_2/2000 \\ -EA_2/2000 & 3EA_2/4000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

§2.2. Dạng ma trận của phương pháp thành lập trực tiếp ma trận độ cứng toàn bộ

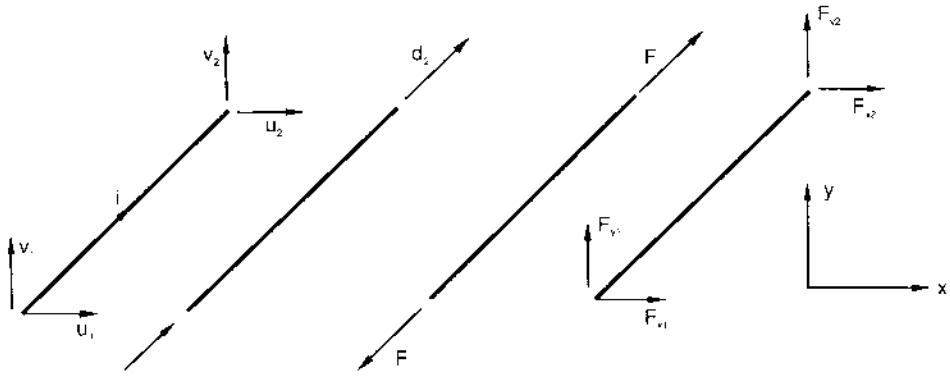
Như trong mục 2.1 đã trình bày, muốn lập hệ phương trình cân bằng của giàn, ta phải lập ma trận biến đổi chuyển vị A và thực hiện một số phép nhân ma trận để được ma trận độ cứng toàn bộ K. Mặc dầu đã có một số công thức tính sẵn song việc tính toán vẫn còn phức tạp. Dưới đây, giới thiệu một phương pháp đơn giản hơn, dựa trên điều kiện cân bằng của các nút để thành lập trực tiếp ma trận độ cứng toàn bộ K.

2.2.1. Ma trận độ cứng của một phần tử trong hệ giàn phẳng

Giả sử một phần tử i bất kì của giàn được biểu thị như trên hình (2.4). Ta quy ước mỗi phần tử của giàn có 2 đầu: đầu 1 đi đến đầu 2 theo chiều mũi tên. Chiều mũi tên đồng thời cũng là chiều dương của trục phần tử. Các thành phần chuyển vị và các thành phần nội lực của các phần tử đều được xác định theo *hệ toạ độ chung* X, Y. Gọi: u_1, v_1 – các thành phần chuyển vị tại đầu 1 trên phương X và Y; u_2, v_2 – các thành phần chuyển vị tại đầu 2 trên phương X và Y; F_{x1}, F_{y1} – các thành phần nội lực tại đầu 1 trên phương X và Y; F_{x2}, F_{y2} – các thành phần nội lực tại đầu 2 trên phương X và Y; d_1, d_2 – chuyển vị dọc trục tại đầu 1 và đầu 2; F – lực dọc (kéo hoặc nén). Từ hình (2.4), ta có các hệ thức sau:

$$d_1 = u_1 l + v_1 m; \; d_2 = u_2 l + v_2 m \qquad \text{(a)}$$

l, m – các côsin định hướng của phần tử 1 – 2.



Hình 2.4

Lực dọc của phần tử:

$$F = \frac{AE}{L}(d_2 - d_1) \qquad \text{(b)}$$

A – diện tích tiết diện; L – chiều dài; E – mô đun đàn hồi.

Thay (b) vào (a)

$$F = \frac{AF}{L}\{(u_2 - u_1)l + (v_2 - v_1)m\} \qquad (2.24)$$

Mặt khác: $F_{x1} = -F_{x2} = -F.l$; $F_{y1} = -F_{y2} = -F.m$ (quy ước lực kéo là dương). Do đó:

$$F_{x1} = -\frac{AF}{L}\{(u_2 - u_1)l + (v_2 - v_1)m\}l$$

$$F_{y1} = -\frac{AF}{L}\{(u_2 - u_1)l + (v_2 - v_1)m\}m$$

$$F_{x2} = -F_{x1}\ ,\ F_{y2} = -F_{y1}$$

Biểu thị 4 phương trình trên dưới dạng ma trận:

$$\underset{S_i}{\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{bmatrix}} = \frac{AE}{L}\underset{k_i}{\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ & m^2 & -lm & -m^2 \\ \text{đối} & \text{xứng} & l^2 & lm \\ & & & m^2 \end{bmatrix}}\underset{U_i}{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}} \qquad (2.25)$$

Viết hệ phương trình trên dưới dạng rút gọn:

$$S_i = k_i.U_i \qquad (2.25a)$$

S_i – véc tơ nội lực của phần tử i; k_i – ma trận độ cứng của phần tử i; U_i – véc tơ chuyển vị của phần tử i.

2.2.2. Ma trận độ cứng của một phần tử trong hệ giàn không gian

Giả sử hệ toạ độ chung là X, Y, Z. Trong hệ giàn không gian, mỗi đầu của một phần tử có 3 thành phần chuyển vị và 3 thành phần nội lực. Gọi: u_1, v_1, w_1 – các thành phần chuyển vị tại đầu 1 trên phương X, Y, Z; u_2, v_2, w_2 – các thành phần chuyển vị tại đầu 2 trên phương X, Y, Z; F_{x1}, F_{y1}, F_{z1} – các thành phần nội lực tại đầu 1 trên phương X, Y, Z; F_{x2}, F_{y2}, F_{z2} – các thành phần nội lực tại đầu 2 trên phương X, Y, Z. Tương tự như trên, ta có:

$$d_1 = u_1 l + v_1 m + w_1 n; \qquad d_2 = u_2 l + v_2 m + w_2 m$$

$$F = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1)l + (v_2 - v_1)m + (w_2 - w_1).n \tag{2.24a}$$

$$F_{x1} = -F_{x2} = -Fl;\ F_{y1} = -F_{y2} = -F.m;\ F_{z1} = -F_{z2} = -F.n$$

Trong đó: l, m, n – các côsin định hướng của phần tử 1 – 2. Biểu thị các phương trình trên dưới dạng ma trận:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{bmatrix}}_{S_i} = \frac{AE}{L}\underbrace{\begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ & & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ & & & l^2 & lm & ln \\ & & & & m^2 & mn \\ & & & & & n^2 \end{bmatrix}}_{k_i}\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}}_{U_i} \tag{2.26}$$

(2.26) viết dưới dạng rút gọn:

$$S_i = k_i.U_i \tag{2.26a}$$

(2.25) và (2.26) là 2 hệ thức ma trận rất cơ bản để lập ma trận độ cứng toàn bộ K.

2.2.3. Lập ma trận độ cứng toàn bộ K

Gọi F là véc tơ các thành phần tải trọng tác dụng tại các nút của giàn và D là véc tơ các thành phần chuyển vị tại các nút. Để tiện cho việc tính toán, dùng chung một chỉ số cho các thành phần tải trọng và thành phần chuyển vị cùng phương. Vì vậy, dạng ma trận của F và D như sau:

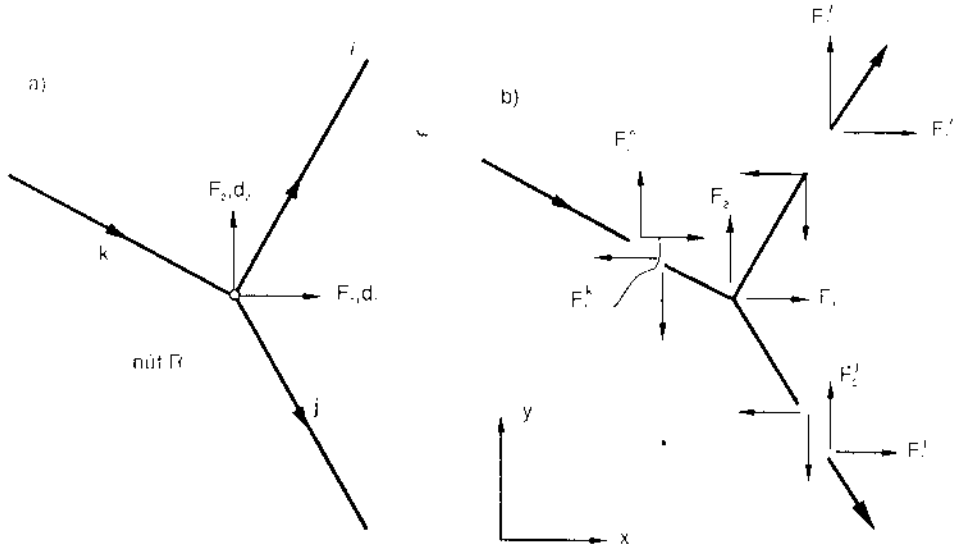
$$F = [F_1\ F_2 \dots F_i \dots F_m]'$$

$$D = [d_1\ d_2 \dots d_i \dots d_m]'$$

Trong đó d_i là thành phần chuyển vị trên phương của thành phần tải trọng F_i, m là số bậc tự do của hệ giàn.

Hệ thức ma trận giữa F và D như sau:

$$F = K.D \tag{2.27}$$



Hình 2.5

K là *ma trận độ cứng toàn bộ* của giàn. Dựa vào (2.25) hoặc (2.26), xuất phát từ điều kiện cân bằng của các nút để thành lập ma trận K. Chẳng hạn trên hình (2.5), ta có 3 phần tử i, j, k quy tụ tại nút R. Tại đây, có 2 thành phần tải trọng F_1, F_2, các bậc tự do tương ứng là d_1, d_2. Ta cắt các phần tử i, j, k ở lân cận nút R, các thành phần nội lực và các bậc tự do cùng phương được biểu thị bằng chỉ số như nhau (xem hình 2.5). Từ điều kiện cân bằng nút ta có:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1^i + F_1^j + F_1^k \\ F_2 &= F_2^i + F_2^j + F_2^k \end{aligned} \tag{2.28}$$

Các số hạng ở vế phải của phương trình trên là những hàm tuyến tính của các bậc tự do d_1, d_2,... Từ (2.25), ta viết phương trình đầu tiên như sau:

$$F_1^i = a_1 d_1 + a_2 d_2 + \ldots$$

$$F_2^j = b_1 d_1 + b_2 d_2 + \ldots$$

$$F_1^k = c_1 d_1 + c_2 d_2 + \ldots \text{do đó}$$

$$F_1 = F_1^i + F_1^j + F_1^k = (a_1 + b_1 + c_1)d_1 + (a_2 + b_2 + c_2)d_2 + \ldots$$

Trong đó: F_1 – phần tử của véc tơ tải trọng ứng với bậc tự do d_1; a, b, c – các phần tử lần lượt ứng với các ma trận độ cứng của các phần tử i, j, k. Nếu so sánh 2 vế của (2.27), ta thấy phần tử của ma trận K cùng hàng với F_1 và

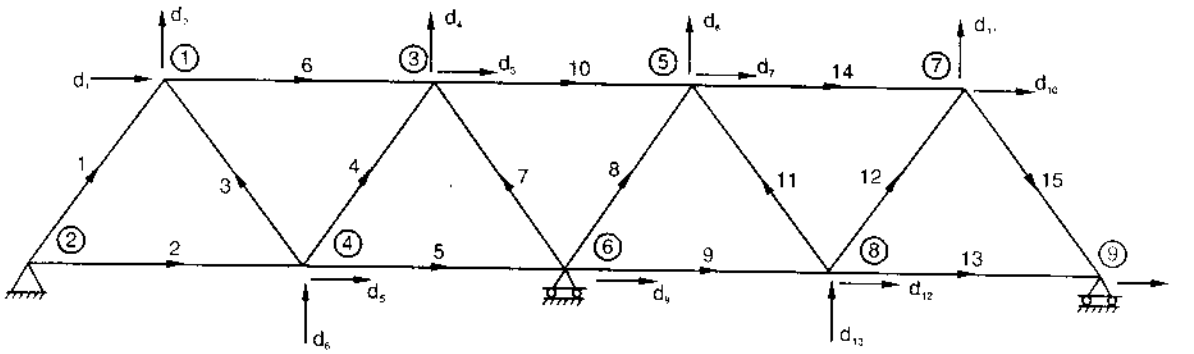
– ứng với d_1 là $(a_1 + b_1 + c_1)$

– ứng với d_2 là $(a_2 + b_2 + c_2)$

Đối với các phương trình còn lại của (2.28), cũng làm tương tự như trên. Vậy bằng cách tính tổng ΣF_i của các thành phần nội lực cùng phương với bậc tự do di tại mỗi nút, i = 1, 2, ..., n (n là số bậc tự do), ta có thể suy ra ma trận độ cứng toàn bộ K.

§2.3. Trình tự tính toán

Chẳng hạn lấy thí dụ trên hình (2.6) trong đó $d_1, d_2, ..., d_{14}$ là các thành phần chuyển vị tại các nút, các mũi tên biểu thị vị trí các đầu 1 và 2, các số được khoanh tròn biểu thị số thứ tự của các nút, các số cạnh mũi tên biểu thị số thứ tự của các phần tử.



Hình 2.6

Ta tiến hành tính chuyển vị và nội lực của hệ giàn theo các bước sau:

1) Chọn hệ trục toạ độ chung cho hệ giàn sao cho toạ độ của các nút đều dương. Chẳng hạn chọn gốc toạ độ tại nút ②.

2) Đánh số thứ tự của các nút và xác định toạ độ của chúng. Thí dụ: (*bảng bên*)

Toạ độ

Nút	x	y
1	0,5	1,0
2	0	0
3	1,5	1,0
4	1,0	0
5	2,5	1,0
6	2,0	0
7	3,5	1,0
8	3,0	0
9	4,0	0

3) Xác định số thành phần chuyển vị (hoặc số bậc tự do) của các nút. Trong hệ giàn phẳng, tại mỗi nút không liên kết với gối tựa, có 2 bậc tự do, còn đối với hệ giàn không gian thì có 3 bậc tự do. Tại những nút liên kết với gối tựa, một số bậc tự do triệt tiêu tuỳ theo điều kiện liên kết cụ thể. Chẳng hạn, trong thí dụ trên:

Số bậc tự do = 2.9 – 4 = 14 (4 bậc tự do triệt tiêu tại các gối tựa ②, ⑥, ⑨).

Đối với hệ giàn không gian:

Số bậc tự do = 3 × số nút – số bậc tự do triệt tiêu.

Các bậc tự do thống kê như sau: (bảng bậc tự do)

4) Thống kê số thứ tự của các phần tử và vị trí các đầu 1, đầu 2 tương ứng. Cần chú ý là chiều dương của trục của phần tử đi từ đầu 1 đến đầu 2 theo chiều mũi tên trên hình (2.6). Có thể chọn

một cách tuỳ ý chiều dương của các phần tử nhưng sau khi đã chọn, phải theo đúng quy ước để tránh sự nhầm lẫn về dấu khi tính các côsin định hướng.(*Bảng vị trí các đầu 1 và 2*)

Bậc tự do

Nút	u	v
1	d_1	d_2
2	0	0
3	d_3	d_4
4	d_5	d_6
5	d_7	d_8
6	d_9	0
7	d_{10}	d_{11}
8	d_{12}	d_{13}
9	d_{14}	0

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	2	1
2	2	4
3	4	1
4	4	3
5	4	6
6	1	3
7	6	3
8	6	5
9	6	8
10	3	5
11	8	5
12	8	7
13	8	9
14	5	7
15	7	9

5) Tính côsin định hướng, chiều dài của các phần tử và chỉ rõ vị trí của các thành phần chuyển vị tại các đầu 1, đầu 2 của chúng trong toàn bộ các bậc tự do của giàn.

Phần tử	x_1	y_1	x_2	y_2	l	m	L	u_1	v_1	u_2	v_2
1	0	0	0,5	1,0	0,44	0,89	1,12	0	0	d_1	d_2
2	0	0	1,0	0	1,0	0	1,0	0	0	d_5	d_6
3	1,0	0	0,5	1,0	–0,44	0,89	1,12	d_5	d_6	d_1	d_2
4	1,0	0	1,5	1,0	0,44	0,89	1,12	d_5	d_6	d_3	d_4
5	1,0	0	2,0	0	1,0	0	1,0	d_5	d_6	d_9	0
6	0,5	1,0	1,5	1,0	1,0	0	1,0	d_1	d_2	d_3	d_4
7	2,0	0	1,5	1,0	–0,44	0,89	1,12	d_9	0	d_7	d_4
8	2,0	0	2,5	1,0	0,44	0,89	1,12	d_9	0	d_7	d_8
9	2,0	0	3,0	0	1,0	0	1,0	d_9	0	d_{12}	d_{13}
10	1,5	1,0	2,5	1,0	1,0	0	1,0	d_3	d_4	d_7	d_8
11	3,0	0	2,5	1,0	–0,44	0,89	1,12	d_{12}	d_{13}	d_7	d_8
12	3,0	0	4,0	1,0	0,44	0,89	1,12	d_{12}	d_{13}	d_{10}	d_{11}
13	3,0	0	4,0	0	1,0	0	1,0	d_{12}	d_{13}	d_{14}	0
14	2,5	1,0	3,5	1,0	1,0	0	1,0	d_7	d_8	d_{10}	d_{11}
15	3,5	1,0	4,0	0	0,44	–0,89	1,12	d_{10}	d_{11}	d_{14}	0

Trong bảng trên: x_1, y_1 – toạ độ của đầu 1; x_2 y_2 – toạ độ của đầu 2.

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};\ l = \frac{x_2 - x_1}{L};\ m = \frac{y_2 - y_1}{L}$$

u_1, v_1 – các thành phần chuyển vị tại đầu 1 trên phương X và Y;

u_2, v_2 – các thành phần chuyển vị tại đầu 2 trên phương X và Y;

6) Lập ma trận độ cứng của mỗi phần tử theo (2.25) hoặc (2.26). Chẳng hạn xét phần tử 5 (xem hình 2.6 và bảng trên).

Tại đầu 1 – nút ④, $u_1 = d_5$, $v_1 = d_6$

Tại đầu 2 – nút ⑥, $u_2 = d_9$, $v_2 = 0$

Tại đầu 1: F_{x1} tác dụng trên phương của $d_5 \Rightarrow F_{x1} = F_5$

F_{y1} tác dụng trên phương của $d_6 \Rightarrow F_{y1} = F_6$

Tại đầu 2: F_{x2} tác dụng trên phương của $d_9 \Rightarrow F_{x2} = F_9$

F_{y2} tác dụng trên phương của phản lực thẳng đứng tại nút ⑥ (thành phần chuyển vị bằng không), ta không quan tâm đến thành phần nội lực này.

Giả sử ma trận độ cứng của phần tử 5 có dạng:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_5 \\ F_{y1} = F_6 \\ F_{x2} = F_9 \\ F_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ \text{đối} & \text{xứng} & & k_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 = d_5 \\ v_1 = d_6 \\ u_2 = d_9 \\ v_2 = 0 \end{bmatrix}$$

Từ hệ thức ma trân trên, ta có:

$$\begin{bmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_5 \\ d_6 \\ d_9 \end{bmatrix}$$

7) Căn cứ vào điều kiện cân bằng (2.28) tại mỗi nút, thành lập ma trận độ cứng toàn bộ K. Chẳng hạn tại nút ④ có 4 phần tử 2, 3, 4, 5 quy tụ. Tổng các thành phần nội lực trên phương thành phần chuyển vị d_5 được tính như sau:

Phần tử 2: $F_5 = a_{11}d_5 + a_{12}d_6$

Phần tử 3: $F_5 = b_{11}d_5 + b_{12}d_6 + b_{13}d_1 + b_{14}d_2$

Phần tử 4: $F_5 = c_{11}d_5 + c_{12}d_6 + c_{13}d_3 + c_{14}d_4$

Phần tử 5: $F_5 = k_{11}d_5 + k_{12}d_6 + k_{13}d_9$

Vậy tổng các thành phần nội lực trên phương của d_5 là:

$$\Sigma F_5 = b_{13}d_1 + b_{14}d_2 + c_{13}d_3 + c_{14}d_4 + (a_{11} + b_{11} + c_{11} + k_{11})d_5 + (a_{12} + b_{12} + c_{12} + k_{12})d_6 + k_{13}d_9$$

Phương trình trên cho thấy, phần tử trong ma trận K cùng hàng với ΣK_5 và ứng với d_5 là tổng các số trong dấu ngoặc đứng trước d_5, ứng với d_6 là tổng các số trong dấu ngoặc đứng trước d_6. Sau khi xét điều kiện cân bằng của toàn bộ các nút, ta được ma trận độ cứng toàn bộ K:

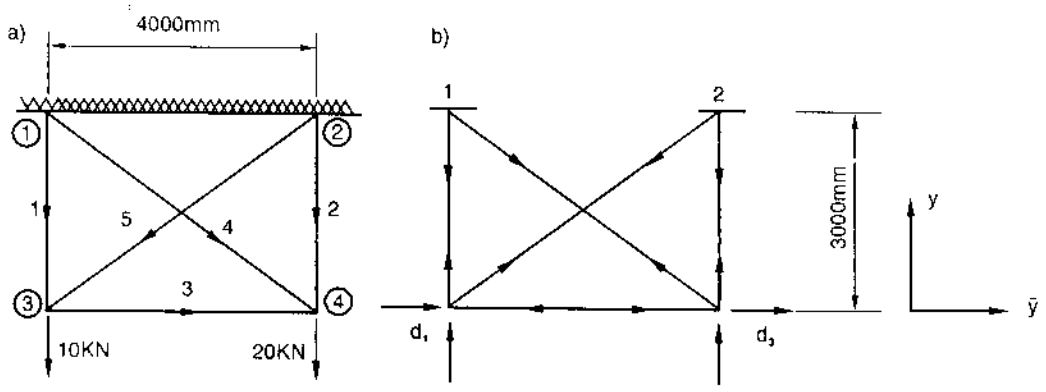
$$\begin{bmatrix} \Sigma F_1 \\ \Sigma F_2 \\ . \\ . \\ . \\ \Sigma F_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_{14} \end{bmatrix}$$

8) Thay ΣF_i ở vế trái của phương trình trên bằng thành phần tải trọng tác dụng trên phương của thành phần chuyển vị d_i (i = 1, 2,...).

9) Giải hệ phương trình trên để được giá trị của các thành phần chuyển vị bằng các phương pháp đã được trình bày trong mục 1.7. Trong thực tế, người ta hay dùng phương pháp Gauss.

10) Tính lực dọc trong các phần tử theo (2.24)

Thí dụ 2.2: Cho một hệ giàn phẳng với kích thước và tải trọng như trên hình 2.7. Diện tích tiết diện của phần tử 1 và 2 bằng 2000mm², của các phần tử còn lại là 600mm². E = 210 kN/mm². Yêu cầu tính chuyển vị tại các nút và nội lực trong các thanh giàn.



Hình 2.7

Giải

Trong hình (2.7a), các nút được khoanh tròn biểu thị số thứ tự của các nút, các mũi tên biểu thị vị trí các đầu 1 và đầu 2, số bên cạnh mũi tên biểu thị số thứ tự của các phần tử. Số bậc tự do bằng 2.4 – 4 = 4.

Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Toạ độ các nút

Nút	x	y
1	0	3000
2	4000	3000
3	0	0
4	4000	0

Bậc tự do

Nút	u	v
1	0	0
2	0	0
3	d_1	d_2
4	d_3	d_4

Vị trí đầu 1, đầu 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	1	3
2	2	4
3	3	4
4	1	4
5	2	3

Đặc trưng hình học của các phần tử

Phần tử	(x_2-x_1)	(y_2-y_1)	L	l	m	A	$\frac{AE}{L}$
1	0	−3000	3000	0	−1,0	2000	140
1	0	−3000	3000	0	−1,0	2000	140
3	4000	0	4000	1,0	0	600	31,5
4	4000	−3000	5000	0,8	−0,6	600	25,2
5	−4000	−3000	5000	−0,8	−0,6	600	25,2

1) Căn cứ vào các số liệu trên, lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (2.25)

Phần tử 1: $$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: $$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3: $$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_1 \\ F_{y1} = F_2 \\ F_{x2} = F_3 \\ F_{y2} = F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,5 & 0 & -31,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31,5 & 0 & 31,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Phần tử 4: $$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,13 & -12,10 \\ -12,10 & 9,07 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Phần tử 5: $$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,13 & 12,10 \\ 12,10 & 9,07 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

2) Căn cứ vào điều kiện cân bằng tại các nút (2.28), tính ΣF_i, i = 1, 2, 3, 4 và lập ma trận K:

$$K = \begin{bmatrix} 31,50 & 12,10 & -31,50 & 0 \\ \frac{16,13}{47,63} & & & \\ & 140,0 & 0 & 0 \\ & \frac{9,07}{149,07} & & \\ & & 31,50 & -12,10 \\ & & \frac{16,13}{47,63} & \\ \text{đối xứng} & & & 140,0 \\ & & & \frac{9,07}{149,07} \end{bmatrix}$$

3) Thay ΣF_i bằng thành phần tải trọng F_i, ta có hệ thức ma trận sau (i = 1, 2, 3, 4):

$$F = \begin{bmatrix} \Sigma F_1 = 0 \\ \Sigma F_2 = -10 \\ \Sigma F_3 = 0 \\ \Sigma F_4 = -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

4) Giải hệ phương trình trên, ta được:

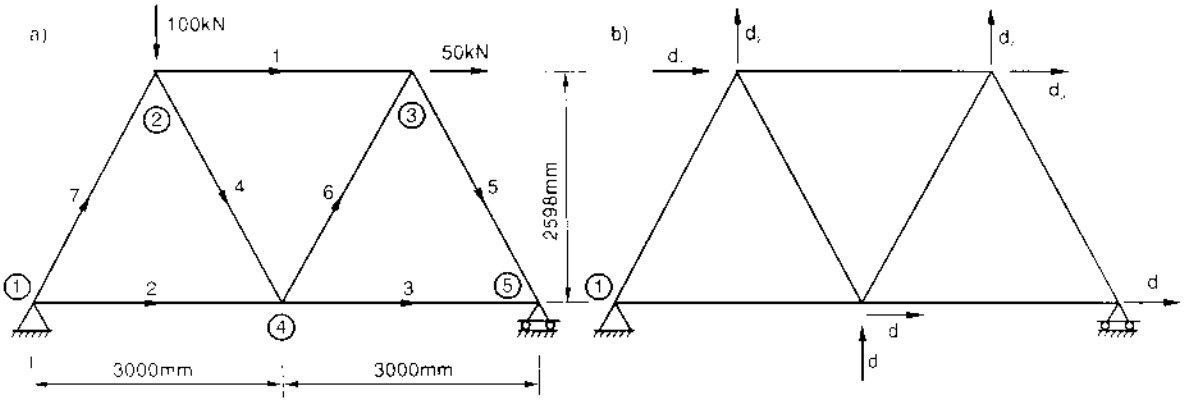
$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = 10^{-2}\,(-1,12, -6,62\ -4,24, -13,76)\text{mm}$$

5) Tính lực dọc trong các phần tử theo (2.24). Ta quy ước lực kéo là dương, lực nén là âm. Kết quả ghi trong bảng sau:

Nội lực

Phần tử	F
1	9,27
2	19,26
3	−0,98
4	1,23
5	1,23

Thí dụ 2.3: Cho hệ giàn phẳng như trên hình (2.8). E = 210 kN/mm², A = 450 mm², L = 3000mm cho toàn bộ các phần tử.



Hình 2.8

Giải:

Trên hình 2.8, các số được khoanh tròn biểu thị số thứ tự của các nút, chiều của các mũi tên biểu thị vị trí của các đầu 1 và các đầu 2, các số cạnh mũi tên biểu thị số thứ tự của các phần tử. Số bậc tự do của giàn bằng $2 \times 5 - 3 = 7$. Các bậc tự do biểu thị trên hình (2.8b)

Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Toạ độ

Nút	x	y
1	0	0
2	1500	2598
3	4500	2598
4	3000	0
5	6000	0

Bậc tự do

Nút	u	v
1	0	0
2	d_1	d_2
3	d_3	d_4
4	d_5	d_6
5	d_7	0

Vị trí đầu 1, đầu 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	2	3
2	1	4
3	4	5
4	2	4
5	3	5
6	4	3
7	1	2

Phần tử	(x_2-x_1)	(y_2-y_1)	l	m	
1	3000	0	1,0	0	
2	3000	0	1,0	0	L = 3000
3	3000	0	1,0	0	
4	1500	–2598	0,5	–0,866	$\frac{AE}{L} = 31,5$
5	1500	–2598	0,5	–0,866	
6	1500	2598	0,5	0,866	
7	1500	2598	0,5	0,866	

1) Căn cứ vào các số liệu trên, lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (2.25)

Phần tử 1:
$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_1 \\ F_{y1} = F_2 \\ F_{x2} = F_3 \\ F_{y2} = F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,5 & 0 & -31,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31,5 & 0 & 31,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:
$$\begin{bmatrix} F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:
$$\begin{bmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,5 & 0 & -31,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -31,5 & 0 & 31,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix}$$

Phần tử 4:
$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_1 \\ F_{y1} = F_2 \\ F_{x2} = F_5 \\ F_{y2} = F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,88 & -13,64 & -7,88 & 13,64 \\ -13,64 & 23,63 & 13,64 & -23,63 \\ -7,88 & 13,64 & 7,88 & -13,64 \\ 13,64 & -23,63 & -13,64 & 23,63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Phần tử 5:
$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,88 & -13,64 & -7,88 \\ -13,64 & 23,63 & 13,64 \\ -7,88 & 13,64 & 7,88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_7 \end{bmatrix}$$

Phần tử 6:
$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_5 \\ F_{y1} = F_6 \\ F_{x2} = F_3 \\ F_{y2} = F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,88 & 13,64 & -7,88 & -13,64 \\ 13,64 & 23,63 & -13,64 & -23,63 \\ -7,88 & -13,64 & 7,88 & 13,64 \\ -13,64 & -23,63 & 13,64 & 23,63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_5 \\ d_6 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Phần tử 7:
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,88 & 13,64 \\ 13,64 & 23,63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

2) Tính ΣF_i theo (2.28), i = 1, 2, ..., 7. Ta được ma trận K như sau:

$$
K = \begin{bmatrix}
\begin{array}{r}7{,}88\\31{,}50\\7{,}88\\\hline 47{,}26\end{array} & \begin{array}{r}13{,}64\\-13{,}64\\\hline 0\end{array} & -31{,}5 & 0 & -7{,}88 & 13{,}64 & 0 \\
 & \begin{array}{r}23{,}63\\23{,}63\\\hline 47{,}26\end{array} & 0 & 0 & 13{,}64 & -23{,}63 & 0 \\
 & & \begin{array}{r}31{,}50\\7{,}88\\7{,}88\\\hline 47{,}26\end{array} & \begin{array}{r}13{,}64\\-13{,}64\\\hline 0\end{array} & -7{,}88 & -13{,}64 & -7{,}88 \\
 & & & \begin{array}{r}23{,}63\\23{,}63\\\hline 47{,}26\end{array} & -13{,}64 & -23{,}63 & 13{,}64 \\
\text{đối xứng} & & & & \begin{array}{r}31{,}50\\7{,}88\\7{,}88\\31{,}50\\\hline 78{,}76\end{array} & \begin{array}{r}-13{,}64\\13{,}64\\\hline 0\end{array} & -31{,}50 \\
 & & & & & \begin{array}{r}23{,}63\\23{,}63\\\hline 47{,}26\end{array} & 0 \\
 & & & & & & \begin{array}{r}7{,}88\\31{,}50\\\hline 39{,}30\end{array}
\end{bmatrix}
$$

3) Thay ΣF_i bằng thành phần tải trọng, F_i ta có hệ thức ma trận (i = 1, 2, ..., 7):

$$
F = \begin{bmatrix} \Sigma F_1 = 0 \\ \Sigma F_2 = -100 \\ \Sigma F_3 = 50 \\ \Sigma F_4 = 0 \\ \Sigma F_5 = 0 \\ \Sigma F_6 = 0 \\ \Sigma F_7 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \mathbf{K} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix}
$$

4) Giải hệ phương trình trên, ta được:

$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7) = (3{,}7862, -4{,}4442, 3{,}6634, -1{,}8342, 2{,}5652, -3{,}1746, 3{,}4202)$mm

5) Theo (2.24), tính lực dọc trong các thanh giàn. Kết quả ghi trong bảng sau:

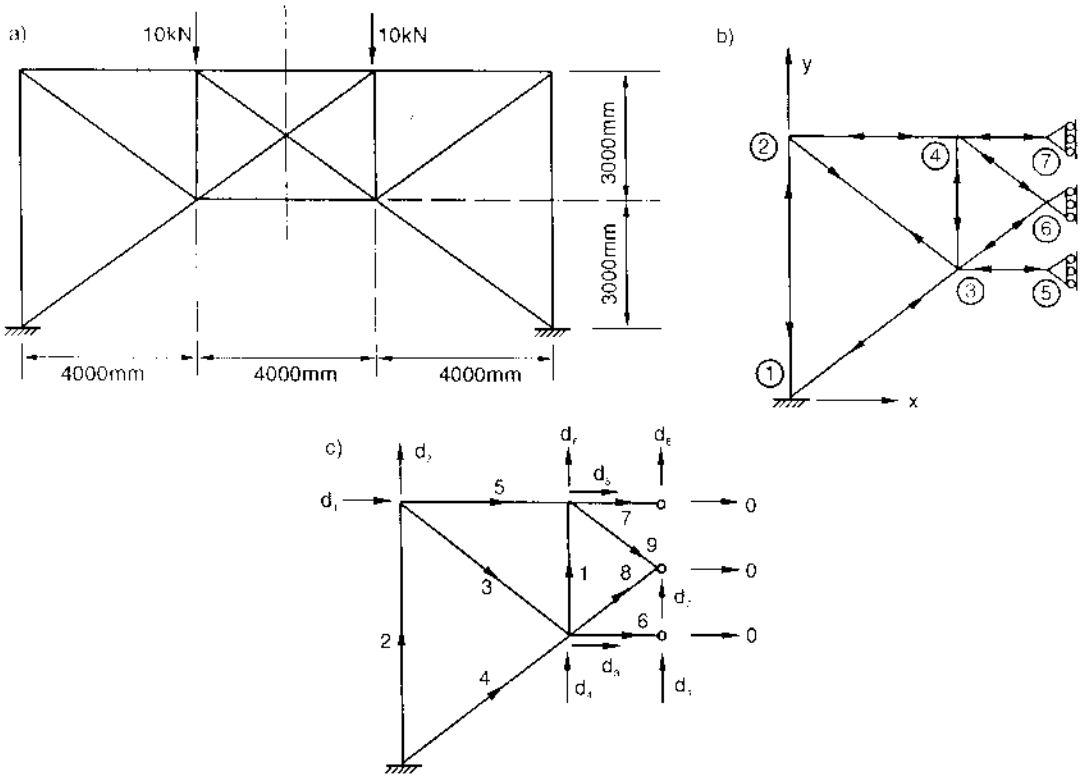
Nội lực

Phần tử	F
1	–3,87
2	80,80
3	26,93
4	–53,87
5	–53,87
6	53,87
7	–61,60

Thí dụ 2.4: Cho một hệ giàn phẳng như trên hình (2.9a). E = 210 kN/mm². Yêu cầu tính nội lực và chuyển vị tại các nút.

Giải:

Vì hệ đối xứng và tải trọng đối xứng nên sơ đồ tính đưa về nửa hệ như trên hình (2.9b). Vì các phần tử 4–7 và 3–5 sau khi chuyển vị vẫn là những đoạn thẳng nằm ngang nên chuyển vị trên phương thẳng đứng tại nút 4 (d_6) bằng thành phần chuyển vị trên phương thẳng đứng tại nút 7, thành phần chuyển vị trên phương thẳng đứng tại nút 3 (d_4) bằng thành phần chuyển vị trên phương thẳng đứng tại nút 5. Số bậc tự do của hệ bằng 7, các bậc tự do biểu thị trên hình (2.9c).



Hình 2.9

Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Toạ độ

Nút	x	y
1	0	0
2	0	6000
3	4000	3000
4	4000	6000
5	6000	3000
6	6000	4500
7	6000	6000

Bậc tự do

Nút	u	v
1	0	0
2	d_1	d_2
3	d_3	d_4
4	d_5	d_6
5	0	d_4
6	0	d_7
7	0	d_8

Vị trí đầu 1, đầu 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	3	4
2	1	2
3	2	3
4	1	3
5	2	4
6	3	5
7	4	7
8	3	6
9	4	6

Phần tử	$(x_2 - x_1)$	$(y_2 - y_1)$	L	l	m	Amm²	AE/l
1	0	3000	3000	0	1,0	35	2,45
2	0	6000	6000	0	1,0	70	2,45
3	4000	−3000	5000	0,8	−0,6	60	2,52
4	4000	3000	5000	0,8	06	60	2,52
5	4000	0	4000	1,0	0	50	2,63
6	2000	0	2000	1,0	0	50	5,25
7	2000	0	2000	1,0	0	50	5,25
8	2000	1500	2500	0,8	0,6	60	5,04
9	2000	−1500	2500	0,8	−0,6	60	5,04

1) Căn cứ vào số liệu trên, lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (2.25)

Phần tử 1:
$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_3 \\ F_{y1} = F_4 \\ F_{x2} = F_5 \\ F_{y2} = F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,45 & 0 & -2,45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,45 & 0 & 2,45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2,45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:
$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_1 \\ F_{y1} = F_2 \\ F_{x2} = F_3 \\ F_{y2} = F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,61 & -1,21 & -1,61 & 1,21 \\ 0,91 & -1,21 & 1,21 & -0,91 \\ 1,21 & -1,61 & 1,61 & -1,21 \\ 1,21 & -0,91 & -1,21 & 0,91 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Phần tử 4:
$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,61 & 1,21 \\ 1,21 & 0,91 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Phần tử 5:
$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_1 \\ F_{y1} = F_2 \\ F_{x2} = F_5 \\ F_{y2} = F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,63 & 0 & -2,63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2,63 & 0 & 2,63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Phần tử 6:
$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Phần tử 7:
$$\begin{bmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_5 \\ d_6 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Phần tử 8:
$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,23 & 2,42 & -2,42 \\ 2,42 & 1,81 & -1,81 \\ -2,42 & -1,81 & 1,81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_7 \end{bmatrix}$$

Phần tử 9:
$$\begin{bmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,23 & -2,42 & 2,42 \\ -2,42 & 1,81 & -1,81 \\ 2,42 & -1,81 & 1,81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix}$$

2) Tính ΣF_i, i = 1, 2, ..., 7 (theo 2.28). Ta được ma trận độ cứng toàn bộ K:

$$K = \begin{bmatrix}
\begin{array}{r}1,61\\ \underline{2,63}\\ 4,24\end{array} & -1,21 & -1,61 & 1,21 & -2,63 & 0 & 0 \\
 & \begin{array}{r}2,45\\ \underline{0,91}\\ 3,36\end{array} & 1,21 & -0,91 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \begin{array}{r}1,61\\ 5,25\\ \underline{3,23}\\ 11,70\end{array} & \begin{array}{r}1,21\\ -1,21\\ \underline{2,42}\\ 2,42\end{array} & 0 & 0 & -2,42 \\
 & & & \begin{array}{r}1,81\\ 0,91\\ 2,45\\ \underline{0,91}\\ 6,08\end{array} & 0 & -2,45 & -1,81 \\
 & & & & \begin{array}{r}3,23\\ 2,63\\ \underline{5,23}\\ 11,11\end{array} & -2,42 & 2,42 \\
\text{đối xứng} & & & & & \begin{array}{r}2,45\\ \underline{1,81}\\ 4,26\end{array} & -1,81 \\
 & & & & & & \begin{array}{r}1,81\\ \underline{1,81}\\ 3,62\end{array}
\end{bmatrix}$$

3) Thay ΣF_i bằng thành phần tải trọng F_i (i = 1, 2, ..., 7), ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} \Sigma F_1 = 0 \\ \Sigma F_2 = 0 \\ \Sigma F_3 = 0 \\ \Sigma F_4 = 0 \\ \Sigma F_5 = 0 \\ \Sigma F_6 = -10 \\ \Sigma F_7 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & K & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix}$$

4) Giải hệ phương trình trên, ta được:

$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7) = (1{,}8369, -1{,}3774, 0{,}0913, -7{,}4248, 0{,}1228, -10{,}3263, -8{,}8965)$mm

5) Tính lực dọc trong các thanh giàn theo (2.24):

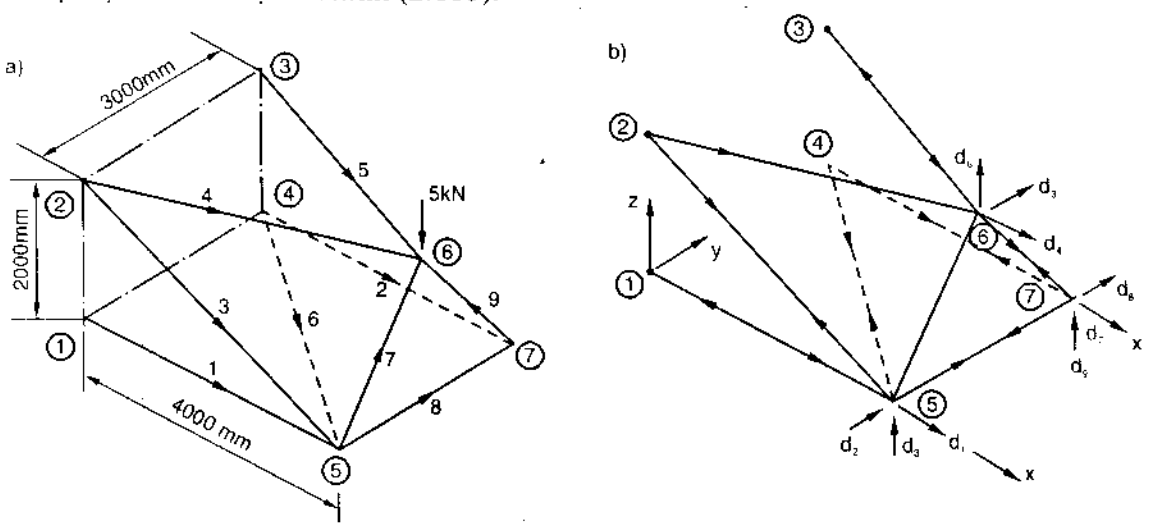
Nội lực

Phần tử	F
1	−7,11
2	−3,38
3	5,62
4	−11,04
5	−4,50
6	−0,48
7	−0,65
8	−4,82
9	−4,82

Thí dụ 2.5: Cho một hệ giàn không gian như trên hình (2.10a). Yêu cầu tính nội lực và chuyển vị tại các nút.

Giải:

Trên hình (2.10a), các số được khoanh tròn biểu thị số thứ tự của các nút, mũi tên biểu thị vị trí các đầu 1 và 2, các số bên cạnh mũi tên biểu thị số thứ tự của cá phần tử. Số bậc tự do = 7 × 3 − 4.3 = 9 (các nút 1, 2, 3, 4 không có chuyển vị). Các bậc tự do biểu thị trên hình (2.10b).



Hình 2.10

Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Toạ độ

Nút	x	y	z
1	0	0	0
2	0	0	2000
3	0	3000	2000
4	0	3000	0
5	4000	0	0
6	4000	1500	2000
7	4000	3000	0

Bậc tự do

Nút	u	v	w
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	d_1	d_2	d_3
6	d_4	d_5	d_6
7	d_7	d_8	d_9

Vị trí đầu 1, đầu 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	1	5
2	4	7
3	2	5
4	2	6
5	3	6
6	4	5
7	5	6
8	5	7
9	7	6

Đặc trưng hình học của các phần tử

Phần tử	$(x_2 - x_1)$	$(y_2 - y_1)$	$z_2 - z_1)$	L	l	m	n	AE/L
1	4000	0	0	4000	1,0	0	0	4,5
2	4000	0	0	4000	1,0	0	0	4,5
3	4000	0	−2000	4472	0,8944	0	−0,4472	−4,025
4	4000	1500	0	4272	0,9363	0,3511	0	4,214
5	4000	−1500	0	4272	0,9363	−0,3511	0	4,214
6	4000	−3000	0	5000	0,8	−0,6	0	3,6
7	0	1500	2000	2500	0	0,6	0,8	7,2
8	0	3000	0	3000	0	1,0	0	6,0
9	0	−1500	2000	2500	0	−0,6	0,8	7,2

1) Theo (2.26), lập ma trận độ cứng của các phần tử như sau:

Phần tử 1:
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:
$$\begin{bmatrix} F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,22 & 0 & -1,61 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,61 & 0 & 0,81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 4:

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,69 & 1,39 & 0 \\ 1,39 & 0,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Phần tử 5:

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,69 & -1,39 & 0 \\ -1,39 & 0,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Phần tử 6:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,30 & -1,73 & 0 \\ -1,73 & 1,30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 7:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_1 \\ F_{y1} = F_2 \\ F_{z1} = F_3 \\ F_{x2} = F_4 \\ F_{y2} = F_5 \\ F_{z2} = F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,59 & 3,46 & 0 & -2,59 & -3,46 \\ 0 & 3,46 & 4,61 & 0 & -3,46 & -4,61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,59 & -3,46 & 0 & 2,59 & 3,46 \\ 0 & -3,46 & -4,61 & 0 & 3,46 & 4,61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Phần tử 8:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_1 \\ F_{y1} = F_2 \\ F_{z1} = F_3 \\ F_{x2} = F_7 \\ F_{y2} = F_8 \\ F_{z2} = F_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,0 & 0 & 0 & -6,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6,0 & 0 & 0 & 6,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{bmatrix}$$

Phần tử 9:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_7 \\ F_{y1} = F_8 \\ F_{z1} = F_9 \\ F_{x2} = F_4 \\ F_{y2} = F_5 \\ F_{z2} = F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,59 & -3,46 & 0 & -2,59 & 3,46 \\ 0 & -3,46 & 4,61 & 0 & 3,46 & -4,61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,59 & 0 \\ 0 & -2,59 & 3,46 & 2,59 & 0 & -3,46 \\ 0 & 3,46 & -4,61 & 0 & -3,46 & 4,61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_7 \\ d_8 \\ d_9 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

2) Tính ΣF_i (theo 2.28), i = 1, 2,...,9. Ta được ma trận độ cứng toàn bộ K như sau:

$$
K = \begin{bmatrix}
\begin{array}{r}4,5\\3,22\\2,30\\\hline 10,02\end{array} & -1,73 & -1,61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \begin{array}{r}2,59\\6,0\\1,30\\\hline 8,89\end{array} & 3,46 & 0 & -2,59 & -3,46 & 0 & -6,0 & 0 \\
 & & \begin{array}{r}0,81\\4,61\\\hline 5,42\end{array} & 0 & -3,46 & -4,61 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \begin{array}{r}3,69\\3,69\\\hline 7,38\end{array} & \begin{array}{r}-1,39\\1,39\\\hline 0\end{array} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \begin{array}{r}0,52\\0,52\\2,59\\2,59\\\hline 6,22\end{array} & \begin{array}{r}3,46\\-3,46\\\hline 0\end{array} & 0 & -2,59 & 3,46 \\
 & & & & & \begin{array}{r}4,61\\4,61\\\hline 9,22\end{array} & 0 & 3,46 & -4,61 \\
\text{đối} & \text{xứng} & & & & & 4,5 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \begin{array}{r}6,0\\2,59\\\hline 8,59\end{array} & -3,46 \\
 & & & & & & & & 4,61
\end{bmatrix}
$$

3) Thay ΣF_i bằng thành phần tải trọng trên phương d_i, i = 1, 2,...,9. Ta được hệ thức ma trận:

$$
\begin{bmatrix}
\Sigma F_1 = 0 \\ \Sigma F_2 = 0 \\ \Sigma F_3 = 0 \\ \Sigma F_4 = 0 \\ \Sigma F_5 = 0 \\ \Sigma F_6 = -5,0 \\ \Sigma F_7 = 0 \\ \Sigma F_8 = 0 \\ \Sigma F_9 = 0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ K \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{bmatrix}
$$

4) Giải hệ phương trình trên, ta được:

$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9)$ = (−0,333; −7,338; −12,878; 0,0; 3,6094; −22,1736 0,0; −7,338; −30,3841)mm.

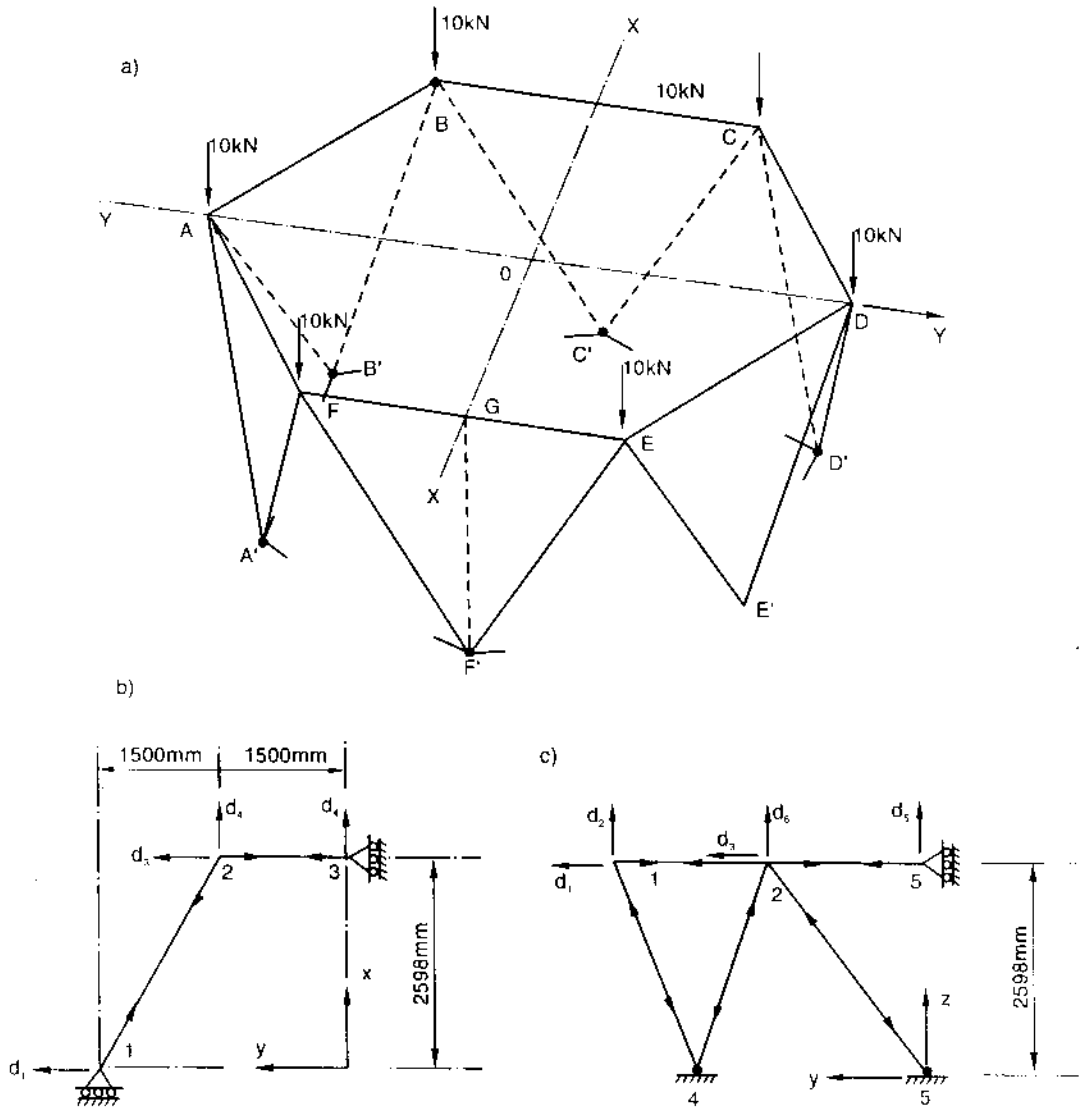
5) Tính lực dọc của các thanh giàn theo (2.24a). Kết quả: xem bảng "Nội lực".

Nội lực

Phần tử	F
1	–15,0
2	0
3	11,18
4	5,34
5	–5,34
6	6,25
7	–6,25
8	0
9	0

Thí dụ 2.6: Cho hệ giàn không gian như trên hình (2.11a). Giàn gồm 6 phần tử nằm trong mặt phẳng XOY tạo thành một hình lục giác đều ABCDEF, chúng dựa lên các thanh chống nghiêng xuất phát từ các điểm A', B', C', D', E', F'. Giàn chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng bằng 10 kN tại mỗi nút (từ nút A đến nút F). E = 210 kN/mm². Diện tích tiết diện: các phần tử hình lục giác là 20mm², các thanh chống là 40mm².

Giải:



Hình 2.11

Vì giàn có tính chất đối xứng và tải trọng cũng đối xứng đối với các tục X – X và Y – Y, nếu ta tách một phần tử giàn ra để tính, chẳng hạn tách bộ phận AFA' và F'FG (hình 2.11a). Hình chiếu của bộ phận này lên mặt phẳng XOY biểu thị trên hình (2.11b). Hình chiếu lên mặt phẳng YOZ, biểu thị trên hình (2.11c). Do tính chất đối xứng, thành phần chuyển vị trên phương Y tại nút 3 (tức điểm G trên hình (2.11a)) triệt tiêu, thành phần chuyển vị trên phương X tại nút 1 (tức điểm A trên hình (2.11a)) triệt tiêu. Bậc tự do của một phần tư hệ giàn biểu thị trên hình (2.11b) và (2.11c).

Các số liệu ban đầu thống kê trong bảng sau

Toạ độ

Nút	x	y	z
1	0	3000	2598
2	2598	1500	2598
3	2598	0	2598
4	1299	2250	0
5	2598	0	0

Bậc tự do

Nút	u	v	w
1	0	d_1	d_2
2	d_3	d_4	d_5
3	d_1	0	d_5
4	0	0	0
5	0	0	0

Vị trí đầu 1, đầu 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	1	2
2	1	4
3	2	3
4	2	4
5	2	5

Đặc trưng hình học của các phần tử

Phần tử	$(x_2 - x_1)$	$(y_2 - y_1)$	$(z_2 - z_1)$	L	l	m	n	AE/L
1	2598	–1500	0	3000	0,8660	–0,50	0	1,4
2	1299	–750	–2598	3000	0,4330	–0,25	–0,860	2,8
3	0	–1500	0	1500	0	–1,0	0	2,8
4	–1299	750	–2598	3000	0,4330	0,25	–0,8660	2,8
5	0	–1500	–2598	3000	0	–0,50	–0,8660	2,8

1) Căn cứ vào số liệu trên, lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (2.26)

Phần tử 1:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,35 & 0 & 0,61 & -0,35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,61 & 0 & 1,05 & -0,61 & 0 \\ -0,35 & 0 & -0,61 & 0,35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,18 & 0,61 \\ 0,61 & 210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

Phần tử 4:

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,53 & -0,30 & 1,05 \\ -0,30 & 0,18 & -0,61 \\ 1,05 & -0,61 & 2,10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

Phần tử 5:

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,70 & 1,21 \\ 0 & 1,21 & 2,10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

2) Tính ΣF_i theo (2.28), i = 1, 2, ..., 5. Ta được ma trận:

$$K = \begin{bmatrix} 0,35 & 0,61 & 0,61 & -0,35 & 0 \\ \underline{0,18} & & & & \\ 0,53 & & & & \\ & 2,10 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1,05 & -0,61 & 1,05 \\ & & \underline{0,53} & \underline{-0,30} & \\ & & 1,58 & -0,91 & \\ & & & 0,35 & -0,61 \\ & & & 2,80 & 1,21 \\ & & & 0,18 & \underline{0,61} \\ & & & \underline{0,70} & 1,21 \\ & & & 4,03 & \\ & & & & 2,10 \\ & & & & \underline{2,10} \\ & & & & 4,20 \end{bmatrix}$$

3) Thay ΣF_i bằng thành phần tải trọng F_i, i = 1, 2,..., 5, ta được hệ thức ma trận:

$$F = \begin{bmatrix} \Sigma F_1 = 0 \\ \Sigma F_2 = -5,0 \\ \Sigma F_3 = 0 \\ \Sigma F_4 = 0 \\ \Sigma F_5 = -10,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

4) Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = (2,062, -2,976, 1,786, 1,031, -2,976)\text{mm}$$

5) Tính lực dọc trong các phần tử theo (2.24a). Kết quả:

Nội lực

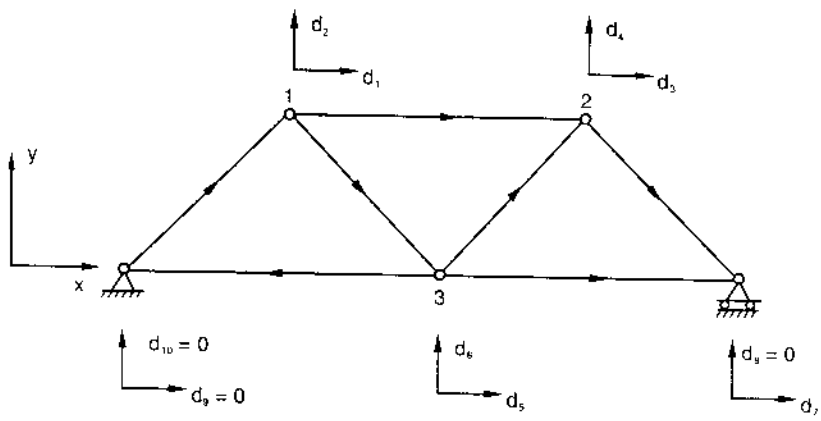
Phần tử	F
1	2,87
2	−5,77
3	2,89
4	−5,77
5	−5,77

Căn cứ vào tính chất đối xứng, có thể suy ra nội lực và chuyển vị cho toàn bộ hệ giàn.

§2.4. Thuật toán lập trình tính hệ giàn phẳng (CT21)

1. Các nguyên tắc cần được tuân thủ:

a. Số thứ tự các nút giàn và số thứ tự các thanh giàn có thể chọn tuỳ ý, nhưng số thứ tự các nút giàn phải bố trí sao cho số thứ tự các nút không có chuyển vị nằm ở các vị trí cuối cùng (hình 2.12).



Hình 2.12

b. Mỗi nút có 2 bậc tự do được tính như sau:

Ứng với nút i:

$$\left.\begin{aligned} d_{1i} &= 2i - 1 \\ d_{2i} &= 2i \end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

d_{1i} nằm trên phương ngang; d_{2i} nằm trên phương thẳng đứng. Trên hình (2.12), ta có: 7 bậc tự do có chuyển vị: d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7; 3 bậc tự do không có chuyển vị: d_8, d_9, d_{10}.

c) Dấu của các thành phần ngoại lực quy ước là dương nếu cùng chiều với trục X và Y trong hệ toạ độ chung.

2. Nhập các số liệu:

– Số nút (SN)

– Số thanh (ST)

– Số bậc tự do có chuyển vị (sbt)

– Các côsin định hướng, l, m.

– Số thứ tự các bậc tự do ở mỗi đầu thanh d_1, d_2, d_3, d_4 (tính theo công thức 2.29)

– Đặc trưng cơ học AE/L (ea_i)

3) Tính các phần tử của ma trận độ cứng trong hệ toạ độ riêng:

$$a)\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ & m^2 & -lm & -m^2 \\ \text{đối xứng} & & l^2 & lm \\ & & & m^2 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} B_i & C_i & -B_i & -C_i \\ & D_i & -C_i & -D_i \\ \text{đối xứng} & & B_i & C_i \\ & & & D_i \end{bmatrix}$$

Hình 2.13

Các phần tử của ma trận độ cứng trong mỗi thanh giàn biểu thị như trên hình (2.13). Giá trị của một số phần tử trùng nhau nên ta thay chúng bằng các kí hiệu như trên hình (2.13b). Chỉ số i ứng với thanh giàn thứ i. Tính giá trị các phần tử của ma trận B_i, C_i, D_i cho từng thanh giàn.

4) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể S. Chú ý rằng trong hệ toạ độ riêng, các phần tử của ma trận độ cứng riêng mang các chỉ số 1, 2, 3, 4 nhưng trong hệ toạ độ chung (tức trong ma trận độ cứng tổng thể S), chúng mang các chỉ số trình bày trong công thức (2.29). Vì mỗi thanh giàn được liên kết với các thanh khác ở mỗi đầu của nó nên các giá trị B_i, C_i, D_i có tính chất tích luỹ. Điều này cũng đã được giải thích trong §2.2.3 trên hình (2.5).

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ \hline W_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta_u \\ \hline \Delta_K \end{bmatrix}$$

Hình 2.14

5) Chia khối ma trận độ cứng tổng thể S để tính chuyển vị và phản lực tại các nút không có chuyển vị.

Giả sử các ma trận được chia khối như trên hình (2.14). W_1 – véc tơ ngoại lực; W_2 – véc tơ các phản lực (tại các nút không có chuyển vị); Δ_u – véc tơ các chuyển vị cần tính; Δ_k – véc tơ các chuyển vị triệt tiêu (tại các nút) không có chuyển vị).

Vì $\Delta_k = 0$ nên:

$$W_1 = K_{11}.\Delta_u \tag{2.30}$$

$$W_2 = K_{21}.\Delta_u \tag{2.31}$$

Chuyển vị của giàn được tính theo công thức (2.30) và phản lực tính theo công thức (2.31) sau khi đã tính được các giá trị chuyển vị.

6) Giải hệ phương trình để tính chuyển vị

Ma trận độ cứng tổng thể có tính chất đối xứng nên khi giải hệ phương trình theo phương pháp Gauss, có thể tham khảo cách tính trình bày trong 1.7.1.2. Nếu ma trận độ cứng tổng thể có dải đối xứng, tham khảo cách tính trong 1.7.1.3 (chương một).

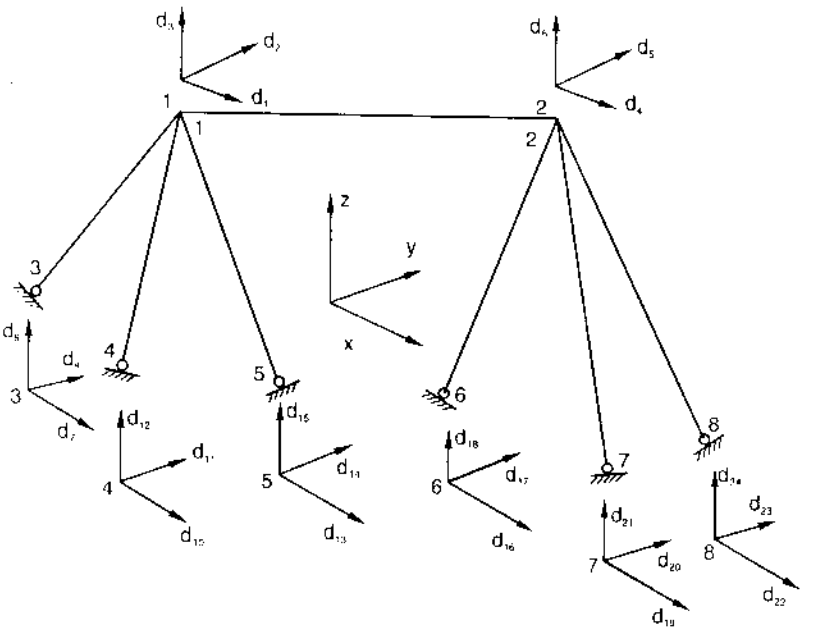
7) Tính phản lực tại các nút không có chuyển vị theo công thức (2.31).

8) Tính lực dọc theo công thức (2.24) (xem §2.2).

§2.5. Thuật toán lập trình tính giàn không gian (xem chương trình CT2.2)

1) Các nguyên tắc cần tuân thủ:

a. Số thứ tự các nút nên chọn sao số thứ tự các nút không có chuyển vị nằm ở các vị trí cuối cùng (hình 2.15).



Hình 2.15

b) Mỗi nút có 3 bậc tự do tính theo công thức sau:

Ứng với nút i:

$$\left.\begin{aligned} d_{1i} &= 3i - 2 \\ d_{2i} &= 3i - 1 \\ d_{3i} &= 3i \end{aligned}\right\} \qquad (2.32)$$

d_{1i} cùng phương với trục X; d_{2i} cùng phương với trục Y; d_{zi} cùng phương với trục Z (trong hệ toạ độ chung).

Trên hình (2.15) ta có: 6 bậc tự do có chuyển vị: d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6; 18 bậc tự do không có chuyển vị: d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{15}, d_{16}, d_{17}, d_{18}, d_{19}, d_{20}, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{24}.

c) Dấu của các thành phần tải trọng quy ước là dương khi cùng chiều với các trục X, Y, Z trong hệ toạ độ chung.

2. Nhập các số liệu

– Số nút (SN)

– Số thanh (St)

– Số bậc tự do không có chuyển vị (Sbt)

– Các côsin định hướng l, m, n.

– Số thứ tự các bậc tự do ở các đầu thanh: d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 (tính theo công thức 2.32).

– Đặc trưng cơ học AE/L (ea$l$)

3) Tính các phần tử của ma trận độ cứng riêng

$$a)\begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ & & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ & & & l^2 & lm & ln \\ & & & & m^2 & mn \\ & & & & & n^2 \end{bmatrix} \quad b)\begin{bmatrix} A & B & C & -A & -B & -C \\ & D & X & -B & -D & -X \\ & & Y & -C & -X & -Y \\ & & & A & B & C \\ & & & & D & X \\ & & & & & Y \end{bmatrix}$$

Hình 2.16

Các phần tử của ma trận độ cứng trong mỗi thanh giàn biểu thị trên hình (2.16). Giá trị của một số phần tử trùng nhau nên ta thay chúng bằng các kí hiệu như trên hình (2.16b). Tính giá trị các phần tử của ma trận A, B, C, D, X, Y cho từng thanh giàn.

4) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể S. Chú ý rằng trong hệ toạ độ riêng, các phần tử ma trận mang các chỉ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 nhưng trong hệ toạ độ chung (tức trong ma trận độ cứng tổng thể S), chúng mang các chỉ số trình bày trong công thức (2.32). Vì mỗi thanh giàn được liên kết với các thanh giàn khác ở mỗi đầu của nó nên các giá trị A, B, C, D, X, Y có tính chất tích luỹ. Điều này đã được giải thích trong §2.2.3 trên hình (2.5)

5) Chia khối ma trận độ cứng tổng thể S để tính chuyển vị và phản lực tại các nút không có chuyển vị.

Nội dung như đã trình bày trong §2.4.

6) Giải hệ phương trình để tính chuyển vị

Nội dung như đã trình bày trong §2.4.

7) Tính phản lực theo công thức (2.31).

8) Tính lực dọc trong các thanh giàn theo công thức 2.24a. (xem §2.2).

Chương ba
HỆ PHẲNG CÓ NÚT CỨNG

Hệ phẳng có nút cứng là hệ trong đó các nút được xem như tuyệt đối cứng, nghĩa là các góc tạo thành giữa các phần tử quy tụ tại nút vẫn không đổi sau khi nút chuyển vị. Nói một cách khác, khi nút xoay, các phần tử quy tụ tại nút đều xoay những góc như nhau. Giả thiết này phù hợp với thực tế vì trong các kết cấu bằng thép hoặc bằng bê tông cốt thép, các nút đều được liên kết cứng bằng mối hàn hoặc bằng bê tông đặt cốt thép dày đặc.

Mỗi phần tử trong hệ phẳng có nút cứng có các thành phần nội lực: lực dọc N, lực cắt Q vuông góc với trục phần tử và mô men uốn M. Các thành phần chuyển vị tương ứng là biến dạng dọc u, chuyển vị thẳng tương đối v (vuông góc với trục phần tử) và góc xoay θ. Mỗi phần tử đều được liên kết với 2 nút của hệ. Trong phương pháp chuyển vị, ta lấy chuyển vị của các nút làm ẩn, và thường bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc và biến dạng trượt. Dựa trên giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc, ta có thể xem chiều dài của phần tử chiếu lên phương ban đầu vẫn không thay đổi sau khi biến dạng. Giả thiết này làm giảm bớt số bậc tự do của hệ như sau đây ta sẽ thấy.

Có 2 dạng ma trận của phương pháp chuyển vị khi tính hệ phẳng có nút cứng:

1) Dạng ma trận của phương pháp biến đổi chuyển vị. Trước hết, ta thành lập hệ thức ma trận giữa véc tơ nội lực và véc tơ chuyển vị của phần tử, tiếp theo biến đổi chuyển vị của phần tử thành chuyển vị nút và cuối cùng là thành lập hệ thức ma trận giữa véc tơ tải trọng và véc tơ chuyển vị của các nút, dựa trên điều kiện cân bằng.

2) Dạng ma trận của phương pháp thành lập trực tiếp hệ thức ma trận giữa véc tơ tải trọng và véc tơ chuyển vị của các nút.

Dưới đây trình bày 2 dạng ma trận nói trên.

§3.1. Dạng ma trận của phương pháp biến đổi chuyển vị

3.1.1. Hệ thức ma trận giữa véc tơ nội lực và véc tơ chuyển vị của một phần tử

Ta đã biết rằng giữa các thành phần nội lực và các thành phần chuyển vị của một phần tử chịu uốn, có mối liên hệ như sau:

$$N_i = \frac{E_i A_i}{L_i}.u_i$$

$$M_{1i} = -\frac{6E_iI_i}{L_i^2}.v_i + \frac{4E_iI_i}{L_i}\theta_{1i} + \frac{2E_iI_i}{L_i}\theta_{2i}$$

$$M_{2i} = -\frac{6E_iI_i}{L_i^2}.v_i + \frac{2E_iI_i}{L_i}\theta_{1i} + \frac{4E_iI_i}{L_i}\theta_{2i}$$

Trong đó: N_i – lực dọc trong phần tử i; Q_i – lực cắt trong phần tử i; M_{1i} – mômen tại đầu 1 của phần tử i; M_{2i} – mô men tại đầu 2 của phần tử i; u_i – biến dạng dọc trục của phần tử i; v – chuyển vị thẳng tương đối giữa 2 đầu của phần tử i (vuông góc với trục của phần tử); θ_{1i} – góc xoay tại đầu 1 của phần tử i; θ_{2i} – góc xoay tại đầu 2 của phần tử i.

Ta quy ước dấu của nội lực như sau: lực dọc kéo là dương, nén là âm. Mô men uốn là dương khi quay thuận chiều kim đồng hồ. Lực cắt là dương khi làm cho phần tử quay thuận chiều kim đồng hồ. Góc xoay là dương khi quay thuận chiều kim đồng hồ. Trong trường hợp ngược lại, các đại lượng nói trên quy ước là âm.

Các hệ thức trên có thể biểu thị dưới dạng ma trận:

$$S_i = k_i.U_i \tag{3.1}$$

$$S_i = \begin{bmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_{1i} \\ M_{2i} \end{bmatrix} \quad (3.2) \qquad U_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$k_i = \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_i & d_i & d_i \\ 0 & d_i & e_i & f_i \\ 0 & d_i & f_i & e_i \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Trong đó:

$$\left.\begin{aligned} &a_i = E_iA_i / L_i, \quad b_i = 12E_iI_i / L_i^3, \quad d_i = -E_iI_i / L_i^2 \\ &e_i = 4E_iI_i / L_i, \quad f_i = 2E_iI_i / L_i \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Ta gọi: S_i – véc tơ nội lực của phần tử i; U_i – véc tơ chuyển vị của phần tử i; k_i – *ma trận độ cứng* của phần tử i.

Giả sử hệ có n phần tử. Đối với toàn hệ, hệ thức ma trận giữa véc tơ nội lực S và véc tơ chuyển vị U như sau:

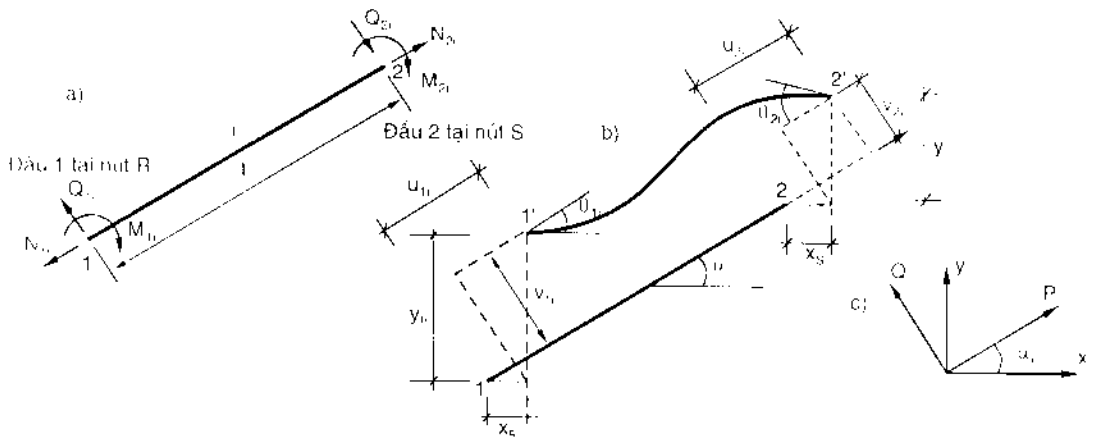
$$S = k.U \tag{3.6}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ . \\ . \\ S_n \end{bmatrix} \quad (3.7) \qquad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_n \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Ma trận độ cứng k là ma trận chéo:

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & & & & & & & \\ & k_2 & & & & & & \\ & & . & & & & & \\ & & & . & & & & \\ & & & & . & & & \\ & & & & & k_i & & \\ & & & & & & . & \\ & & & & & & & . \\ & & & & & & & k_n \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

3.1.2. Hệ thức ma trận giữa véc tơ chuyển vị của phần tử và véc tơ chuyển vị của các nút



Hình 3.1

Giả sử một phần tử i bất kì của hệ có đầu 1 quy tụ vào nút R và đầu 2 quy tụ vào nút S. Hệ toạ độ riêng của nó là P và Q, trục P trùng với trục của phần tử i và có chiều dương hướng từ đầu 1 đến đầu 2. Trục Q vuông góc với trục P và có chiều dương biểu thị như trên hình (3.1c)

Giả sử do một nguyên nhân nào đó, các nút R và S có các chuyển vị tương ứng x_R, y_R, θ_R và x_S, y_S, θ_S (hình 3.1b). Vì sự chuyển vị của các nút R và S, đầu 1 của phần tử i di động đến điểm 1', đầu 2 di động đến điểm 2' (hình 3.1b). Các thành phần chuyển vị tương ứng với đầu 1 và đầu 2 là u_{1i}, v_{1i}, θ_{1i} và u_{2i}, v_{2i}, θ_{2i}.

Từ các quan hệ hình học, ta suy ra các hệ thức sau:

$$u_{1i} = x_R\cos\alpha_i + y_R\sin\alpha_i \qquad u_{2i} = x_S\cos\alpha_i + y_S\sin\alpha_i$$

Vậy biến dạng cọc của phần tử i là:

$$u_i = u_{2i} - u_{1i} = -x_R\cos\alpha_i - y_R\sin\alpha_i + x_S\cos\alpha_i + y_S\sin\alpha$$

$$v_{1i} = y_R\cos\alpha_i - x_R\sin\alpha_i$$

$$v_{2i} = y_S\cos\alpha_i - x_S\sin\alpha_i$$

Chuyển vị thẳng tương đối của phần tử i là:

$$v_i = v_{2i} - v_{1i} = x_R\sin\alpha_i - y_R\cos\alpha_i - x_S\sin\alpha_i + y_S\cos\alpha_i$$

Các góc xoay của phần tử i là:

$$\theta_{1i} = \theta_R;\ \theta_{2i} = \theta_S$$

Căn cứ vào các hệ thức trên, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 & . & \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 \\ \sin\alpha_i & -\cos\alpha_i & 0 & . & -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta_R \\ \vdots \\ x_S \\ y_S \\ \theta_S \end{bmatrix}$$

tại nút R tại nút S

Hệ thức ma trận trên có thể viết dưới dạng rút gọn:

$$U_i = A_i.[X_R \ldots X_S]' \qquad (3.10)$$

Trong đó: X_R – véc tơ chuyển vị tại nút R; X_S – véc tơ chuyển vị tại nút S; A_i – *ma trận biến đổi chuyển vị* của phần tử i. Ma trận A_i có dạng

$$A_i = \begin{bmatrix} -\cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 & . & . & \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 \\ \sin\alpha_i & -\cos\alpha_i & 0 & . & . & -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

tại nút R tại nút S

Nếu hệ có n phần tử và m nút, hệ thức ma trận giữa véc tơ chuyển vị U của các phần tử và véc tơ chuyển vị X của các nút sẽ là:

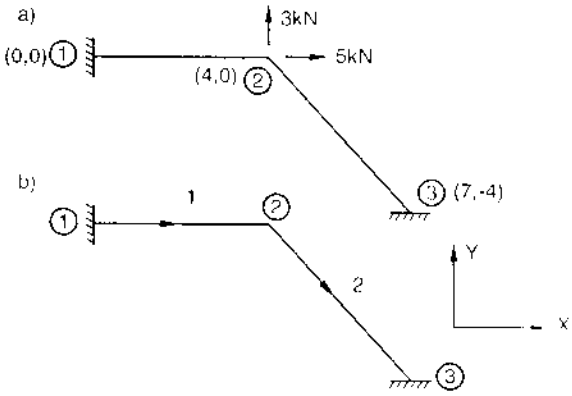
$$U = A.X \qquad (3.12)$$

Trong đó:

$$U = [U_1 \quad U_2 \ldots U_i \ldots U_n]^T$$

$$X = [X_1 \quad X_2 \ldots X_i \ldots X_m]^T$$

A – ma trận biến đổi chuyển vị của toàn hệ. A là ma trận kết hợp các ma trận con dạng (3.11).



Hình 3.2

Thí dụ 3.1: Lập ma trận biến đổi chuyển vị cho kết cấu trên hình (3.2). Khung có 2 phần tử và 3 nút. Ta xem mỗi phần tử của khung có phần đóng góp riêng vào ma trận A như sau:

Phần tử 1:

Phần tử 1 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 1 (không có chuyển vị) và đầu 2 quy tụ vào nút S = 2 (các thành phần chuyển vị x_2, y_2, θ_2). Áp dụng các hệ thức (3.10) và (3.11), ta có:

Tại nút S = 2

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Thay $\cos\alpha_1 = 1$, $\sin\alpha_1 = 0$, ta có:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

Phần tử 2 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 2 (các thành phần chuyển vị x_2, y_2, θ_2) và đầu 2 quy tụ vào nút S = 3 (không có chuyển vị). Áp dụng các hệ thức (3.10), (3.11), ta có:

$$U_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_{12} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & 0 \\ \sin\alpha_2 & -\cos\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Tại nút R = 2

Thay $\cos\alpha_2 = 0,6$, $\sin\alpha_2 = -0,8$, ta có:

$$U_2 = \begin{bmatrix} -0,6 & 0,8 & 0 \\ -0,8 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Vậy hệ thức ma trận giữa véc tơ chuyển vị U của các phần tử và véc tơ chuyển vị X của các nút có dạng:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{21} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{12} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,6 & 0,8 & 0 \\ -0,8 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Ma trận biến đổi chuyển vị của hệ là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,6 & 0,8 & 0 \\ -0,8 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1.3. Hệ thức ma trận giữa véc tơ tải trọng và véc tơ chuyển vị của các nút. Phương trình cân bằng

Áp dụng công thức (3.6) và (3.12) ta có hệ thức ma trận:

$$S = k.U = [k.A].X \qquad (3.13)$$

Ta lập ma trận [k.A] bằng cách xem nó là ma trận kết hợp các phần đóng góp của các phần tử. Nhân bên phải ma trận k_i (hệ thức (3.4)) với ma trận A_i (hệ thức (3.11)), ta được phần đóng góp của phần tử i vào ma trận [k.A] như sau:

$$[kA]_i = \begin{bmatrix} a_i\cos\alpha_i & -a_i\cos\alpha_i & 0 & \dots & a_i\cos\alpha_i & a_i\cos\alpha_i & 0 \\ b_i\sin\alpha_i & -b_i\sin\alpha_i & d_i & \dots & -b_i\sin\alpha_i & b_i\sin\alpha_i & d_i \\ d_i\sin\alpha_i & -d_i\sin\alpha_i & e_i & \dots & -d_i\sin\alpha_i & d_i\sin\alpha_i & f_i \\ \underbrace{d_i\sin\alpha_i \quad -d_i\sin\alpha_i \quad f_i}_{\text{tại nút R}} & & & \dots & \underbrace{-d_i\sin\alpha_i \quad d_i\sin\alpha_i \quad e_i}_{\text{tại nút S}} & & \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

[k.A] là ma trận kết hợp các ma trận con có dạng (3.14)

Áp dụng nguyên lý cân bằng giữa công của ngoại lực và thế năng biến dạng đàn hồi, ta có:

$$\frac{1}{2}.P'.X' = \frac{1}{2}S'.U$$

Thay U từ hệ thức (3.12) và S từ hệ thức (3.6) vào phương trình trên, ta có:

$$P'.X = [k.A.X]'.A.X \Rightarrow P' = X'.A'.k'.A \Rightarrow P = [A'.k.A].X$$

Đặt $$K = A'.k.A \tag{3.15}$$

$$\Rightarrow \quad P = K.X \tag{3.16}$$

Ta gọi K là *ma trận độ cứng tổng thể.*

Ta có thể lập ma trận K bằng 2 cách:

1) Thực hiện các phép nhân ma trận theo trình tự nêu trong công thức (3.15)

2) Xem K là ma trận kết hợp các phần đóng góp của các phần tử. Sau khi nhân bên phải ma trận A' với ma trận [k.A], ta thấy phần đóng góp của phần tử i vào ma trận K như sau:

$$K_i = \begin{array}{r} \\ \text{tại nút R} \\ \\ \\ \\ \text{tại nút S} \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} A_i & B_i & -C_i & \dots & -A_i & -B_i & -C_i \\ B_i & F_i & -T_i & \dots & -B_i & -F_i & -T_i \\ -C_i & -T_i & e_i & \dots & C_i & T_i & f_i \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ -A_i & -B_i & C_i & \dots & A_i & B_i & C_i \\ -B_i & -F_i & T_i & \dots & B_i & F_i & T_i \\ -C_i & -T_i & f_i & \dots & C_i & T_i & e_i \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

tại nút R tại nút S

Trong đó:

$$\left.\begin{array}{ll} A_i = a_i\cos^2\alpha_i + b_i\sin^2\alpha_i; & B_i = (a_i - b_i)\cos\alpha_i\sin\alpha_i \\ C_i = -d_i\sin\alpha_i; & F_i = a_i\sin^2\alpha_i + b_i\cos^2\alpha_i \\ T_i = d_i\cos\alpha_i & \\ a_i; b_i, d_i, e_i, f_i \text{ tính theo công thức (3.5)} & \end{array}\right\} \tag{3.18}$$

Ma trận (3.17) có thể viết dưới dạng rút gọn:

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{RR} & K_{RS} \\ K_{SR} & K_{SS} \end{bmatrix} \qquad (3.17a)$$

Thí dụ 3.2: Lập phương trình P = K.X cho kết cấu trên hình (3.2a)

Trước hết, ta lập ma trận độ cứng toàn bộ K theo cách thứ 2 đã được trình bày trong phần trên.

Phần tử 1:

Phần tử 1 có đầu 1 quy tụ vào nút S = 2 (các thành phần chuyển vị x_2, y_2, θ_2). Vì nút R = 1 là gối tựa ngàm nên các ma trận con K_{RR}, K_{RS}, K_{SR} không tồn tại. Chỉ còn lại ma trận con $K_{SS} = K_{22}$. Từ hệ thức (3.17) và (3.17a) ta có:

$$K_{22}^{(1)} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ B_1 & F_1 & T_1 \\ C_1 & T_1 & e_1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

Phần tử 2 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 2 (các thành phần chuyển vị x_2, y_2, θ_2) và đầu 2 quy tụ vào nút S = 3 (chuyển vị bằng không). Vì nút S = 3 là gối tựa ngàm nên các ma trận con K_{RS}, K_{SR}, K_{SS} không tồn tại. Chỉ còn lại ma trận con $K_{RR} = K_{22}$. Từ hệ thức (3.17) và (3.17a), ta có:

$$K_{22}^{(2)} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 & -C_2 \\ B_2 & F_2 & -T_2 \\ -C_2 & -T_2 & e_2 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng tổng thể K là ma trận kết hợp các phần đóng góp của các phần tử 1 và 2. Do đó:

$$K = K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & C_1 - C_2 \\ B_1 + B_2 & F_1 + F_2 & T_1 - T_2 \\ C_1 - C_2 & T_1 - T_2 & e_1 + e_2 \end{bmatrix}$$

Từ hình (3.2a), ta có véc tơ tải trọng và véc tơ chuyển vị X như sau:

$$P = [p_{2x} \quad p_{2y} \quad p_{2\theta}]' [5 \quad 3 \quad 0]' \; ; \; X = [x_2, \quad y_2, \quad \theta_2]'$$

Áp dụng công thức (3.16), ta có phương trình ma trận:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & C_1 - C_2 \\ B_1 + B_2 & F_1 + F_2 & T_1 - T_2 \\ C_1 - C_2 & T_1 - T_2 & c_1 + e_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

§3.2. Dạng ma trận của phương pháp thành lập trực tiếp ma trận độ cứng tổng thể

Dạng ma trận này đơn giản hơn vì ta có thể thành lập trực tiếp ma trận độ cứng tổng thể K, dựa trên điều kiện cân bằng của từng nút.

Như đã trình bày, ảnh hưởng của biến dạng dọc và biến dạng trượt thường được bỏ qua nhưng trong một số trường hợp đặc biệt, cần phải xét đến ảnh hưởng của chúng. Vì vậy, cần phải nghiên cứu cách tính hệ phẳng có nút cứng trong trường hợp tổng quát, nghĩa là xét đến đồng thời ảnh hưởng của 3 thành phần nội lực: mô men uốn, lực cắt và lực dọc.

3.2.1. Ảnh hưởng của mô men uốn, lực cắt và lực dọc đến chuyển vị của phần tử

1) Ảnh hưởng của mô men uốn M:

Mô men uốn gây ra sự thay đổi độ cong của phần tử. Nếu tiết diện vẫn phẳng sau khi phần tử bị uốn, ta có hệ thức giữa mô men uốn M và độ cong như sau:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M$$

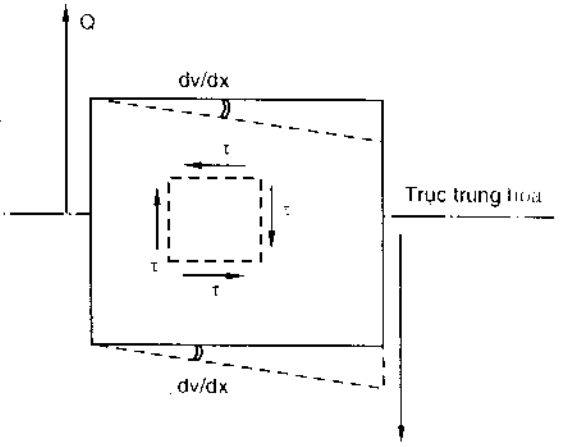
EI – độ cứng chống uốn; v – chuyển vị của phần tử trên phương vuông góc với trục của nó. Lần lượt tích phân 2 vế của phương trình trên, ta sẽ được biểu thức của v.

2) Ảnh hưởng của lực cắt

Lực cắt Q gây ra ứng suất tiếp τ và làm cho phân tố bị biến dạng như trên hình (3.3). Góc trượt:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\tau}{G} = \frac{\gamma Q}{A.G}$$

A – diện tích tiết diện; G – mô đun trượt; γ – hệ số xét đến sự phân bố không đồng đều của ứng suất tiếp.



Hình 3.3

Vậy tổng chuyển vị của phần tử là tổng của chuyển vị do mô men uốn M gây ra và chuyển vị do lực cắt Q gây ra. Thông thường, M là nhân tố ảnh hưởng chủ yếu, ta có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

$$K_i = \begin{bmatrix} K_{RR} & K_{RS} \\ K_{SR} & K_{SS} \end{bmatrix} \qquad (3.17a)$$

Thí dụ 3.2: Lập phương trình P = K.X cho kết cấu trên hình (3.2a)

Trước hết, ta lập ma trận độ cứng toàn bộ K theo cách thứ 2 đã được trình bày trong phần trên.

Phần tử 1:

Phần tử 1 có đầu 1 quy tụ vào nút S = 2 (các thành phần chuyển vị x_2, y_2, θ_2). Vì nút R = 1 là gối tựa ngàm nên các ma trận con K_{RR}, K_{RS}, K_{SR} không tồn tại. Chỉ còn lại ma trận con $K_{SS} = K_{22}$. Từ hệ thức (3.17) và (3.17a) ta có:

$$K_{22}^{(1)} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ B_1 & F_1 & T_1 \\ C_1 & T_1 & e_1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

Phần tử 2 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 2 (các thành phần chuyển vị x_2, y_2, θ_2) và đầu 2 quy tụ vào nút S = 3 (chuyển vị bằng không). Vì nút S = 3 là gối tựa ngàm nên các ma trận con K_{RS}, K_{SR}, K_{SS} không tồn tại. Chỉ còn lại ma trận con $K_{RR} = K_{22}$. Từ hệ thức (3.17) và (3.17a), ta có:

$$K_{22}^{(2)} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 & -C_2 \\ B_2 & F_2 & -T_2 \\ -C_2 & -T_2 & e_2 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng tổng thể K là ma trận kết hợp các phần đóng góp của các phần tử 1 và 2. Do đó:

$$K = K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & C_1 - C_2 \\ B_1 + B_2 & F_1 + F_2 & T_1 - T_2 \\ C_1 - C_2 & T_1 - T_2 & e_1 + e_2 \end{bmatrix}$$

Từ hình (3.2a), ta có véc tơ tải trọng và véc tơ chuyển vị X như sau:

$$P = [p_{2x} \quad p_{2y} \quad p_{2\theta}]'[5 \quad 3 \quad 0]' \; ; \; X = [x_2, \quad y_2, \quad \theta_2]'$$

3) Ảnh hưởng của lực dọc:

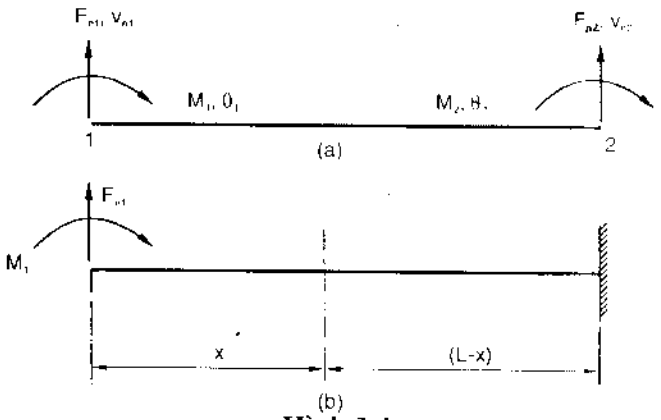
Lực dọc gây ra biến dạng dọc

$$u = \frac{FL}{AE}$$

F – lực dọc; L chiều dài của phần tử; E – mô đun đàn hồi.

3.2.2. Ma trận độ cứng của phần tử

Để tiện cho việc thành lập trực tiếp ma trận độ cứng tổng thể K, ta đưa các thành phần nội lực và thành phần chuyển vị của phần tử về hệ toạ độ chung X, Y. Ta xét đồng thời ảnh hưởng của 3 thành phần nội lực đến ma trận độ cứng của phần tử.



Hình 3.4

Trước hết, thành lập ma trận độ cứng trong hệ toạ độ riêng. Giả sử một phần tử bất kì có 2 đầu 1 và 2 có các thành phần nội lực và chuyển vị như trên hình (3.4a). Ta gọi: F_{n1}, F_{n2} – các thành phần lực cắt tại đầu 1 và đầu 2; v_{n1}, v_{n2} – các thành phần chuyển vị vuông góc với trục phần tử tại đầu 1 và đầu 2; M_1, M_2 – mô men uốn tại đầu 1 và đầu 2; θ_1, θ_2 – góc xoay tại đầu 1 và đầu 2.

Áp dụng nguyên lí về năng lượng bù và định lí Engesser để suy ra các biểu thức F_{n1}, M_1, F_{n2}, M_2.

Khi xét ảnh hưởng của v_{n1}, θ_1, ta cố định đầu 2 như trên hình (3.4b). Dưới dạng tổng quát, năng lượng bù có thể viết:

$$C = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_0^L \frac{\gamma Q^2 dx}{2GA}$$

Ứng với hình (3.4a), ta có:

$$M = M_1 + F_{n1}.x$$

$$Q = F_{n1}$$

Từ điều kiện cân bằng: $M_2 = -M_1 - F_{n1}.L$; $F_{n2} = -F_{n1}$

Vậy:

$$C = \int_0^L \frac{(M_1 + F_{n1}.x)^2}{2EL} dx + \int_0^L \frac{\gamma F_{n1}^2}{2GA} dx$$

Áp dụng định lí Engesser, ta có:

$$\frac{\partial C}{\partial F_{n1}} = v_{n1} = \int_0^L \frac{(M_1 + F_{ni}.x)xdx}{EI} + \int_0^L \frac{\gamma F_{n1}dx}{GA}$$

$$\frac{\partial C}{\partial M_1} = \theta_1 = \int_0^L \frac{(M_1 + F_{ni}.x)dx}{EI}$$

Sau khi thực hiện phép tính tích phân, ta được kết quả:

$$6EIv_{n1} = 3M_1L^2 + 2F_{n1}.L^3\left(1 + \frac{\beta}{4}\right);\ 2EI\theta_1 = 2M_1.L + F_{n1}.L^2$$

trong đó $$\beta = \frac{12EI}{G.A.L^2}\gamma \qquad (3.19)$$

Giải 2 phương trình trên theo các biến v_{n1} và θ_1, ta có:

$$M_1 = \frac{EI}{L(1+\beta)}[(4+\beta)\theta_1 - \frac{6}{L}v_{n1}]$$

$$F_{n1} = \frac{EI}{L(1+\beta)}[-\frac{6}{L}\theta_1 + \frac{12}{L^2}v_{n1}]$$

Từ điều kiện cân bằng, ta có:

$$M_2 = -M_1 - F_{n1}.L = \frac{EI}{L(1+\beta)}[(2-\beta)\theta_1 - \frac{6}{L}v_{n1}];\ F_{n2} = -F_{n1}$$

Khi xét ảnh hưởng của v_{n2}, θ_2, ta cố định đầu 1 và tiến hành tính toán tương tự như trên. Kết quả:

$$M_2 = \frac{EI}{L(1+\beta)}[(4+\beta)\theta_2 + \frac{6}{L}v_{n2}];$$

$$F_{n2} = \frac{EI}{L(1+\beta)}\left(\frac{6}{L}\theta_2 + \frac{12}{L^2}v_{n2}\right)$$

$$M_1 = -M_2 + F_{n2}.L = \frac{EI}{L(1+\beta)}[(2-\beta)\theta_2 + \frac{6}{L}v_{n2}];\ F_{n1} = -F_{n2}$$

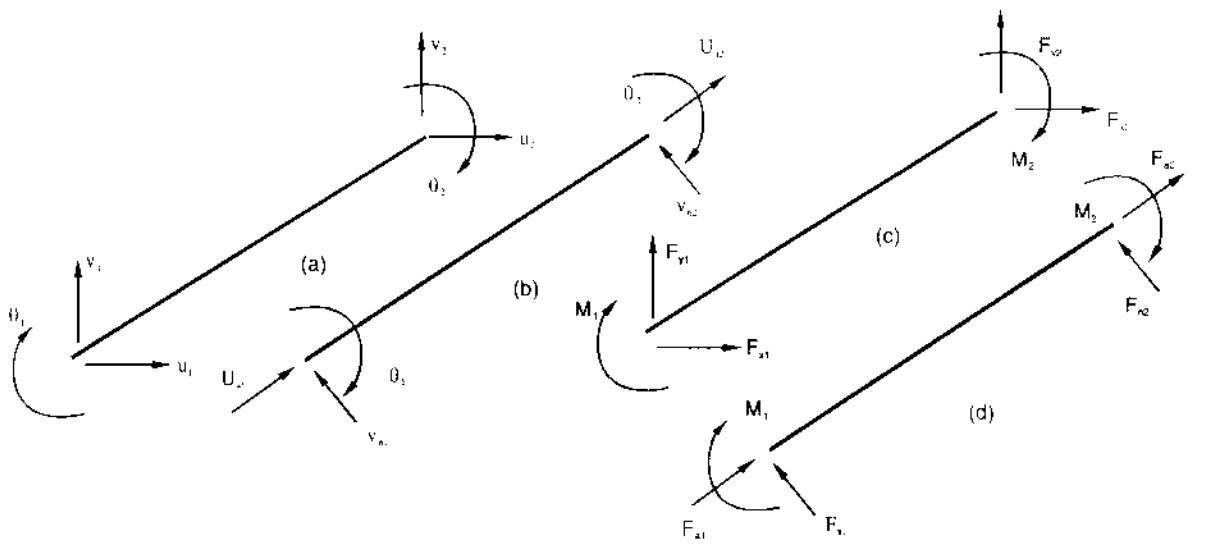
Căn cứ vào cả kết quả trên, ta có hệ thức ma trận giữa véc tơ nội lực S và véc tơ chuyển vị U của phần tử i bất kì như sau:

$$S_i = k_i.U_i \tag{3.20}$$

$$\underset{S_i}{\begin{bmatrix} F_{n1} \\ M_1 \\ F_{n2} \\ M_2 \end{bmatrix}} = \frac{EI}{L(1+\beta)} \underset{k_i}{\begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4+\beta & \frac{6}{L} & 2-\beta \\ -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 2-\beta & \frac{6}{L} & 4+\beta \end{bmatrix}} \underset{U_i}{\begin{bmatrix} V_{n1} \\ \theta_1 \\ v_{n2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}} \tag{3.21}$$

k_i – ma trận độ cứng của phần tử i trong hệ toạ độ riêng, β – hệ số tính theo công thức (3.19).

Bây giờ, ta thành lập ma trận độ cứng của phần tử trong hệ toạ độ chung X, Y. Các thành phần nội lực và chuyển vị trong hệ toạ độ riêng biểu thị trên các hình (3.5b) và (3.5d) trong đó: F_{a1}, F_{a2} là các thành phần lực dọc tại đầu 1 và đầu 2; u_{a1}, u_{a2} là các thành phần chuyển vị dọc trục tại đầu 1 và đầu 2, định nghĩa của các kí hiệu khác như trước. Các thành phần nội lực và chuyển vị trong hệ toạ độ chung biểu thị trên các hình (3.5a) và (3.5c) trong đó: U_{a1}, U_{a2} là các thành phần chuyển vị trên phương X tại đầu 1 và đầu 2; V_{a1}, V_{a2} là các thành phần chuyển vị trên phương Y tại đầu 1 và đầu 2; F_{x1}, F_{x2} là các thành phần nội lực trên phương X tại đầu 1 và đầu 2; F_{y1}, F_{y2} là các thành phần nội lực trên phương Y tại đầu 1 và đầu 2.



Hình 3.5

Các thành phần lực dọc có thể viết:

$$\left.\begin{aligned} F_{a1} &= \frac{AE}{L}u_{a1} - \frac{AE}{L}u_{a2} \\ F_{a2} &= \frac{-AE}{L}u_{a1} + \frac{AE}{L}u_{a2} \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Từ hình (3.5a) và (3.5b), ta có các hệ thức:

$$\left.\begin{aligned} u_{a1} &= u_1.l + v_1.m; & u_{a2} &= u_{a1}.l + v_2.m \\ v_{a1} &= -u_1.m + v_1.l & v_{n2} &= -u_2.m + v_2.l \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Từ hình (3.5c) và (3.5d), ta có:

$$\begin{aligned} F_{x1} &= F_{a1}.l - F_{n1}.m; & F_{y1} &= F_{a1}.m + F_{n1}.l \\ F_{x2} &= F_{a2}.l - F_{n2}.m; & F_{y2} &= F_{a2}.m + F_{n2}.l \end{aligned} \qquad (c)$$

l, m – các côsin định hướng của phần tử.

Căn cứ vào hệ thức (3.21) và (a), (b), (c), ta suy ra ma trận độ cứng của phần tử trong hệ toạ độ chung.

Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ toạ độ chung:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_4 & -C_1 & -C_2 & C_4 \\ & C_3 & -C_5 & -C_2 & -C_3 & -C_5 \\ & & C_6 & -C_4 & C_5 & C_7 \\ & & & C_1 & C_2 & -C_4 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & & C_3 & C_5 \\ & & & & & C_6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \qquad (3.22)$$

$$\left.\begin{aligned} &C_1 = \frac{12EI}{L^3(1+\beta)}(m^2 + \alpha l^2); \quad C_2 = \frac{-12EI}{L^3(1+\beta)}(1-\alpha)l.m \quad C_3 = \frac{12EI}{L^3(1+\beta)}l^2 + \alpha m^2 \\ &C_4 = \frac{6EI}{L^2(1+\beta)}.m \qquad C_5 = \frac{6EI}{L^2(1+\beta)}l \qquad C_6 = \frac{(4+\beta)EI}{L(1+\beta)}; \quad C_7 = \frac{(2-\beta)EI}{L(1+\beta)} \\ &\beta = 12\frac{EI\gamma}{GAL^2}; \qquad \alpha = \frac{AL^2}{12I}(1+\beta); \end{aligned}\right\} (3.22a)$$

Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, $\beta = 0$

3.2.3. Các giả thiết khi tính hệ phẳng có nút cứng

Hệ thức ma trận (3.22) được suy ra trong trường hợp tổng quát. Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, cho $\beta = 0$; khi bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc, cho $A = 0$ trong các công thức C_1, C_2, C_3.

Bây giờ ta hãy phân tích tính chất lợi hại của một số giả thiết khi tính hệ phẳng có nút cứng.

Việc bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc có các ưu điểm như sau:

1) Số bậc tự do giảm bớt do đó khối lượng tính toán giảm bớt. Nếu giả thiết này phù hợp với thực tế, các sai số trong tính toán do giả thiết này mang lại không đáng kể.

2) Không cần quan tâm đến đại lượng A (diện tích tiết diện).

Tuy nhiên, cũng có một số nhược điểm như sau:

1) Không thể tính được lực dọc từ các thành phần chuyển vị tương ứng (vì giả thiết bằng không). Muốn tính lực dọc, phải dựa vào điều kiện cân bằng nút.

2) Đối với hệ khung có cột không song song hoặc có xà gãy khúc, quá trình phân tích bậc tự do trở nên phức tạp như trong phần sau ta sẽ thấy.

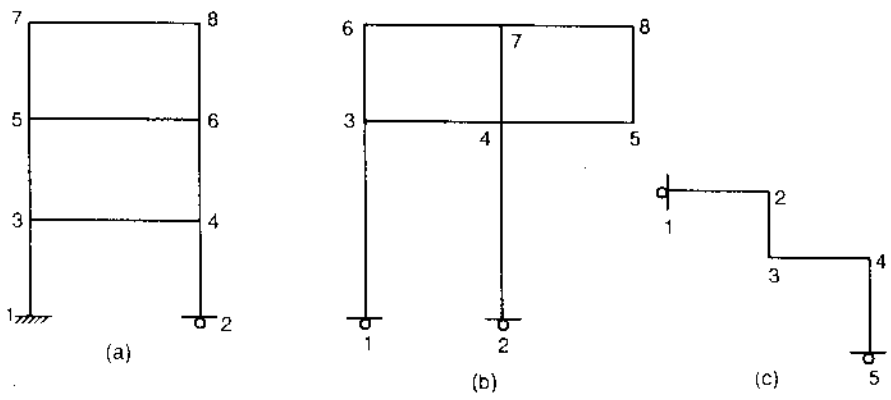
Vì vậy, khi tính hệ phẳng có nút cứng, cần phải chọn các giả thiết một cách thích hợp sao cho các giả thiết đó phù hợp với thực tế và việc tính toán được đơn giản.

3.2.4. Cách xác định bậc tự do của hệ phẳng có nút cứng

Trong hệ phẳng có nút cứng, mỗi nút cứng có 3 bậc tự do: 2 thành phần chuyển vị thẳng và 1 góc xoay. Ta dùng kí hiệu d để biểu thị bậc tự do, chỉ số kèm theo biểu thị số thứ tự của bậc tự do. Số bậc tự do n tính theo công thức:

$$n = 3 \times \text{số nút cứng} - \text{số bậc tự do triệt tiêu tại các gối tựa}$$

Thí dụ 3.2: Hệ trên hình (3.6a):



Hình 3.6

– Xét ảnh hưởng của lực dọc:

$$n = 3 \times 8 - 5 = 19$$

– Không xét ảnh hưởng của lực dọc:

Có 3 thành phần chuyển vị độc lập trên phương ngang ở các mức 7 – 8, 5 – 6, 3 – 4 và 7 thành phần chuyển vị xoay. Vậy:

$$n = 3 + 7 = 10$$

Hệ trên hình (3.6b):

– Xét ảnh hưởng của lực dọc:

$$n = 3 \times 8 - 4 = 20$$

– Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc:

Có 2 thành phần chuyển vị độc lập trên phương nằm ngang ở mức 6 – 7 – 8, 3 – 4 – 5, 1 thành phần chuyển vị trên phương thẳng đứng tại các nút 5 và 8, 8 thành phần chuyển vị xoay. Vậy:

$$n = 2 + 1 + 8 = 11$$

Hệ trên hình (3.6c):

– Xét ảnh hưởng của lực dọc:

$$n = 3 \times 5 - 4 = 11$$

– Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc:

Có 1 thành phần chuyển vị trên phương nằm ngang ở mức 3 – 4, 1 thành phần chuyển vị trên phương thẳng đứng tại các nút 2 và 3, 5 thành phần chuyển vị xoay. Vậy:

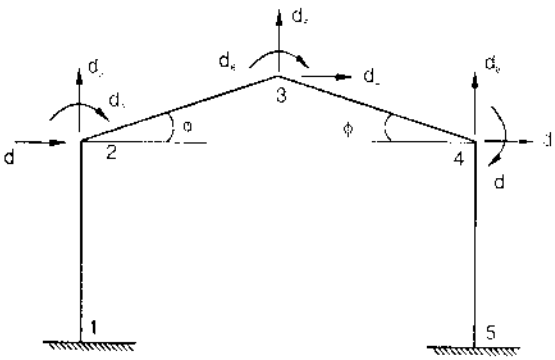
$$n = 1 + 1 + 5 = 7$$

Qua thí dụ trên, ta thấy khi bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc, số bậc tự do giảm bớt một cách đáng kể.

Tuy nhiên, đối với hệ trên hình (3.7), quá trình phân tích các bậc tự do khá phức tạp.

Chẳng hạn, khi xét đến ảnh hưởng của lực dọc, số bậc tự do có thể suy ra một cách đơn giản (xem hình 3.7):

$$n = 3 \times 3 = 9$$



Hình 3.7

Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc, ta phân tích như sau:

$d_3 = 0$ vì bỏ qua biến dạng dọc của cột 1 – 2

$d_8 = 0$ vì bỏ qua biến dạng dọc của cột 5 – 4

$$d_1\cos\Phi + d_2\sin\Phi = d_4\cos s\Phi$$

$+ d_5\sin\Phi$ vì bỏ qua biến dạng dọc của phần tử 2 – 3. Đối với phần tử 3 – 4, ta có hệ thức tương tự:

$$d_4\cos(180 - \Phi) + d_5\sin(180 - \Phi) = d_7\cos(180 - \Phi) + d_8\sin(180 - \Phi)$$

Thay $d_3 = d_8 = 0$ và giải hệ 2 phương trình trên, ta được:

$$d_4 = 0{,}5(d_1 + d_7) \text{ và } d_5 = 0{,}5(d_1 - d_7)\cos\Phi$$

Như vậy chỉ có 2 thành phần chuyển vị thẳng độc lập là d_1 và d_7. Vậy:

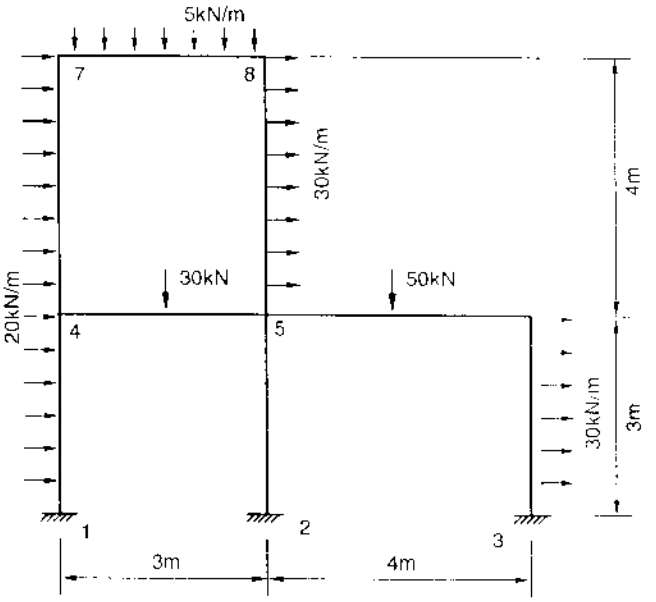
$$n = 2 + 3 \text{ (chuyển vị xoay)} = 5$$

3.2.5. Xử lí trường hợp phần tử chịu tác dụng của tải trọng tập trung hoặc tải trọng phân bố

Dạng ma trận của phương pháp chuyển vị xuất phát từ giả thiết tải trọng là các lực tập trung hoặc mô men tập trung tác dụng tại các nút. Trong thực tế, ta thường gặp trường hợp tải trọng là các lực tập trung hoặc các lực phân bố tác dụng trực tiếp lên các phần tử. Để đưa về trường hợp chỉ có các lực tập trung và mômen tập trung tác dụng tại các nút, ta xử lí như sau:

Lấy thí dụ hệ trên hình (3.8). Trạng thái thực của hệ được phân thành 2 trạng thái:

1) *Trạng thái ngàm* (hình 3.9a): toàn bộ các nút bị chốt, chỉ có phản lực lực, không có chuyển vị.

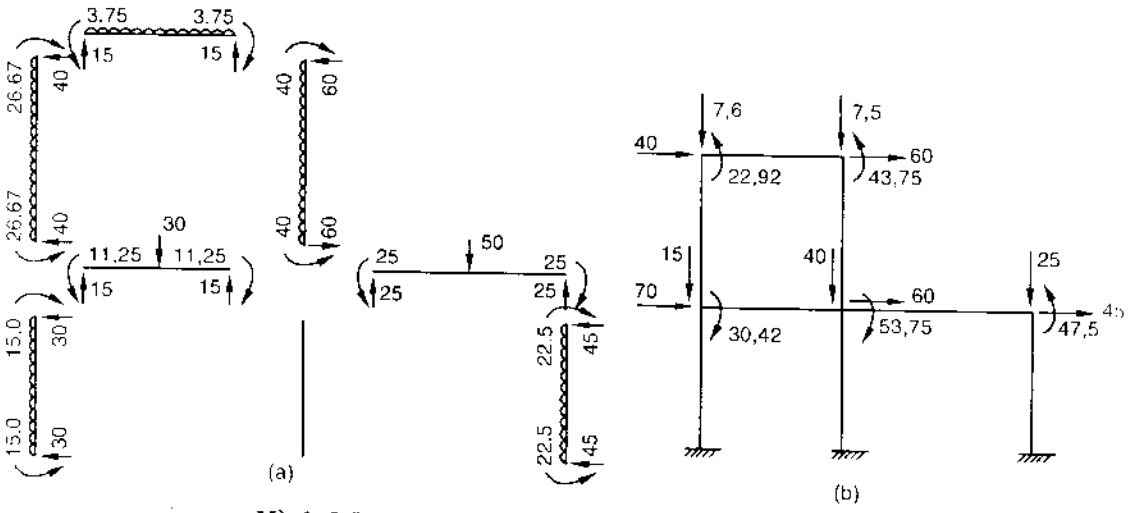


Hình 3.8

2) *Trạng thái tự do* (hình 3.9b): tháo các chốt, toàn bộ các nút được chuyển vị tự do. Trong trạng thái này, các lực tập trung và mô men tập trung tại các nút chính là tổng các phản lực tại các nút tương ứng ở trạng thái ngàm nhưng có chiều ngược lại (hình 3.9b). Nội lực và chuyển vị ở trạng thái thực (hình 3.8) bằng nội lực và chuyển vị (bằng không) ở trạng thái ngàm (hình 3.9a) cộng với nội lực và chuyển vị ở trạng thái tự do (hình 3.9b). Nội lực ở trạng thái ngàm có thể suy ra từ các công thức tính sẵn hoặc bảng tính sẵn. Nội lực ở trạng thái tự do suy ra từ phương trình cân bằng F = KD).

3.2.6. Trình tự tính hệ phẳng có nút cứng

Lấy thí dụ hệ trên hình (3.8). Ta tiến hành tính toán theo các bước sau:



Hình 3.9

1) Chọn hệ trục toạ độ chung X, Y và xác định toạ độ của các nút.

2) Xác định bậc tự do của hệ:

Theo các hình (3.8) và (3.10), ta thống kê bậc tự do của hệ như sau:

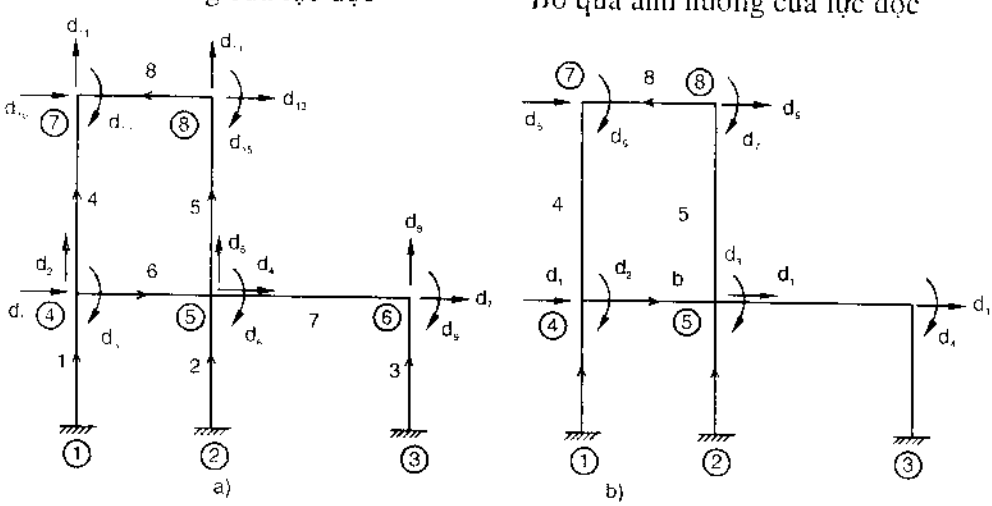
Toạ độ của các nút:

Nút	x	y
1	0	0
2	3	0
3	7	0
4	0	3
5	3	3
6	7	3
7	0	7
8	3	7

Bậc tự do

Xét đến ảnh hưởng của lực dọc

Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc



Hình 3.10

Bậc tự do
(có xét đến ảnh hưởng của lực dọc)

Nút	u	v	θ
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	d_1	d_2	d_3
5	d_4	d_5	d_6
6	d_7	d_8	d_9
7	d_{10}	d_{11}	d_{12}
8	d_{13}	d_{14}	d_{15}

Bậc tự do
(bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc)

Nút	u	v	θ
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	d_1	0	d_2
5	d_1	0	d_3
6	d_1	0	d_4
7	d_5	0	d_6
8	d_5	0	d_7

3) Xác định vị trí các đầu 1 và 2 của các phần tử và các côsin định hướng của chúng.

$$l = (x_2 - x_1)/L; \qquad m = (y_2 - y_1)/L \qquad L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	4	0	1
2	2	5	0	1
3	3	6	0	1
4	4	7	0	1
5	5	8	0	1
6	4	5	1	0
7	5	6	1	0
8	8	7	−1	0

4) Dùng các thành phần chuyển vị của các nút để biểu thị các thành phần chuyển vị của các phần tử (hệ trên hình 3.10a).

Các thành phần chuyển vị tại các đầu của các phần tử (có xét đến ảnh hưởng của lực dọc) *(bảng Các thành phần chuyển bị.... trang 122)*:

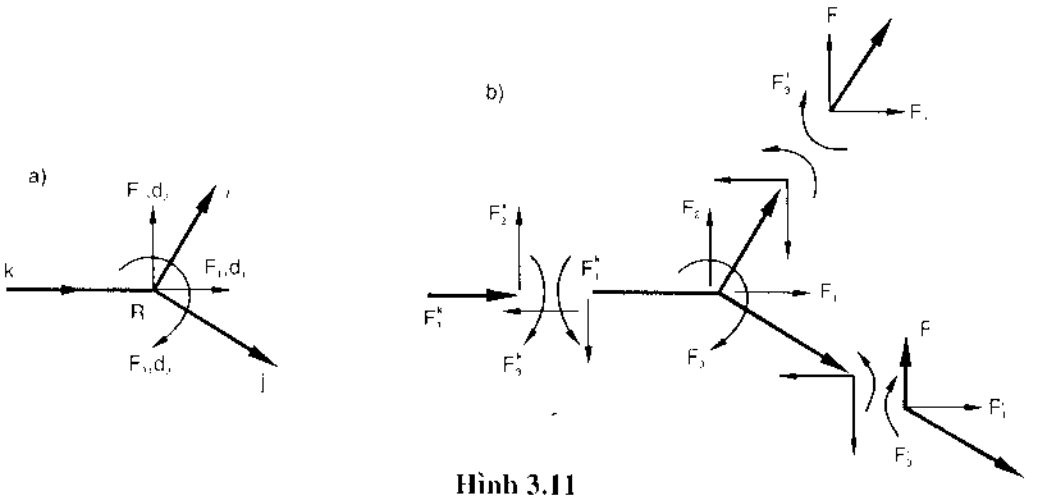
5) Lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (3.22). Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, thay $\beta = 0$, khi bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc, thay $\alpha = 0$. Cần dùng chỉ số như nhau cho các thành phần nội lực và các thành phần chuyển vị cùng phương để tiện cho việc thành lập ma trận độ cứng tổng thể K.

6) Tại mỗi nút, tính tổng của các thành phần nội lực trên phương của mỗi bậc tự do đối với các phần tử quy tụ tại đó. Bằng cách này, ta sẽ thành lập trực tiếp ma trận độ cứng toàn bộ K. Điều này được minh hoạ như sau:

Các thành phần chuyển bị tại các đầu của các phần tử

(có xét đến ảnh hưởng của lực dọc)

Phần tử	Các thành phần chuyển vị tại đầu 1			Các thành phần chuyển vị tại đầu 2		
	u_1	v_1	θ_1	u_2	v_2	θ_2
1	0	0	0	d_1	d_2	d_3
2	0	0	0	d_4	d_5	d_6
3	0	0	0	d_7	d_8	d_9
4	d_1	d_2	d_3	d_{10}	d_{11}	d_{12}
5	d_4	d_5	d_6	d_{13}	d_{14}	d_{15}
6	d_1	d_2	d_3	d_1	d_2	d_6
7	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
8	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{10}	d_{11}	d_{12}



Hình 3.11

Giả sử tại một nút R nào đó, có 3 thành phần tải trọng F_1, F_2, F_3 và có 3 phần tử i, j, k quy tụ (hình 3.11a). Sau khi cắt các phần tử ở lân cận nút R, ta có các thành phần nội lực như trên hình (3.11b). Cần chú ý rằng các thành phần nội lực cùng phương với một bậc tự do nào đó đều được kí hiệu bằng chỉ số như nhau.

Từ điều kiện cân bằng nút, ta có:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= F_1^i + F_1^j + F_1^k \\ F_2 &= F_2^i + F_2^j + F_2^k \\ F_3 &= F_3^i + F_3^j + F_3^k \end{aligned}\right\} \qquad (3.23)$$

Các số hạng ở vế phải của các phương trình trên là những hàm tuyến tính của các bậc tự do d_1, d_2, d_3,... Từ (3.22), ta viết phương trình đầu tiên như sau:

$$F_1^i = a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 + ...$$
$$F_1^j = b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 + ...$$
$$F_1^k = c_1d_1 + b_1d_1 + c_3d_3 + ... \quad \text{do đó}$$
$$F_1 = F_1^i + F_1^j + F_1^k = (a_1 + b_1 + c_1)d_1 + (a_2 + b_2 + c_2)d_2 + (a_3 + b_3 + c_3)d_3 ...$$

Trong đó: F_1 – phần tử của véc tơ tải trọng ứng với bậc tự do d_1, a, b, c – các phần tử lần lượt ứng với các ma trận độ cứng của các ma trận các phần tử i, j, k. Nếu so sánh 2 vế của (3.24), ta thấy phần tử của ma trận K cùng hàng với F_1

– ứng với d_1 là $(a_1 + b_1 + c_1)$

– ứng với d_2 là $(a_2 + b_2 + c_2)$

– ứng với d_3 là $(a_3 + b_3 + c_3)$

Đối với các phương trình còn lại của (3.23), ta cũng làm tương tự như trên.

7) Sau khi thành lập xong ma trận độ cứng toàn bộ K, ta thay ΣF_i bằng F_i để được hệ thức ma trận:

$$F = K.D \tag{3.24}$$

F – véc tơ tải trọng; K – ma trận độ cứng tổng thể; D – véc tơ chuyển vị của các nút.

8) Giải hệ phương trình trên để được giá trị của véc tơ chuyển vị.

9) Các thành phần nội lực của các phần tử tính như sau:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{EI}{L(1+\beta)}\left[(4+\beta)\theta_1 + (2-\beta)\theta_2 + \frac{6}{L}((u_1 - u_2)m - (v_1 - v_2))l\right] \\ M_2 &= \frac{EI}{L(1+\beta)}\left[(2-\beta)\theta_1 + (4+\beta)\theta_2 + \frac{6}{L}((u_1 - u_2)m - (v_1 - v_2))l\right] \\ \text{Lực dọc} \quad F &= \frac{AE}{L}[(u_2 - u_1)l + (v_2 + v_1)m] \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

Cần chú ý khi các phần tử chịu tác dụng trực tiếp của tải trọng tập trung hoặc tải trọng phân bố, cần bổ sung thêm các nội lực tương ứng ở trạng thái ngàm (xem 3.2.5).

Thí dụ 3.4: Cho một dầm liên tục như trên hình (3.12). Các đặc trưng hình học thống kê trong bảng. Yêu cầu tính toán trong 2 trường hợp.

a) Chỉ xét đến ảnh hưởng của mô men uốn.

b) Xét đồng thời ảnh hưởng của mô men uốn và lực cắt.

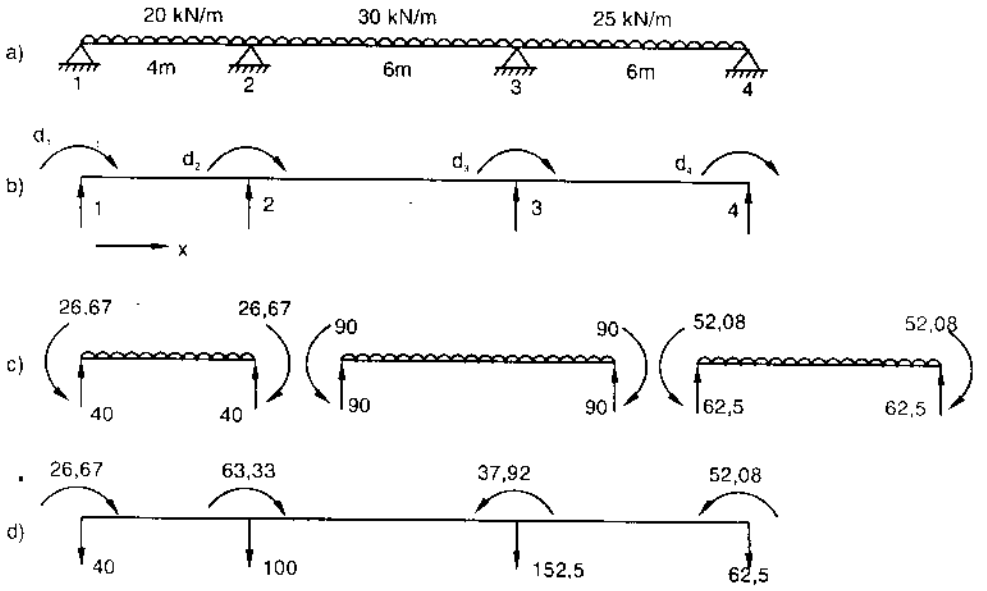
Cho $E = 210.10^6$ kN/m²; $G = 80,77.10^6$ kN/m²

Đặc trưng hình học của các phần tử

Phần tử	L	$I\times10^{-6}$	$A\times10^{-6}$	γ	β	
1 – 2	4	23,48	3230	3,93	0,056	$\beta=\frac{12EI}{GAL^2}\gamma$
2 – 3	6	55,44	4740	4,11	0,042	
3 – 4	5	34,04	3210	2,81	0,037	

Giải:

Vì dầm không có chuyển vị trên phương nằm ngang nên ta không xét đến ảnh hưởng của lực dọc. Vậy dầm có 4 bậc tự do là 4 góc xoay tại các nút (hình 3.12b). Trạng thái ngàm và trạng thái tự do biểu thị trên các hình (3.12c) và (3.12d).



Hình 3.12

1) Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau

Bậc tự do của nút

Nút	u	v	θ
1	0	0	d_1
2	0	0	d_2
3	0	0	d_3
4	0	0	d_4

Đầu 1 và 2 của các phần tử

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	
1	1	2	l = 1.0
2	2	3	m = 0
3	3	4	

2) Theo (3.22), lập ma trận độ cứng của các phần tử. Các phần tử trong ma trận có đánh dấu ★ ứng với trường hợp (b) (có xét đến ảnh hưởng của lực cắt).

Phần tử 1:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \\ \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 4,93 & 2,47 \\ 4,74^* & 2,27^* \\ 2,47 & 4,93 \\ 2,27^* & 4,74^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \\ \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ \\ \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 7,76 & 3,88 \\ 7,53^* & 3,65^* \\ 3,88 & 7,76 \\ 3,65^* & 7,53^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ \\ \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ \\ \\ F_4 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 5,72 & 2,86 \\ 5,57^* & 2,71^* \\ 2,86 & 5,72 \\ 2,71^* & 5,57^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ \\ \\ d_4 \end{bmatrix}$$

3) Theo (3.23), lập ma trận độ cứng toàn bộ K

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 4,93 & 2,47 & 0 & 0 \\ & \begin{matrix} 4,93 \\ 7,76 \\ \hline 12,69 \end{matrix} & 3,88 & 0 \\ & & \begin{matrix} 7,76 \\ 5,72 \\ \hline 13,48 \end{matrix} & 2,86 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & 5,72 \end{bmatrix} \quad \text{trường hợp (a)}$$

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 4,74 & 2,27 & 0 & 0 \\ & \begin{matrix} 4,74 \\ 7,53 \\ \hline 12,27 \end{matrix} & 3,65 & \\ & & \begin{matrix} 7,53 \\ 5,57 \\ \hline 13,10 \end{matrix} & 2,71 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & 5,57 \end{bmatrix} \quad \text{trường hợp (b)}$$

4) Tính nội lực ở trạng thái ngàm (hình 3.12c):

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M_1	M_2
1	−26,67	26,67
2	−90,0	90,0
3	−52,08	52,08

5) Tính các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do (hình 3.12d):

$$F_1 = -(-26,67) = 26,67$$
$$F_2 = -(26,67 - 90) = 63,33$$
$$F_3 = -(90 - 52,08) = -37,92$$
$$F_4 = -(52,08) = -52,08)$$

6) Thay $\Sigma F_1 = 26,67$, $\Sigma F_2 = 63,33$, $\Sigma F_3 = -37,92$, $\Sigma F_4 = -52,08$, ta có hệ thức ma trận:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,67 \\ 63,33 \\ -37,92 \\ -52,08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & K & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

7) Giải hệ phương trình trên, ta được:

$(d_1, d_2, d_3, d_4) = 10^{-3}(2,8; 5,3; -2,7; -7,8)$ radian (trường hợp (a))

$= 10^{-3}(3,0; 5,4; -2,7; -8,0)$ radian (trường hợp (b))

8) Tính các nội lực do chuyển vị gây ra theo (3.25). Chẳng hạn đối với phần tử 1, ta có: $u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = 0$; $\theta_1 = d_1$, $\theta_2 = d_2$

Trường hợp (a) $\beta = 0$, $(d_1, d_2) = 10^{-3}(2,8; 5,3)$

Trường hợp (b) $\beta = 0,056$, $(d_1, d_2) = 10^{-3}(3,0; 5,4)$

Thay các giá trị EI, L, β vào (3.25):

$M_1 = 26,67$ $M_2 = 32,83$ (trường hợp (a))

$M_1 = 26,67$ $M_2 = 32,55$ (trường hợp (b))

Các kết quả thống kê trong bảng sau:

Nội lực do chuyển vị gây ra (trạng thái tự do)

Phần tử	Trường hợp (a)		Trường hợp (b)	
	M_1	M_2	M_1	M_2
1	26,67	32,83	26,67	32,55
2	30,50	−0,37	30,78	−0,92
3	−37,55	−52,08	−37,00	−52,08

9) Tính tổng nội lực:

Tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm (hình 3.12c) + nội lực ở trạng thái tự do (hình 3.12d). Kết quả thống kê trong các bảng sau.

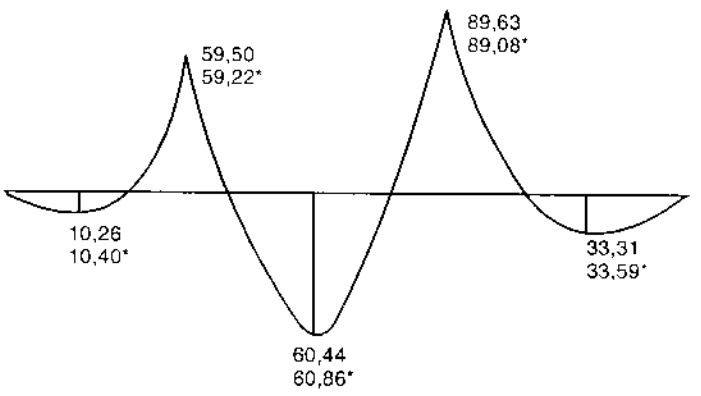
Trường hợp (a)

Phần tử	M_1	M_2
1	−26,67 + 26,67 = 0	26,67 + 32,83 = 59,50
2	−90,0 + 30,5 = −59,5	90,0 + 0,37 = 89,63
3	−52,08 − 37,55 = −89,63	52,08 − 52,08 = 0

Trường hợp (b)

Phần tử	M_1	M_2
1	−26,67 + 26,67 = 0	26,67 + 32,55 = 59,22
2	−90,0 + 30,78 = −59,22	90,0 − 0,92 = 89,08
3	−52,08 − 37,00 = −89,08	52,08 − 52,08 = 0

Biểu đồ mô men biểu thị trên hình (3.13). Qua các kết quả tính toán trong thí dụ trên, ta thấy ảnh hưởng của lực cắt không đáng kể.



Hình 3.13

Chú thích: Các số có đánh dấu "sao" ứng với trường hợp có xét đến ảnh hưởng của lực cắt.

Thí dụ 3.5:

Cho hệ khung như trên hình (3.14). Yêu cầu tính toán trong 2 trường hợp:

a) Xét đồng thời ảnh hưởng của mô men, lực cắt và lực dọc.

b) Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc.

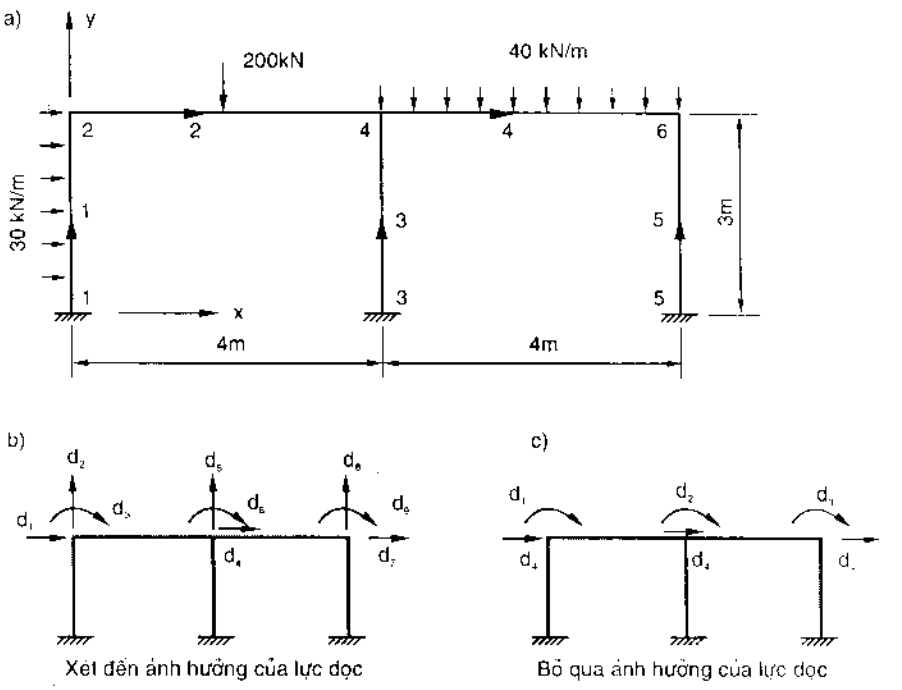
$E = 210.10^6$ kN/m^2;

$G = 80,77.10^6$ kN/m^2.

Các đặc trưng hình học thống kê trong bảng sau:

Phần tử	L	$I\times10^{-6}$	$A\times10^{-6}$	γ	β
1 – 2	3	55,44	4740	4,116	0,167
2 – 4	4	116,86	6830	4,056	0,135
3 – 4	3	28,80	3800	4,26	0,112
4 – 6	4	55,44	4740	4,116	0,094
5 – 6	3	28,80	3800	4,26	0,112

$$\beta = \frac{12EI}{GAL^2}$$



Hình 3.14

Giải:

1) Xác định bậc tự do:

Trường hợp (a): số bậc tự do n = 3.6 – 9 = 9

Trường hợp (b): vì bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc, các thành phần chuyển vị trên phương thẳng đứng tại các nút triệt tiêu, trên mức 2 – 4 – 6 chỉ có 1 thành phần chuyển vị trên phương nằm ngang, n = 3 + 1 = 4.

Bậc tự do ghi trên hình (3.14b), (3.14c) và thống kê trong các bảng sau:

Bậc tự do

Trường hợp a

Nút	u	v	θ
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_3
3	0	0	0
4	d_4	d_5	d_6
5	0	0	0
6	d_7	d_8	d_9

Trường hợp b

Nút	u	v	θ
1	0	0	0
2	d_2	0	d_1
3	0	0	0
4	d_5	0	d_2
5	0	0	0
6	d_8	0	d_3

2) Các đầu 1 và 2 và các côsin định hướng của các phần tử thống kê trong bảng sau:

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	2	0	1
2	2	4	1	0
3	3	4	0	1
4	4	6	1	0
5	5	6	0	1

3) Theo (3.22), lập các ma trận độ cứng của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 4,43 & 0 & -6,65 \\ 0 & 331,89 & 0 \\ -6,65 & 0 & 13,86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad \text{Trường hợp (a)}$$

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ \\ F_1 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 4,43 & -6,65 \\ \\ -6,65 & 13,86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ \\ d_1 \end{bmatrix} \quad \text{Trường hợp (b)}$$

Phần tử 2:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_1 \\ F_{y2} = F_2 \\ M_1 = F_3 \\ F_{x2} = F_4 \\ F_{y2} = F_5 \\ M_2 = F_6 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 358,58 & 0 & 0 & -358,58 & 0 & 0 \\ 0 & 4,05 & -8,11 & 0 & -4,05 & -8,11 \\ 0 & -8,11 & 22,85 & 0 & 8,11 & 10,08 \\ -358,58 & 0 & 0 & 358,58 & 0 & 0 \\ 0 & -4,05 & 8,11 & 0 & 4,05 & 8,11 \\ 0 & -8,11 & 10,08 & 0 & 8,11 & 22,35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \text{Trường hợp (a)}$$

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_1 \\ F_4 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 358,58 & 0 & -358,58 & 0 \\ 0 & 22,35 & 0 & 10,08 \\ -358,58 & 0 & 358,58 & 0 \\ 0 & 10,08 & 0 & 22,35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_1 \\ d_4 \\ d_2 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

Phần tử 3:

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,42 & 0 & -3,63 \\ 0 & 266,0 & 0 \\ -3,63 & 0 & 7,46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 2,42 & -3,63 \\ -3,63 & 7,46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_2 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

Phần tử 4:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_4 \\ F_{y1} = F_5 \\ M_1 = F_6 \\ F_{x2} = F_7 \\ F_{y2} = F_8 \\ M_2 = F_9 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 248,85 & 0 & 0 & -248,85 & 0 & 0 \\ 0 & 2,0 & -3,99 & 0 & -2,0 & -3,99 \\ 0 & -3,99 & 10,89 & 0 & 3,99 & 5,07 \\ -248,85 & 0 & 0 & 248,85 & 0 & 0 \\ 0 & -2,0 & 3,99 & 0 & 2,0 & 3,99 \\ 0 & -3,99 & 5,07 & 0 & 3,99 & 10,89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 248,85 & 0 & -248,85 & 0 \\ 0 & 10,89 & 0 & 5,07 \\ -248,85 & 0 & 248,85 & 0 \\ 0 & 5,07 & 0 & 10,89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_3 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

Phần tử 5:

$$\begin{bmatrix} F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 2,42 & 0 & -3,63 \\ 0 & 266,0 & 0 \\ -3,63 & 0 & 7,46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 2,42 & -3,63 \\ \\ -3,63 & 7,46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ \\ d_3 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

4) Tạo ra trạng thái ngàm và trạng thái tự do như trên hình (3.15a) và (3.15b). Nội lực ở trạng thái ngàm thống kê trong bảng sau:

Phần tử	M_1	M_2
1	−22,5	22,5
2	−100,0	100,0
3	0	0
4	−53,33	53,33
5	0	0

Các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do (hình 3.15) tính như sau:

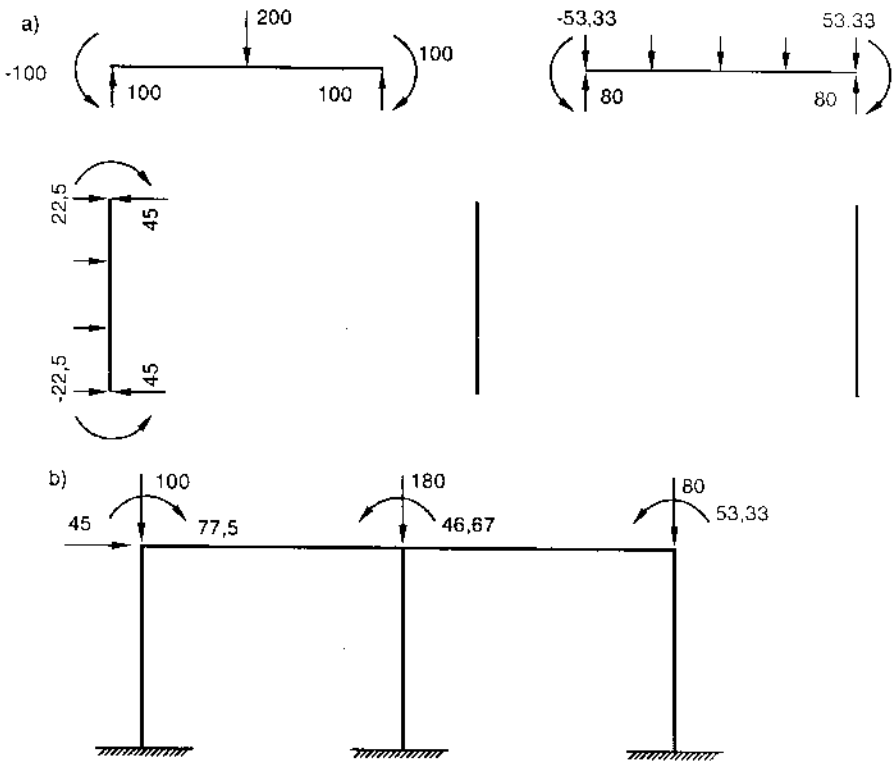
Trường hợp (a)

$F_1 = -(-45) = 45;$ $F_2 = -(100) = -100$

$F_3 = -(22,5 - 100) = 77,5;$ $F_4 = 0$

$F_5 = -(100 + 80) = -180;$ $F_6 = -(100 - 53,33) = -46,67.$

$F_7 = 0,$ $F_8 = -(80) = -80;$ $F_9 = -(53,33) = -53,33$



Hình 3.15

Trường hợp (b)

$F_1 = -(22,5 - 100) = 77,5,$ $F_2 = -(100 - 53,33) = -46,67$

$F_3 = -(53,33) = -53,33,$ $F_4 = -(-45) = 45$

5) Theo (3.23), tính tổng ΣF_i, i = 1, 2,..., 9 (trường hợp (a)) i = 1, 2, 3, 4 (trường hợp (b)). Ta được ma trận độ cứng tổng thể K như sau:

$$
K = 10^4 \begin{bmatrix}
\begin{array}{r}4,43\\358,58\\\hline 363,01\end{array} & 0 & -6,65 & -358,85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 331,80 & -8,11 & 0 & -4,05 & -8,11 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \begin{array}{r}13,86\\22,35\\\hline 36,21\end{array} & 0 & 8,11 & 10,08 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \begin{array}{r}358,58\\2,42\\248,85\\\hline 609,05\end{array} & 0 & -3,63 & -248,85 & 0 & 0 \\
 & & & & \begin{array}{r}4,05\\266,0\\2,0\\\hline 272,05\end{array} & \begin{array}{r}8,11\\3,99\\\hline 4,12\end{array} & 0 & -2,0 & -3,99 \\
 & & & & & \begin{array}{r}22,35\\7,46\\10,89\\\hline 40,70\end{array} & 0 & 3,99 & 5,07 \\
 & & & & & & \begin{array}{r}248,85\\2,42\\\hline 251,27\end{array} & 0 & -3,62 \\
\text{đối} & \text{xứng} & & & & & & \begin{array}{r}2,0\\266,0\\\hline 268,0\end{array} & 3,99 \\
 & & & & & & & & \begin{array}{r}10,89\\7,46\\\hline 18,35\end{array}
\end{bmatrix}
$$

Trường hợp (a)

$$
K^* = 10^3 \begin{bmatrix}
\begin{array}{r}13,86\\22,35\\\hline 36,21\end{array} & 10,08 & 0 & -6,65 \\
 & \begin{array}{r}22,35\\7,46\\10,89\\\hline 40,70\end{array} & 5,07 & -3.63 \\
 & & \begin{array}{r}10,89\\7,46\\\hline 18,35\end{array} & -3,63 \\
 & & & \begin{array}{r}4,43\\2,42\\2,42\\\hline 9,27\end{array} \\
\text{đối} & \text{xứng} & &
\end{bmatrix}
$$

Trường hợp (b)

6)Thay ΣF_i bằng các thành phần tải trọng tương ứng đã tính ở trên, ta được hệ thức ma trận:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ -100 \\ 77,5 \\ 0 \\ -180 \\ -46,67 \\ 0 \\ -80 \\ -53,33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{bmatrix} \quad \text{Trường hợp (a)}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77,5 \\ -46,67 \\ -53,33 \\ 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & K^* & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \quad \text{Trường hợp (b)}$$

7) Giải các hệ phương trình trên, ta được:

Trường hợp (a):

$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9) = 10^{-3}(6,6; -0,245; 3,8; 6,5; -0,783; -1,3; 6,4; -0,265; -1,4)$

Trường hợp (b): $(d_1, d_2, d_3, d_4) = 10^{-3}(3,7; -1,3; -1,3; 6,5)$

8) Theo (3.25), tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do (hình 3.15b). Kết quả thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Trường hợp (a)			Trường hợp (b)	
	M_1	M_2	F	M_1	M_2
1	−20,79	9,01	−81,48	−20,67	8,09
2	68,49	5,59	−41,08	69,41	7,65
3	−28,08	−33,37	−208,17	−28,13	−33,49
4	−18,99	−19,59	−20,62	−20,83	−20,40
5	−28,14	−33,74	−70,35	−27,88	−32,93

9) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do (vừa tính ở trên). Chú ý trong trường hợp (b), vì giả thiết biến dạng dọc trục bằng không nên không thể tính được lực dọc từ chuyển vị. Kết quả thống kê trong các bảng sau:

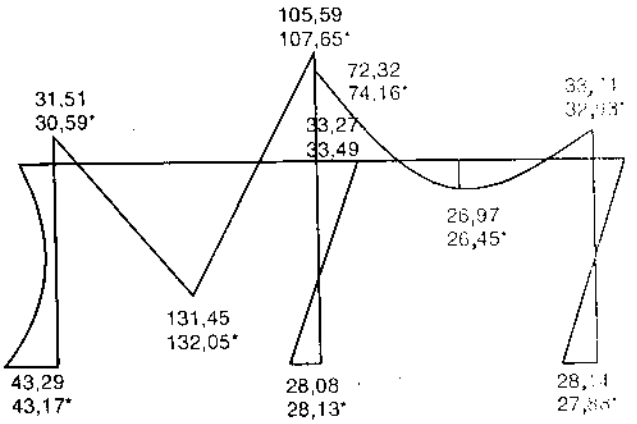
Nội lực do chuyển vị gây ra (trạng thái tự do)

Phần tử	Trường hợp (a)		Trường hợp (b)	
	M_1	M_2	M_1	M
1	26,67	32,83	26,67	32,55
2	30,50	−0,37	30,78	−0,92
3	−37,55	−52,08	−37,00	−52,08

Trường hợp (b)

Phần tử	M_1		M_2	
1	−22,5 − 20,67	= −43,17	22,5 + 8,09	= 30,59
2	−100,0 + 69,41	= −30,59	100 + 7,65	= 107,65
3	0 − 28,13	= −28,13	0 − 33,49	= −33,49
4	−53,33 − 20,83	= −74,16	53,33 − 20,4	= 32,93
5	0 − 27,88	= −27,88	0 − 32,93	= −32,93

10) Biểu đồ mô men biểu thị trên hình (3.16) trong đó các số có đánh dấu ★ ứng với trường hợp (b) (không xét đến ảnh hưởng của lực dọc). Qua các kết quả tính toán, ta thấy ảnh hưởng của lực dọc không đáng kể.



Hình 3.16

Thí dụ 3.6: Cho hệ khung như trên hình (3.17). Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc. $E = 210.10^6$ kN/m²; $G = 80,77.106$ kN/m². Các đặc trưng hình học thống kê trong bảng sau:

Đặc trưng hình học

	L	$I \times 10^{-6}$	$A \times 10^{-6}$	γ	β
1 – 2	6	240	8400	2,46	0,061
2 – 5	4	270	9400	2,85	0,160
4 – 5	3	270	9400	2,85	0,284
3 – 4	3	85	5100	3,34	0,193
6 – 7	3	270	9400	2,85	0,284
4 – 7	4	270	9400	2,85	0,160

$$\beta = \frac{12EI}{GAL^2}\gamma$$

Giải:

1) Xác định bậc tự do: Vì bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc, các thành phần chuyển vị trên phương Y tại các nút 2, 5, 4, 7 triệt tiêu, có 1 thành phần chuyển vị trên phương X ở mức 2–5, 1 thành phần chuyển vị trên phương X ở mức 4 – 7 và 5 thành phần chuyển vị xoay. Số bậc tự do n = 1 + 1 + 5 = 7. Các bậc tự do biểu thị trên hình (3.17b).

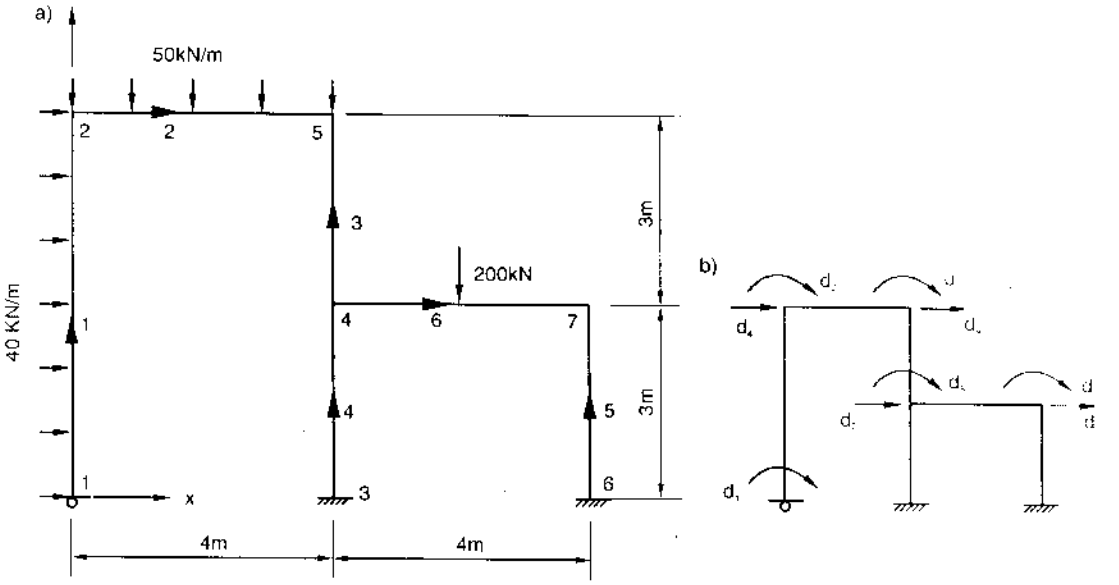
2) Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Bậc tự do

Nút	u	v	0
1	0	0	d_1
2	d_4	0	d_2
3	0	0	0
4	d_7	0	d_5
5	d_4	0	d_3
6	0	0	0
7	d_7	0	d_6

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	*l*	m
1	1	2	0	1
2	2	5	1	0
3	4	5	0	1
4	3	4	0	1
5	6	7	0	1
6	4	7	1	0



Hình 3.17

3) Theo (3.22), tính ma trận độ cứng của các phần tử:

Phần tử 1:
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_4 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 33,6 & -8,4 & 16,8 \\ -8,4 & 2,8 & -8,4 \\ 16,8 & -8,4 & 33,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_4 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:
$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 493,5 & 0 & -493,5 & 0 \\ 0 & 56,7 & 0 & 28,35 \\ -493,5 & 0 & 493,5 & 0 \\ 0 & 28,35 & 0 & 56,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:

$$\begin{bmatrix} F_7 \\ F_5 \\ F_4 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 25,2 & 37,8 & -25,2 & 37,8 \\ 37,8 & 75,6 & -37,8 & 37,8 \\ -25,2 & -37,8 & 25,2 & -37,8 \\ 37,8 & 37,8 & -37,8 & 75,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_7 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 4:

$$\begin{bmatrix} F_7 \\ F_5 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 7,93 & -11,9 \\ -11,9 & 23,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_7 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

Phần tử 5:

$$\begin{bmatrix} F_7 \\ F_6 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 25,2 & -37,8 \\ -37,8 & 75,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_7 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Phần tử 6:

$$\begin{bmatrix} F_7 \\ F_5 \\ F_7 \\ F_6 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 493,5 & 0 & -493,5 & 0 \\ 0 & 56,7 & 0 & 28,35 \\ -493,5 & 0 & 493,5 & 0 \\ 0 & 28,35 & 0 & 56,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_7 \\ d_5 \\ d_7 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

4) Tính ΣF_i theo (3.23), i = 1, 2, 3,..., 7. Ma trận độ cứng tổng thể K có dạng như sau

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 3,36 & 1,68 & 0 & -0,84 & 0 & 0 & 0 \\ & \begin{array}{r} 3,36 \\ \underline{5,67} \\ 9,03 \end{array} & 2,84 & -0,84 & 0 & 0 & 0 \\ & & \begin{array}{r} 5,67 \\ \underline{7,56} \\ 13,23 \end{array} & -3,78 & 3,78 & 0 & 3,78 \\ & & & \begin{array}{r} 0,28 \\ \underline{2,52} \\ 2,80 \end{array} & -3,78 & 0 & -2,52 \\ & & & & \begin{array}{r} 7,56 \\ 2,38 \\ \underline{5,76} \\ 15,61 \end{array} & 2,84 & \begin{array}{r} 3,78 \\ \underline{-1,19} \\ 2,59 \end{array} \\ & & & & & \begin{array}{r} 7,56 \\ \underline{5,67} \\ 13,23 \end{array} & -3,78 \\ & & & & & & \begin{array}{r} 2,52 \\ 0,79 \\ \underline{2,52} \\ 5,83 \end{array} \end{bmatrix}$$

5) Tạo ra trạng thái ngàm và trạng thái tự do như trên hình (3.18a) và (3.18b)

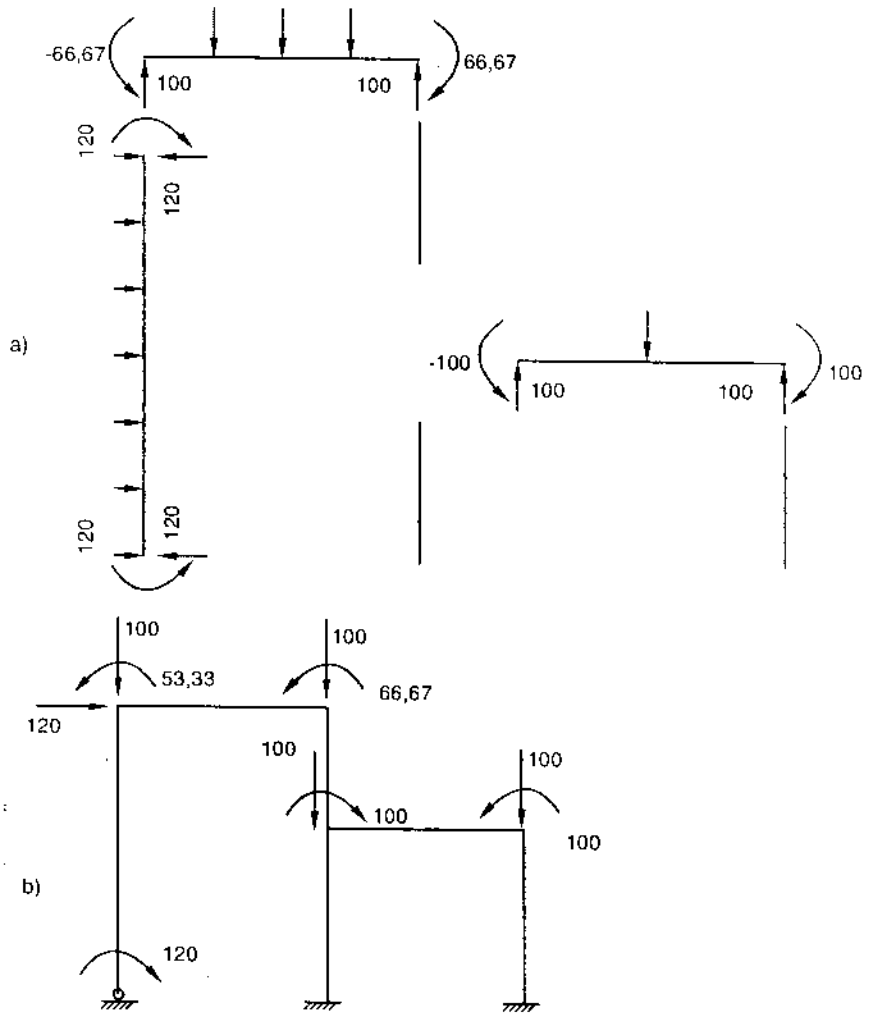
Nội lực ở trạng thái ngàm (hình 3.18a) thống kê trong bảng sau:

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M_1	M_2
1	−120,0	120,0
2	−66,67	66,67
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	−100,0	+100,0

Các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do tính như sau:

$F_1 = -(-120) = 120;$ $F_2 = -(120 - 66,67) = -53,33$



Hình 3.18

$F_3 = -(66,67) = -66,67$; $F_4 = -(-120) = 120$; $F_5 = -(-100) = 100$; $F_6 = -(100) = -100$; $F_7 = 0$

6) Thay ΣF_i bằng các thành phần tải trọng vừa tính ở trên (i = 1, 2,..., 7), ta có hệ thức ma trận:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ -53,33 \\ -66,67 \\ 120 \\ 100 \\ -100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix}$$

7) Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7) = 10^{-3}.(9,7; -1,4; 3,3; 21,6; 4,2; 0,2; 5,2)$$

8) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do (hình 3.18b). Cần chú ý rằng lực dọc không thể tính được vì bỏ qua biến dạng dọc. Áp dụng (3.25), ta được các kết quả sau:

Nội lực do chuyển vị

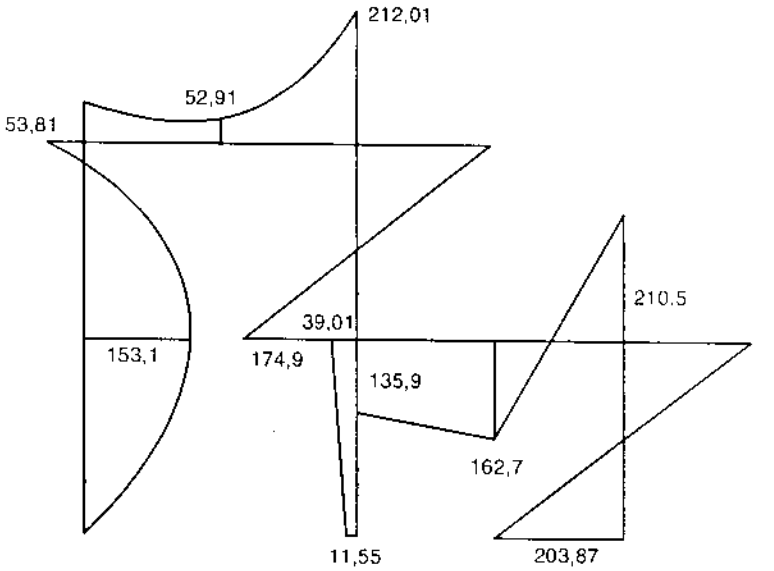
Phần tử	M_1	M_2
1	120	−66,19
2	12,86	145,34
3	−174,9	−212,0
4	−11,55	39,01
5	−203,87	−210,5
6	235,89	110,5

9) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả như sau:

Tổng nội lực

Phần tử	M_1		M_2	
1	−120,0 + 120,0	= 0	120,0 − 66,19	= 53,81
2	−66,67 + 12,86	= −53,81	66,67 + 145,34	= 212,01
3	0 − 174,9	= −174,9	0 − 212,0	= −212,0
4	0 − 11,55	= −11,55	0 + 39,01	= 39,01
5	0 − 203,87	= −203,87	0 − 210,5	= −210,5
6	−100,0 + 235,89	= 135,89	100,0 + 110,5	= 210,5

10) Căn cứ vào các kết quả trên, vẽ biểu đồ mô men (hình 3.19).



Hình 3.19

§3.3. Thuật toán lập trình tính hệ phẳng có nút cứng

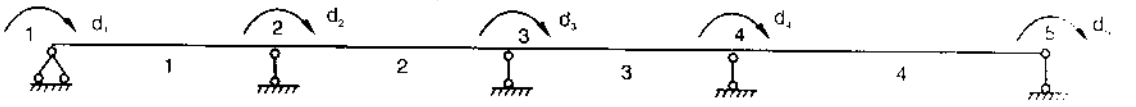
3.3.1. Thuật toán tính dầm liên tục (CT 23)

Ta chỉ nghiên cứu trường hợp không xét đến ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt.

1. Các nguyên tắc cần tuân thủ:

– Số thứ tự các nút và số thứ tự các thanh bố trí tăng dần từ trái sang phải hoặc từ phải sang trái (hình 3.20).

– Số thứ tự của bậc tự do (mô men) trùng với số thứ tự của nút (hình 3.20).



Hình 3.20

2. Nhập số liệu ban đầu:

– Số thanh

– Số nút

– Số thứ tự nút ở các đầu thanh

– Chiều dài các thanh

– Mô đun đàn hồi

– Mô men quán tính

– Số thanh chịu tải trọng phân bố đều (x)

– Số thanh chịu tải tập trung (y)

– Số thứ tự các thanh chịu tải phân bố đều (a_i)

– Cường độ tải trọng phân bố đều (q_i)

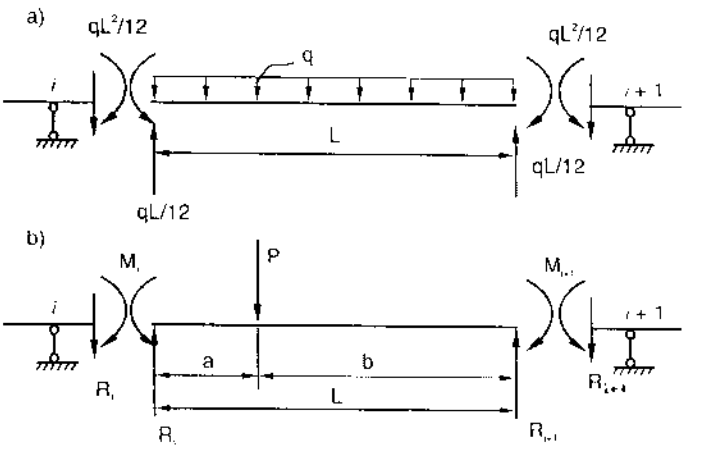
– Số thứ tự các thanh chịu tải trọng tập trung (b_i)

– Giá trị tải trọng tập trung (p_i)

– Vị trí tải trọng tập trung a_{1i} và b_{1i})

3) Xác định tải trọng tập trung tại các nút do tải trọng phân bố đều hoặc tải trọng tập trung gây ra ở trạng thái ngàm (xem thí dụ 3.4)

Tải trọng tập trung tại các nút là mô men M. Các phản lực chỉ tham gia khi tính lực cắt. Tải trọng P, g là dương khi cùng chiều với trục y.



Hình 3.21

$$M_i = -P.a.b^2 / L^2 \qquad M_{i+1} = Pa^2.b / L^2 \tag{3.26}$$

$$R_i = \frac{P.b^2}{L^3}(L + 2a); \qquad R_{i+1} = P - R_i \tag{3.27}$$

4) Tính giá trị các phần tử của ma trận độ cứng riêng. Theo công thức (3.22), ma trận độ cứng riêng có dạng:

Ứng với phần tử thứ i:

$$k_i = \begin{bmatrix} C_6 & C_7 \\ C_7 & C_6 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Để xét đến dấu của mômen, ta nhân giá trị mômen trong (3.26) với cosin định hướng l.

5) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể:

$$S_{ii} = C_6;\ S_{i,i+1} = C_7;\ S_{i+1,i+1} = C_6 \tag{3.29}$$

Các giá trị được khoanh tròn trong công thức (3.28) có tính chất tích luỹ vì tại mỗi nút có 2 thanh liên kết.

6) Giải hệ phương trình S = K.Q để được giá trị các góc xoay.

7) Tính mô men tại các đầu thanh theo công thức (3.21).

8) Tính tổng mô men: cộng giá trị mô men ở mục 7 với giá trị mô men do tải trọng phân bố đều hoặc tải trọng tập trung gây ra ở trạng thái ngàm (hình 3.21).

9) Tính lực cắt tại các đầu thanh theo công thức (3.21) (trạng thái tự do)

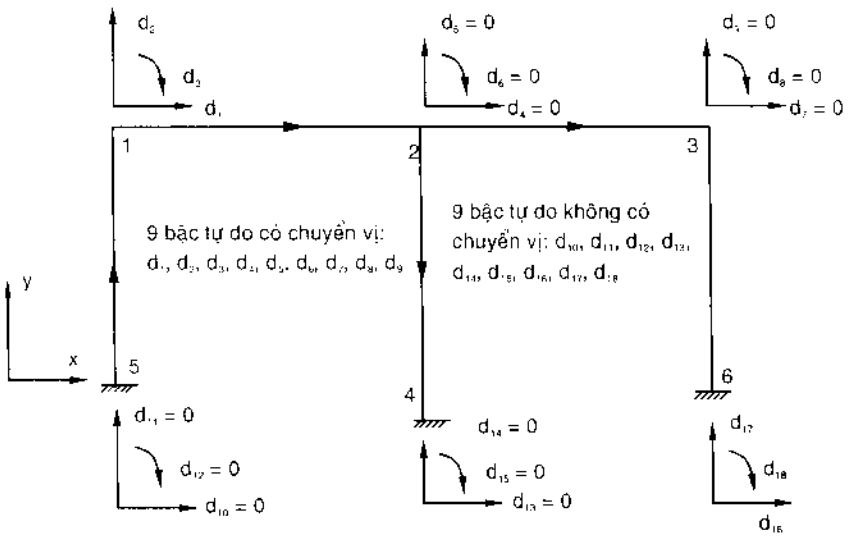
10) Tính tổng lực cắt: cộng giá trị lực cắt ở mục 9 với giá trị lực cắt ở trạng thái ngàm (hình 3.21).

3.3.2. Thuật toán tính hệ khung phẳng (CT 24)

Ta chỉ xét đến ảnh hưởng của lực dọc, không xét đến ảnh hưởng của lực cắt.

1. Các nguyên tắc cần được tuân thủ:

a) Số thứ tự các nút có thể chọn tuỳ ý nhưng số thứ tự các nút không có chuyển vị nên bố trí ở các vị trí cuối cùng để tiện cho việc phân khối ma trận nhằm tính chuyển vị và phản lực. (hình 3.22)



Hình 3.22

b) Mỗi nút có 3 bậc tự do: 2 chuyển vị thẳng (d_1, d_2) và 1 góc xoay (d_3). Số thứ tự các bậc tự do ở nút i tính như sau (xem hình 3.22):

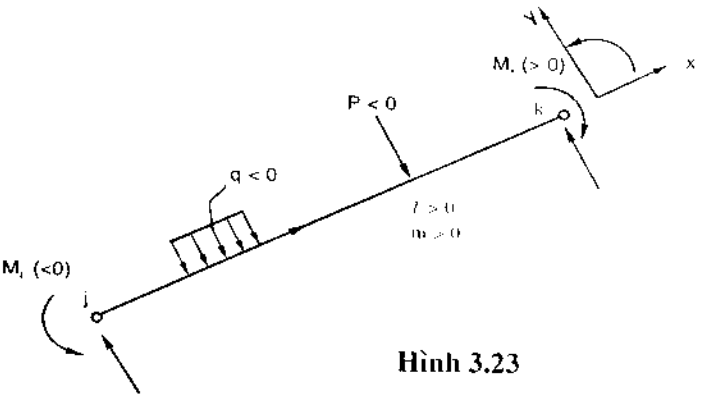
$$d_1 = 3i - 2 \quad d_2 = 3i - 1 \quad d_3 = 3i \qquad (3.30)$$

c) Dấu của chuyển vị thẳng: dương nếu cùng chiều với các trục toạ độ trong hệ toạ độ chung X, Y. Dấu của góc xoay hoặc mô men tại nút: dương khi xoay theo chiều kim đồng hồ.

d) Chiều từ nút j đến nút k trong mỗi thanh có thể chọn tuỳ ý nhưng sau khi đã chọn thì phải nhất quán trong quá trình tính toán.

c) Trong trường hợp thanh chịu tải trọng phân bố hoặc tải trọng tập trung, dấu của tải trọng quy ước như sau:

Gọi: x là trục toạ độ có chiều dương trùng với chiều của thanh; y là trục toạ độ có được bằng cách xoay quanh trục x một góc 90° ngược chiều kim đồng hồ (xem hình 3.23).



Hình 3.23

Cường độ của tải trọng phân bố q hoặc tải trọng tập trung P quy ước là dương khi cùng chiều với trục y (xem hình 3.23), quy ước là âm trong trường hợp ngược lại.

Mô men tại đầu thanh quy ước là dương khi quay theo chiều kim đồng hồ, quy ước là âm khi quay ngược chiều kim đồng hồ.

2) Nhập số liệu:

– Số thanh (ST)

– Số nút (SN)

– Số bậc tự do có chuyển vị (SBT)

– Tổng số bậc tự do (tbt)

– Các bậc tự do triệt tiêu

– Số thứ tự bậc tự do ở các đầu thanh (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)

– Chiều dài các thanh (cd_i)

– Các côsin định hướng (l_i, m)

– Mô men đàn hồi (E)

– Mô men quán tính (mq)

– Số thanh chịu tải trọng phân bố đều (x)

– Số thanh chịu tải trọng tập trung (y)

– Số thanh không chịu tải trập trung (w)

– Số thứ tự các thanh chịu tải trọng phân bố đều (a_i)

– Số thứ tự các thanh chịu tải trọng tập trung (b_i)

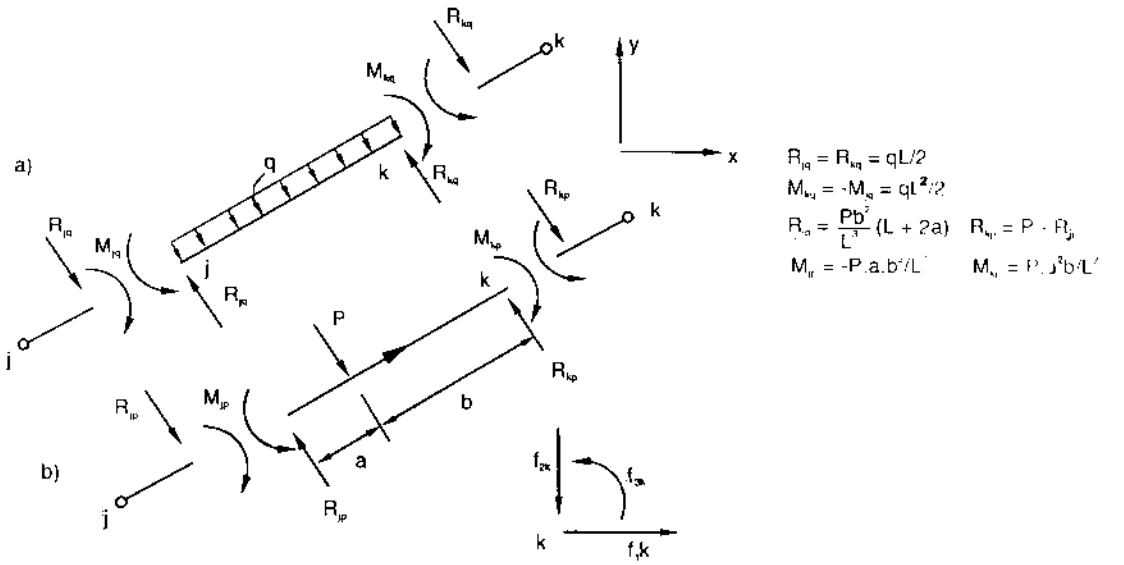
– Số thứ tự cá thanh không chịu tải trọng (c_i)

– Cường độ tải trọng phân bố đều (q_i)

– Giá trị tải trọng tập trung (P_i)

– Vị trí tải trọng tập trung (a và b)

3) Xác định các tải trọng tập trung tại các nút do tải trọng phân bố đều hoặc tải trọng tập trung gây ra ở trạng thái ngàm (hình 3.24).



Hình 3.24

Tải trọng tập trung tại các nút (chẳng hạn nút k) là f_{1k} (nằm ngang), f_{2k} (thẳng đứng) và mô men f_{3k} (xem hình 3.24). Các giá trị tải trọng này có tính chất tích luỹ vì tại mỗi nút, có nhiều thanh quy tụ.

4) Tính giá trị các phần tử của ma trận độ cứng riêng theo công thức (3.22).

5) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể

Các phần tử trong ma trận độ cứng riêng có các chỉ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 (6 bậc tự do) nhưng rong ma trận độ cứng tổng thể, chúng có các chỉ số d_{1i}, d_{2i}, d_{3i}, d_{4i}, d_{5i}, d_{6i}. Giá trị các phần tử C_1, C_2, C_4, C_3, $-C_5$, C_6 (góc trái trên của ma trận) và C_1, C_2, $-C_4$, C_3, C_5, C_6 (góc phải dưới của ma trận) có tính chất tích luỹ vì tại mỗi nút, có nhiều thanh quy tụ.

6) Chia khối ma trận tổng thể để tính chuyển vị và phản lực

7) Giải hệ phương trình F = K.Q để được giá trị các chuyển vị. F là véc tơ gồm các thành phần ngoại lực (nếu có) cộng với các tải trọng tập trung đã tính ở mục 3.

8) Tính mô men tại các đầu thanh theo công thức (3.21) ở trạng thái tự do.

9) Tính tổng mô men bằng mô men ở mục 8 cộng với mô men ở trạng thái ngàm (xem hình 3.24).

10) Tính lực cắt tại các đầu thanh theo công thức (3.21) ở trạng thái tự do.

11) Tính tổng lực cắt bằng lực cắt ở mục 10 cộng với lực cắt ở trạng thái ngàm (xem hình 3.24).

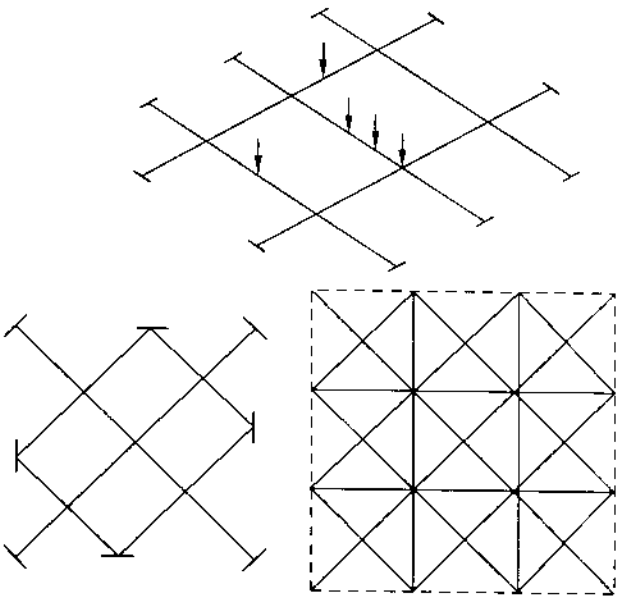
12) Tính phản lực tại các nút không có chuyển vị.

Chương bốn
HỆ DẦM GIAO NHAU

Hệ dầm giao nhau là hệ trong đó các dầm trực giao hoặc không trực giao cùng nằm trong một mặt phẳng, còn tải trọng thì vuông góc với mặt phẳng đó (hình 4.1). Khác với hệ phẳng có nút cứng, sự làm việc của hệ dầm giao nhau có tính chất không gian.

Hệ dầm giao nhau thường thấy trong sàn nhà, mái nhà, sàn cầu.

Mỗi phần tử của hệ dầm giao nhau có các thành phần nội lực: mô men uốn, lực cắt và mô men xoắn. Bậc tự do gồm có góc xoay, góc xoắn và chuyển vị trên phương vuông góc với mặt phẳng của dầm.



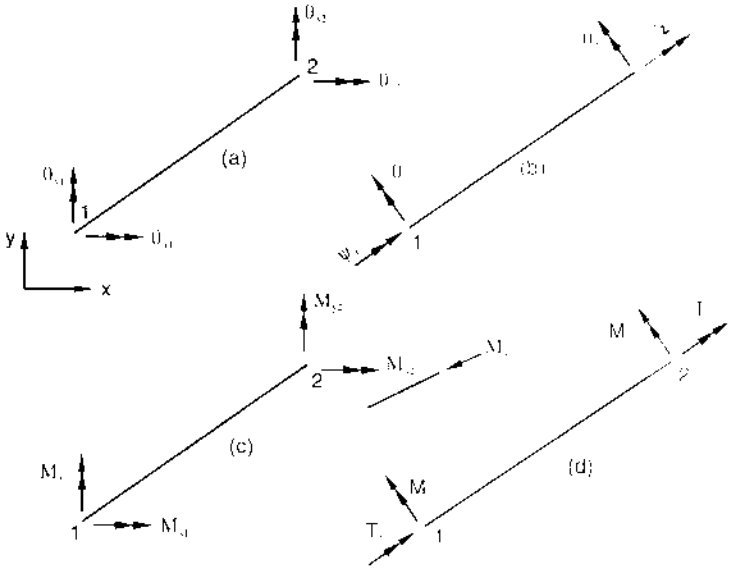
Hình 4.1

Cách tính hệ dầm giao nhau tương tự như cách tính hệ phẳng có nút cứng. Trước hết, ta thành lập hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của mỗi phần tử, sau đó xuất phát từ điều kiện cân bằng của từng nút để thành lập hệ thức ma trận giữa vectơ tải trọng và vectơ chuyển vị của các nút.

§4.1. Hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của phần tử, ma trận độ cứng của phần tử

Giả sử một phần tử bất kỳ có 2 đầu 1 và 2 liên kết với 2 nút nào đo của hệ (hình 4.2). Ta chọn hệ toạ độ chung X, Y, Z trong đó các trục X và Y nằm trong mặt phẳng của hệ dầm, trục Z vuông góc với mặt phẳng của dầm. Trong hệ toạ độ riêng (hình 4.2b và 4.2d), ta có các thành phần nội lực:

M_1, M_2 – mô men uốn tại đầu 1 và đầu 2; T_1, T_2 – mô men xoắn tại đầu 1 và đầu 2; F_{z1}, F_{z2} – lực cắt tại đầu 1 và đầu 2 trên phương của trục Z (không biểu thị trên hình vẽ). Các thành phần chuyển vị tương ứng là: θ_1, θ_2 – góc xoay tại đầu 1 và đầu 2; ψ_1, ψ_2 – góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2; W_1, W_2 – thành phần chuyển vị tại đầu 1 và đầu 2 trên phương trục Z (không biểu thị trên hình vẽ).



Hình 4.2

Trong hệ toạ độ chung (hình 4.2a và 4.2.c), ta có các thành phần nội lực:

M_{x1}, M_{x2} – mô men quanh trục X tại đầu 1 và đầu 2; M_{y1}, M_{y2} – mô men quanh trục Y tại đầu 1 và đầu 2; F_{z1}, F_{z2} như trên. Các thành phần chuyển vị tương ứng là: θ_{x1}, θ_{x2} – góc xoay quanh trục X tại đầu 1 và đầu 2; θ_{y1}, θ_{y2} – góc xoay quanh trục Y tại đầu 1 và đầu 2; W_1, W_2 như trên.

Theo (3.21) trong chương ba ta đã suy ra hệ thức ma trận :

$$\begin{bmatrix} F_{z1} \\ M_1 \\ F_{z2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L(1+\beta)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & 4+\beta & \frac{6}{L} & 2-\beta \\ & & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & & & 4+\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

Trong đó: $\beta = \frac{12EI\gamma}{G.A.L^2}$, β là hệ số xét đến ảnh hưởng của lực cắt.

Đối với hệ dầm giao nhau, ta có thêm các mô men xoắn :

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= G.J\,(\psi_2 - \psi_1)/L \\ T_1 &= -T_2 \text{ (điều kiện cân bằng)} \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

G– mô đun trượt; J – mô men quán tính xoắn. Bây giờ ta tìm cách đưa các thành phần nội lực và các thành phần chuyển vị về hệ toạ độ chung X, Y, Z. Từ hình (4.2), ta có các hệ thức:

$$\left.\begin{array}{ll} \psi_1 = \theta_{x1}.l + \theta_{y1}m & \psi_2 = \theta_{x2}.l + \theta_{y2}m \\ \theta_1 = -\theta_{x1}.m + \theta_{y1}.l & \theta_2 = -\theta_{x2}.m + \theta_{y2}.l \end{array}\right\} \qquad (a)$$

l, m – côsin định hướng của phần tử 1–2

$$\left.\begin{array}{ll} M_{x1} = T_1.l - M_1.m & M_{x2} = T_2.l - M_2.m \\ M_{y1} = T_1.m - M_1.l & M_{y2} = T_2.m - M_2.l \end{array}\right\} \qquad (b)$$

Căn cứ vào (4.1), (4.2, trong trường hợp bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, ta suy ra hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của phần tử trong hệ toạ độ chung như sau:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \end{bmatrix}}_{S_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & -C_3 & -C_1 & C_2 & -C_3 \\ & C_4 & -C_5 & -C_2 & C_6 & -C_7 \\ & & C_8 & C_3 & -C_7 & C_9 \\ & & & C_1 & -C_2 & C_3 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & & C_4 & -C_5 \\ & & & & & C_8 \end{bmatrix}}_{k_i} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix}}_{u_i} \qquad (4.3)$$

$$\left.\begin{array}{lll} C_1 = \dfrac{12EI}{L^3(1+\beta)} \quad C_2 = \dfrac{6EI}{L^2(1+\beta)}.m & C_3 = \dfrac{6EI}{L^3(1+\beta)}.l & C_4 = \dfrac{(4+\beta)EI}{L(1+\beta)}m^2 + \dfrac{GJ}{L}l^2 \\ C_5 = \left(\dfrac{(4+\beta)EI}{L(1+\beta)} - \dfrac{GJ}{L}\right)lm & C_6 = \dfrac{(2-\beta)EI}{L(1+\beta)}.m^2 - \dfrac{GJ}{L}l^2 & C_7 = \left(\dfrac{(2-\beta)EI}{L(1+\beta)} + \dfrac{GJ}{L}\right)lm \\ C_8 = \dfrac{(4+\beta)EI}{L(1+\beta)}l^2 + \dfrac{GJ}{L}.m^2 & C_9 = \dfrac{(2-\beta)EI}{L(1+\beta)}l^2 - \dfrac{GJ}{L}.m^2 & \end{array}\right\} \qquad (4.4)$$

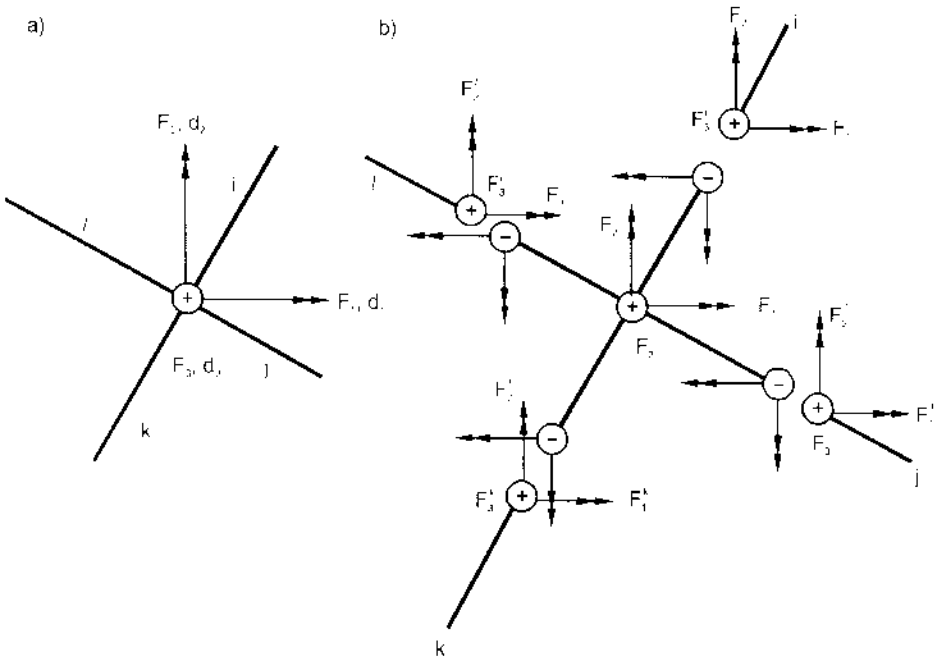
Ta gọi k_i là ma trận độ cứng riêng của phần tử i; $\beta = \dfrac{12EI\gamma}{G.A.L^2}$; $\beta = 0$ khi không xét đến ảnh hưởng của lực dọc

§4.2. Hệ thức ma trận giữa vectơ tải trọng và vectơ chuyển vị của các nút

Gọi F là vectơ tải trọng, D là vectơ chuyển vị của các nút, K là ma trận độ cứng tổng thể của hệ dầm giao nhau. Ta có hệ thức ma trận sau:

$$F = K.D \tag{4.5}$$

Vectơ tải trọng gồm các thành phần tải trọng trên phương trục Z, các thành phần mô men quanh trục X, các thành phần mô men quanh trục Y. Vectơ D gồm các thành phần chuyển vị trên phương trục Z, các góc xoay quanh trục X, các góc xoay quanh trục Y. Các mô men và các góc xoay được biểu thị bằng các đoạn thẳng có 2 mũi tên (xem hình 4.2), chiều của mô men và chiều của góc xoay là chiều xoay của nút chai, di động theo chiều mũi tên. Các mô men và các góc xoay quy ước là dương khi chiều của các mũi tên trùng với chiều dương của các trục X và Y. Trong trường hợp ngược lại, mô men xoay và góc xoay quy ước là âm.



Hình 4.3

Để thành lập hệ thức (4.5), ta xuất phát từ điều kiện cân bằng của từng nút của hệ.

Giả sử tại một nút bất kỳ của hệ, có 4 phần tử i, j, k, *l* giao nhau như trên hình (4.3a). Tại nút, có 3 bậc tự do d_1, d_2, d_3, các thành phần tải trọng tương ứng là F_1, F_2, F_3. Ta cắt các phần tử ở lân cận nút đang xét như trên hình (4.3b). Các thành phần nội lực cùng phương với bậc tự do d_i đều được kí hiệu là F_i. Các chỉ số i, j, k, *l* ứng với các phần tử i, j, k, *l*. Bậc tự do d_3 và các thành phần nội lực F_3 có phương vuông góc với mặt phẳng của dầm được biểu thị bằng các khoanh tròn, dấu (+) biểu thị chiều dương (trùng với chiều dương của trục Z), dấu (−) biểu thị chiều âm. Từ điều kiện cân bằng của nút, ta có:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= F_1^i + F_1^j + F_1^k + F_1^l \\ F_2 &= F_2^i + F_2^j + F_2^k + F_2^l \\ F_3 &= F_3^i + F_3^j + F_3^k + F_3^l \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

Các số hạng ở vế phải của các phương trình trên là những hàm tuyến tính của các bậc tự do d_1, d_2, d_3,... Chẳng hạn, phương trình đầu tiên có thể viết như sau:

$F_1^i = a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 + ...$

$F_1^j = b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 + ...$

$F_1^k = c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 + ...$

$F_1^l = e_1d_1 + e_2d_2 + e_3d_3 + ...$ do đó

$F_1 = F_1^i + F_1^j + F_1^k + F_1^l = (a_1 + b_1 + c_1 + e_1)d_1 + (a_2 + b_2 + c_2 + e_2)d_2 + (a_3 + b_3 + c_3 + e_3)d_3 + ...$

Trong đó: F_1 – phần tử của vectơ tải trọng ứng với bậc tự do d_1.a, b, c, e là các phần tử lần lượt ứng với các ma trận độ cứng của các phần tử i, j, k, *l*.

Nếu so sánh 2 vế của (4.6), ta thấy phần tử của ma trận K cùng hàng với F_i và

ứng với d_1	là	$(a_1 + b_1 + c_1 + e_1)$
ứng với d_2	là	$(a_2 + b_2 + c_2 + e_2)$
ứng với d_3	là	$(a_3 + b_3 + c_3 + e_3)$

Đối với các phương trình còn lại của (4.6), ta cũng làm tương tự. Vậy bằng cách tính tổng ΣF_i của các thành phần nội lực cùng phương với bậc tự do d_i tại mỗi nút, i = 1, 2...., n (n là số bậc tự do), ta có thể suy ra ma trận độ cứng toàn bộ K.

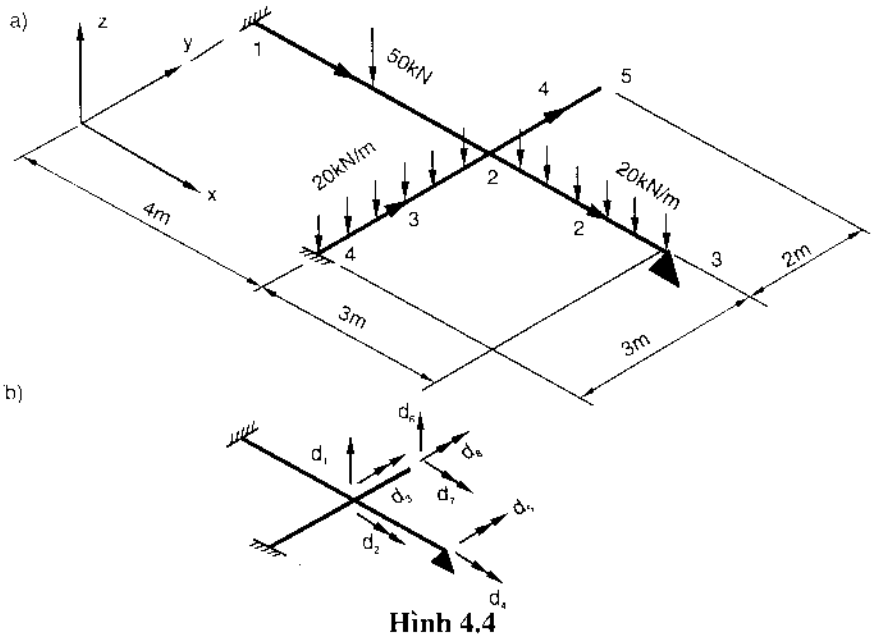
§4.3. Trình tự tính toán hệ dầm giao nhau

Lấy thí dụ hệ trên hình (4.4). Ta tiến hành tính toán theo các bước sau:

1) Chọn hệ trục toạ độ X, Y, Z trong đó các trục X, Y nằm trong mặt phẳng của hệ dầm, trục Z vuông góc với mặt phẳng của dầm. Thống kê toạ độ của các nút như trong bảng sau:

Toạ độ các nút

Nút	x	y
1	0	3
2	4	3
3	7	3
4	4	0
5	4	5



Hình 4.4

2) Xác định bậc tự do của hệ. Như trên đã trình bày, mỗi nút có 3 bậc tự do (2 góc) xoay và 1 thành phần chuyển vị trên phương trục Z). Vậy số bậc tự do

n = 3 × số nút – số bậc tự do triệt tiêu ở các gối tựa.

Đối với hệ trên hình (4.4a): n = 3.5 – (6+1) = 8. Các bậc tự do biểu thị trên hình (4.4.b) và thống kê trong bảng sau

Bậc tự do

Nút	w	θ_x	θ_y
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_3
3	0	d_4	d_5
4	0	0	0
5	d_6	d_7	d_8

3) Xác định vị trí các đầu 1 và 2 của các phần tử. Dùng số thứ tự của các nút để biểu thị vị trí của các đầu 1 và 2 đồng thời tính các côsin định hướng của các phần tử. Đối với hệ trên hình (4.4), ta thống kê các số liệu trong bảng sau:

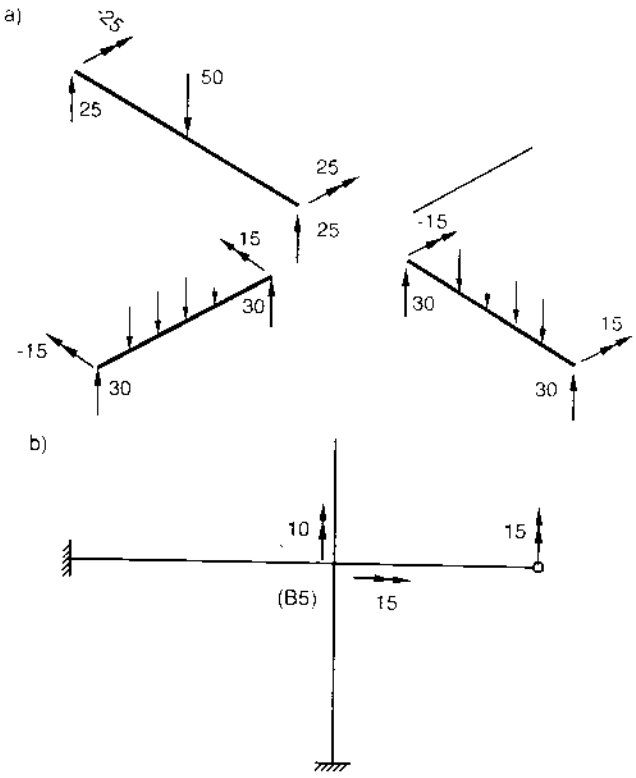
Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	*l*	m
1	1	2	1	0
2	2	3	1	0
3	4	2	0	1
4	2	5	0	1

4) Theo (4.5) và (4.6), thành lập ma trận độ cứng của các phần tử. Dùng ký hiệu F_i để biểu thị các thành phần nội lực cùng phương với bậc tự do d_i (i = 1, 2,...,n).

5) Tính tổng ΣF_i theo (4.6), i = 1, 2, ..., n để thành lập ma trận độ cứng tổng thể K.

6) Khi các phần tử chịu tác dụng trực tiếp của các tải trọng tập trung hoặc tải trọng phân bố, cần tạo ra trạng thái ngàm và trạng thái tự do như trong §3.2.5. Chẳng hạn đối với hệ trên hình (4.4), ta có trạng thái ngàm như trên hình (4.5a). Cần chú ý trong các bảng tính sẵn, người ta chỉ cho biểu thức của các nội lực ở trạng thái ngàm trong hệ toạ độ riêng. Để đưa các nội lực này về hệ toạ độ chung, ta áp dụng các công thức:



Hình 4.5

$$M_{x1} = T_1.l - M_1.m; \qquad M_{y1} = T_1 m + M_1.l$$
$$M_{x2} = T_2.l - M_2.m; \qquad M_{y2} = T_2 m + M_2.l$$

T_1, T_2 – mô men xoắn tại đầu 1 và đầu 2; M_1, M_2 – mô men uốn tại đầu 1 và đầu 2.

Vì các nút bị chốt nên sản sinh ra phản lực tại các nút như trên hình (4.5b) trong đó số nằm trong dấu ngoặc là phản lực trên phương trục Z.

Cần tạo ra trạng thái tự do bằng cách giữ nguyên giá trị tuyệt đối của các phản lực trên hình (4.5b) nhưng đổi chiều của các phản lực. Như vậy, từ hình (4.5b), ta suy ra các thành phần tải trọng tác dụng lên hệ ở trạng thái tự do như sau:

$$F_1 = -(85) = -85;\ F_2 = (-15) = -15;\ F_3 = -(10) = -10;$$
$$F_4 = 0\ ;\ F_5 = -(15) = -15;\ F_6 = F_7 = F_8 = 0$$

7) Thay ΣF_i (i = 1, 2, ..., n) bằng thành phần tải trọng tương ứng F_i, ta được hệ thức ma trận:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix}}_{F} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{bmatrix}}_{D}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị của vectơ chuyển vị (d_1, d_2, ..., d_n).

8) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do, áp dụng các công thức:

$$\left.\begin{aligned}
&M_1 = \frac{EI}{L(1+\beta)}\left[(4+\beta)\theta_1 + (2-\beta)\theta_2 - \frac{6}{L}(W_2 - W_1)\right]\\
&M_2 = \frac{EI}{L(1+\beta)}\left[(2-\beta)\theta_1 + (4+\beta)\theta_2 - \frac{6}{L}(W_2 - W_1)\right]\\
&T_1 = -T_2 = \frac{GJ}{L}(\Phi_2 - \Phi_1).\text{Trong đó}\\
&\theta_1 = -\theta_{x1}.m + \theta_{y1}.l; \qquad \theta_2 = -\theta_{x2}.m + \theta_{y2}.l\\
&\psi_1 = \theta_{x1}.l + \theta_{y1}.m; \qquad \psi_2 = \theta_{x2}.l + \theta_2.m
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

9) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do.

Thí dụ 4.1: Cho một hệ như trên hình 4.6.

$E = 14.106$ kN/m²;

$G = 6,36.106$ kN/m²;

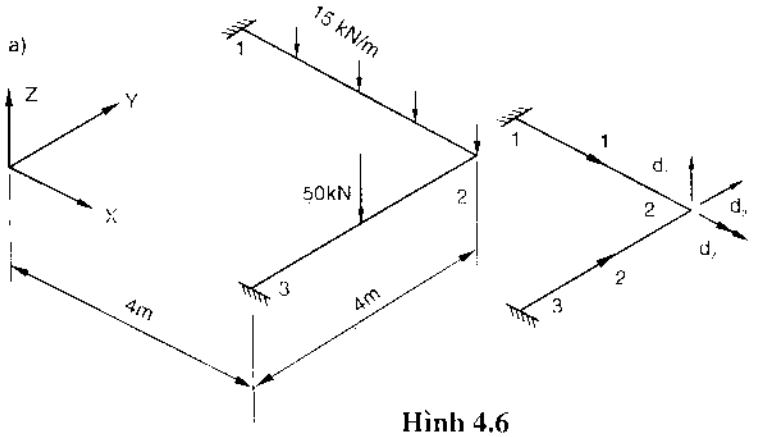
$I = 2500.10^{-6}$m⁴

$K = 1921/10^{-6}$m⁴;

$L = 4$m;

$A = 125000.10^{-6}$m²;

$\gamma = 1.2$; $\beta = 0,041$.



Hình 4.6

Yêu cầu tính toán trong 2 trường hợp:

a) Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt

b) Xét đến ảnh hưởng của lực cắt

Giải.

1) Xác định bậc tự do của hệ. Số bậc tự do n = 3.3 – 6 = 3. Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Toạ độ nút

Nút	x	y
1	0	4
2	4	4
3	4	0

Bậc tự do

Nút	w	θ_x	θ_y
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_3
3	0	0	0

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	2	1	0
2	3	2	0	1

2) Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (4.3). Các số có đánh dấu "*" ứng với trường hợp (b) (có xét đến ảnh hưởng của lực cắt).

Phần tử 1:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \\ F_2 \\ \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 6,83 & -13,65 & 13,65 \\ 6,56* & -13,11* & 13,11* \\ -13,65 & 2,895 & 0 \\ -13,11* & 2,895* & 0* \\ 13,65 & 0 & 2,895 \\ 13,11* & 0 & 2,895* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \\ d_2 \\ \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \\ F_2 \\ \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 6,83 & 0 & 0 \\ 6,56* & 0* & 0* \\ 0 & 36,40 & 0 \\ 0* & 35,33* & 0* \\ 0 & 0 & 36,40 \\ 0* & 0* & 35,33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \\ d_2 \\ \\ d_3 \end{bmatrix}$$

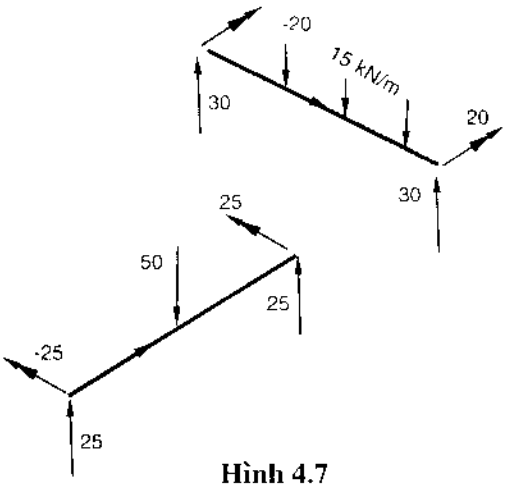
3) Tính ΣF_i theo (4.6), i = 1, 2, 3 và thành lập ma trận độ cứng toàn bộ K.

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 6,83 \\ \underline{6,83} \\ 13,66 \end{array} & -13,65 & 13,65 \\ & \begin{array}{r} 2,895 \\ \underline{36,40} \\ 39,295 \end{array} & 0 \\ \text{đối xứng} & & \begin{array}{r} 2,895 \\ \underline{36,40} \\ 39,295 \end{array} \end{bmatrix} \text{trường hợp (a)}$$

$$K^* = 10^3 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 6,56 \\ \underline{6,56} \\ 13,12 \end{array} & -13,11 & 13,11 \\ & \begin{array}{r} 2,895 \\ \underline{35,33} \\ 38,225 \end{array} & 0 \\ \text{đối xứng} & & \begin{array}{r} 2,895 \\ \underline{35,33} \\ 38,225 \end{array} \end{bmatrix} \text{trường hợp (b)}$$

4) Tạo ra trạng thái ngàm (hình 4.7) và trạng thái tự do. Các thành phần tải trọng tác dụng tại các nút ở trạng thái tự do như sau:

$$F_1 = -(30 + 25) = -55,$$
$$F_2 = -(25) = -25$$
$$F_3 = -(20) = -20$$



Hình 4.7

Nội lực ở trạng thái ngàm thống kê trong bảng sau

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M_1	M_2
1	−20	20
1	−25	25

5) Thay ΣF_i bằng F_i, i = 1, 2, 3, ta có hệ thức ma trận

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55 \\ -25 \\ -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

Trường hợp (a) $(d_1, d_2, d_3) = 10^{-3}(-9{,}4482, -2{,}6458, 2{,}7731)$.

Trường hợp (b) $(d_1, d_2, d_3) = 10^{-3}(-9{,}6135, -2{,}6441, 2{,}7749)$.

6) Xác định nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (4.7). Kết quả thống kê trong bảng sau:

Nội lực do chuyển vị (trạng thái tự do)

Phần tử	Trường hợp (a)			Trường hợp (b)		
	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	−78,49	−28,03	−7,66	−78,54	−28,03	−7,66
2	−80,81	32,66	8,03	−80,78	−32,65	8,03

7) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

Tổng nội lực

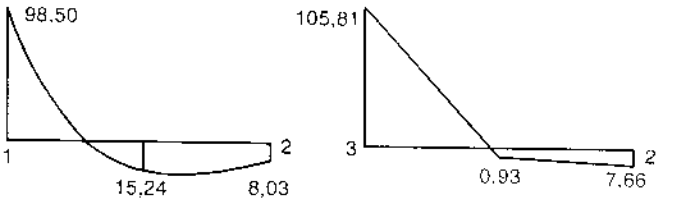
	Phần tử	M_1	M_2	$T_2=-T_1$
Trường hợp (a)	1	−20−78,49=−98,49	20−28,03 = −8,03	− 7,66
	2	−25−80,81 = −105,81	25 − 32,66 =−7,66	−8,03

Trường hợp (b)

Phần tử	M_1	M_2	$T_2=-T_1$
1	−20−78,54 = −98,54	20−28,03 = −8,03	− 7,66
2	−25 − 80,78 = −105,78	25−32,65 = −7,65	8,03

8) Vẽ biểu đồ mô men (hình 4.8)

Cần chú ý là tại nút 2, các mô men không cân bằng nhau vì 2 phần tử trực giao với nhau. Qua thí dụ trên, ta thấy rằng ảnh hưởng của lực cắt không đáng kể.



Hình 4.8

Thí dụ 4.2: Cho một hệ như trên hình (4.9). E = 14.10⁶kN/m², G = 6,36.10⁶kN/m². Các đặc trưng hình học thống kê trong bảng sau:

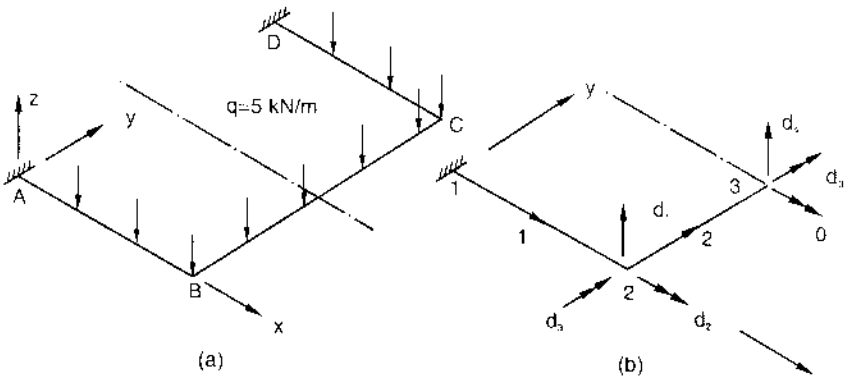
Đặc trưng hình học (đơn vị bằng mét)

Phần tử	I.	$I\times10^6$	$J\times10^6$	$A\times10^6$	γ	β
A – B D – C	2	66,67	46,67	20000	1,2	0,026
B – C	3	27,31	19,12	12800	1,2	0,0075

Yêu cầu tính toán trong hai trường hợp:

a) Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

b) Xét ảnh hưởng của lực cắt.



Hình 4.9

Giải

Vì hệ đối xứng và tải trọng cũng đối xứng nên sơ đồ tính đưa về nửa hệ như trên hình (4.9b).

1) Xác định bậc tự do. Vì nút 3 nằm trên trục đối xứng nên góc xoay θ_x quanh trục x triệt tiêu. Mặt khác, góc xoắn của dầm BC tại điểm B và điểm C bằng nhau nên góc xoắn tại nút 2 bằng góc xoắn tại nút 3. Vậy số bậc tự do n = 3 + 1 = 4. Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Toạ độ nút

Nút	x	y
1	0	0
2	2	0
3	2	1,5

Bậc tự do

Nút	w	θ_x	θ_y
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_3
3	d_4	0	d_5

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	2	1	0
2	2	3	0	1

2) Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (4.4) và (4.5). Các số có đánh dấu (sao) ứng với trường hợp (b) (có xét đến ảnh hưởng của lực cắt).

Phần tử 1:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 1,40 & 0 & 1,40 \\ 1,37* & 0 & 1,37* \\ 0 & 0,149 & 0 \\ 1,40 & 0 & 1,87 \\ 1,37* & 0 & 1,83* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 1,36 & 1,02 & 0 & -1,36 & 0 \\ 1,32* & 0,99* & & -1,32* & \\ 1,02 & 1,02 & 0 & -1,02 & 0 \\ 0,99* & 1,00* & & -0,99* & \\ 0 & 0 & 0,08 & 0 & -0,08 \\ -1,36 & -1,02 & 0 & 1,36 & 0 \\ -1,32* & -0,99* & & 1,32* & \\ 0 & 0 & -0,08 & 0 & 0,08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

3) Tính ΣF_i, i = 1, 2, 3 theo (4.6) và thành lập ma trận độ cứng toàn bộ K.

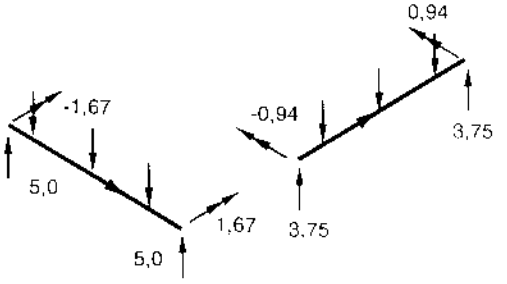
$$K = 10^3 \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1,40 \\ 1,36 \\ \hline 2,76 \end{matrix} & 1,02 & 1,40 & -1,36 \\ & \begin{matrix} 0,15 + 0,08 \\ 1,02 - 0,08 \\ + 0,08 \\ - 0,08 \\ \hline 1,17 \end{matrix} & 0 & -1,02 \\ & & 1,87 & 0 \\ \text{đối xứng} & & & 1,36 \end{bmatrix} \quad \text{trường hợp (a)}$$

$$K^* = 10^3 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 1,37 \\ \underline{1,32} \\ 2,69 \end{array} & 0,99 & 1,87 & -1,32 \\ & \begin{array}{r} 0,15 + 0,08 \\ 1,00 - 0,08 \\ + 0,08 \\ \underline{- 0,08} \\ 1,15 \end{array} & 0 & -0,99 \\ & & 1,83 & 0 \\ \text{đối xứng} & & & 1,32 \end{bmatrix} \quad \text{trường hợp (b)}$$

4) Tạo ra trạng thái ngàm như trên hình (4.10). Nội lực ở trạng thái ngàm thống kê trong bảng sau:

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M_1	M_2
1	−1,67	1,67
2	−0,94	0,94



Hình 4.10

Các thành phần tải trọng tác dụng tại các nút ở trạng thái tự do tính như sau:

$$F_1 = -(5 + 3,75) = -8,75; \qquad F_2 = -(-0,94) = 0,94$$

$$F_3 = -(1,667) = -1,667; \qquad F_4 = -(3,75) = -3,75$$

5) Thay ΣF_i bằng F_i, i = 1, 2, 3. Ta có hệ thức ma trận

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,75 \\ 0,94 \\ -1,67 \\ -3,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & K & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = 10^{-3}(-32,14; -9,30; 23,21, -41,87) \quad \text{trường hợp (a)}$$

$$= 10^{-3}(-32,37; -9,30; 23,31, -42,10) \quad \text{trường hợp (b)}$$

6) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (4.7). Kết quả thống kê trong bảng sau

Nội lực do chuyển vị (trạng thái tự do)

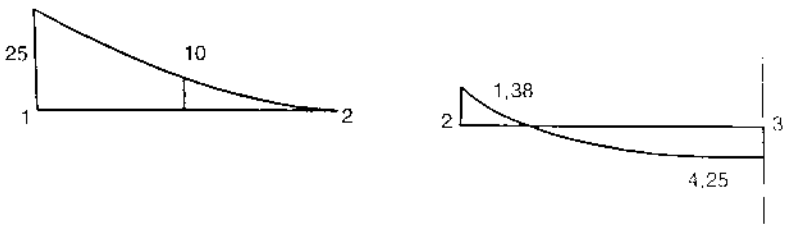
Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	−23,33	−1,67	−1,38
2	−0,44	−5,18	0

7) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

Tổng nội lực

Phần tử	M_1	M_2	$T_2=-T_1$
1	−1,67 − 23,33 = −25,0	1,67 − 1,67 = 0	−1,38
2	−0,94 − 0,44 = −1,38	0,94 − 5,18 = −4,24	0

8) Biểu đồ mô men vẽ trên hình (4.11)



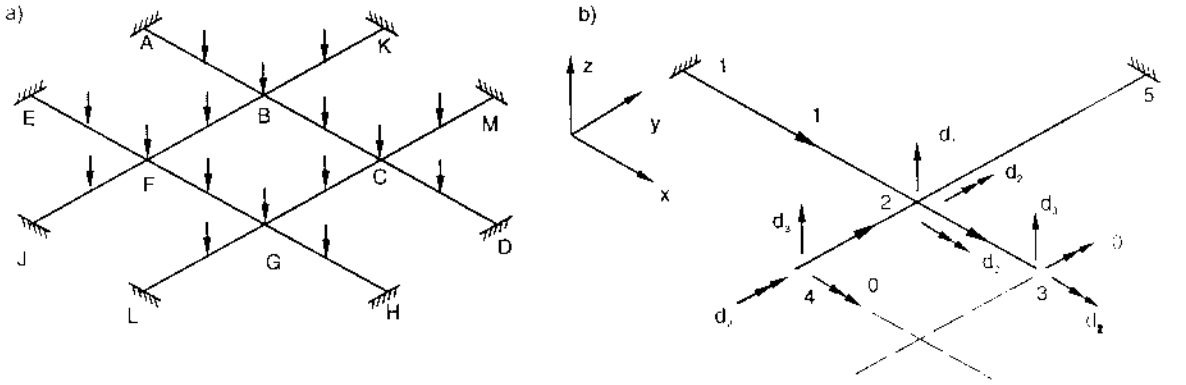
Hình 4.11

Thí dụ 4.3: Cho một hệ như trên hình (4.12)

$E = 10.10^6 kN/m^2$, $G = 6,36.10^6 kN/m^2$, $I = 41666,67.10^{-6} m^4$

$J = 29166,67.10^{-6} m^4$, $A = 0,5 m^2$, $L = 4m$, $\gamma = 1,2$, $\beta = 0,165$

Tải trọng phân bố đều q = 2200 kN/m. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc.



Hình 4.12

Giải:

Vì kết cấu đối xứng và tải trọng đối xứng đối với 2 trục X và Y, ta đưa sơ đồ tính về một phần tư hệ như trên hình (4.12b).

1) Xác định bậc tự do. Vì các thành phần chuyển vị trên phương trục Z tại các điểm B, C, F, G bằng nhau nên các thành phần chuyển vị tại 2 nút 3 và 4 cũng bằng nhau (hình 4.12b). Các dầm BC và FG xoay như một vật thể tuyệt đối cứng (tức không chịu xoắn) nên các góc xoay θ_x tại 2 nút 2 và 3 bằng nhau. Phân tích một cách tương tự, góc xoay θ_y tại 2 nút 2 và 4 cũng bằng nhau. Vì các nút 3 và 4 nằm trên các trục đối xứng nên $\theta_x = 0$ tại nút 4, $\theta_y = 0$ tại nút 3. Cũng vì tính chất đối xứng, $\theta_x = \theta_y$ tại nút 2. Các bậc tự do biểu thị trên hình (4.12b). Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Toạ độ nút

Nút	x	y
1	0	2
2	4	2
3	6	2
4	4	0
5	4	6

Bậc tự do

Nút	w	θ_x	θ_y
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_2
3	d_3	d_3	0
3	d_3	0	d_2
5	0	0	0

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	2	1	0
2	2	3	1	0
3	2	5	0	1
4	4	2	0	1

2) Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (4.4) và (4.5). Vì bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, thay $\beta = 0$.

Phần tử 1:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 10,94 & 0 & 21,88 \\ 0 & 4,64 & 0 \\ 21,88 & 0 & 58,33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 87,5 & 0 & -87,5 & -87,5 & 0 \\ 0 & 9,28 & 0 & 0 & -9,28 \\ -87,5 & 0 & 116,67 & 87,5 & 0 \\ -87,5 & 0 & 87,5 & 87,5 & 0 \\ 0 & -9,28 & 0 & 0 & 9,28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 10,94 & 21,88 & 0 \\ 21,88 & 58,33 & 0 \\ 0 & 0 & 4,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 4:

$$F = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 87,5 & 0 & -87,5 & 87,5 & 0 \\ 0 & 9,28 & 0 & 0 & -9,28 \\ -87,5 & 0 & 87,5 & -87,5 & 0 \\ 87,5 & 0 & -87,5 & 116,67 & 0 \\ 0 & -9,28 & 0 & 0 & 9,28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

3) Tính ΣF_i, i = 1, 2, 3, 4. Theo (4.6) và thành lập ma trận độ cứng tổng thể K:

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 10,94 \\ 87,5 \\ 10,94 \\ \underline{87,5} \\ 196,88 \end{array} & \begin{array}{r} 21,88 \\ -87,5 \\ 21,88 \\ \underline{-87,5} \\ -131,24 \end{array} & \begin{array}{r} -87,5 \\ \underline{-87,5} \\ -175,0 \end{array} \\ & \begin{array}{r} 4,64+9,28+9,28 \\ 58,33-9,28-9,28 \\ 116,67+9,28 \\ 58,3-9,28 \\ 4,64+9,28 \\ \underline{11,67-9,28} \\ 359,28 \end{array} & \begin{array}{r} 87,5 \\ \underline{87,5} \\ 175,0 \end{array} \\ \text{đối xứng} & & \begin{array}{r} 87,5 \\ \underline{87,5} \\ 175,0 \end{array} \end{bmatrix}$$

4) Tạo ra trạng thái ngàm như trên hình (4.13). Nội lực ở trạng thái ngàm thống kê trong bảng sau:

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M_1	M_2
1	−266,67	266,67
2	−66,67	66,67
3	−266,67	266,67
4	−66,67	66,67

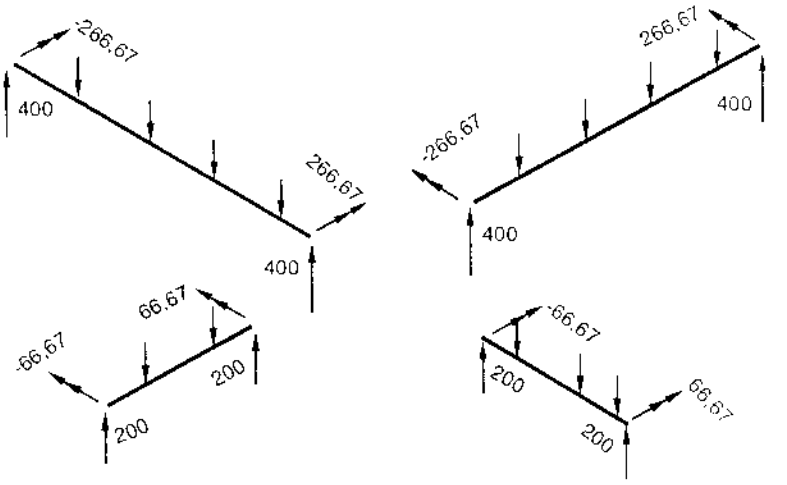
Các thành phần tải trọng tác dụng tại các nút ở trạng thái tự do tính như sau (xem hình 4.13):

$$F_1 = -(400 + 200 + 200 + 400) = -1200$$

$$F_2 = -(266,67 - 66,67 - 66,67 + 266,67) = -400$$

$$F_3 = -(200 + 200) = -400$$

Cần chú ý rằng bậc tự do d_2 hoặc d_3 có thể có phương khác nhau hoặc vị trí khác nhau từ nút này sang nút khác (xem hình 4.12b) nhưng khi tính F_2 hoặc F_3, cần phải lấy tổng của các phản lực tương ứng.



Hình 4.13

5) Thay ΣF_i bằng F_i, i = 1, 2, 3, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1200 \\ -400 \\ -400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3) = 10^{-3}\,(-13{,}93;\ 3{,}307;\ -17{,}462)$$

6) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (4.7). Kết quả thống kê trong bảng sau:

Nội lực do chuyển vị (trạng thái tự do)

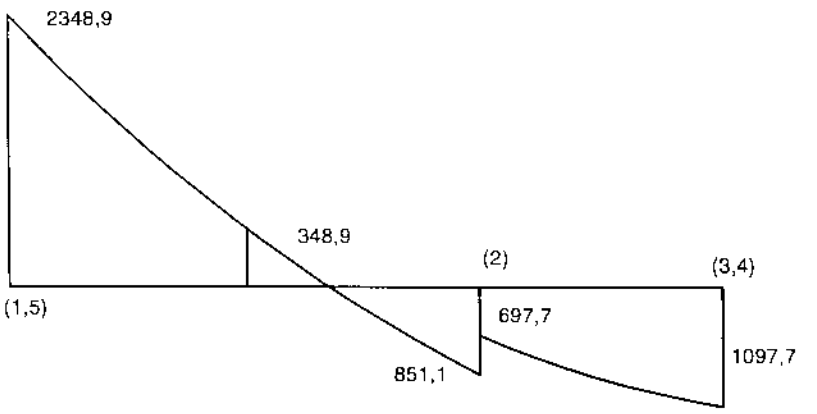
Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	−2802,19	−1117,81	153,42
2	764,38	−1164,38	0
3	1117,81	2082,19	−153,42
4	1164,38	−764,38	0

7) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

Tổng nội lực

Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	– 2348,56	–841,14	153,42
2	697,71	–1097,71	0
3	851,14	2348,86	–153,42
4	1097,71	–697,71	0

8) Biểu đồ mô men vẽ trên hình (4.14)



Hình 4.14

§4.4. Thuật toán lập trình tính hệ dầm trực giao (không xét đến ảnh hưởng của lực cắt)

Chương trình CT25

1) Các nguyên tắc cần được tuân thủ:

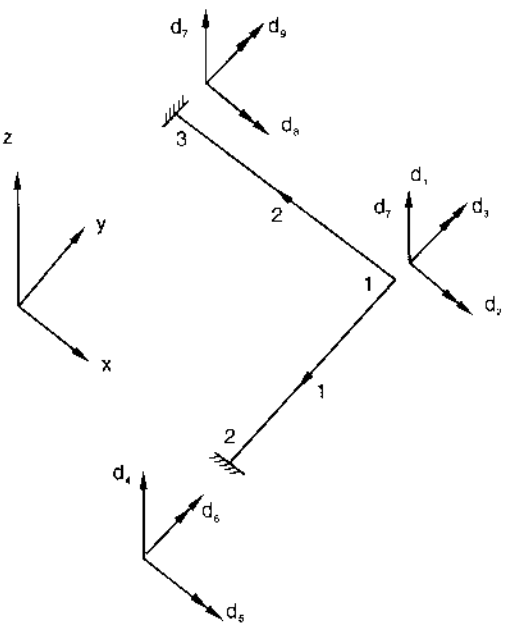
a) Số thứ tự các nút cần chọn sao cho số thứ tự các nút không có chuyển vị nằm ở các vị trí cuối cùng (hình 4.15)

b) Mỗi nút có 3 bậc tự do tính như sau:

Ứng với nút thứ i:

$$\left.\begin{aligned} d_z &= 3i - 2 \\ d_x &= 3i - 1 \\ d_y &= 3i \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

d_z – bậc tự do cùng phương với trục Z; d_x – bậc tự do cùng phương với trục X; d_y – bậc tự do cùng phương với trục Y (trong hệ toạ độ chung).



Hình 4.15

Trên hình (4.15), ta có 3 bậc tự do có chuyển vị: d_1, d_2, d_3; 6 bậc tự do không có chuyển vị: d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9.

Dấu của tải trọng quy ước như trong CT24, nhưng ở đây, thay trục y bằng trục x (xem hình 4.16).

2) Nhập số liệu ban đầu:

– Số nút (SN).

– Số thanh (ST).

– Số bậc tự do có chuyển vị (SBT).

– Tổng số bậc tự do (TBT).

– Các BTD triệt tiêu.

– Chiều dài thanh (cd).

– Các côsin định hướng *l*, m.

– Số thứ tự các bậc tự do ở các đầu thanh d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 (tính theo công thức 4.8).

– Mô đun đàn hồi (E).

– Diện tích tiết diện (dt).

– Mô men quán tính (mq).

– Nhập mô đun trượt G.

– Nhập mô men quán tính xoắn J

– Số thanh chịu tải trọng phân bố đều (X).

– Số thanh không chịu tải trọng tập trung (Y).

– Số thanh không chịu tải trọng (W).

– Số thứ tự các thanh chịu tải trọng phân bố đều (a_i)

– Số thứ tự các thanh chịu tải trọng tập trung (b_i)

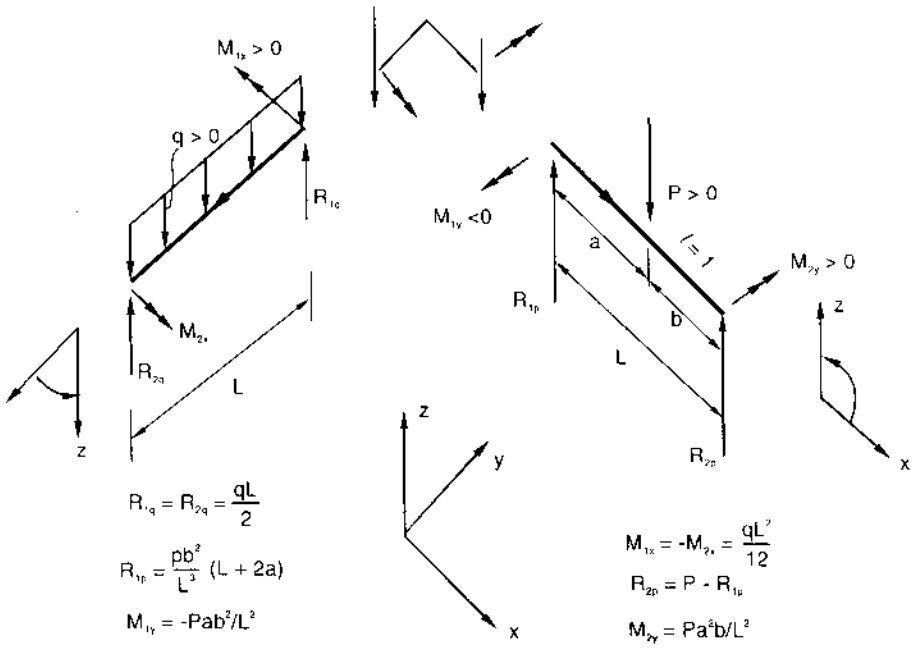
– Số thứ tự các thanh không chịu tải trọng (c_i)

– Cường độ tải trọng phân bố đều (q_i).

– Giá trị tải trọng tập trung (P_i)

– Vị trí tải trọng tập trung (a_1, b_1).

3) Đưa các tải trọng phân bố đều hoặc tải trọng tập trung ở trạng thái ngàm về các tải trọng tập trung ở các nút (hình 4.16).

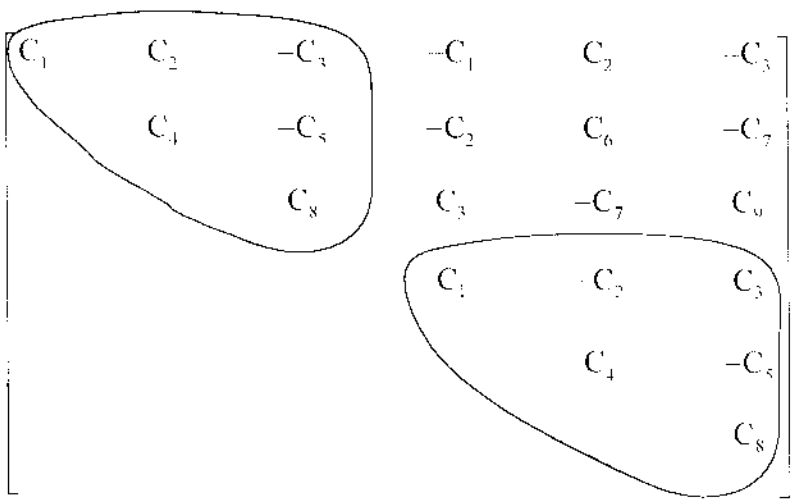


Hình 4.16

4) Tính giá trị các phần tử của ma trận độ cứng riêng theo (4.4.).

5) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể.

Trong hệ toạ độ riêng, các phần tử của ma trận độ cứng riêng mang các chỉ 1, 2, 3, 4, 5, 6 nhưng trong hệ toạ độ chung, chúng mang các chỉ số d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, tính theo công thức (4.8). Giá trị của các phần tử được khoanh tròn trên hình 4.17có tính chất tích luỹ vì tại mỗi nút có nhiều thanh quy tụ.



Hình 4.17

6) Chia khối ma trận tổng thể để tính chuyển vị và phản lực.

7) Giải hệ phương trình tuyến tính S = K.Q để được giá trị các thành phần chuyển vị.

8) Tính mô men cuốn và mô men xoắn theo công thức (4.7).

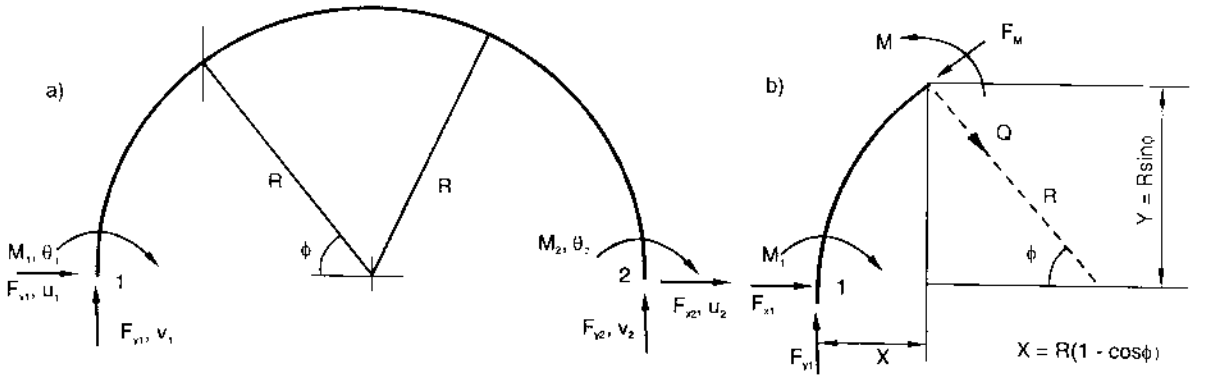
Chương năm
HỆ GỒM CÁC PHẦN TỬ KHÔNG CÙNG THỂ LOẠI

Phương pháp chuyển vị có sức hấp dẫn đặc biệt vì phạm vi sử dụng của nó rất rộng rãi. Ngoài các hệ gồm các phần tử cùng thể loại, nó còn được áp dụng cho các hệ trong đó các phần tử không cùng thể loại, chẳng hạn sự kết hợp giữa các thanh chịu uốn và các thanh chịu lực dọc, sự kết hợp giữa các thanh thẳng và thanh cong, sự kết hợp giữa các gối tựa cứng và gối tựa đàn hồi.

Như đã trình bày, một số phần tử trong ma trận độ cứng tổng thể là sự kết hợp các phần tử thích hợp của các ma trận độ cứng riêng rẽ. Ta có khả năng thành lập được ma trận độ cứng tổng thể sau khi thành lập được ma trận độ cứng của các phần tử riêng rẽ dù là phần tử đó thuộc loại nào. Sau đây, nghiên cứu cách thành lập ma trận độ cứng của một số phần tử đặc biệt.

§5.1. Ma trận độ cứng của phần tử có nửa hình vòng tròn (*hệ phẳng có nút cứng*)

Cho một phần tử có hình nửa vòng tròn, bán kính R như trên hình (5.1). Các thành phần nội lực và chuyển vị tại các nút 1 và 2 biểu thị trên hình (5.1a). Các thành phần nội lực M, Q, F tại một mặt cắt bất kỳ biểu thị trên hình (5.1b).



Hình 5.1

Áp dụng nguyên lí về năng lượng bù và định lý Engesser, ta có năng lượng bù:

$$C = \int \frac{M^2 ds}{2EI} + \gamma \int \frac{Q^2 ds}{2GA} + \int \frac{F^2 ds}{2EA}$$

Các thành phần nội lực M, Q, F suy ra như sau: (hình (5.1b)):

$$M = M_1 + F_{y1}.x - F_{x1}.y, \qquad Q = -F_{x1}\cos\Phi + F_{y1}\sin\Phi$$

$$F = F_{x1}.\sin\Phi + F_{y1}.\cos\Phi$$

Trong đó: $x = R(1-\cos\Phi)$, $y = R.\sin\Phi$, $ds = Rd\Phi$

$$M_2 = -M_1 - F_{y1}.2R, \qquad F_{x2} = -F_{x1}, \qquad F_{y2} = -F_{y1}$$

Trước hết, cố định nút 2 và áp dụng định lý Engesser. Ta có:

$$\frac{\partial C}{\partial M_1} = \theta_1 = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi}(M_1 + F_{y1}x - F_{x1}y)Rd\Phi + 0 + 0$$

$$EI\theta_1 = \int_0^{\pi}[M_1 + RF_{y1}(1-\cos\Phi) + RF_{x1}\sin\Phi]Rd\Phi$$

$$EI\theta_1 = M_1R\pi + F_{y1}R^2\pi + F_{x1}R^2(-2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial F_{x1}} = u_1 = \int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{EI}(M_1 + F_{y1}x - F_{x1}y)(-y) + \frac{\gamma}{GA}(-F_{x1}\cos\Phi + F_{y1}\sin\Phi)(-\cos\Phi) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{EA}(F_{x1}\sin\Phi + F_{y1}\cos\Phi)\sin\Phi\right]Rd\Phi$$

$$EIu_1 = -2R^2M_1 - 2R^3F_{y1} + \frac{\pi}{2}R^3F_{x1}(1+\alpha) \quad \text{trong đó:} \quad \alpha = \left(1 + \frac{\gamma E}{G}\right)\frac{I}{AR^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial F_{y1}} = v_1 = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{EI}(M_1 + F_{y1}x - F_{x1}y)(x) + \frac{\gamma}{GA}(-F_{x1}\cos\Phi + F_{y1}\sin\Phi)\sin\Phi \right.$$
$$\left. + \frac{1}{EA}(F_{x1}\sin\Phi + F_{y1}\cos\Phi)\cos\Phi\right]Rd\Phi$$

$$EIv_1 = \pi R^2M_1 + \frac{\pi}{2}R^3(3+\alpha)F_{y1} - 2R^3F_{x1}$$

Để được các phần tử của ma trận độ cứng, ta biểu thị các thành phần nội lực M_1, F_{x1}, F_{y1} qua các thành phần chuyển vị θ_1, u_1, v_1. Sau các phép tính biến đổi, ta được kết quả:

$$F_{x1} = \frac{EI}{R^3}(k_{11}u_1 + k_{13}\theta_1), \qquad F_{y1} = \frac{EI}{R^3}(k_{22}v_1 - k_{22}R\theta_1)$$

$$M_1 = \frac{EI}{R^3}(k_{13}u_1 - k_{22}Rv_1 + k_{33}\theta_1)$$

Từ điều kiện cân bằng:

$$F_{x2} = \frac{EI}{R^3}(-k_{11}u_1 - k_{13}v_1), \qquad F_{y2} = \frac{EI}{R^3}(-k_{22}v_1 + k_{22}R\theta_1)$$

$$M_2 = \frac{EI}{R^3}(-k_{13}u_1 + k_{22}Rv_1 + k_{36}\theta_1)$$

$$\alpha = \left(1 + \frac{\gamma E}{G}\right)\frac{I}{AR^2}$$ Trong đó:

$$k_{11} = \frac{3,36}{(1+5,28\alpha)}, \qquad k_{13} = \frac{2,14R}{(1+5,28\alpha)} \qquad k_{22} = \frac{0,64}{(1+\alpha)}$$

$$k_{33} = \frac{(2,32+3,17\alpha+0,49\alpha^2)R^2}{(1+6,28\alpha+5,28\alpha^2)}, \qquad k_{36} = \frac{(-1,04+3,55\alpha-0,49\alpha^2)R^2}{(1+6,28\alpha+5,28\alpha^2)} \qquad (5.1)$$

Bây giờ cố định nút 1 và cũng áp dụng định lý Engesser như trên.

Các thành phần nội lực suy ra như sau:

$$M = -M_2 + F_{y2}x + F_{x2}.y, \qquad Q = -(F_{x2}.\cos\Phi + F_{y2}\sin\Phi)$$

$$F = -F_{x2}.\sin\Phi + F_{y2}\cos\Phi$$

Từ điều kiện cân bằng:

$$M_1 = -M_2 + F_{y2}.2R, \qquad F_{x1} = -F_{x2}, \qquad F_{y1} = -F_{y2}$$

Sau khi áp dụng định lý Engsser, ta được kết quả:

$$EI\theta_2 = M_2R\pi - F_{y2}R^2\pi - F_{x2}2R^2$$

$$EIu_2 = -M_2 2R^2 + 2F_{y2}R^3 + F_{x2}\frac{\pi}{2}(1+\alpha)R^3$$

$$EIv_2 = -\pi M_2R^2 + F_{y2}\frac{\pi}{2}(3+\alpha)R^3 + F_{x2}2R^3$$

Biểu thị các thành phần nội lực qua các thành phần chuyểnvị tại nút 2:

$$F_{x2} = \frac{EI}{R^3}(k_{11}u_2 + k_{13}\theta_2), \qquad F_{y2} = \frac{EI}{R^3}(k_{22}v_2 + k_{22}R\theta_2)$$

$$M_2 = \frac{EI}{R^3}(k_{13}u_2 + k_{22}Rv_2 + k_{33}\theta_2)$$

Từ điều kiện cân bằng

$$F_{x1} = -F_{x2},\ F_{y1} = -F_{y2},\ M_1 = \frac{EI}{R^3}(-k_{13}u_2 + k_{22}Rv_2 + k_{36}\theta_2)$$

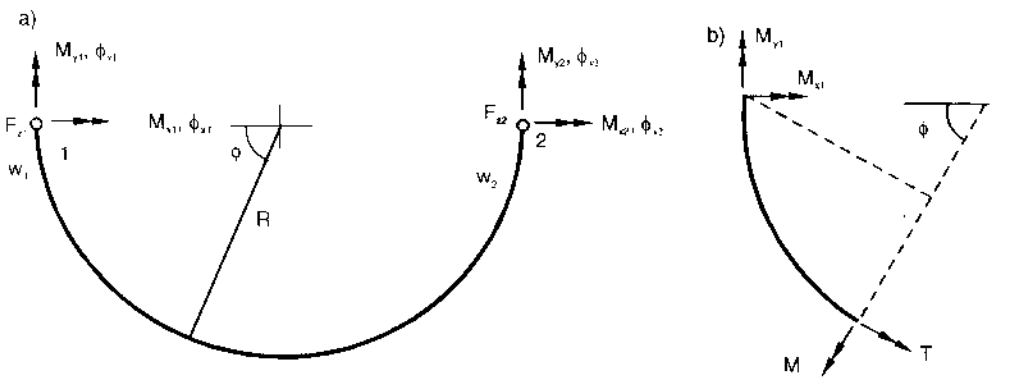
Căn cứ vào các kết quả trên, ta có hệ thức ma trận giữa vectơ các thành phần nội lực F_{x1}, F_{y1}, M_1, F_{x2}, F_{y2}, M_2 và vectơ các thành phần chuyển vị u_1, v_1, θ_1, u_2, v_2, θ_2 như sau:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{R^3}\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & -k_{11} & 0 & -k_{13} \\ & k_{22} & -k_{22}R & 0 & -k_{22} & -k_{22}R \\ & & k_{33} & -k_{13} & k_{22}R & k_{36} \\ & & & k_{11} & 0 & k_{13} \\ & & & & k_{22} & k_{22}R \\ & & & & & k_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \qquad (5.2)$$

k là ma trận độ cứng của phần tử có hình nửa vòng tròn. Các phần tử của ma trận k tính theo (5.1)

§5.2. Ma trận độ cứng của phần tử có nửa vòng tròn trong hệ dầm giao nhau

Cho một phần tử hình nửa vòng tròn có bán kính R như trên hình (5.2). Các thành phần nội lực và chuyển vị biểu thị trên hình (5.2a). Các thành phần nội lực tại một mặt cắt bất kỳ biểu thị trên hình (5.2b).



Hình 5.2

Vì phần tử vừa chịu uốn, vừa chịu xoắn, năng lượng bù có dạng:

$$C = \int \frac{M^2 ds}{2EI} + \int \frac{T^2 ds}{2GJ} + \gamma \int \frac{Q^2 ds}{2GA}$$

Trước hết, ta cố định nút 2 và xét ảnh hưởng của các thành phần chuyển vị tại nút 1. Các thành phần chuyển vị tai một mặt cắt bất kỳ suy ra như sau:

$$M = M_{x1}.\cos\Phi + M_{y1}.\sin\Phi + F_{z1}.R\sin\Phi$$

$$T = -M_{x1}\sin\Phi + M_{y1}\cos\Phi - F_{z1}R(1-\cos\Phi)$$

$$Q = F_{z1}$$

F_{z1} – thành phần lực trên phương trục z tại nút 1. Từ các điều kiện cân bằng, ta được:

$$M_{x2} = -M_{x1};\ M_{y2} = -M_{y1} - F_{z1}.2R;\ F_{z2} = -F_{z1}$$

Áp dụng định lý Engesser:

$$\theta_{x1} = \frac{\partial C}{\partial M_{x1}};\ \theta_{y1} = \frac{\partial C}{\partial M_{y1}};\quad w_1 = \frac{\partial C}{\partial F_{z1}}$$

$$GJ\theta_{x1} = a\int_0^{\pi}(M_{x1}\cos\Phi + M_{y1}\sin\Phi + F_{z1}R\sin\Phi)\cos\Phi R d\Phi$$

$$+ \int_0^{\pi}[-M_{x1}\sin\Phi + M_{y1}\cos\Phi - F_{z1}R(1-\cos\Phi)](-\sin\Phi)Rd\Phi$$

$$GJ\theta_{x1} = M_{x1}R\frac{\pi}{2}\alpha + M_{x1}R\frac{\pi}{2} + F_{z1}2R^2$$

$$\alpha = GJ/EI$$

$$GJ\theta_{y1} = \alpha\int_0^{\pi}(M_{x1}\cos\Phi + M_{y1}\sin\Phi + F_{z1}R\sin\Phi)\sin\Phi R d\Phi +$$

$$+ \int_0^{\pi} + [-M_{x1}\sin\Phi + M_{y1}\cos\Phi - F_{z1}R(1-\cos\Phi)]\cos\Phi R d\Phi$$

$$GJ\theta_{y1} = M_{y1}R\frac{\pi}{2}\alpha + F_{z1}R^2\frac{\pi}{2}\alpha + M_{y1}R\frac{\pi}{2} + F_{z1}R^2\frac{\pi}{2}$$

$$GJw_1 = \alpha\int_0^{\pi}(M_{x1}\cos\Phi + M_{y1}\sin\Phi + F_{z1}R\sin\Phi)R\sin\Phi R d\Phi +$$

$$+ \int_0^{\pi}[-M_{x1}\sin\Phi + M_{y1}\cos\Phi - F_{z1}R(1-\cos\Phi)][-R(1-\cos\Phi)]Rd\Phi + \gamma\frac{J}{A}\int_0^{\pi}F_{z1}Rd\Phi$$

$$GJw_1 = M_{y1}R^2\frac{\pi}{2}.\alpha + F_{z1}R^3\frac{\pi}{2}\alpha + M_{x1}R^2 2\pi + F_{y1}R^2\frac{\pi}{2} + F_{z1}R^3\frac{3}{2}\pi + \frac{J}{A}F_{z1}R\pi$$

Căn cứ vào các kết quả trên, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix}\theta_{x1}\\ 0_{y1}\\ w_1\end{bmatrix}=\frac{\pi R}{2GJ}\underbrace{\begin{bmatrix}1+\alpha & 0 & \frac{4}{\pi}R\\ & 1+\alpha & (1+\alpha)R\\ & & (3+\alpha+\frac{2J}{AR^2}\gamma).R^2\end{bmatrix}}_{f}\begin{bmatrix}M_{x1}\\ M_{y1}\\ F_{z1}\end{bmatrix}$$

f là ma trận độ mềm. Để được ma trận độ cứng, ta biểu thị các thành phần nội lực M_{x1}, M_{y1}, M_{z1} qua các thành phần chuyển vị θ_{x1}, θ_{y1}, w_1. Để đơn giản hoá tính toán, ta bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt (thay $\gamma = 0$). Ma trận độ cứng ứng với các thành phần chuyển vị tại nút 1:

$$\begin{bmatrix}M_{x1}\\ M_{y1}\\ F_{z1}\end{bmatrix}=\beta\begin{bmatrix}2 & 4 & -\frac{4}{\pi R}\\ & \left[3+\alpha-\frac{16}{\pi^2(1+\alpha)}\right] & \frac{-(1+\alpha)}{R}\\ \text{đối} & \text{xứng} & \frac{(1+\alpha)}{R^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_{x1}\\ \theta_{y1}\\ w_1\end{bmatrix}$$

Trong đó:

$$\beta=\frac{GJ\pi}{R[\pi^2(1+\alpha)-8]}$$

Từ các điều kiện cân bằng, ta có hệ thức giữa M_{x2}, M_{y2}, F_{z2} và M_{x1}, M_{y1}, F_{z1} (xem phần trước), do đó suy ra:

$$\begin{bmatrix}M_{x2}\\ M_{y2}\\ F_{z2}\end{bmatrix}=\beta.\begin{bmatrix}-2 & -\frac{4}{\pi} & \frac{4}{\pi R}\\ \frac{4}{\pi} & \frac{16-\pi^2(1-\alpha^2)}{\pi^2(1+\alpha)} & -\frac{(1+\alpha)}{R}\\ \frac{4}{\pi R} & \frac{(1+\alpha)}{R} & -\frac{(1+\alpha)}{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0_{x1}\\ \theta_{y1}\\ w_1\end{bmatrix}$$

Bây giờ cố định nút 1, nội lực tại một mặt cắt bất kỳ như sau:

$$M = M_{x2}.\cos\Phi - M_{y2}\sin\Phi + F_{z2}.R\sin\Phi$$

$$T = M_{x2}.\sin\Phi + M_{y2}\cos\Phi + F_{z2}.R(1-\cos\Phi)$$

$$Q = -F_{z2}$$

Từ điều kiện cân bằng:

$$M_{x1} = -M_{x2};\ M_{y1} = -M_{y2} + F_{z2}.2R;\ F_{z1} = -F_{z2}$$

Áp dụng định lý Engesser:

$$\theta_{x2} = \frac{\partial C}{\partial M_{x2}}, \qquad \theta_{y2} = \frac{\partial C}{\partial M_{y2}} \qquad w_2 = \frac{\partial C}{\partial F_{z2}}$$

Sau khi thực hiện các phép tính, ta được hệ thức:

$$\begin{bmatrix} \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_2 \end{bmatrix} = \frac{\pi.R}{2GJ} \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 & \frac{4}{\pi}R \\ & 1+\alpha & -(1+\alpha)R \\ \text{đối xứng} & & (3+\alpha+\frac{2J}{AR^2}\gamma).R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{x2} \\ M_{y2} \\ F_{z2} \end{bmatrix}$$

Sau khi biểu thị các thành phần nội lực M_{x2}, M_{y2}, F_{z2} qua các thành phần chuyển vị θ_{x2}, θ_{y2}, w_2 và kết hợp với ma trận độ cứng ứng với các thành phần chuyển vị tại nút 1, ta có ma trận độ cứng của phần tử có hình nửa vòng tròn như sau:

$$\begin{bmatrix} F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} k_5 & -k_2 & -k_1 & -k_5 & k_2 & -k_1 \\ & 2 & \frac{4}{\pi} & k_2 & -2 & \frac{4}{\pi} \\ & & k_3 & k_1 & -\frac{4}{\pi} & k_4 \\ & & & k_5 & -k_2 & k_1 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & & 2 & -\frac{4}{\pi} \\ & & & & & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{z1} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_{z2} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

k – ma trận độ cứng của phần tử có hình nửa vòng tròn trong hệ dầm giao nhau. Các phần tử của ma trận k tính như sau:

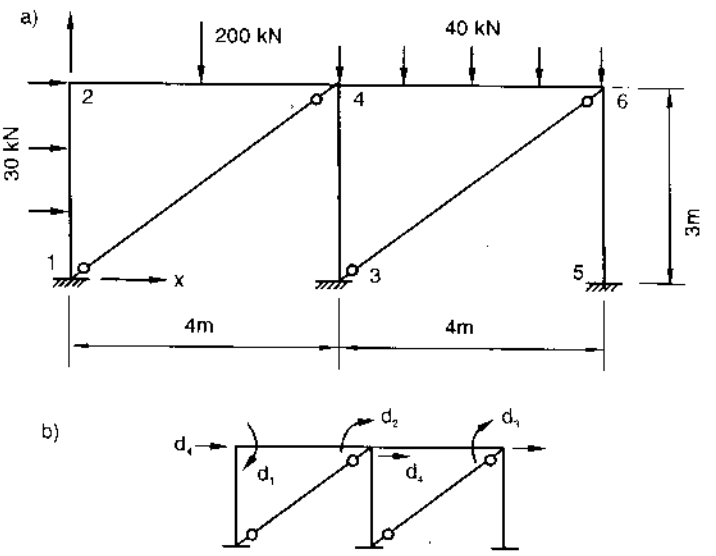
$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \frac{GJ}{EI}, \qquad \beta = \frac{GJ}{R[\pi^2(1+\alpha)-8]} \\ &k_1 = \frac{(1+\alpha)}{R}, \qquad k_2 = \frac{4}{\pi R}, \qquad k_3 = 3+\alpha-\frac{16}{\pi^2(1+\alpha)} \\ &k_4 = \frac{16}{\pi^2(1+\alpha)} - (1-\alpha), \qquad k_5 = \frac{k_1}{R} \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Dưới đây, sẽ nêu một số thí dụ tính toán các hệ trong đó các phần tử không thể cùng loại.

§5.3. Thí dụ

Thí dụ 5.1:

Đầu đề giống thí dụ (3.5) nhưng bổ sung thêm 2 thanh giằng chéo 1–4 và 3–6 như trên hình (5.3).Diện tích tiết diện của các thanh giằng chéo $A = 506,71.10^{-6}m^2$; $E = 210.10^6$ kN/m². Các đặc trưng hình học như trong thí dụ (3.5). Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc đối với các thanh chịu uốn.



Hình 5.3

Giải:

Hệ gồm có 2 thanh chịu lực dọc 1–4 và 3–6, các phần tử còn lại là những thanh chịu uốn. Trong thí dụ (3.4) (chưa có các thanh giằng chéo), ta đã suy ra hệ thức ma trận sau (trong trường hợp không xét đến ảnh hưởng của lực dọc).

$$\begin{bmatrix} \Sigma F_1 \\ \Sigma F_2 \\ \Sigma F_3 \\ \Sigma F_4 \end{bmatrix} = 10^3 \underbrace{\begin{bmatrix} 36,21 & 10,08 & 0,00 & -6,65 \\ & 40,70 & 5,07 & -3,63 \\ & & 18,35 & -3,63 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & 9,27 \end{bmatrix}}_{K} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \qquad (5.5)$$

Ta tiến hành tính toán theo các bước sau:

1) Bậc tự do biểu thị trên hình (5.3b), so với thí dụ (3.5) không có gì thay đổi.

2) Xác định phần đóng góp của các thanh giằng chéo vào các thành phần nội lực. Áp dụng (2.25) đối với các phần tử (1–4) và (3–6).

Phần tử 6: đầu 1 tại nút 1, đầu 2, tại nút 4, L = 5 m, $l = 0,8$, m = 0,6, AE/L = $21,28.10^3$. Ta có:

$$F_{x2} = F_4 = 10^3.13,62d_4$$

Phần tử 7: đầu 1 tại nút 3, đầu 2 tại nút 6. Đặc trưng hình học của phần tử này hoàn toàn giống phần tử 6, do đó:

$$F_4 = 10^3.\ 13,62.d_4$$

3) Thành lập ma trận độ cứng tổng thể K. Do sự đóng góp của các thanh giằng chéo vào các thành phần nội lực nên ma trận K trong (5.5) (chưa có các thanh giằng chéo) được biến đổi như sau. Phần tử có giá trị 9,27 nằm trên hàng cuối cùng và cột cuối cùng được thay bằng giá trị (9.27 + 13,62 + 13,62). Ta gọi K* là ma trận K sau khi được biến đổi.

4) Trạng thái ngàm và trạng thái tự do hoàn toàn giống như trong thí dụ (3.5):

$$\Sigma F_1 = 77{,}50;\ \Sigma F_2 = -46{,}67;\ \Sigma F_3 = -53{,}33;\ \Sigma F_4 = 45{,}0$$

Đối với hệ trên hình (5.3) ta có hệ thức ma trận:

$$F = K*D$$

5) Giải hệ phương trình trên ta được:

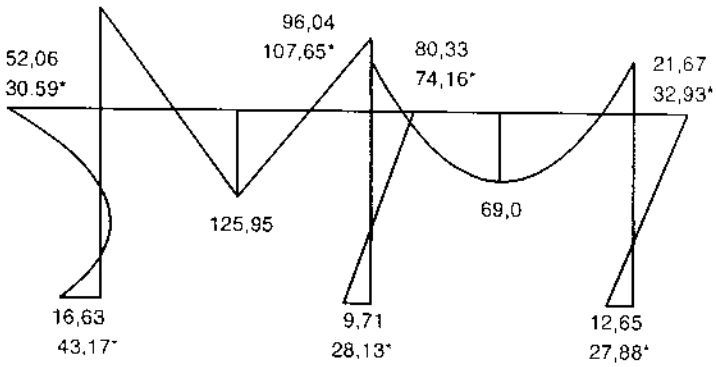
$$D = [d_1\ \ d_2\ \ d_3\ \ d_4]' = 10^{-3}\,[2{,}753\quad -1{,}437\quad -2{,}238\quad 1{,}377]'$$

6) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. Nội lực trong các thanh chịu uốn tính theo (3.25), lực dọc trong các thanh giằng chéo tính theo (2.34). Nội lực do chuyển vị thống kê trong bảng.

7) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

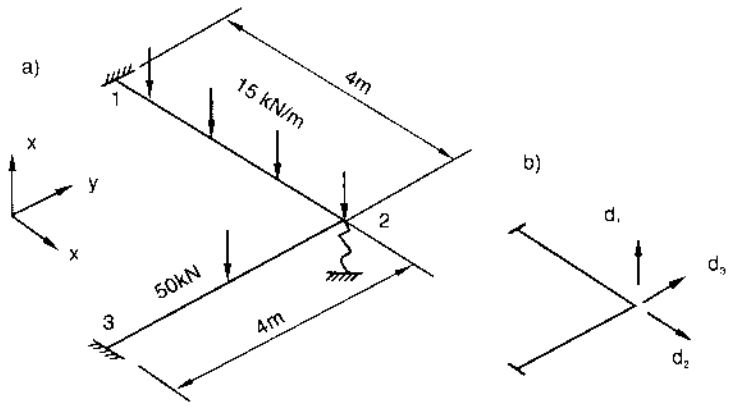
Phần tử	Nội lực do chuyển vị			Tổng nội lực		
	M_1	M_2	F	M_1	M_2	F
1	7,87	29,56		−14,63	52,06	
2	47,95	−3,96		−52,05	96,04	
3	−9,91	−15,70		−9,71	−15,70	
4	−27,0	−31,66		−80,33	21,67	
5	−12,65	−21,67		−12,65	−21,67	
6	–	–	23,44	–	–	23,44
7	–	–	23,44	–	–	23,44

8) Biểu đồ mô men vẽ trên hình (5.4). Các số có đánh dấu "sao" ứng với hệ không có các thanh giằng. Qua hình (5.4), ta thấy sự đặt thêm các thanh giằng chéo làm giảm bớt một cách đáng kể mô men trong các cột vì chuyển vị thẳng của hệ trên phương nằm ngang bị hạn chế.



Hình 5.4

Thí dụ 5.2: Đầu đề giống như trong thí dụ (4.1) nhưng thêm gối tựa đàn hồi vào nút 2. Độ cứng của gối tựa đàn hồi bằng 40.10^3 kN/m. Các đặc trưng hình học giống như trong thí dụ (4.1). Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt. Hệ biểu thị trên hình (5.5)



Hình 5.5

Giải:

Bậc tự do của hệ toàn toàn giống như trong thí dụ (4.1). Trong thí dụ này, ta đã suy ra hệ thức ma trận trong trường hợp không có gối tựa đàn hồi.

Trong thí dụ (4.1), ta đã suy ra hệ thức sau:

$$\begin{bmatrix} \Sigma F_1 \\ \Sigma F_2 \\ \Sigma F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 13,65 & -13,65 & 13,65 \\ & 39,30 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 39,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

1) Xác định phần đóng góp của gối tựa đàn hồi vào thành phần tải trọng. Vì tại nút 2 có gối tựa đàn hồi nên thành phần tải trọng trên phương của bậc tự do d_1 là:

$$F_1^* = 10^3.40,0.d_1$$

Nếu thay ΣF_1 ở vế trái của (5.6) bằng $\Sigma F_1 + F_1^*$ sau đó chuyển F_1^* sang vế phải, ma trận K trong (5.6) sẽ được biến đổi như sau: Phần tử có giá trị 13,65 ứng với d_1 được thay thế bằng giá trị (13,65 + 40.0) = 53,65. Ta gọi ma trận độ cứng mới là K^*.

2) Trạng thái ngàm và trạng thái tự do hoàn toàn giống như trong thí dụ (4.1). Thay $\Sigma F_1 = -55$; $\Sigma F_2 = -25,0$; $\Sigma F_3 = -20,0$, ta có hệ thức ma trận:

$$F = K^*.D$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$D = [d_1\ d_2\ d_3]' = 10^{-3}.\ [-0,891 \qquad 0,327 \qquad -0,199]'$$

3) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (4.7). Kết quả ghi trong bảng.

4) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả ghi trong bảng sau:

Phần tử	Nội lực do chuyển vị			Tổng nội lực		
	M_1	M_2	$T_2 = T_1$	M_1	M_2	$T_2 = T_1$
1	−15,70	−19,42	0,93	−35,70	0,58	0,93
2	−18,11	−24,05	−0,58	−43,11	0,95	−0,58

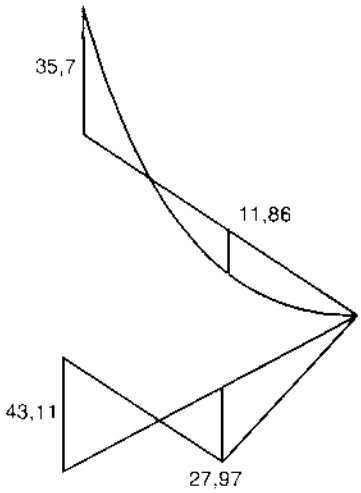
5) Biểu đồ mô men như trên hình (5.6)

Thí dụ 5.3: Cho một hệ như trên hình (5.7). Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.

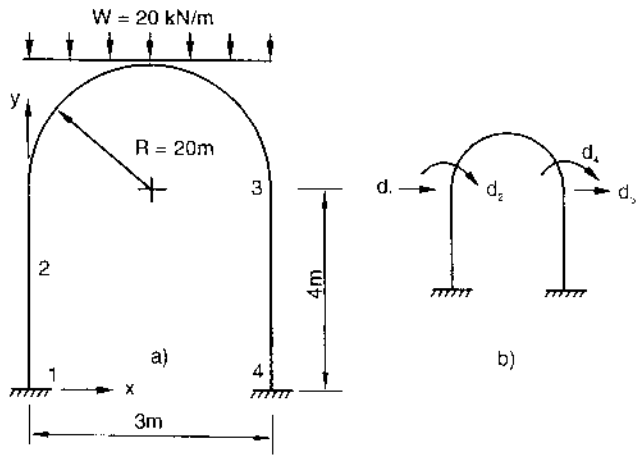
$E = 14.0.10^6$ kN/m², $G = 6,36.10^6$ kN/m², $I = 5714,3.10^{-6}$ m⁴, $A = 185164,25.10^{-6}$m², $\gamma = 1,2$

Giải:

Hệ gồm có 2 thanh thẳng và 1 thanh cong hình nửa vòng tròn. Vì bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc, có 4 bậc tự do biểu thị như trên hình (5.7b).



Hình 5.6



Hình 5.7

1) Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử.

Phần tử 1: phần tử 1–2, đầu 1 tại nút 1, đầu 2 tại nút 2, $l = 0$, $m = 1$, $\beta = 0,051$

Thành lập ma trận độ cứng theo (3.22)

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ \\ \\ F_1 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 1,5 & -3,0 \\ 1,43^* & -2,86^* \\ -3,0 & 8,0 \\ -2,86^* & 7,71^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ \\ \\ d_1 \end{bmatrix}$$

Trong đó, các số có đánh dấu "sao" ứng với trường hợp có xét đến ảnh hưởng của lực cắt.

Phần tử 2: Phần tử 2–3, đầu 1 tại nút 2, đầu 2 tại nút 3, phần tử có hình nửa vòng tròn. Áp dụng (5.1) và (5.2) ta có:

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \\ F_4 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 1,72 & 2,74 & -1,72 & -2,74 \\ 1,57^* & 2,50^* & -1,57^* & -2,50^* \\ 2,74 & 7,41 & -2,74 & -3,34 \\ 2,50^* & 6,82^* & -2,50^* & -3,18^* \\ -1,72 & -2,74 & 1,72 & 2,74 \\ -1,57^* & -2,50^* & 1,57^* & 2,50^* \\ -2,74 & -3,34 & 2,74 & 7,41 \\ -2,50^* & -3,18^* & 2,50^* & 6,82^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_1 \\ d_4 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

2) Tính ΣF_i, i = 1, 2, 3, 4 theo (3.23) và thành lập ma trận độ cứng tổng thể K.

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} \begin{array}{c} 8,0 \\ \underline{7,41} \\ 15,41 \end{array} & \begin{array}{c} -3,0 \\ \underline{2,74} \\ -0,26 \end{array} & -3,34 & -2,74 \\ & \begin{array}{c} 1,50 \\ \underline{1,72} \\ 3,22 \end{array} & -2,74 & -1,72 \\ & & \begin{array}{c} 7,41 \\ \underline{8,0} \\ 15,41 \end{array} & \begin{array}{c} 2,74 \\ \underline{-3,0} \\ -0,26 \end{array} \\ \text{đối} & \text{xứng} & & \begin{array}{c} 1,72 \\ \underline{1,50} \\ 3,22 \end{array} \end{bmatrix}$$

Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc

$$K^* = 10^4 \begin{bmatrix} \begin{array}{c} 7,71 \\ \underline{6,82} \\ 14,53 \end{array} & \begin{array}{c} -2,86 \\ \underline{2,56} \\ -0,36 \end{array} & -3,18 & -2,50 \\ & \begin{array}{c} 1,43 \\ \underline{1,57} \\ 3,0 \end{array} & -2,50 & -1,57 \\ & & \begin{array}{c} 7,71 \\ \underline{6,82} \\ 14,53 \end{array} & \begin{array}{c} 2,50 \\ \underline{-2,86} \\ -0,36 \end{array} \\ \text{đối xứng} & & & \begin{array}{c} 1,43 \\ \underline{1,57} \\ 3,0 \end{array} \end{bmatrix}$$

Xét đến ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc trong vòm và ảnh hưởng của lực cắt trong cột

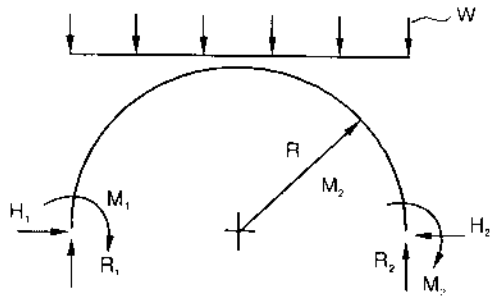
3) Tạo ra trạng thái ngàm như trên hình (5.8).

Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc, các phản lực ở trạng thái ngàm tính như sau:

$$R_1 = R_2 = wR,\ H_1 = H_2 = 0,56\ wR,$$

$$M_1 = -M_2 = 0,1066\ wR^2.$$

Khi xét đến ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc, các phản lực tính theo các công thức:



Hình 5.8

$$H_1 = H_2 = wR\frac{\left(0,56 + 2,24\alpha - 4,48\dfrac{I}{AR^2}\right)}{(1 + 5,278\alpha)}$$

$$M_1 = -M_2 = wR^2\frac{\left(0,1066 + 0,106\alpha - 2,852\dfrac{I}{AR^2}\right)}{(1 + 5,278\alpha)}$$

$$\alpha = \left(\frac{E\gamma}{G} + 1\right) + \frac{I}{AR^2}$$

Thay w = 20, R = 2,5 ta được $R_1 = R_2 = 50,0$; $H_1 = -H_2 = 28,01$; $M_1 = -M_2 = 13,33$.

4) Tạo ra trạng thái tự do. Các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do:

$$F_1 = -F_3 = -13,33; \qquad F_2 = -F_4 = -28,01$$

Thay ΣF_i bằng F_i (i = 1, 2, 3, 4), ta có hệ thức ma trận

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13,33 \\ -28,01 \\ 13,33 \\ 28,01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & K & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên ta được:

$$d_1 = -d_3 = 0,041.10^{-4}; \quad d_2 = -d_4 = -5,688.10^{-4}$$

5) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. Nội lực của các phần tử 1–2, 3–4 tính theo (3.25). Đối với phần tử 2–3 (nửa vòng tròn, các thành phần nội lực tính theo (5.2):

$$H_1 = H_2 = \frac{EI}{R^3}[3,36(u_1 - u_2) + 2,14R(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$R_1 = -R_2 = \frac{EI}{R^3}0,64[v_1 - v_2 - R(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$M_1 = \frac{EI}{R}\left[2,14\left(\frac{u_1 - u_2}{R}\right) - 0,64\left(\frac{v_1 - v_2}{R}\right) + 2,32\theta_1 - 1,04\theta_2\right]$$

$$M_2 = -(M_1 + 2RR_1)$$

Trong các hệ thức trên, ta bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc (thay $\alpha = 0$). Nội lực do chuyển vị gây ra ghi trong bảng.

6) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả ghi trong bảng sau:

Ph.tử	Nội lực ở trạng thái ngàm			Nội lực do chuyển vị			Tổng nội lực		
	M_1	M_2	$H_1 = H_2$	M_1	M_2	$H_1 = H_2$	M_1	M_2	$H_1 = H_2$
1	0	0	–	17,23	17,39	–	17,23	17,39	–
2	0	0	–	–17,23	–17,39	–	–17,23	–17,39	–
3	13,33	–13,33	28,01	–30,72	30,72	–19,35	–17,39	17,39	8,65

7) Biểu đồ mô men vẽ trên hình (5.9).

Thí dụ 5.4:

Cho một hệ như trên hình (5.10). Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

$$E = 10.10^6\ kN/m^2, \qquad G = 6,36.10^6\ kN/m^2$$

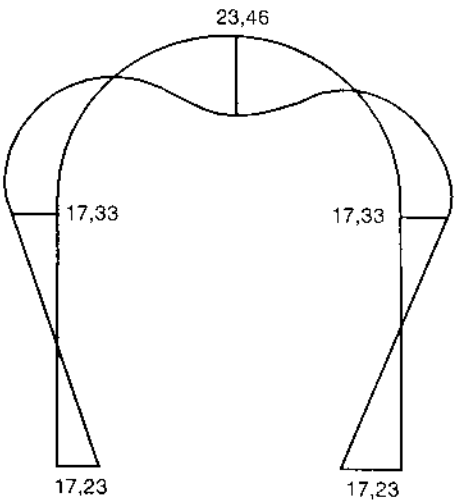
$$I = 5400.10^{-6}\ m^4, \qquad J = 3890.10^{-6}\ m^4,$$

$$A = 180000.10^{-6}\ m^2, \qquad \gamma = 1,2.$$

Giải:

Hệ trên hình (5.10) là hệ dầm giao nhau (xem chương bốn) trong đó các phần tử (1–2), (3–4) là các thanh thẳng, phần tử 2–3–4 là thanh cong hình nửa vòng tròn. Các phần tử trên vừa chịu uốn, vừa chịu xoắn. Vì hệ đối xứng và tải trọng cũng đối xứng nên sơ đồ tính đưa về nửa hệ như trên hình (5.10b).

Vì tính chất đối xứng, góc xoay θ_y tại nút 3 triệt tiêu. Các bậc tự do biểu thị trên hình (5.10b).

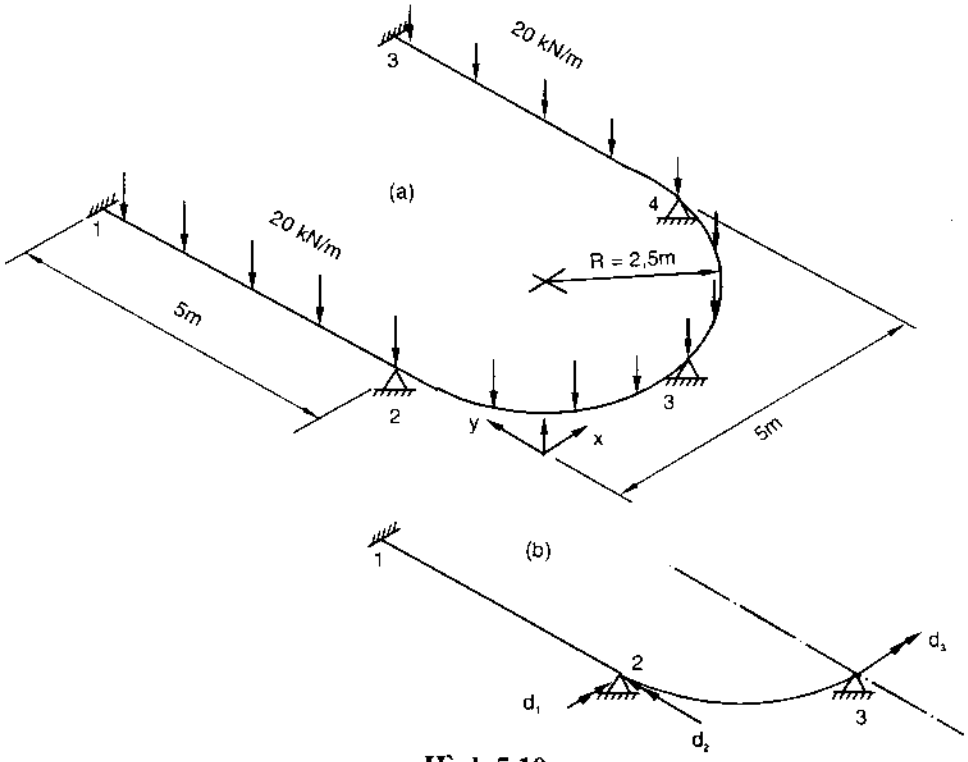


Hình 5.9

1) Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử.

Phần tử 1: Thanh thẳng 1–2, đầu 1 tại nút 1, đầu 2 tại nút 2, $l = 0$, $m = -1$. Theo (4.3), ta có:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 6,05 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$



Hình 5.10

Phần tử 2: thanh 2–3 có hình một phần tư vòng tròn (hình 5.11). Áp dụng nguyên lý về năng lượng bù và định lý Engesser, tương tự như đã làm trong mục 5.2, ta được hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \end{bmatrix} = \frac{GJ}{R\alpha_1} \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & -k_{13} & -k_{11} & -k_{13} & -k_{12} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{12} & k_{24} & k_{25} \\ & & k_{33} & k_{13} & k_{35} & k_{24} \\ & & & k_{11} & k_{13} & k_{12} \\ & & & & k_{33} & k_{23} \\ & & & & & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Trong đó: $\alpha = \dfrac{GJ}{EI}$, $\alpha_1 = 7,24\alpha^2 + 1,92\alpha + 0,07$

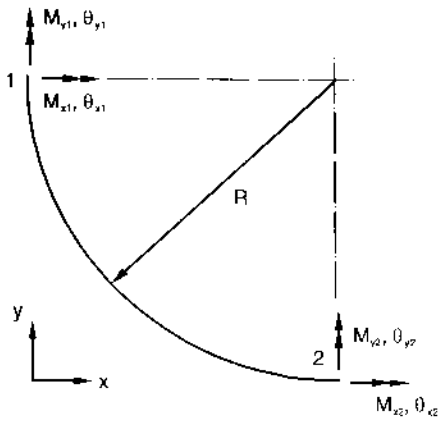
$$\left.\begin{aligned} k_{11} &= (4,61\alpha^2 + 51,79\alpha + 4,61)R^{-2} \\ k_{12} &= (16,15\alpha + 3,59)R^{-1} \\ k_{13} &= (1+\alpha)(4,61\alpha + 1,02)R^{-1} \\ k_{22} &= 15,50\alpha + 2,94, \quad k_{23} = 6,28\alpha + 0,89, \; k_{24} = 0,65\,(1+\alpha) \\ k_{33} &= (1+\alpha)(4,61\alpha + 0,37), \; k_{25} = 9,87\alpha + 2,70 \\ k_{35} &= 4,61\alpha^2 - 0,65\alpha + 0,13 \end{aligned}\right\} \quad (5.8)$$

Thay các giá trị đặc trưng hình học vào các hệ thức trên và chú ý $w_1 = w_2 = \theta_{y2} = 0$ ta được:

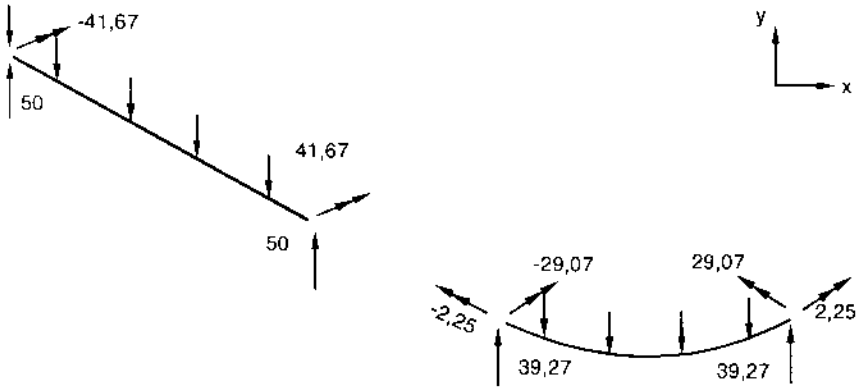
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 5,39 & 1,98 & 0,58 \\ 1,98 & 1,68 & 0,28 \\ 0,58 & 0,28 & 1,68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

2) Tính ΣF_i, i = 1, 2, 3, ta được ma trận độ cứng tổng thể:

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0,65 \\ \underline{5,39} \\ 11,44 \end{matrix} & 1,98 & 0,58 \\ & \begin{matrix} 0,50 \\ \underline{1,68} \\ 2,18 \end{matrix} & 0,28 \\ \text{đối xứng} & & 1,68 \end{bmatrix}$$



Hình 5.11



Hình 5.12

3) Tính nội lực ở trạng thái ngàm như trên hình (5.12). Đối với phần tử (2–3) có hình một phần tư vòng tròn, có thể dùng các công thức sau (tra ở sổ tay thiết kế) để tính nội lực (hình 5.12).

$$F_{z1} = F_{z2} = 0.7854\ wR;\ M_{x1} = -M_{y2} = -wR^2 = \frac{(0,248 + \alpha)}{(1,0 + 0,450\alpha)}$$

$$M_{y1} = -M_{x2} = -wR^2 \frac{0,036(1 + \alpha)}{(1 + 4,50\alpha)},\ \alpha = GJ/EI$$

4) Tính các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do: $F_1 = -(41,67 - 29,07) = -12,60$, $F_2 = -(0-2,25) = 2,25$); $F_3 = -(2,25) = -2,25$. Từ đó, suy ra hệ thức ma trận:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12,60 \\ 2,25 \\ -2,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Giải phương trình trên, ta được:

$$D = [d_1\ d_2\ d_3] = 10^{-4}\ [-1,476 \quad 2,524 \quad -1,250]'$$

5) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. Đối với phần tử (1–2), áp dụng (4.7). Đối với phần tử (2–3), thay các giá trị thành phần chuyển vị vừa tính ở trên vào (5.7), ta được:

Phần tử 1: $M_1 = -4{,}47$, $M_2 = -8{,}94$, $T_2 = -T_1 = -1{,}25$

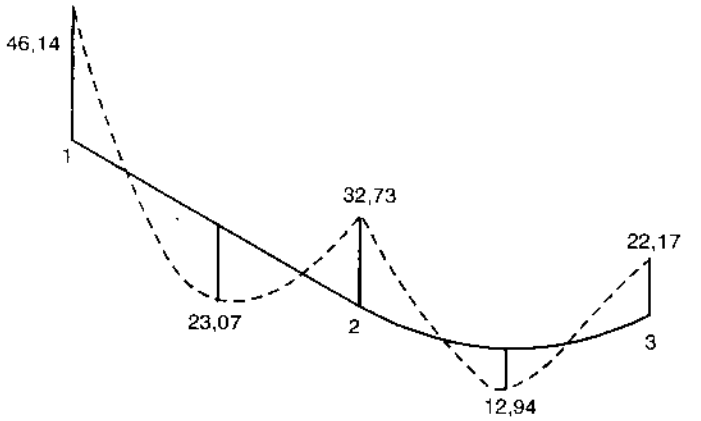
Phần tử 2: $M_1 = M_{x1} = -3{,}69$, $M_2 = My_2 = -6{,}90$, $T_2 = M_{x2} = -2{,}26$, $T_1 = M_{y1} = 0{,}96$.

6) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do.

Phần tử 1: $\begin{cases} M_1 = -41{,}67 - 4{,}47 = -46{,}4 \\ T_2 = -T_1 = -1{,}25 \end{cases}$ $\quad M_2 = 41{,}67 - 8{,}94 = 32{,}73$

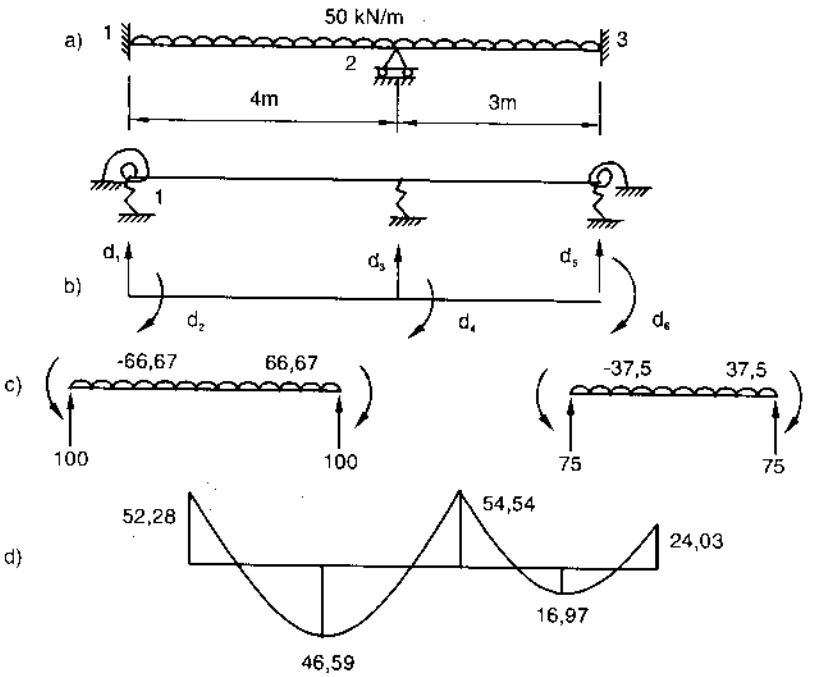
Phần tử 2: $\begin{cases} M_1 = -29{,}07 - 3{,}69 = -32{,}76 \\ T_2 = -1{,}25 + 0{,}96 = -1{,}29 \end{cases}$ $\quad M_2 = 29{,}07 - 6{,}91 = 22{,}16$, $T_2 = 2{,}25 - 2{,}25 = 0$

7) Biểu đồ mô men như trên hình (5.13)



Hình 5.13

Thí dụ 5.5: Cho một dầm liên tục như trên hình (5.14a). Độ cứng của các gối tựa đàn hồi như sau:



Hình 5.14

Độ cứng trên phương thẳng đứng bằng 10.10^4 kN/m

Độ cứng xoay bằng 4.10^4 kNm/radian.

$$I = 119{,}05.10^{-6}m^4,\ A = 6830.10^{-6}\ m^2,\ E = 210.106\ kN/m^2.$$

Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.

Giải:

1) Xác định bậc tự do. Vì bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc nên hệ có 6 bậc tự do như trên hình (5.14b).

2) Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (3.22).

Phần tử 1: dầm 1–2, đầu 1 tại nút 1, đầu 2 tại nút 2, l = 1, m =0

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 0{,}47 & -0{,}94 & -0{,}47 & -0{,}94 \\ -0{,}94 & 2{,}5 & 0{,}94 & 1{,}25 \\ -0{,}47 & 0{,}94 & 0{,}47 & 0{,}94 \\ -0{,}94 & 1{,}25 & 0{,}94 & 2{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: dầm 2–3, đầu 1 tại nút 2, đầu 2 tại nút 3, l = 1, m = 0

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 1{,}11 & -1{,}67 & -1{,}11 & -1{,}67 \\ -1{,}67 & 3{,}33 & 1{,}67 & 1{,}67 \\ -1{,}11 & 1{,}67 & 1{,}11 & 1{,}67 \\ -1{,}67 & 1{,}67 & 1{,}67 & 3{,}33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

3) Xác định phần đóng góp của các gối tựa đàn hồi vào các thành phần tải trọng.

– Tại nút 1: $F_1^* = -10.10^4 d_1$

mô men $F_2^* = -4.10^4 d_2$

– Tại nút 2: $F_3^* = -10.10^4 d_3$

– Tại nút 3: $F_5^* = -10.10^4 d_5$

mô men: $F_6^* = -4.10^4 d_6$

4) Tính ΣF_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 và chuyển F_1^*, F_2^*, F_3^*, F_5^*, F_6^* sang vế phải, ta được ma trận độ cứng toàn bộ K:

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} \begin{matrix}0,47\\ \underline{10,0^*}\\ 10,47\end{matrix} & -0,94 & -0,47 & -0,94 & 0 & 0 \\ & \begin{matrix}2,5\\ \underline{4,0^*}\\ 6,5\end{matrix} & 0,94 & 1,25 & 0 & 0 \\ & & \begin{matrix}0,47\\ 1,11\\ \underline{10,0^*}\\ 11,58\end{matrix} & \begin{matrix}0,94\\ \underline{-1,67}\\ -0,73\end{matrix} & -1,11 & -1,67 \\ & & & \begin{matrix}3,33\\ \underline{2,5}\\ 5,83\end{matrix} & 1,67 & 1,67 \\ & & & & \begin{matrix}1,11\\ \underline{10,0^*}\\ 11,11\end{matrix} & 1,67 \\ & & & & & \begin{matrix}3,33\\ \underline{4,0^*}\\ 7,33\end{matrix} \end{bmatrix}$$

Các số có đánh dấu "sao" ứng với phần đóng góp của các gối tựa đàn hồi.

5) Tạo ra trạng thái ngàm như trên hình (5.14c). Các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do tính như sau:

$F_1 = -(100) = -100;$ $\qquad F_2 = -(66,67) = 66,67$

$F_3 = -(100,0 + 75,0) = -175.0;$ $\qquad F_4 = -(66,67 - 37,50) = -29,17$

$F_5 = -(75.0) = -75,0;$ $\qquad F_6 = -(37,5) = -37,5$

6) Thay ΣF_i bằng F_i (i = 1, 2, ..., 6), ta được hệ thức ma trận:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100,0 \\ 66,67 \\ -175,0 \\ -29,17 \\ -75,0 \\ -37,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & K & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$D = [d_1, d_2\ d_3\ d_4\ d_5\ d_6]' = 10^{-4}\ [-9,94 \quad 13,07 \quad -18,57 \quad -8,15 \quad -6,48 \quad -6,01]'$

7) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (3.25):

Phần tử 1: $M_1 = 14,39$; $M_2 = -12,13$

Phần tử 2: $M_1 = -17,04$; $M_2 = -13,47$

8) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do:

Phần tử 1: $M_1 = -66,67 + 14,39 = -52,28$; $M_2 = 66,67 - 12,13 = 54,54$

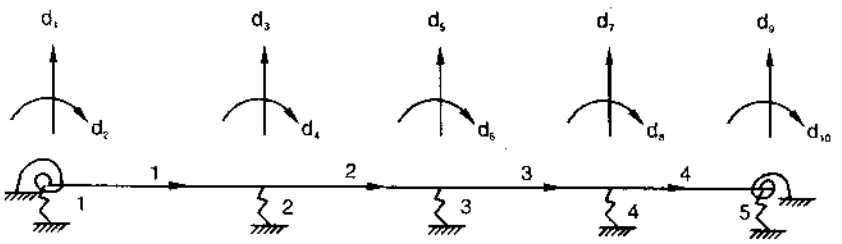
Phần tử 2: $M_1 = -37,5 - 17.04 = -54,54$; $M_2 = 37,5 - 13,47 = 24,03$

9) Biểu đồ mô men như trên hình (5.14d)

§5.4. Thuật toán lập trình tính dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi (CT26)

1. Các nguyên tắc cần được tuân thủ:

a) Xếp thứ tự các nút cũng như các thanh tăng dần từ trái sang phải hoặc từ phải sang trái (hình 5.15)



Hình 5.15

b) Mỗi nút có 2 bậc tự do tính như sau:

Ứng với nút i:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Chuyển vị thẳng đứng} & = 2i - 1 \\ \text{Chuyển vị xoay} & = 2i\end{array}\right\} \qquad (5.9)$$

Trên hình (5.15) ta có 5 chuyển vị thẳng đứng: d_1, d_3, d_5, d_7, d_9 và 5 chuyển vị xoay: d_2, d_4, d_6, d_8, d_{10}.

2. Nhập số liệu

– Số thanh (ST)

– Số nút (SN)

– Tổng số BTD (TBT)

– Các BTD triệt tiêu

– Số thứ tự các bậc tự do ở mỗi đầu thanh (d_1, d_2, d_3, d_4)

– Chiều dài các thanh

– Mô men đàn hồi (e)

– Mô men quán tính (mq)

– Hệ số đàn hồi trên các gối tựa đàn hồi (hệ số chuyển vị hoặc xoay)

– Số thanh chịu tải trọng phân bố đều (x)

– Số thanh chịu tải trọng tập trung (y)

– Số thứ tự các thanh chịu tải trọng phân bố đều (a_i)

– Cường độ tải trọng phân bố đều (q_i)

– Số thứ tự các thanh chịu tải trọng tập trung (b_i)

– Giá trị tải trọng tập trung (P_i)

– Vị trí tải trọng tập trung (a_{1i}, b_{1i})

– Số thanh không chịu tải trọng (z)

– Số thứ tự thanh không chịu tải trọng (c_i)

3) Xác định các tải trọng tập trung tại các nút do tải trọng phân bố đều hoặc tải trọng tập trung gây ra ở trạng thái ngàm. Phần này như đã trình bày trong CT23 (xem hình 3.21 chương ba).

4) Tính giá trị các phần tử của ma trận độ cứng riêng.

Theo (3.21) (chương ba), ma trận độ cứng riêng có dạng:

$$C_1 = \frac{12EI}{L^3} \qquad C_2 = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$C_3 = \frac{4EI}{L} \qquad C_4 = \frac{2EI}{L} \tag{5.10}$$

Các giá trị khoanh tròn có tính chất tích luỹ vì tại mỗi nút, có 2 thanh quy tụ.

5) Ghép các ma trận độ cứng riêng và ma trận độ cứng tổng thể. Có phần tử trong (5.10) trong hệ toạ độ riêng mang các chỉ số 1, 2, 3, 4,nhưng trong ma trận tổng thể S, chúng mang các chỉ số d_1, d_2, d_3, d_4 (tính theo 5.9). Chú ý đối với gối tựa có tính chất đàn hồi, các phần tử trên đường chéo chính của ma trận S cần được bổ sung thêm các hệ số đàn hồi tương ứng.

6) Giải hệ phương trình F = S.Q để được các giá trị chuyển vị và góc xoay.

7) Tính mô men tại các đầu thanh theo 3.21 (chương ba)

8) Tính tổng mô men (như trong CT23)

9) Tính lực cắt tại các đầu thanh theo (3.21)

10) Tính tổng lực cắt (như trong CT23).

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & -C_1 & C_2 \\ & C_3 & -C_2 & C_4 \\ & & C_1 & -C_2 \\ \text{đối xứng} & & & C_3 \end{bmatrix}$$

Chương sáu
HỆ CHỊU TÁC DỤNG CỦA CÁC NGUYÊN NHÂN NGOÀI TẢI TRỌNG

Trong thực tế, ngoài tải trọng còn có những nguyên nhân khác tác dụng lên kết cấu như sự biến thiên của nhiệt độ, sự lún của nền móng, sự chế tạo hoặc thi công không chính xác. Đối với hệ tĩnh định, những nguyên nhân này chỉ gây ra biến dạng và chuyển vị, không gây ra nội lực. Đối với hệ siêu tĩnh, các nguyên nhân này vừa gây ra chuyển vị, vừa gây ra nội lực. Trong chương này, sẽ nghiên cứu cách tính nội lực và chuyển vị trong hệ siêu tĩnh chịu tác dụng của các nguyên nhân nói trên.

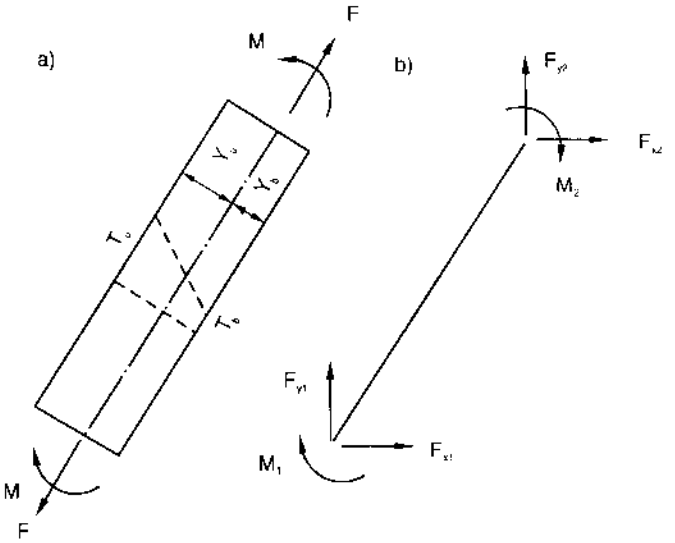
§6.1. Một số nguyên tắc chung

Về nguyên tắc chung, ta tạo ra trạng thái ngàm và trạng thái tự do như đã trình bày trong §3.2.5. Tác dụng của nhiệt độ, sự lún của nền móng và sự chế tạo không chính xác gây ra các phản lực tại các nút ở trạng thái ngàm, từ đó có thể xác định được các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do. Trình tự tính toán giống như đã trình bày trong các chương trước.

6.1.1. Hệ chịu tác dụng của nhiệt độ

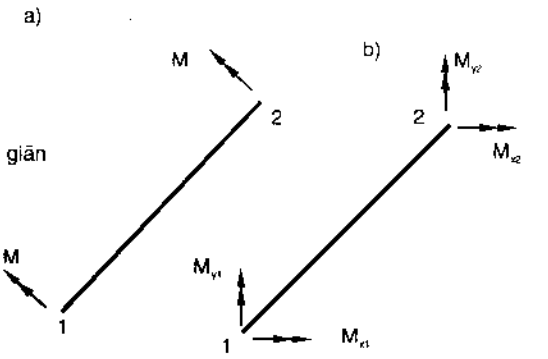
Giả sử một phần tử của hệ phẳng có nút cứng chịu tác dụng của nhiệt độ như trên hình (6.1a).

Gọi T_a, T_b là nhiệt độ tại thớ trên và thớ dưới của phần tử, Y_a là khoảng cách từ thớ trên đến trục của phần tử, Y_b là khoảng cách từ thớ dưới đến trục phần tử. Các thành phần nội lực trong hệ toạ độ riêng biểu thị trên hình (6.1a); các thành phần nội lực trong hệ toạ độ chung biểu thị trên hình (6.1b).



Hình 6.1

Đối với phần tử của hệ dầm giao nhau, các thành phần nội lực trong hệ toạ độ riêng và trong hệ toạ độ chung biểu thị trên hình (6.2a) và (6.2b) Ta giả thiết rằng nhiệt độ thay đổi theo quy luật tuyến tính trên suốt chiều cao của tiết diện (hình 6.1a).



Hình 6.2

Vì sự chênh lệch nhiệt độ giữa thớ trên và thớ dưới, phần tử chịu uốn. Ngoài ra, trên phương dọc trục, phần tử có biến dạng co hoặc giãn. Vì vậy, tác dụng của nhiệt độ tương đương với việc đặt lực dọc F trên phương dọc trục và các mômen uốn ở hai đầu của phần tử (hình 6.1a).

Lực kéo dọc F gây ra độ giãn đồng đều F/AE, mô men uốn M gây ra biến dạng giãn ở thớ dưới $(M/EI)Y_b$ và biến dạng nén ở thớ trên $(-M/EI)Y_u$. Vì ở trạng thái ngàm, các nút bị chốt nên biến dạng ở thớ trên và thớ dưới đều triệt tiêu. Do đó,

$$\alpha_t.T_u + \frac{F}{AE} - \frac{M}{EI}.Y_u = 0\ ;\ \alpha_t.T_b + \frac{F}{AE} + \frac{M}{EI}Y_b = 0$$

Giải 2 phương trình trên, ta được các phản lực ở trạng thái ngàm:

$$F = -AE\alpha_t \frac{T_u Y_b + T_b.Y_u}{Y_u + Y_b} \qquad (6.1)$$

Khi $Y_u = Y_b = 0{,}5h$:

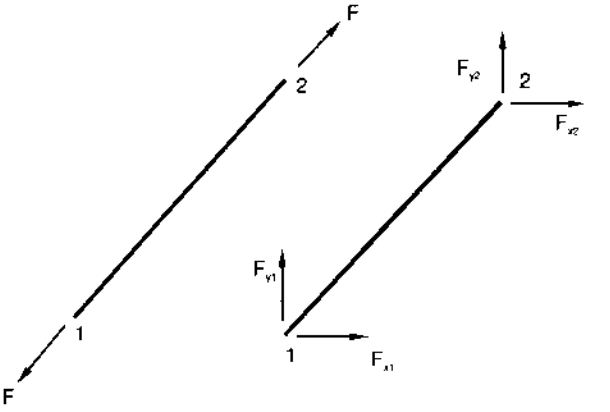
$$F = -AE\alpha_t \frac{T_u + T_b}{2} \qquad (6.1a)$$

$$M = EI\alpha_t \frac{T_u - T_b}{Y_u + Y_b} = EI\alpha_t \frac{T_u - T_b}{h} \qquad (6.2)$$

trong đó: h – chiều cao của tiết diện. Vậy:

a) Đối với phần tử trong hệ phẳng có nút cứng, các thành phần nội lực trong hệ toạ độ chung (hình 6.1b) như sau:

$$F_{x1} = -F\ell;\quad F_{y1} = -F.m;$$
$$F_{x2} = F\ell;\quad F_{y2} = F.m \qquad (6.3)$$
$$M_1 = M;\ M_2 = -M$$



Hình 6.3

b) Đối với phần tử trong hệ dầm giao nhau (hình 6.2), ta có:

$$\left.\begin{aligned} &F_{x1} = -M.m;\ F_{y1} = M.l;\ M_{x2} = M.m \\ &M_{y2} = -M.l;\ F_{z1} = F_{z2} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.4)$$

c) Đối với phần tử của hệ dàn phẳng (hình 6.3) (chỉ chịu lực dọc):

$$\left.\begin{aligned} &F = -AE.\alpha_t.T \\ &F_{x1} = -F.l \\ &F_{y1} = -F.m \\ &F_{x2} = F.l \\ &F_{y2} = F.m \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

Đối với phần tử của hệ giàn không gian:

$$\left.\begin{aligned} &F = -AE\alpha_t.T \\ &F_{x1} = -F.l;\ F_{y1} = -F.m;\ F_{z1} = -F.n \\ &F_{x2} = F.l;\ F_{y2} = F.m;\ F_{z2} = Fn \end{aligned}\right\} \qquad (6.6)$$

l, m, n – các côsin định hướng của phần tử trong hệ toạ độ chung; F_{z1}; F_{z2} – các thành phần nội lực trên phương trục z tại đầu 1 và đầu 2; T – độ biến thiên nhiệt độ.

6.1.2. Trường hợp chế tạo không chính xác

Một thanh chế tạo không chính xác có nghĩa là khi lắp ráp, thanh đó ngắn hơn hoặc dài hơn so với chiều dài quy định trong thiết kế. Để thanh có chiều dài quy định, ta kéo giãn nó ra hoặc đập co vào một đoạn Δ. Điều này tương đương với việc cho tác dụng lên thanh độ biến thiên nhiệt độ.

$$T = \frac{\Delta}{\alpha_t.L} \qquad (6.7)$$

Thay (6.7) vào (6.5) hoặc (6.6), ta sẽ tính được các thành phần phản lực ở trạng thái ngàm. Trình tự tính toán giống như đã trình bày trong chương hai.

6.1.3. Trường hợp gối tựa bị lún

Khi các gối tựa bị lún, một số phần tử có các thành phần chuyển vị đã biết trước. Có 2 cách giải:

– *Cách thứ nhất:* Căn cứ vào hệ thức ma trận giữa nội lực và chuyển vị của các phần tử liên quan đến chuyển vị của gối tựa bị lún, tính các thành phần phản lực tương ứng ở trạng thái ngàm, từ đó xác định các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do. Trình tự tính toán như đã trình bày trong các chương trước.

– *Cách thứ hai :* Giả sử F_i là thành phần tải trọng trên phương của thành phần chuyển vị d_i của gối tựa. Từ hệ thức ma trận giữa vectơ tải trọng và vectơ chuyển vị của các nút, ta có thể viết:

$$F_i = a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + ... + a_{ii}\, d_i + a_{i,i+1}d_{i+1} + ...$$

Nếu thay a_{ii} (hệ số của d_i) bằng một giá trị rất lớn trong khi vẫn giữ nguyên các hệ số khác thì:

$$F_i = a_{ii}^{*}\, d_i \text{ (xem giải thích ở cuối chương)}$$

a_{ii}^{*} – giá trị thay thế của hệ số a_{ii}.

Sau khi bổ sung F_i vào vectơ tải trọng, ta tính các thành phần chuyển vị như trong các chương trước đã làm.

§6.2. Thí dụ

Thí dụ 6.1: Đầu đề giống thí dụ (2.2), hình (2.7) nhưng thay tải trọng bằng tác dụng của nhiệt độ. Nhiệt độ trong toàn bộ các thanh giàn đều tăng 20°. Cho $\alpha_t = 10.10^{-6}/°C$.

Giải:

1) Bậc tự do hoàn toàn giống như trong thí dụ (2.2).

2) Căn cứ vào (6.5), tính các thành phần phản lực ở trạng thái ngàm.

Phần tử 1: $F = -84$.

$F_{x1} = F_1 = 0$; $F_{y2} = F_2 = 84$.

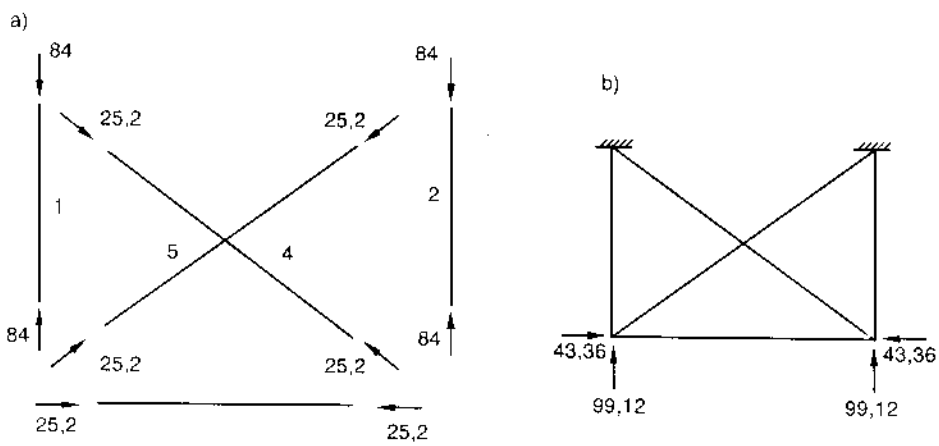
Phần tử 2: $F = -84$; $F_{x2} = F_3 = 0$; $F_{y2} = F_4 = 84$

Phần tử 3: $F = -25{,}2$; $F_{x1} = F_1 = 25{,}2$; $F_{y1} = F_2 = 0$; $F_{x2} = F_3 = -25{,}2$; $F_{y2} = F_4 = 0$

Phần tử 4: $F = -25{,}2$; $F_{x2} = F_3 = -20{,}16$; $F_{y2} = F_4 = 15{,}12$

Phần tử 5: $F = -25{,}2$; $F_{x2} = F_1 = 20{,}16$; $F_{y2} = F_2 = 25{,}12$

Giá trị các phản lực ghi trên hình (6.4).



Hình 6.4

3) Tính tổng phản lực tại các nút ở trạng thái ngàm:

$$\Sigma F_1 = 0 + 25{,}2 + 20{,}16 = 45{,}36, \quad \Sigma F_2 = 84{,}0 + 0 + 15{,}12 = 99{,}12$$

$$\Sigma F_3 = 0 - 25{,}2 - 20{,}16 = -45{,}36, \quad \Sigma F_4 = 84 + 0 + 15{,}12 = 99{,}12$$

Kết quả ghi trên hình (6.4b).

4) Tính các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do:

$$F_1 = -(45{,}36) = -45{,}36, \qquad F_2 = -(99{,}12) = -99{,}12$$

$$F_3 = -(-45{,}36) = 45{,}36, \qquad F_2 = -(99{,}12) = -99{,}12$$

Vậy ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45{,}36 \\ -99{,}12 \\ 45{,}36 \\ -99{,}12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & \mathbf{K} & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng toàn bộ K hoàn toàn giống như trong thí dụ (2.2)

5) Giải hệ phương trình trên ta được:

$$D = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4]' = [-0{,}4775 \quad -0{,}6262 \quad 0{,}4775 \quad -0{,}6262]'$$

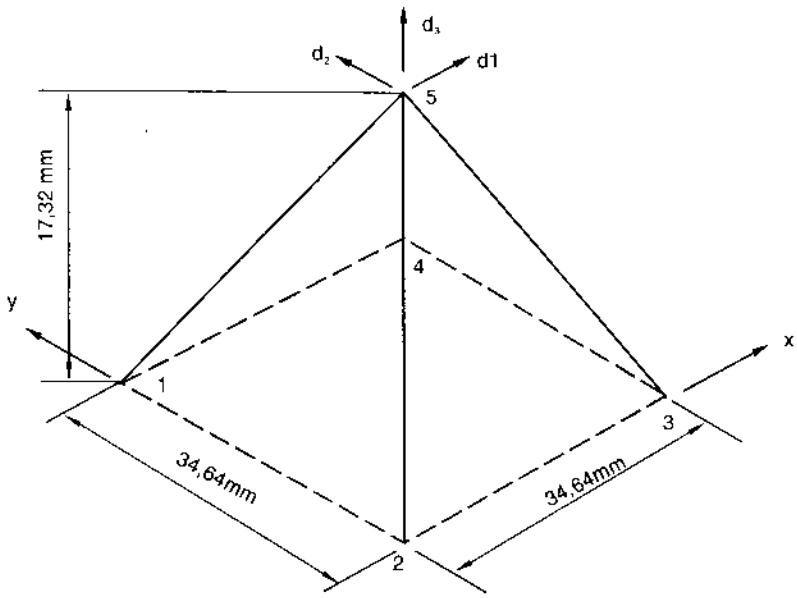
6) Tính lực dọc trong các thanh giàn do chuyển vị gây ra theo (2.24). Kết quả ghi trong bảng

7) Tính tổng lực dọc = lực dọc ở trạng thái ngàm + lực dọc do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. Kết quả ghi trong bảng sau:

Ph.tử	Lực dọc (trạng thái ngàm)	Lực dọc (trạng thái tự do)	Tổng lực dọc
1	−84,0	87,65	3,65
2	−84,0	87,65	3,65
3	− 25,2	30,08	4,88
4	−25,2	19,09	−6,11
5	−25,2	19,09	−6,11

Thí dụ 6.2: Cho một giàn không gian như trên hình (6.5). Thanh 1−5 dài hơn chiều dài quy định 0,1%. Cho E = 210 kN/mm^2, L = 3000 mm, A = 231 mm^2. Hệ thức ma trận giữa vectơ tải trọng và vectơ chuyển vị như sau:

$$\begin{bmatrix} \Sigma F_1 \\ \Sigma F_2 \\ \Sigma F_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 21,56 & 0 & 0 \\ & 21,56 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 21,56 \end{bmatrix}}_{K} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$



Hình 6.5

Các số liệu ban đầu ghi trong các bảng sau:

Toạ độ nút

Nút	x	y	z
1	0	3464	0
2	0	0	0
3	3464	0	0
4	3464	3464	0
5	1732	1732	1732

Bậc tự do

Nút	u	v	w
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	d_1	d_2	d_3

Vị trí đầu 1, đầu 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	1	5
2	2	5
3	3	5
4	4	5

Côsin định hướng:

Phần tử 1: $l = -m = n = 1/\sqrt{3}$

Phần tử 2: $l = m = n = 1/\sqrt{3}$

Phần tử 3: $-l = -m = n = 1/\sqrt{3}$

Phần tử 3: $-l = -m = n = 1/\sqrt{3}$

Tính nhiệt độ tương đương theo (6.7):

$$\Delta = \frac{L}{1000} \cdot T = \frac{\Delta}{\alpha_t . L} = \frac{1}{1000.10.10^{-6}} = 100^oC$$

1) Tính các phản lực ở trạng thái ngàm theo (6.6):

Phần tử 1: $F = -42$ kN; $F_{x2} = F_1 = -24,25$; $F_{y2} = F_2 = 24,25$; $F_{z2} = F_3 = -24,25$.

Các phần tử 2, 3, 4 chế tạo chính xác nên không phát sinh phản lực.

2) Tính tổng phản lực tại các nút ở trạng thái ngàm: $\Sigma F_1 = -24,25$, $\Sigma F_2 = 24,25$, $\Sigma F_3 = -24,25$. Từ đó, tính các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do:

$$F_1 = -(-24,25) = 24,25, \qquad F_2 = -(24,25) = -24,25, \qquad F_3 = -(-24,25) = 24,25$$

3) Từ các kết quả trên, ta có hệ thức ma trận:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,25 \\ -24,25 \\ 24,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$D = [d_1 \quad d_2 \quad d_3]' = [1,125 \quad -1,125 \quad 1,125]'$$

4) Tính lực dọc do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (2.24a). Kết quả ghi trong bảng.

5) Tính tổng lực dọc = lực dọc ở trạng thái ngàm + lực dọc ở trạng thái tự do. Kết quả ghi trong bảng sau:

Ph.tử	Lực dọc (trạng thái ngàm)	Lực dọc (trạng thái tự do)	Tổng lực dọc
1	−42,0	31,5	−10,5
2	0	10,5	10,5
3	0	−10,5	−10,5
4	0	10,5	10,5

Thí dụ 6.3: Đầu đề giống thí dụ (3.5) nhưng thay tải trọng bằng tác dụng của nhiệt độ. Nhiệt độ bằng +10°C tại thớ ngoài của các phần tử 1, 2, 4 (xem hình 3.14). Cho $Y_u = Y_b = 0,5h$ đối với 3 phần tử nói trên. Chiều cao tiết diện h = 0,254 m đối với các phần tử 1 và 4, h = 0,305 m đối với phần tử 2. Yêu cầu tính toán trong 2 trường hợp:

a) Xét đến ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.

b) Giống trường hợp (a) nhưng bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc.

Hệ số giãn nở $\alpha_t = 11.10^{-6}/^oC$.

Giải

Bậc tự do hoàn toàn giống như trong thí dụ (3.5). Các số liệu ban đầu đã được thống kê trong thí dụ (3.5).

1) Tính các phản lực ở trạng thái ngàm theo (6.3):

Phần tử 1: $T_u = 10$; $T_b = 0$ $F = -54,75$; $M = 5,04$.

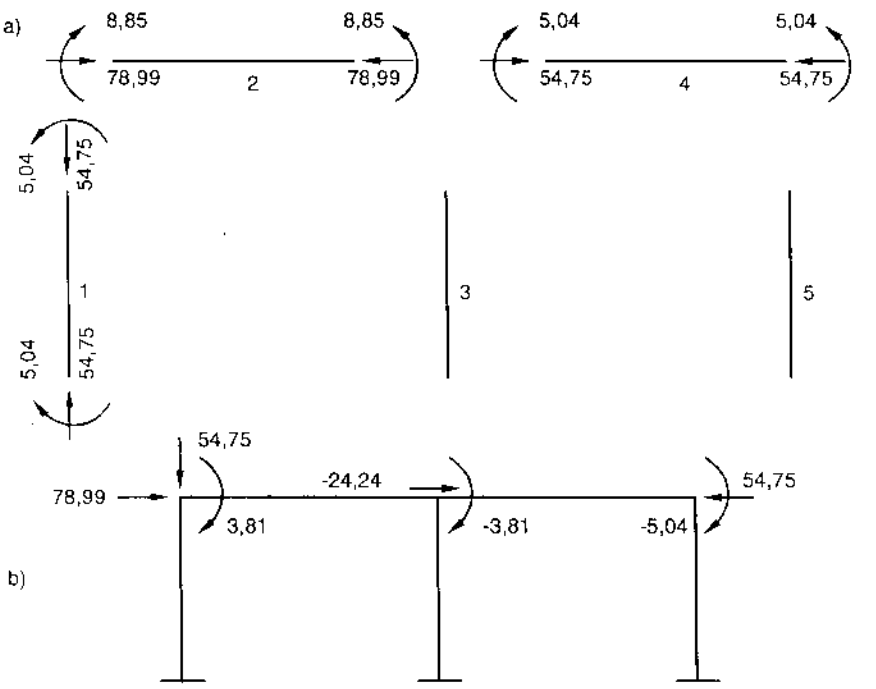
$F_{x2} = F_1 = 0$; $F_{y2} = F_2 = -54,75$; $M_2 = F_3 = -5,04$ trường hợp (a)

$F_4 = 0$; $F_1 = -5.04$ trường hợp (b)

Phần tử 2:

$$\left.\begin{array}{lll} T_u = 10; T_b = 0; & F = -78,89; & M = 8,85 \\ F_{x1} = F_1 = 78,99; & F_{y1} = F_2 = 0; & M_1 = F_3 = 8,85 \\ F_{x2} = F_4 = -78,99; & F_{y2} = F_5 = 0; & M_2 = F_6 = -8,85 \end{array}\right\} \text{(trường hợp a)}$$

$F_4 = 78,99$; $F_1 = 8,85$; $F_4 = -78,99$; $F_2 = -8,85$ trường hợp (b)



Hình 6.6

Phần tử 4: $T_u = 10$; $T_b = 0$; $F = -54,75$; $M = 5,04$

$$\left.\begin{array}{lll} F_{x1} = F_4 = 54,75; & F_{y1} = F_5 = 0; & M_1 = F_6 = 5,04 \\ F_{x2} = F_7 = -54,75; & F_{y2} = F_8 = 0; & M_2 = F_9 = -5,04 \end{array}\right\} \text{(trường hợp a)}$$

$F_4 = 54,75$; $F_2 = 5,04$; $F_4 = -54,75$; $F_3 = -5,04$ (trường hợp b)

Kết quả tính toán ghi trên hình (6.6a).

2) Tính tổng phản lực tại các nút ở trạng thái ngàm:

Trường hợp (a): $\Sigma F_1 = 78,99$, $\Sigma F_2 = -54,75$; $\Sigma F_3 = -5,04 + 8,85 = 3,81$,
$\Sigma F_4 = -78,99 + 54,75 = -24,24$, $\Sigma F_5 = 0$, $\Sigma F_6 = -8,85 + 5,04 = -3,81$,
$\Sigma F_7 = -54,75$, $\Sigma F_8 = 0$, $\Sigma F_9 = -5,0$.

Trường hợp (b): $\Sigma F_1 = -5,04 + 8,85 = 3,81$, $\Sigma F_2 = -8,85 + 5,04 = -3,81$,
$\Sigma F_3 = -5,04$, $\Sigma F_4 = -78,99 + 78,99 + 54,75 - 54,75 = 0$.

Kết quả ghi trên hình (6.6b).

3) Tính các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do. Căn cứ vào các kết quả trên, ta có:

Trường hợp (a): $F_1 = -(78,99) = -78,99$; $F_2 = -(-54,75) = 54,75$,
$F_3 = -(3,81) = -3,81$, $F_4 = -(24,24) = 24,24$, $F_5 = 0$,
$F_6 = -(-3,81) = 3,81$, $F_7 = -(-54,75) = 54,75$, $F_8 = 0$,
$F_9 = -(-5,0) = 5,0$.

Trường hợp (b): $F_1 = -(3,81) = -3,81$, $F_2 = -(-3,81) = 3,81$, $F_3 = -(-5,04) = 5,04$, $F_4 = 0$.
Từ các kết quả trên, ta suy ra hệ thức ma trận:

Trường hợp (a):

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -78,99 \\ 54,75 \\ -3,81 \\ 24,24 \\ 0 \\ 3,81 \\ 54,75 \\ 0 \\ 5,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{bmatrix}$$

Trường hợp (b):

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,81 \\ 3,81 \\ 5,04 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K^* & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Trong đó, ma trận độ cứng tổng thể K và K* hoàn toàn giống như trong thí dụ (3.5)

4) Giải hệ phương trình trên, ta được:

Trường hợp (a):

$$D = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6 \quad d_7 \quad d_8 \quad d_9]' =$$

$$= 10^{-4}[-0{,}88 \quad 1{,}633 \quad -1{,}228 \quad 1{,}329 \quad 0{,}087 \quad 1{,}293 \quad 3{,}54 \quad -0{,}065 \quad 3{,}122]'$$

Trường hợp (b):

$$D = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4]' = 10^{-4}[-1{,}228 \quad 0{,}963 \quad 2{,}580 \quad 0{,}505]'$$

5) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (3.25). Kết quả ghi trong bảng.

6) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả ghi trong bảng sau:

Trường hợp (a)

Ph.tử	Nội lực (trạng thái ngàm)		Nội lực (trạng thái tự do)			Tổng nội lực		
	F	$M_1 = -M_2$	F	M_1	M_2	F	M_1	M_2
1	−54,75	5,04	54,17	−0,16	−1,11	0,58	4,88	−6,15
2	−78,99	8,85	79,41	−2,70	0,40	0,42	6,15	−8,45
3	0	0,	2,31	−0.04	0,48	2,31	−0.04	0,48
4	−54,75	5,04	55,02	2,93	4,0	0,27	7,97	−1,04
5	0	0	−1,73	−0,22	1,04	−1,73	−0,22	1,04

Trường hợp (b)

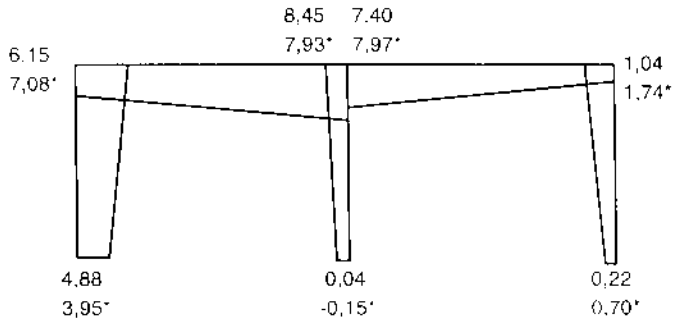
Ph.tử	Nội lực (trạng thái ngàm)	Nội lực (trạng thái tự do)		Tổng nội lực	
	$M_1 = -M_2$	M_1	M_2	M_1	M_2
1	5,04	−1,09	−2,04	−3,95	−7,08
2	8,85	−1,77	0,92	7,08	−7,93
3	0	0,15	0,54	0,15	0,54
4	5,04	2,36	3,30	7,40	−1,74
5	0	0,70	1,74	0,70	1,74

Trong trường hợp (b), không thể tính trực tiếp lực dọc vì giả thiết biến dạng dọc trục triệt tiêu.

7) Biểu đồ mô men vẽ trên hình (6.7). Các số có đánh dấu "sao" ứng với trường hợp (b) (bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc). Qua các kết quả tính toán trong thí dụ trên, ta thấy sai số tính toán giữa hai trường hợp không thể bỏ qua, do đó, khi tính hệ chịu tác dụng của nhiệt độ, cần phải xét đến ảnh hưởng của biến dạng dọc.

Thí dụ 6.4:

Đầu đề giống thí dụ (4.1) nhưng thay tải trọng bằng tác dụng của nhiệt độ. Nhiệt độ bằng 10°C tại thớ trên của các phần tử. Cho $\alpha_t = 11.10^{-6}/°C$, chiều cao tiết diện của các phần tử bằng 0,5 m. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.



Hình 6.7

Giải:

Bậc tự do hoàn toàn giống như trong thí dụ (4.1). Các số liệu ban đầu đã được thống kê trong thí dụ (4.1).

1) Tính các phản lực ở trạng thái ngàm theo (6.4).

Phần tử 1: $T_u = 10; T_b = 0$

$M = 8,01; F_{z2} = F_1 = 0; M_{x2} = F_2 = 8,01$

$F_{y2} = F_3 = -8,01$

Phần tử 2: $T_u = 10; T_b = 0$

$M = 8,01; F_{z2} = F_1 = 0; M_{x2} = F_2 = 8,01$

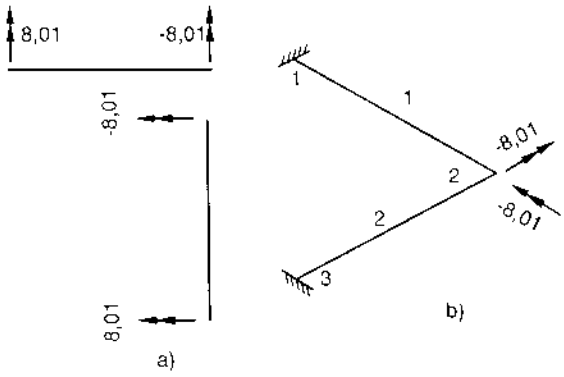
$F_{y2} = F_3 = 0$

Kết quả ghi trên hình (6.8a)

Phản lực tại nút 2 tính như sau:

$\Sigma F_1 = 0; \Sigma F_2 = -8,01; \Sigma F_3 = -8,01.$

Kết quả ghi trên hình (6.8b).



Hình 6.8

2) Căn cứ vào các kết quả trên, tính các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do:

$$F_1 = 0; F_2 = -(-8,01) = 8,01; F_3 = -(-8,01) = 8,01$$

Ta có hệ thức ma trận:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8,01 \\ 8,01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng tổng thể K hoàn toàn giống như trong thí dụ (4.1).

3) Giải hệ phương trình trên, ta được:

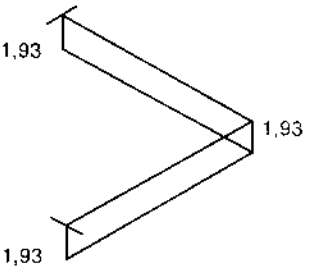
$$D = [d_1 \quad d_2 \quad d_3]' = 10^{-3}[-1,335 \quad -0,667 \quad 0,667]'$$

4) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (4.6). Kết quả ghi trong bảng.

5) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả ghi trong bảng sau:

Ph.tử	Nội lực (trạng thái ngàm)	Nội lực (trạng thái tự do)			Tổng nội lực		
	$M_1 = -M_2$	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	8,01	−6,07	6,07	−1,93	1,93	−1,93	−1,93
2	8,01	−6,07	6,07	1,93	1,93	−1,93	1,93

6) Biểu đồ mô men vẽ trên hình (6.9)



Hình 6.9

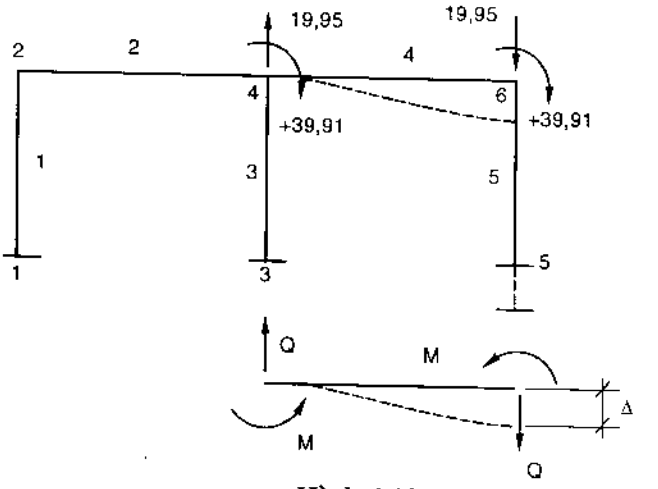
Thí dụ 6.5: Đầu đề giống thí dụ (3.5) nhưng thay tải trọng bằng sự lún của gối tựa. Gối tựa ở nút 5 (xem hình 3.14) lún xuống trên phương thẳng đứng một đoạn bằng 0,01m. Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc.

Giải:

Ta giải bài toán trên bằng 2 cách.

Cách thứ nhất

1) Ở trạng thái ngàm, cho 2 nút 5 và 6 chuyển vị trên phương thẳng đứng một đoạn bằng 0,01m (bỏ qua biến dạng dọc của phần tử 5). Phần tử 4 có chuyển vị thẳng tương đối $\Delta = 0,01$m (hình 6.10 b) do đó:



Hình 6.10

$$M = \frac{6EI}{L^2(1+\beta)} = 39,91$$

$$Q = 2M/L = 19,95$$

Các phản lực ở trạng thái ngàm ghi trên hình (6.10b)

2) Tính các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do:

$$F_1 = 0; \quad F_2 = -(-39,91) = 39,91; \quad F_3 = -(-39,91) = 39,91; \quad F_4 = 0.$$

Ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 39,91 \\ 39,91 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & K & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Ma trận K hoàn toàn giống như trong thí dụ (3.5)

3) Giải hệ phương trình trên ta được:

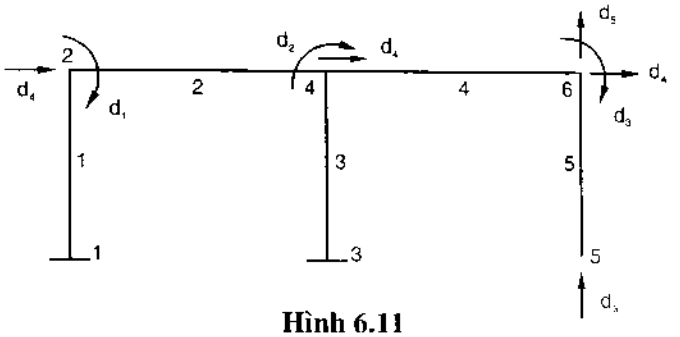
$$D = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4]' = 10^{-3}[-0,0136 \quad 0,816 \quad 2,179 \quad 1,163]'$$

4) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (3.25).

5) Tính tổng nội lực. Kết quả giống như kết quả tính theo cách thứ hai.

Cách thứ hai

Chuyển vị của gối tựa được xem như bậc tự do bổ sung. Chẳng hạn đối với hệ đã cho, ta có 5 bậc tự do (hình 6.11) (trên hình 3.14, chỉ có 4 bậc tự do)



Hình 6.11

1) Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử. Vì cần bổ sung thêm bậc tự do d_5 và thành phần tải trọng tương ứng F_5 nên ta biến đổi ma trận độ cứng của các phần tử đã được suy ra trong thí dụ (3.5) như sau:

– Phần tử 1, 2, 3: hoàn toàn giống như trong thí dụ (3.5)

– Phần tử 4: $V_1 = V_2 = d_5$, $F_{y1} = F_{y2} = F_5$

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 248,85 & 0 & -248,85 & 0 & 0 \\ 0 & 10,89 & 0 & 3,99 & 5,07 \\ -248,85 & 0 & 248,85 & 0 & 0 \\ 0 & 3,99 & 0 & 2,0 & 3,99 \\ 0 & 5,07 & 0 & 3,99 & 10,89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

– Phần tử 5: $v_1 = v_2 = d_5$, $F_{y1} = F_{y2} = F_5$

$$\begin{bmatrix} F_5 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 266,0 & 0 & -266,0 & 0 \\ 0 & 2,42 & 0 & -3,63 \\ -266,0 & 0 & 266,0 & 0 \\ 0 & -3,63 & 0 & 7,46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_5 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

2) Tính ΣF_i, i = 1, 2,... 5 và lập ma trận độ cứng tổng thể K:

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} \text{ma trận cấp } 4\times4 & 0{,}0 & & & \\ \text{trong thí dụ (3.4)} & 3{,}99 & & & \\ & 3{,}99 & & & \\ & 0 & & & \\ & 2{,}0 & +266{,}0 & & \\ & & -266{,}0 & & \\ & & +266{,}0 & & \\ & & -266{,}0 & & \\ \text{đối xứng} & & & 2{,}0 & \end{bmatrix}$$

3) Tính các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do:

$F_1 = 0$; $F_2 = 0$; $F_4 = 0$; F_5 = lực cần thiết để di chuyển các nút 5 và 6 một đoạn $d_5 = -0.01$m. Lực F_5 vẫn chưa biết.

4) Tính các thành phần chuyển vị

Thực ra, chỉ có 4 thành phần chuyển vị d_1, d_2, d_3, d_4 cần phải tìm, thành phần chuyển vị d_5 đã biết. Nhưng thành phần tải trọng F_5 chưa biết nên không thể giải được hệ phương trình trên. Có 2 cách giải:

a) Sắp xếp lại 4 phương trình đầu tiên bằng cách chuyển số hạng chứa thừa số d_5 sang vế phải. Tiếp theo, giải hệ phương trình đó, ta sẽ được giá trị của d_1, d_2, d_3, d_4. Cách làm này không phù hợp với những ma trận cấp cao.

b) Biến đổi phương trình trong đó vế phải chưa biết, chẳng hạn phương trình cuối cùng trong thí dụ này:

$$10^3(0{,}0d_1 + 3{,}99d_2 + 3{,}99d_3 + 0{,}0d_4 + 2{,}0.d_5) = F_5 \text{ (chưa biết)}$$

Thay hệ số $2{,}0.10^3$ của d_5 bằng một số rất lớn* chẳng hạn như $2{,}0.10^3.10^6$, các hệ số còn lại vẫn giữ nguyên. Ta có:

$$F_5 = 2{,}0.10^3.10^6.d_5 = 2{,}0.10^9.(-0{,}01) = -2{,}0.107^*$$

Thay giá trị của F_5 vào vectơ tải trọng trong hệ thức ma trận F = K.D và giải hệ phương trình này, ta được kết quả:

---

* Chú thích:

Ta hãy tưởng tượng nút 5 tựa lên một lò xo độ cứng K_f. Toàn bộ lực cần để di chuyển nút 5 bằng:

$F_5 = (K_f + K_S)d_5$ trong đó K_S = lực cần để di chuyển kết cấu một đoạn bằng đơn vị. Phương trình trên có thể viết:

$$F_5 = K_f.d_5\left(1 + \frac{K_S}{K_f}\right) \qquad \text{(a)}$$

Ta chưa rõ giá trị chính xác của K_S là bao nhiêu nhưng chắc chắn là nó bé hơn giá trị của phần tử ứng với d_5 trên đường chéo chính của ma trận độ cứng. Nếu K_S/K_f rất bé, $F_5 = K_f.d_5$. Vậy bằng cách chọn giá trị hợp lý của K_S/K_f, ta có khả năng xác định được giá trị của lực trên phương của chuyển vị đã cho trước. Trong thí dụ trên, ta cho K_f một số rất lớn chẳng hạn như $K_f = 10^6$:

Từ đó : $F_5 = K_f\, d_5$ vì K_f rất lớn (xem a)

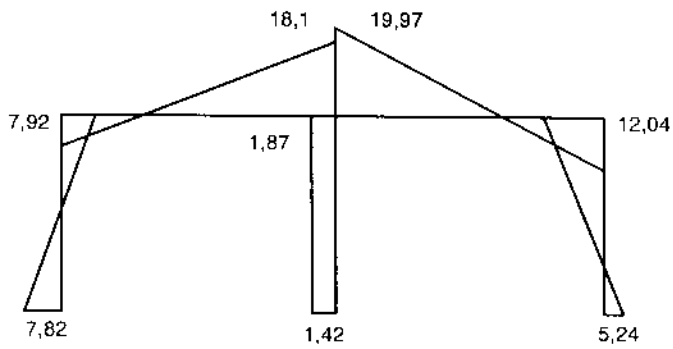
$$D = \{d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5\}' = 10^{-3}[-0{,}0136 \quad 0{,}816 \quad 2{,}179 \quad 1{,}163 \quad -10{,}0]'$$

5) Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (3.25).

6) Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả ghi trong bảng sau:

Ph.tử	M_1	M_2
1	−7,82	−7,92
2	7,92	18,10
3	−1,42	1,87
4	−19,97	−12,04
5	3,24	12,04

6) Biểu đồ mô men vẽ trên hình (6.12)



Hình 6.12

§6.3. Thuật toán lập trình tính giàn phẳng chịu tác dụng của nhiệt độ (CT27)

1. Các nguyên tắc cần tuân thủ

Nội dung như đã trình bày trong CT21 (chương 2)

2. Nhập các số liệu:

– Số nút (SN)

– Số thanh (ST)

– Số bậc tự do có chuyển vị (Sbt)

– Các côsin định hướng *l*, m.

– Số thứ tự các bậc tự do ở mỗi đầu thanh (d_1, d_2, d_3, d_4, tính theo công thức 2.28 chương hai)

– Mô đun đàn hồi (C)

– Diện tích tiết diện (A)

– Hệ số giãn nở (hg)

– Nhiệt độ (T)

3. Tính các phần tử của ma trận độ cứng riêng:

Như đã trình bày trong CT21 (xem hình 2.13 chương hai)

4. Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể.

Như đã trình bày trong CT21 (chương hai)

5. Xác định các tải trọng tập trung do nhiệt độ gây ra:

Khi nhiệt độ tăng (T > 0), thanh chịu lực nén F (F < 0). Ngược lại, khi T < 0, F > 0.

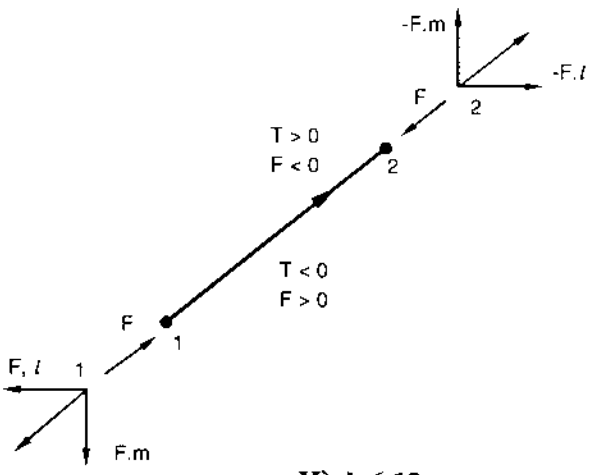
Các thành phần tải trọng do nhiệt độ gây ra tại các nút tính như sau (hình 6.13).

Tại nút 1:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tải trọng nằm ngang} = F.l,\\ \text{Tải trọng thẳng đứng} = F.m\end{array}\right\} \quad (6.8)$$

Tại nút 2:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tải trọng nằm ngang} = -F.l,\\ \text{Tải trọng thẳng đứng} = -F.m\end{array}\right\} \quad (6.9)$$



Hình 6.13

Các thành phần tải trọng trên được xem như các thành phần ngoại lực tác dụng lên giàn.

6. Chia khối ma trận độ cứng tổng thể S để tính chuyển vị và các phản lực

Như đã trình bày trong CT21.

7. Giải hệ phương trình F = S.Q để tính chuyển vị

8. Tính lực dọc theo (2.24) (chương hai)

9. Tính phản lực

§6.4. Thuật toán lập trình tính giàn phẳng chế tạo không chính xác (CT28)

1. Các nguyên tắc cần được tuân thủ:

Như đã trình bày trong CT21 (chương hai)

2. Nhập số liệu

– Số nút (SN)

– Số thanh (ST)

– Số bậc tự do có chuyển vị (Sbt)

– Chiều dài thanh (cd)

– Các côsin định hướng l, m.

– Số thứ tự các bậc tự do ở mỗi đầu thanh (d_1, d_2, d_3, d_4)

– Mô đun đàn hồi (C)

– Diện tích tiết diện (A)

– Số lượng thanh giàn có độ dài lớn hơn hoặc ngắn hơn so với thiết kế.

– Số thứ tự các thanh giàn có chiều dài lớn hơn hoặc ngắn hơn so với thiết kế.

– Độ ngắn hơn hoặc độ dài hơn của các thanh giàn chế tạo không chính xác.

3. Tính các phần tử của ma trận độ cứng riêng

Xem CT21 (chương hai)

4. Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể. Xem CT21 (chương hai).

5. Xác định các tải trọng tập trung do chế tạo không chính xác gây ra

Độ dài ra hoặc độ co ngắn Δ của thanh giàn so với chiều dài thiết kế, gây ra lực nén hoặc lực kéo và tương đương với việc gia nhiệt độ:

$$T = \frac{\Delta}{\alpha.L} \qquad (6.10)$$

Độ co ngắn ($\Delta < 0$) gây ra nhiệt độ âm ($T < 0$)

Độ dài ra ($\Delta > 0$) gây ra nhiệt độ dương ($T > 0$)

Cách xác định các thành phần tải trọng như đã trình bày trong mục 5 CT27).

6. Chia khối ma trận. Xem CT2 (chương hai)

7. Giải hệ phương trình F = S.Q

8. Tính lực dọc

Chương bảy
DẠNG MA TRẬN CỦA BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH TRONG HỆ PHẲNG CÓ NÚT CỨNG

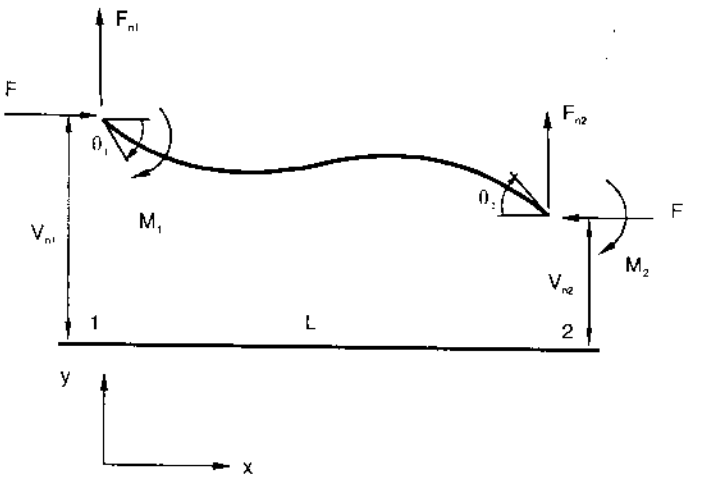
Trong trường hợp lực dọc khá lớn và biến dạng của phần tử cũng khá lớn, lực dọc có thể gây ra mô men uốn phụ do tác dụng lệch tâm của nó. Vì vậy, mô men uốn không những chỉ phụ thuộc vào tải trọng ngang (đặt vuông góc với trục của phần tử) mà còn phụ thuộc vào lực dọc. Bài toán trở nên phi tuyến, ta gọi nó là bài toán ổn định.

Một kết cấu ổn định khi một lực kích thích khá bé chỉ gây ra một biến dạng tương ứng khá bé. Ngược lại, một kết cấu mất ổn định khi một lực kích thích khá bé cũng đủ gây ra một biến dạng tương ứng vô cùng lớn. Sự ổn định hoặc mất ổn định của kết cấu phụ thuộc vào giá trị lực dọc trong các phần tử của nó. Tải trọng làm cho kết cấu mất ổn định gọi là *tải trọng tới hạn*.

Trong phần sau, ta sẽ nghiên cứu cách tính tải trọng tới hạn của hệ phẳng có nút cứng

§7.1. Ma trận độ cứng của một phần tử

Giả sử một phần tử bất kỳ có 2 đầu 1 và 2 trong hệ phẳng có nút cứng như trên hình (7.1). Gọi: F_{n1}, F_{n2} – các thành phần nội lực vuông góc với trục phần tử tại đầu 1 và đầu 2; V_{n1}, V_{n2} – các thành phần chuyển vị tương ứng; M_1, M_2 – mô men uốn tại đầu 1 và đầu 2; θ_1, θ_2 – các góc xoay tương ứng; F– lực nén dọc.



Hình 7.1

Trong hệ toạ độ riêng (hình 7.1), ta có phương trình vi phân:

$$EI\frac{d^4V}{dx^4} + F\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

V – chuyển vị trên phương vuông góc với trục phần tử

Lời giải của phương trình vi phân thuần nhất trên có dạng:

$$V = C_1\cos kx + C_2\sin kx + C_3kx + C_4 \qquad (a)$$

trong đó: C_1, C_2, C_3, C_4 – hằng số

$$k^2 = F/EI$$

Các điều kiện biên ứng với phần tử trên hình (7.1):

$$\left.\begin{aligned} V = V_{n1} \text{ và } \frac{dV}{dx} = -\theta_1 \text{ khi } x = 0 \\ V = V_{n2} \text{ và } \frac{dV}{dx} = -\theta_2 \text{ khi } x = L \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Căn cứ vào (a) và (b), ta tìm được:

$$D.C_1 = (V_{n1} - V_{n2})(1-c) + L\theta_1\left(c - \frac{s}{kL}\right) + \theta_2.L\left(\frac{s}{kL} - 1\right)$$

$$D.C_2 = (V_{n2} - V_{n1}).s + \theta_1 L\left[s - \frac{(1-c)}{kL}\right] + \theta_2.L\frac{(1-c)}{kL}$$

$$D.C_3 = (V_{n1} - V_{n2}).s + \theta_1 L\frac{(1-c)}{kL} - \theta_2.L\frac{(1-c)}{kL}$$

$$D.C_4 = V_{n1}(1 - c - kL.s) + V_{n2}(1-c) + \theta_1 L\left(\frac{s}{kL} - c\right) + \theta_2.L\left(1 - \frac{s}{kL}\right)$$

$$D = 2(1 - c) - kL.s; \qquad s = \sin kL; \qquad c = \cos kL$$

Các thành phần nội lực tại các đầu của phần tử tính như sau:

$$M_1 = EI\frac{d^2V}{dx^2}, \quad F_{n1} = EI.\frac{d^3V}{dx^3} + F.\frac{dV}{dx} \qquad \text{khi } x = 0$$

$$M_2 = -EI\frac{d^2V}{dx^2}, \quad F_{n2} = -EI.\frac{d^3V}{dx^3} - F.\frac{dV}{dx} \qquad \text{khi } x = L$$

Sau khi thực hiện các phép tính, ta được hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của phần tử trong hệ toạ độ riêng như sau:

$$\begin{bmatrix} F_{n1} \\ M_1 \\ F_{n2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{T_1}{L^2} & -\frac{Q_1}{L} & -\frac{T_1}{L^2} & -\frac{Q}{L} \\ & S_1 & \frac{Q_1}{L} & S_2 \\ & & \frac{T_1}{L^2} & \frac{Q_1}{L} \\ \text{đối} & \text{xứng} & & S_1 \end{bmatrix}}_{k} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ \theta_1 \\ v_{n2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

Trong đó: k– ma trận độ cứng của phần tử

$$\left.\begin{aligned} & S_1 = S;\ S_2 = S.C;\ Q_1 = S(1+C);\ T_1 = 2Q_1 - (kL)^2 \\ & S = \frac{(1 - kL\cot kL)}{\left(\frac{2\tan kL}{kL} - 1\right)};\ C = \frac{(kL - \sin kL)}{(\sin kL - kL\cos kL)} \\ & k^2 = \frac{F}{EI} \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

Các đại lượng S_1, S_2, Q_1, T_1 là những hàm phi tuyến của $L\sqrt{F/EI}$. Để tiện cho việc tính toán, chúng được lập thành bảng (xem bảng 7.1) và phụ thuộc vào tham số ρ không có thứ nguyên:

$$\rho = \frac{F}{F_{th}} \qquad F_{th} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{7.3}$$

Bảng 7.1

Giá trị của S_1, S_2, Q_1, T_1 (trường hợp F là lực nén)

ρ	S_1	S_2	Q_1	T_1
0,00	4,0	2,0	6,0	12,0
0,05	3,93	2,02	5,95	11,41
0,10	3,87	2,03	5,90	10,81
0,15	3,80	2,05	5,85	10,22
0,20	3,73	2,07	5,80	9,63
0,25	3,66	2,09	5,75	9,03
0,30	3,59	2,11	5,70	8,43
0,35	3,52	2,13	5,65	7,84
0,40	3,44	2,15	5,59	7,24

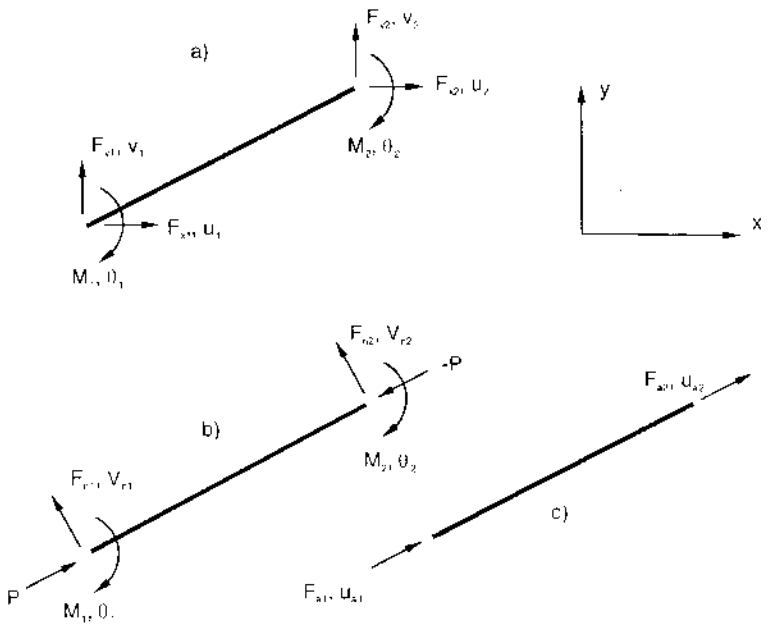
Bảng 7.1 *(tiếp theo)*

ρ	S_1	S_2	Q_1	T_1
0,45	3,37	2,17	5,54	6,64
0,50	3,30	2,19	5,49	6,04
0,55	3,22	2,22	5,44	5,44
0,60	3,14	2,24	5,38	4,84
0,65	3,06	2,27	5,44	4,24
0,70	2,98	2,29	5,27	3,64
0,75	2,90	2,32	5,22	3,03
0,80	2,82	2,35	5,16	2,43
0,85	2,73	2,37	5,11	1,82
0,90	2,65	2,40	5,05	1,22
0,95	2,56	2,44	4,99	0,61
1,00	2,47	2,47	4,94	0,00
1,10	2,28	2,54	4,82	−1,22
1,20	2,09	2,61	4,70	−2,44
1,30	1,89	2,69	4,58	−3,67
1,40	1,68	2,78	4,46	−4,90
1,50	1,46	2,88	4,33	−6,14
1,60	1,22	2,98	4,20	−7,38
1,70	0,98	3,10	4,07	−8,63
1,80	0,72	3,22	3,94	−9,88
1,90	0,44	3,37	3,81	−11,14
2,00	0,14	3,53	3,67	−12,40
2,10	−0,18	3,70	3,53	−13,67
2,20	−0,52	3,90	3,38	−14,95
2,30	−0,89	4,13	3,23	−16,23
2,40	−1,30	4,38	3,08	−17,52
2,50	−1,75	4,68	2,93	−18,82
2,60	−2,25	5,02	2,27	−20,12
2,70	−2,81	5,42	2,61	−21,44
2,80	−3,45	5,88	2,44	−22,76
2,90	−4,18	6,44	2,27	−24,09
3,00	−5,03	7,12	2,09	−25,43
3,10	−6,05	7,96	1,91	−26,77
3,20	−7,30	9,02	1,72	−28,14
3,30	−8,86	10,40	1,53	−29,51
3,40	−10,91	12,24	1,33	−30,89
3,50	−13,72	14,85	1,13	−32,28
3,60	−17,87	18,79	0,92	−33,69
3,70	−24,68	25,39	0,70	−35,12
3,80	−38,17	38,65	0,48	−36,55
3,90	−78,34	78,58	0,24	−38,01
4,00	+∞	+∞	0,00	−39,48

Hệ thức ma trận giữa lực dọc và chuyển vị tương ứng như sau:

$$\begin{bmatrix} F_{a1} \\ F_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

F_{a1}, F_{a2}– lực dọc tại đầu 1 và đầu 2; u_{a1}, u_{a2}– thành phần chuyển vị dọc trục tại đầu 1 và đầu 2 (xem hình 7.2c).



Hình 7.2

Giả sử ta chọn hệ toạ độ chung là X, Y. Các thành phần nội lực và chuyển vị trong hệ tọa độ chung biểu thị trên hình (7.2a). Các thành phần nội lực và chuyển vị trong hệ toạ độ riêng biểu thị trên hình (7.2b), (7.2c). Gọi: F_{x1}, F_{x2}– thành phần nội lực trên phương trục X tại đầu 1 và đầu 2; F_{y1}, F_{y2}– thành phần nội lực trên phương trục Y tại đầu 1 và đầu 2; u_1, u_2 – thành phần chuyển vị trên phương trục X tại đầu 1 và đầu 2; v_1, v_2 – thành phần chuyển vị trên phương trục Y tại đầu 1 và đầu 2. Từ hình (7.2), ta có các hệ thức:

$$u_{a1} = u_1 l + v_1 m \qquad u_{a2} = u_2 l + v_2 m$$

$$v_{n1} = -u_1 m + v_1 l \qquad v_{n2} = -u_2 m + v_2 l$$

$$F_{x1} = F_{a1} l - F_{n1} m \qquad F_{x2} = F_{a2} l - F_{n2} m$$

$$F_{y1} = F_{a1} m + F_{n1} l \qquad F_{y2} = F_{a2} m + F_{n2} l$$

l, m – côsin định hướng của phần tử 1–2.

Từ các hệ thức trên và (7.1), (7.4), ta suy ra hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của phần tử trong hệ toạ độ chung như sau:

$$
\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{T_1 m^2 + \alpha l^2}{L^2} & \frac{-(T_1 - \alpha) lm}{L^2} & \frac{Q_1 m}{L} & \frac{-(T_1 m^2 + \alpha l^2)}{L^2} & \frac{(T_1 - \alpha) lm}{L^2} & \frac{Q_1 m}{L} \\ & \frac{T_1 l^2 + \alpha m^2}{L^2} & \frac{-Q_1 l}{L} & \frac{(T_1 - \alpha) lm}{L^2} & \frac{-(T_1 l^2 + \alpha m^2)}{L^2} & \frac{-Q_1 l}{L} \\ & & S_1 & \frac{-Q_1 m}{L} & \frac{Q_1 l}{L} & S_2 \\ & & & \frac{T_1 m^2 + \alpha l^2}{L^2} & \frac{-(T_1 - \alpha) lm}{L^2} & \frac{-Q_1 m}{L} \\ & & & & \frac{T_1 l^2 + \alpha m^2}{L^2} & \frac{Q_1 l}{L} \\ & & & & & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (7.5)
$$

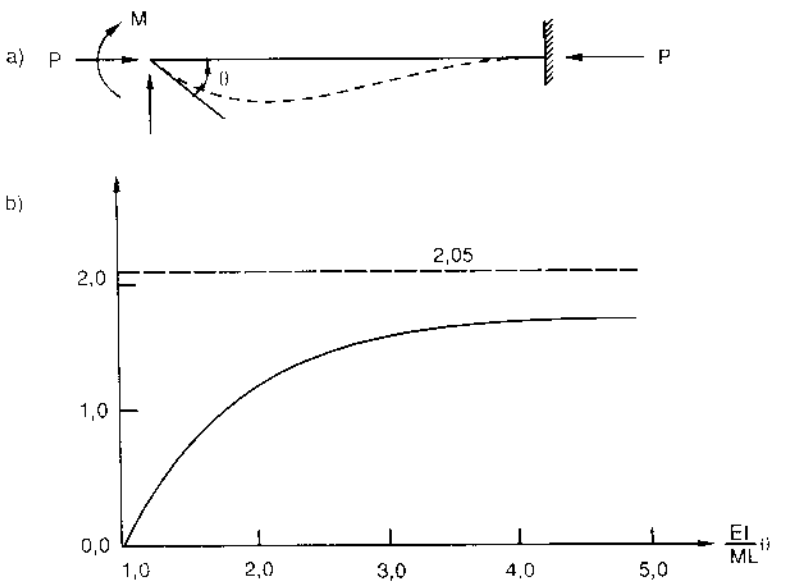
Trong đó: $\alpha = AL^2/I$ (khi bỏ qua biến dạng dọc, thay $\alpha = 0$). S_1, S_2, Q_1, T_1 tính theo (7.2) hoặc có thể tra ở bảng (7.1) (F là lực nén) hoặc bảng (7.2) (F là lực kéo).

§7.2. Khái niệm về sự mất ổn định đàn hồi. Dấu hiệu mất ổn định

Lấy thí dụ một dầm chịu lực nén F như trên hình (7.3a). Theo (7.1), ta có:

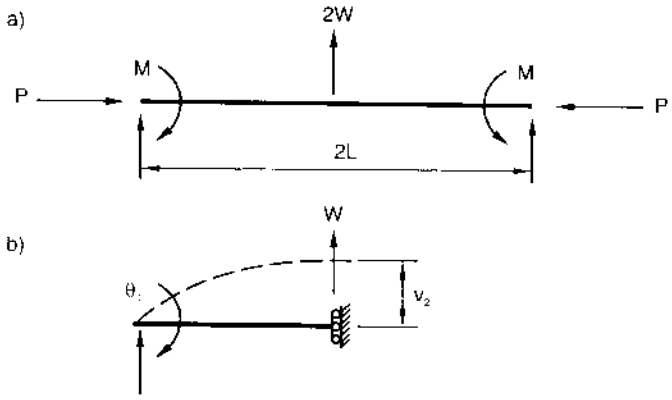
$$M = \frac{EI}{L} S_1 . \theta \qquad \text{do đó } \theta = \frac{ML}{EI} . \frac{1}{S_1}$$

Trong đó, S_1 là hàm của ρ (công thức 7.3). Ta xem M là lực kích thích và θ là chuyển vị tương ứng. Trên hình (7.3b), trục tung biểu thị giá trị của ρ, trục hoành biểu thị giá trị của $(EI/ML).\theta$. Khi $\rho = 2{,}05$, $(EI/ML)\theta \to \infty$ có nghĩa là $\theta \to \infty$. Vậy khi $\rho = 2{,}05$, chuyển vị vô cùng lớn dù lực kích thích M nhỏ đến bao nhiêu. Ta nói rằng dầm mất ổn định khi $\rho = 2{,}05$. Vì ta giả thiết rằng sau khi *mất ổn định*, dầm vẫn làm việc trong giai đoạn đàn hồi nên ta gọi sự mất ổn định này là hiện tượng *mất ổn định đàn hồi*.



Hình 7.3

Thí dụ thứ hai là một dầm đối xứng như trên hình (7.4). Sơ đồ tính đưa về nửa dầm như trên hình (7.4b).



Hình 7.4

Bảng 7.2. Giá trị S_1, S_2, Q_1, T_1 (trường hợp F là lực kéo)

-ρ	S_1	S_2	Q_1	T_1
0,00	4,00	2,00	6,00	12,00
0,20	4,26	1,94	6,20	14,36
0,40	4,50	1,88	6,38	16,72
0,60	4,74	1,83	6,57	19,06
0,80	4,96	1,79	6,75	21,39
1,00	5,18	1,75	6,92	23,72
1,20	5,38	1,71	7,10	26,03
1,40	5,58	1,68	7,26	28,34
1,60	5,78	1,65	7,43	30,65
1,80	5,97	1,62	7,59	32,94
2,00	6,15	1,60	7,75	35,23
2,50	6,58	1,54	8,13	40,92
3,00	6,99	1,50	8,49	46,58
4,00	7,34	1,43	9,17	57,82
5,00	8,42	1,38	9,80	68,94
6,00	9,04	1,34	10,39	79,98
7,00	9,63	1,31	10,94	90,97
8,00	10,18	1,29	11,46	101,89
9,00	10,69	1,27	11,96	112,73
10,00	11,19	1,25	12,44	123,57
11,00	11,66	1,24	12,89	134,38
12,00	12,11	1,22	13,32	145,07
13,00	12,54	1,21	13,76	155,79
14,00	12,96	1,21	14,17	166,55
15,00	13,36	1,20	14,56	177,14
16,00	13,76	1,19	14,95	187,75
17,00	14,14	1,18	15,32	198,42
18,00	14,51	1,18	15,68	208,95
19,00	14,87	1,17	16,04	219,52
20,00	15,22	1,17	16,38	230,08

Đối với dầm trên hình (7.4) ta xem M, W là các lực kích thích, θ_1 và v_2 là các chuyển vị tương ứng.

Theo (7.5) ta có:

$$\begin{bmatrix} M_1 = M \\ \\ F_{y2} = W \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} S_1 & \frac{Q_1}{L} \\ \frac{Q_1}{L} & \frac{T_1}{L^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên ta được:

$$\theta_1 = \frac{L}{EI}\left[\frac{MT_1 - WLQ_1}{T_1S_1 - Q_1Q_1}\right], \quad v_2 = \frac{L^2}{EI}\left[\frac{WLS_1 - MQ_1}{T_1S_1 - Q_1Q_1}\right]$$

Qua các hệ thức trên, ta thấy rằng khi mẫu thức bằng không thì các chuyển vị θ_1 và v_2 vô cùng lớn dù M và W nhỏ đến bao nhu. Ta nói rằng dầm mất ổn định khi giá trị ρ làm cho mẫu thức ($T_1S_1 = Q_1.Q_1$) triệt tiêu. Theo định nghĩa trong mục 1.2, số $(T_1S_1 - Q_1.Q_1)/L^2$ chính là định thức của ma trận:

$$\begin{bmatrix} S_1 & \frac{Q_1}{L} \\ \frac{Q_1}{L} & \frac{T_1}{L^2} \end{bmatrix}$$

Ta có thể suy rộng tính chất trên cho một hệ bất kỳ. Ta đã biết rằng hệ thức ma trận giữa vectơ tải trọng và vectơ chuyển vị của một hệ bất kỳ có dạng:

$$F = K.D$$

trong đó K là ma trận độ cứng tổng thể. Theo công thức Cramer, khi F có giá trị hữu hạn, D vô cùng lớn khi định thức của K triệt tiêu. Vậy *dấu hiệu mất ổn định của một hệ bất kỳ là định thức của ma trận độ cứng tổng thể của nó triệt tiêu.*

Giá trị tải trọng làm cho $|K| = 0$, gọi là tải trọng tới hạn. Trong phần sau, ta sẽ căn cứ vào dấu hiệu này để xác định tải trọng tới hạn.

§7.3. Trình tự xác định hệ số tải trọng tới hạn

Hệ số λ của tải trọng làm cho kết cấu mất ổn định gọi là hệ số tải trọng tới hạn (ký hiệu là λ_{th}).

Trước hết, cần xác định bậc tự do, thống kê các số liệu ban đầu, tiếp theo thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (7.5) và cuối cùng là thành lập ma trận độ cứng tổng thể

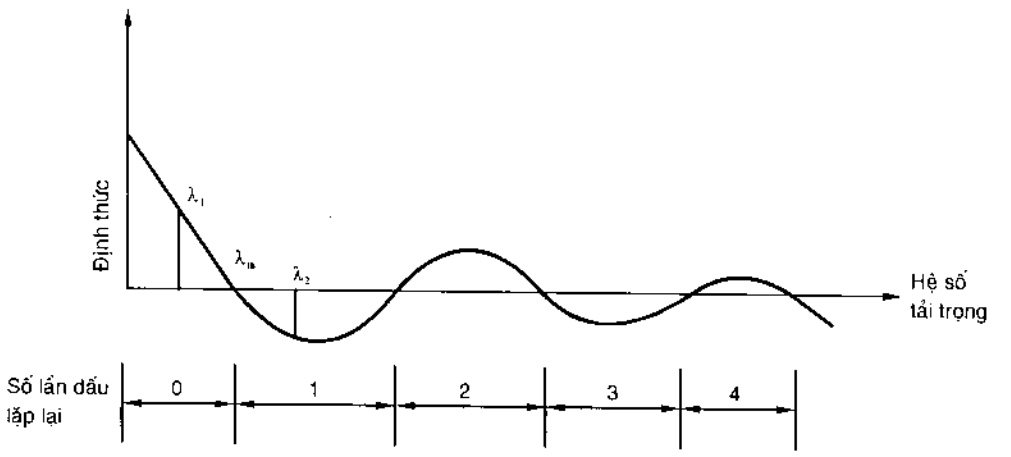
K và tính định thức của ma trận K. Giá trị hệ số tải trọng tới hạn được xác định từ điều kiện $|K| = 0$.

Tuy nhiên, ở đây có sự khác biệt là mỗi phần tử của ma trận độ cứng là một hàm phi tuyến của lực dọc, định thức |K| cũng là một hàm phi tuyến của lực dọc hay nói một cách khác là một hàm phi tuyến của hệ số tải trọng. Vì vậy, không thể tính trực tiếp hệ số tải trọng tới hạn mà phải tính nhiều vòng bằng phương pháp tính lặp. Ta tiến hành phương pháp tính lặp như sau:

1) Trước hết, gán cho hệ số tải trọng λ giá trị gần đúng λ_1, lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (7.5) và lập ma trận độ cứng tổng thể K. Tính $|K_1| = |K|_{\lambda = \lambda 1}$. Nếu $|K| > 0$, kết cấu vẫn ổn định.

2) Tiếp tục tăng hệ số tải trọng, gán cho λ giá trị $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$. Lặp lại bước 1 và tính $|K_2| = |K|_{\lambda = \lambda 2}$. Nếu $|K_2| > 0$, kết cấu vẫn ổn định, tiếp tục tăng giá trị λ. Ngược lại, nếu $|K_2| < 0$, kết cấu mất ổn định. Điều này chứng tỏ $\lambda_2 > \lambda_{th}$. Nếu 2 giá trị λ_1 và λ_2 rất gần nhau, ta dùng công thức nội suy để tính hệ số tải trọng tới hạn (hình 7.5):

$$\lambda_{th} = \lambda_1 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{|K_1| - |K_2|} . |K_1| \qquad (7.6)$$



Hình 7.5

3) Nếu trên trục tung, ta biểu thị định thức của ma trận K, trên trục hoành biểu thị giá trị của hệ số tải trọng λ, ta có đường cong như trên hình (7.5). Đường cong cắt qua trục hoành một số điểm tại đó định thức triệt tiêu. Vấn đề ta quan tâm đến là tìm hệ số tải trọng tới hạn có giá trị bé nhất. Cần phải bảo đảm rằng giữa hai hệ số λ_1 và λ_2 chỉ có một hệ số tải trọng tới hạn, hệ số này có giá trị bé nhất đồng thời làm cho định thức của ma trận K triệt tiêu (hình 7.5). Ta giải quyết vấn đề này như sau:

Xác định dấu của dãy số S_r, r= 0, 1, 2,... n:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Dấu của } S_0 = (-1)^0 k(0,0) \\
\text{Dấu của } S_1 = (-1)^1 k(0,0).k(1,1) \\
\text{Dấu của } S_2 = (-1)^2 k(0,0).k(1,1).k(2,2) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\text{Dấu của } S_r = (-1)^r .k(0,0).k(1,1).k(2,2)....k(r,r) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\text{Dấu của } S_n = (-1)^n .k(0,0).k(1,1).k(2,2)...k(r,r)...k(n,n)
\end{array}\right\} \qquad (7.7)$$

Trong đó: k(r,r)– phần tử thứ r trên đường chéo chính của ma trận độ cứng tổng thể K sau khi đã được đưa về dạng tam giác theo phương pháp Gauss; n– số bậc tự do của hệ.

Số lần lặp lại dấu của dãy số (7.7) chính là số hệ số tải trọng tới hạn bé hơn hệ số tải trọng đang tính toán (hình 7.5)

Vậy nếu ứng với λ_1, ta có $|K_1| > 0$, ứng với λ_2, ta có $|K_2| < 0$ và số lần lặp lại dấu của dãy số (7.7 bằng đơn vị thì ta có thể tính hệ số tải trọng tới hạn theo (7.6)

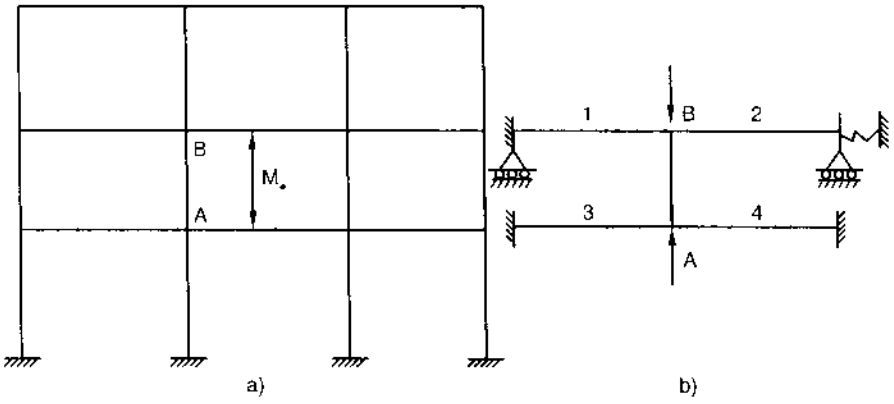
Vấn đề được đặt ra là xuất phát từ giá trị ban đầu gần đúng λ_1 như thế nào để việc tính toán được nhanh chóng. Dưới đây trình bày cách chọn giá trị ban đầu hợp lý của hệ số tải trọng.

§7.4. Cách chọn giá trị ban đầu hợp lý của hệ số tải trọng

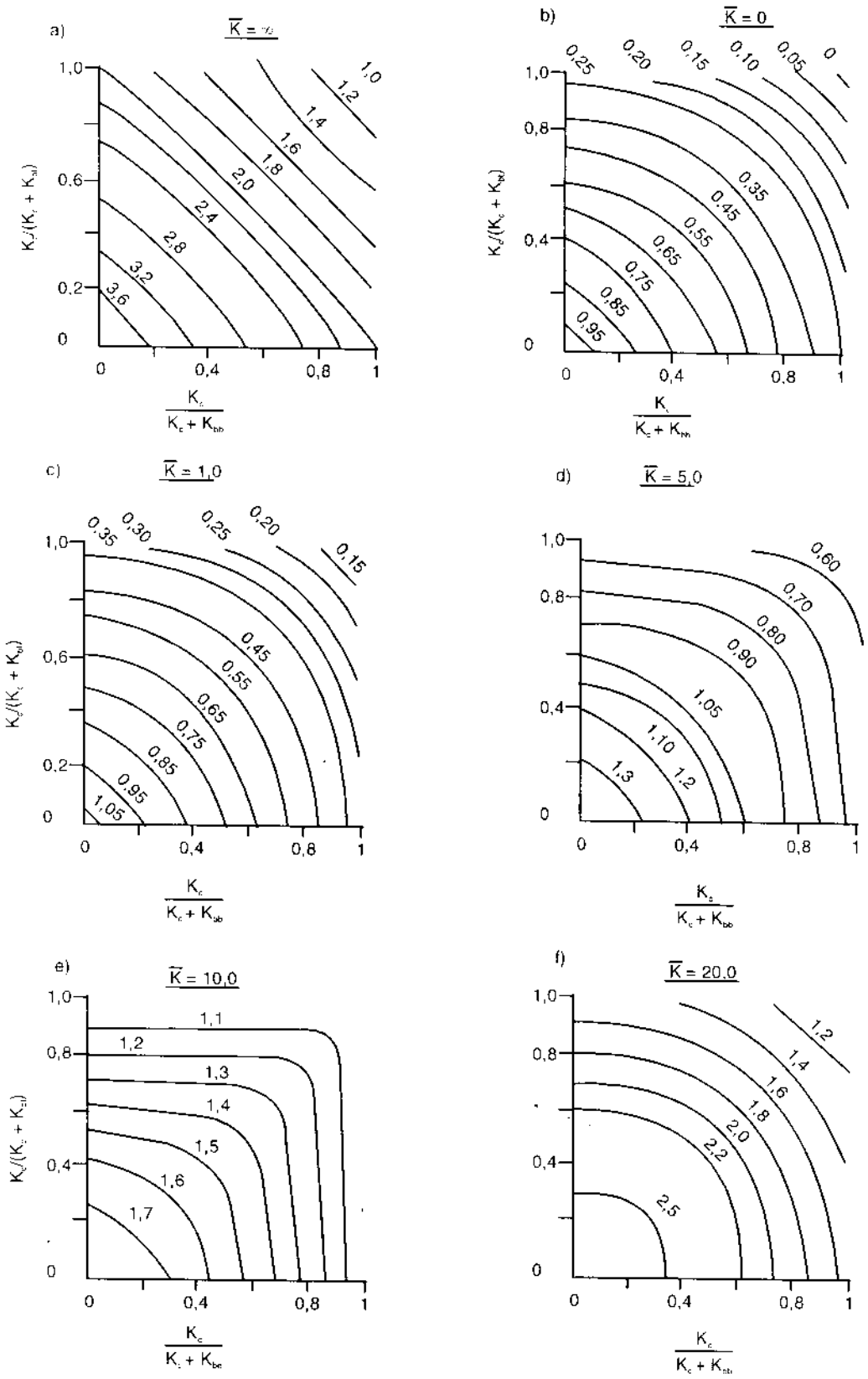
Có 2 phương pháp chọn giá trị ban đầu hợp lý của hệ số tải trọng

7.4.1 Phương pháp R.H.Wood [13]

Giả sử có một khung nhiều tầng như trên hình (7.6a). Để tính hệ số tải trọng gần đúng của cột AB, ta tách nó ra khỏi khung như trên hình (7.6b). Các dầm 1 và 2 ở phía trên, các dầm 3 và 4 ở phía dưới. Gối tựa đàn hồi thay cho các vách cứng hoặc hệ giằng chống gió. R.H.Wood đã vẽ được một số đường cong (hình 7.7a đến 7.7f) để giúp cho việc tra trị số $\rho = F_{th}/F_{Euler}$ của cột đang xét.



Hình 7.6


a)
$\overline{K} = \infty$
b)
$\overline{K} = 0$
c)
$\overline{K} = 1,0$
d)
$\overline{K} = 5,0$
e)
$\overline{K} = 10,0$
f)
$\overline{K} = 20,0$
$K_d/(K_c + K_{bd})$
$\frac{K_c}{K_c + K_{bb}}$

Hình 7.7

Chú thích hình 7.7

1) Các số ghi giữa các đường cong biểu thị giá trị của $\rho = F_{th}/F_{Euler}$, F_{th} là lực tới hạn, $F_{Euler} = \pi^2 EI/L^2$

2)
$$K_{bt} = \frac{4EI}{L}(\text{dầm } 1) + \frac{4EI}{L}(\text{dầm } 2)$$
$$K_{bb} = \frac{4EI}{L}(\text{dầm } 3) + \frac{4EI}{L}(\text{dầm } 4)$$
$$K_c = \frac{4EI}{L}\text{của cột}, \quad \overline{K} = \frac{4.H^2}{K_c} \times \text{độ cứng của gối tựa đàn hồi}$$

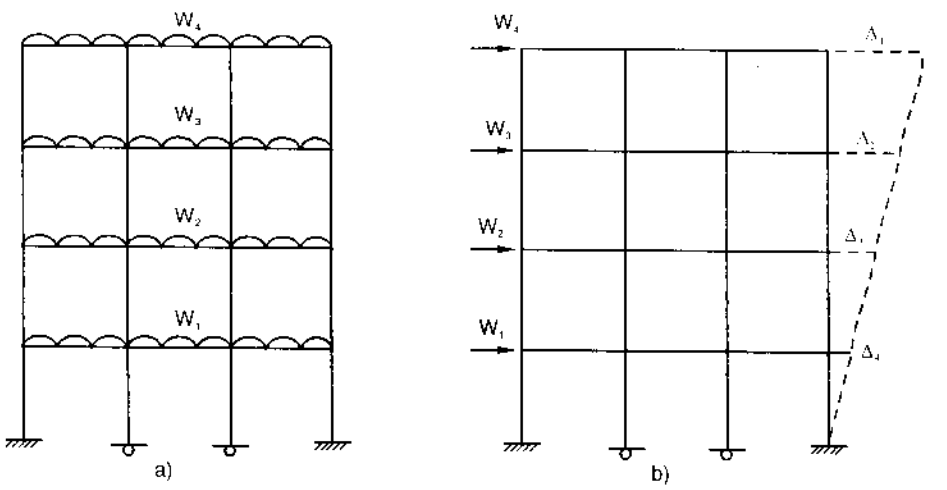
Nếu đầu đối diện của dầm là khớp (trên hình 7.6b là ngàm), trong vế phải của K_{bb}, thay hệ số 4 bằng số 3.

3) Khi khung có hệ vách ngang rất cứng hoặc hệ giằng chống gió rất khoẻ, có thể xem khung như không có chuyển vị ngang do đó thay $\overline{K} = \infty$ (hình 7.7a). Ngược lại, khi khung chuyển vị ngang một cách tự do, thay $\overline{K} = 0$ (hình 7.7b).

4) Nếu chân cột ở móng là gối tựa ngàm, thay $K_{bb} = \infty$. Ngược lại, nếu chân cột ở móng là khớp, thay $K_{bb} = 0$.

7.4.2. Phương pháp M.R. Horne [14]

Giả sử có một khung nhiều tầng như trên hình (7.8a), trên mỗi tầng đều có tải trọng phân bố đều. Ta đưa về sơ đồ tính như trên hình (7.8b) trong đó chỉ có các tải trọng tác dụng trên phương ngang, mỗi tải trọng bằng hợp lực của tải trọng phân bố đều tương ứng. Ta xác định các chuyển vị ngang Δ_1, Δ_2... theo phương pháp đã được trình bày trong chương ba. Tiếp theo, tính hệ số tải trọng cho mỗi tầng như sau:



Hình 7.8

$$\lambda = 0,9 \times \frac{\text{chiều cao của tầng}}{\Delta_{đỉnh} - \Delta_{đáy}} \qquad (7.8)$$

$\Delta_{đỉnh}$ – chuyển vị ngang tại đỉnh tầng; $\Delta_{đáy}$ – chuyển vị ngang tại đáy tầng.

Sau khi tính xong hệ số λ cho toàn bộ các tầng, ta chọn hệ số λ có giá trị bé nhất.

§7.5. Thí dụ

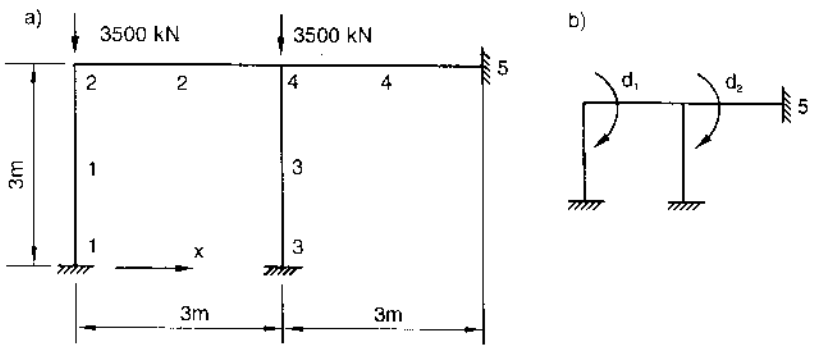
Thí dụ 7.1:

Cho một khung như trên hình (7.9a). Yêu cầu tính hệ số tải trọng tới hạn.

$$E = 210.10^6 \text{ kN/m}^2$$

đối với dầm: $I = 3,4.10^{-6}$ m^4 ; $A = 2730.10^{-6}$ m^2

đối với cột: $I = 12,63.10^{-6}$ m^4; $A = 2980.10^{-6}$ m^2



Hình 7.9

Giải:

Vì 2 cột 1–2 và 3–4 có các đặc trưng hình học như nhau nhưng cột 3–4 chịu tải trọng gấp đôi nên ta chọn cột 3–4 để tính hệ số tải trọng ban đầu. Áp dụng phương pháp R.H.Wood, ta có:

$$\frac{EI}{L} = 238 \text{ (dầm)} \qquad \frac{EI}{L} = 884,1 \text{ (cột)}$$

$K_{bb} = \infty$ vì nút 3 là gối tựa ngàm.

$$K_{bt} = (4 \times 238 + 4 \times 238) \qquad K_C = 4 \times 884,1. \text{ Vậy:}$$

$$\frac{K_C}{K_C + K_{bb}} = 0; \qquad \frac{K_C}{K_C + K_{bt}} = 0,65; \text{ vì khung không có chuyển vị ngang.}$$

Căn cứ vào hình (7.7a) ta được

$\rho = \dfrac{F_{th}}{F_{Euler}} = 2,6.\ F_{Euler} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2} = 2909\text{kN}$ do đó $F_{th} = 2,6.F_{Euler} = 7563,4\text{ kN}$.

Hệ số tải trọng $\lambda = \dfrac{7563,4}{7000} = 1,08$.

Ta chọn $\lambda_1 = 1,0$ và cứ mỗi vòng tính tăng thêm 0,1.

1) Xác định bậc tự do:

Bậc tự do biểu thị trên hình (7.9b). Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Toạ độ

Nút	u	v	q
1	0	0	0
2	0	0	d_1
3	0	0	0
4	0	0	d_2
5	0	0	0

Bậc tự do

Nút	x	y
1	0	0
2	0	3
3	3	0
4	3	3
5	6	3

Vị trí đầu 1, đầu 2

Ph.tử	Đầu 1	Đầu 2
1	1	2
2	2	4
3	3	4
4	4	5

2) Tính lực dọc trong các phần tử:

Bỏ qua lực dọc trong các dầm. Ứng với hệ số tải trọng $\lambda_1 = 1,0$, ta có:

F = 3500 kN (phần tử 1–2), F = 7000 kN (phần tử 3–4), F = 0 (phần tử 2–4 và 4–5).

3) Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (7.5):

Phần tử 1: $F = 3500$ kN, $F_{Euler} = 2909$ kN, $\rho = 1,20$.

$F_1 = 103.1,84.d_1$

Phần tử 2: $F = 0$, $\rho = 0$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 0,95 & 0,48 \\ 0,48 & 0,95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3: $F = 7000$ kN, $F_{Euler} = 2909$ kN, $\rho = 2,41$.

$F_2 = 10^3.(-1,18)d_2$.

Phần tử 4: $F = 0$, $\rho = 0$

$F_2 = 10^3.0,95d_2$.

4) Tính ΣF_i, i = 1, 2, ta có ma trận độ cứng tổng thể

$$K_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 1,84 & 0,48 \\ \underline{0,95} & \\ 2,79 & \\ 0,48 & 0,95 \\ & -1,18 \\ & \underline{0,95} \\ & 0,72 \end{bmatrix}$$

5) Dùng phương pháp Gauss đưa ma trận trên về dạng tam giác

$$10^3 \begin{bmatrix} 2,79 & 0,48 \\ 0 & 0,65 \end{bmatrix}$$

Định thức của K_1 ($\lambda_1 = 1,0$):

$$|K_1| = (10^3)^2.2,79.0,65 = 1,81.10^6 > 0$$

Kết cấu vẫn ổn định.

6) Kiểm tra sự đổi dấu của dãy số S_r theo (7.7):

k(0,0) = + 1 theo định nghĩa; k(1,1) = 2,79, k(2,2) = 0,65.

Dấu của S_0 = dấu của $(-1)^0$k(0,0) = +

Dấu của S_1 = dấu của $(-1)^1(+1).2,79$ = –

Dấu của S_2 = dấu của $(-1)^2.2,79.0,65$ = +

Vậy sự đổi dấu của dãy số S_r là + – +. Điều này chứng tỏ không có sự lặp lại dấu do đó hệ số tải trọng tới hạn λ_{th} không thể bé hơn $\lambda_1 = 1$.

7) Tiếp tục tăng hệ số tải trọng. Thay λ bằng $\lambda_2 = \lambda_1 + 0,1 = 1,1$ và thành lập các ma trận độ cứng:

Phần tử 1: F = 1,1.3500 = 3850 kN, F_{Euler} = 2909,

ρ = 1,324.

$F_1 = 10^3.1,63.d_1$

Phần tử 2 và phần tử 4: Vì F = 0, ρ = 0 nên ma trận độ cứng giống như trường hợp λ = 1,0

Phần tử 3: F = 1,1.7000 = 7700 kN, F_{Euler} = 2909, ρ = 2,647

$F_2 = 10^3(-2,22)d_2$

Ma trận độ cứng tổng thể:

$$K_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 1,63 & 0,48 \\ \underline{0,95} & \\ 2,58 & \\ 0,48 & -2,22 \\ & \underline{0,95} \\ & 0,95 \\ & -0,32 \end{bmatrix}$$

Đưa K về dạng ma trận tam giác

$$10^3 \begin{bmatrix} 2,58 & 0,48 \\ 0 & -0,40 \end{bmatrix}$$

Vậy $|K_2|_{\lambda_2 = 1,1} = (10^3)^2.(2,58).(-0,40) = -1,03.10^6 < 0 \Rightarrow$ kết cấu mất ổn định. Kiểm tra dấu theo (7.7):

k(0,0) = + theo định nghĩa, k(1,1) = 2,58, k(2,2) = –0,40.

Dấu của $S_0 = (-1)^0 k(0,0) = +$

Dấu của $S_1 = (-1)^1 k(0,0).(k(1,1) = -$

Dấu của $S_2 = (-1)^2.k(0,0).k(1,1).k(2,2) = -$

Sự đổi dấu là + – –, số lần lặp lại dấu (–) bằng đơn vị, chứng tỏ có một hệ số tải trọng tới hạn λ_{th} nhỏ hơn λ_2, áp dụng (7.6):

$$\lambda_{th} = 1,0 + \frac{1,81.(1,1-1,0)}{(1,81+1,03)} = 1,064$$

Thí dụ 7.2:

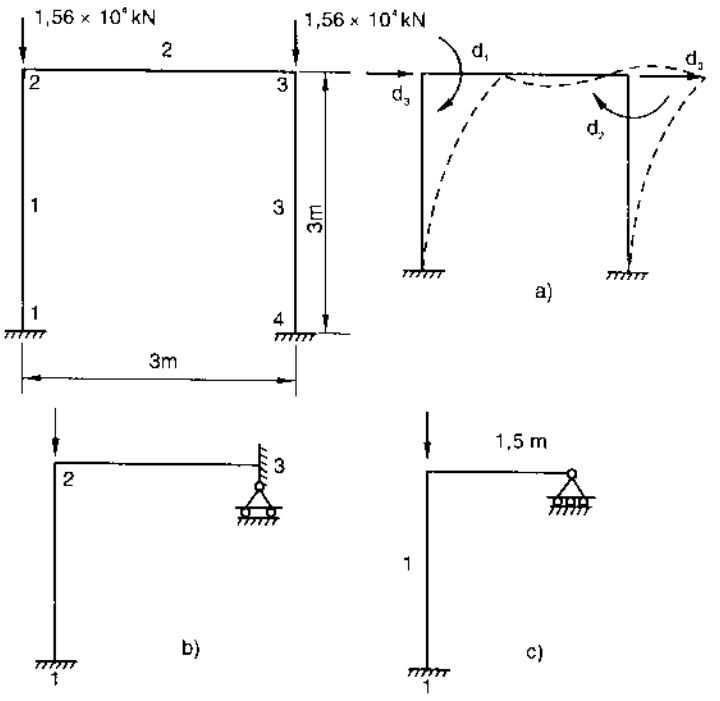
Cho một khung như hình (7.10). Yêu cầu tính hệ số tải trọng tới hạn. Cho:

$I = 95,0.10^{-6}\ m^4$

$A = 6080.10^{-6} m^2$

$E = 210.10^6\ kN/m^2$

L = 3m.



Hình 7.10

Bỏ qua biến dạng dọc và biến dạng trượt.

Trước hết, ta chọn hệ số tải trọng ban đầu gần đúng. Áp dụng phương pháp R.H.Wood và dựa trên sơ đồ (7.10b):

$\frac{EI}{L} = 6650.0$cho toàn bộ các phần tử

$K_{bh} = \infty$ vì nút 1 là gối tựa ngàm

$K_{bt} = 4 \times 6650$, $K_c = 4 \times 6650$, $\overline{K} = 0$ vì khung chuyển vị ngang tự do. Vậy:

$$\frac{K_c}{K_c + K_{bh}} = 0 \ , \ \frac{K_c}{K_c + K_{bt}} = 0,5$$

Từ hình (7.7b), tra được $\rho = 0,67$

Vậy $F_{th} = 0,67 \times F_{Euler}$

$$F_{Euler} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 2,19.10^4 \text{kN} \Rightarrow F_{th} = 0,67.2,19.10^4 = 1,47.10^4 \text{kN}$$

$$F = 1,56.10^4 \text{kN (cột 1–2) nên } \lambda = \frac{F_{th}}{F} = \frac{1,47}{1,56} = 0,94$$

Thực ra, dạng biến dạng mất ổn định của khung như trên hình (7.10a), góc xoay tại 2 nút 2 và 3 bằng nhau, điểm uốn nằm giữa dầm 2–3 nên sơ đồ tính đưa về nửa khung như trên hình (7.10c). Ta có:

$$K_{bt} = \frac{3EI}{0,5L} = 6 \times 6650 \ ; \ \frac{K_c}{K_c + K_{bt}} = 0,4 \ ; K_{bh} = 0 \ ; \ K = 0$$

Từ hình (7.7b), tra được $\rho = 0,75$; $F_{th} = 0,75 \times F_{Euler} = 0,75.2,19.10^4$

Do đó: $$\lambda_{th} = \frac{0,75.2,19.10^4}{1,56.10^4} = 1,05$$

Đây là giá trị chính xác của hệ số tải trọng tới hạn. Tuy nhiên, để làm quen với phương pháp giải bài toán ổn định, phần tính toán dưới đây vẫn là cần thiết:

1) Bậc tự do biểu thị trên hình (7.10a) (bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc). Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Toạ độ

Nút	u	v	q
1	0	0	0
2	d_2	0	d_1
3	d_3	0	d_3
4	0	0	0

Bậc tự do

Nút	x	y
1	0	0
2	0	3
3	3	3
4	3	0

Vị trí đầu 1, đầu 2

Ph.tử	Đầu 1	Đầu 2
1	1	2
2	2	3
3	4	3

2) Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử

Xuất phát từ hệ số tải trọng ban đầu $\lambda = \lambda_1 = 1{,}0$. Theo (7.5), ta có:

Phần tử 1:

$F = 1{,}56.10^4$; $F_{Euler} = 2{,}19.10^4$; $\rho = 0{,}71$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_1 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 0{,}26 & -1{,}17 \\ -1{,}17 & 1{,}97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: $F = 0$; $\rho = 0$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 42{,}56 & 0 & -42{,}56 & 0 \\ 0 & 2{,}66 & 0 & 1{,}33 \\ -42{,}56 & 0 & 42{,}56 & 0 \\ 0 & 1{,}33 & 0 & 2{,}66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_1 \\ d_3 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3: $F = 1{,}56.10^4$; $F_{Euler} = 2{,}19.10^4$; $\rho = 0{,}71$.

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 0{,}26 & -1{,}17 \\ -1{,}17 & 1{,}97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

3) Tính ΣF_i, i = 1, 2, 3 và thành lập ma trận độ cứng tổng thể:

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1{,}97 \\ \underline{2{,}66} \\ 4{,}63 \end{matrix} & 1{,}33 & -1{,}17 \\ & \begin{matrix} 2{,}66 \\ \underline{1{,}97} \\ 4{,}63 \end{matrix} & -1{,}17 \\ & & \begin{matrix} 0{,}26 + 42{,}56 \\ 0{,}26 - 42{,}56 \\ +42{,}56 \\ \underline{-42{,}56} \\ 0{,}52 \end{matrix} \\ \text{đối} & \text{xứng} & \end{bmatrix}$$

4) Dùng phương pháp Gauss đưa ma trận K về dạng ma trận tam giác:

$$10^4\begin{bmatrix} 4,63 & 1,33 & -1,17 \\ 0 & 4,25 & -0,83 \\ 0 & 0 & 0,06 \end{bmatrix}$$

$|K_1|\lambda_{1=1,0} = (10^4)^3.4,63.4,25.0,06 = 1,14.10^{12} > 0 \Rightarrow$ kết cấu vẫn ổn định

5) Kiểm tra dấu theo (7.7):

Dấu của S_0 = Dấu của (+1) = + (theo định nghĩa)

Dấu của S_1 = Dấu của $(-1)^1$. (1). (4,63) = –

Dấu của S_2 = Dấu của $(+1)^2$(1) (4,63)(4,25) = +

Dấu của S_3 = Dấu của $(-1)^3$.(1).(4,63)(4,25)(0,06) = –

Sự đổi dấu là + – + –, không có sự lặp lại dấu do đó λ_{th} phải lớn hơn $\lambda_1 = 1,0$.

6) Tăng hệ số tải trọng. Thay λ bằng $\lambda_2 = \lambda_1 + 1,1$. Thành lập các ma trận độ cứng.

Phần tử 1:

$$F = 1,1.\ 1,56.10^4;\quad F_{Euler} = 2,19.10^4;\quad \rho = 0,784.$$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_1 \end{bmatrix} = 10^4\begin{bmatrix} 0,19 & -1,15 \\ -1,15 & 1,89 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_3 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: F = 0; ρ = 0, ma trận giống như trường hợp $\lambda_1 = 1,0$.

Phần tử 3: ρ = 0,784

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4\begin{bmatrix} 0,19 & -1,15 \\ -1,15 & 1,89 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Thành lập ma trận độ cứng tổng thể và đưa nó về dạng ma trận tam giác như sau:

$$K_2 = 10^4\begin{bmatrix} \begin{array}{r} 1,89 \\ \underline{2,66} \\ 4,55 \end{array} & 1,33 & -1,15 \\ & \begin{array}{r} 1,89 \\ \underline{2,66} \\ 4,55 \end{array} & -1,15 \\ & & \begin{array}{r} 0,19 + 42,56 \\ 0,19 - 42,56 \\ + 42,56 \\ \underline{- 42,56} \\ 0,38 \end{array} \\ \text{đối} & \text{xứng} & \end{bmatrix} \Rightarrow 10^4\begin{bmatrix} 4,55 & 1,33 & -1,15 \\ 0 & 4,16 & -0,81 \\ 0 & 0 & -0,06 \end{bmatrix}$$

$|K_2|\lambda_{2=1,1} = (10^4)^3.(4,55).(4,16)(-0,06) = -1,16.10^{12} < 0$, kết cấu mất ổn định. Kiểm tra dấu theo (7.7):

$S_0 = +1$ theo định nghĩa, $S_1 = -(1)(1)(4,55) = -4,55$.

$S_2 = (-1)^2(1)(4,55)(4,16) = 18,93$

$S_3 = (-1)^3.(4,55)(4,16)(-0,06) = 1,16$.

Vậy sự thay đổi dấu của dãy số trên là + − + +, có một lần lặp lại dấu (+), chứng tỏ có một hệ số tải trọng tới hạn λ_{th} bé hơn $\lambda_2 = 1,1$. Áp dụng (7.6):

$$\lambda_{th} = 1,0 + \frac{(1,1-1,0)}{(1,14+1,16)}.1,14 = 1,05$$

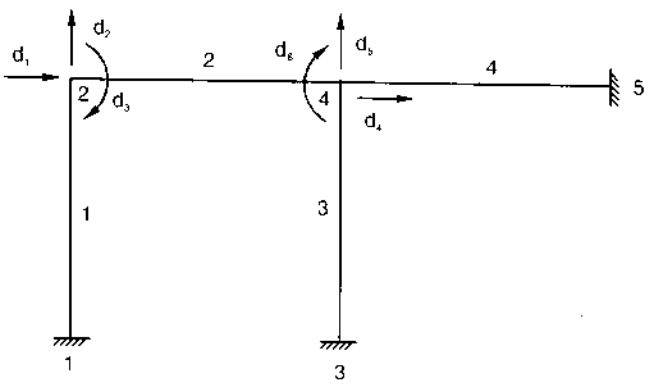
Thí dụ 7.3:

Đầu đề giống thí dụ (7.1) nhưng có xét đến biến dạng dọc. Các đặc trưng hình học như trong thí dụ (7.1).

Giải:

1) Vì xét đến biến dạng dọc nên có 6 bậc tự do như trên hình (7.11). Bậc tự do thống kê trong bảng sau:

Nút	u	v	q
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_3
3	0	0	0
4	d_4	d_5	d_6
5	0	0	0



Hình 7.11

Các số liệu ban đầu khác đã được thống kê trong thí dụ (7.1)

2) Thành lập các ma trận độ cứng.

Phần tử 1: tương tự như trong thí dụ (7.1), chỉ thay đổi các thành phần chuyển vị

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -0,24 & 0 & -1,38 \\ 0 & 208,6 & 0 \\ -1,38 & 0 & 1,84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: tương tự như trong thí dụ (7.1), chỉ thay đổi các thành phần chuyển vị

$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_1 \\ F_{y1} = F_2 \\ M_1 = F_3 \\ F_{x2} = F_4 \\ F_{y2} = F_5 \\ M_2 = F_6 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 191,1 & 0 & 0 & -191,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,32 & -0,48 & 0 & -0,32 & -0,48 \\ 0 & -0,48 & 0,95 & 0 & 0,48 & 0,48 \\ -191,1 & 0 & 0 & 191,1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,32 & 0,48 & 0 & 0,32 & 0,48 \\ 0 & -0,48 & 0,48 & 0 & 0,48 & 0,95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3: tương tự như trong thí dụ (7.1), chỉ thay đổi các thành phần chuyển vị

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -1,73 & 0 & -0,91 \\ 0 & 208,6 & 0 \\ -0,91 & 0 & -1,18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Phần tử 4: tương tự như trong thí dụ (7.1), chỉ thay đổi các thành phần chuyển vị

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 191,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,32 & -0,48 \\ 0 & -0,48 & 0,95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

3) Thành lập ma trận độ cứng tổng thể

$$K_1 = 10^3 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 191,0 \\ -0,24 \\ \hline 190,86 \end{array} & 0 & -1,38 & -191,10 & 0 & 0 \\ & \begin{array}{r} 208,60 \\ 0,32 \\ \hline 208,92 \end{array} & -0,48 & 0 & -0,32 & -0,48 \\ & & \begin{array}{r} 1,84 \\ 0,95 \\ \hline 2,79 \end{array} & 0 & -0,48 & 0,48 \\ & & & \begin{array}{r} 191,10 \\ 191,10 \\ -1,73 \\ \hline 380,47 \end{array} & 0 & -0,91 \\ & & & & \begin{array}{r} 0,32 \\ 0,32 \\ 208,60 \\ \hline 209,24 \end{array} & \begin{array}{r} 0,48 \\ -0,48 \\ \hline 0 \end{array} \\ \text{đối xứng} & & & & & \begin{array}{r} 0,95 \\ 0,95 \\ -1,18 \\ \hline 0,72 \end{array} \end{bmatrix}$$

4) Đưa K_1 về dạng ma trận tam giác theo phương pháp Gauss:

$$10^3\begin{bmatrix} 190,86 & 0 & -1,38 & -191,10 & 0 & 0 \\ & 208,92 & -0,43 & 0 & -0,32 & -0,48 \\ & & 2,78 & -1,39 & 0,48 & 0,48 \\ & & & 188,44 & 0,24 & -0,67 \\ & & & & 209,15 & -0,08 \\ & & & & & 0,64 \end{bmatrix}$$

$|K_1| = (10^3)^6(190,86 \times 208,92 \times 2,78 \times 188,44 \times 209,15 \times 0,64) = 2,82 \times 10^{27} > 0$, kết cấu vẫn ổn định.

5) Kiểm tra sự đổi dấu của dãy số S_r, r= 0, 1, 2,...6 theo (7.7). Sự đổi dấu như sau: + − + − + − +. Không có sự lặp lại dấu, chứng tỏ λ_{th} phải lớn hơn $\lambda_1 = 1,0$.

6) Tăng hệ số tải trọng. Thay λ bằng $\lambda_2 = \lambda_1 + 0,1 = 1,1$. Thành lập các ma trận độ cứng.

Phần tử 1: tương tự như trong thí dụ (7.1)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3\begin{bmatrix} -0,39 & 0 & -1,34 \\ 0 & 208,6 & 0 \\ -1,34 & 0 & 1,63 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2 và 4: F = 0; $\rho = 0$, giống như trong trường hợp $\lambda = \lambda_1 = 1,0$.

Phần tử 3: tương tự như trong thí dụ (7.1)

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = 10^3\begin{bmatrix} -2,04 & 0 & -0,79 \\ 0 & 208,6 & 0 \\ -0,79 & 0 & -2,22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Thành lập ma trận độ cứng tổng thể K_2 ($\lambda = \lambda_2 = 1,1$):

$$K_2 = 10^3 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 191,10 \\ -0,39 \\ \hline 190,71 \end{array} & 0 & -1,34 & -191,10 & 0 & 0 \\ & \begin{array}{r} 208,60 \\ 0,32 \\ \hline 208,92 \end{array} & -0,48 & 0 & -0,32 & -0,48 \\ & & \begin{array}{r} 1,63 \\ 0,95 \\ \hline 2,58 \end{array} & 0 & 0,48 & 0,48 \\ & & & \begin{array}{r} 191,10 \\ 191,10 \\ -2,04 \\ \hline 380,16 \end{array} & 0 & -0,79 \\ & & & & \begin{array}{r} 0,32 \\ 0,32 \\ 208,6 \\ \hline 209,24 \end{array} & \begin{array}{r} 0,48 \\ -0,48 \\ \hline 0 \end{array} \\ & & & & & \begin{array}{r} 0,95 \\ 0,95 \\ -2,22 \\ \hline -0,32 \end{array} \end{bmatrix}$$

Đưa K_2 về dạng ma trận tam giác:

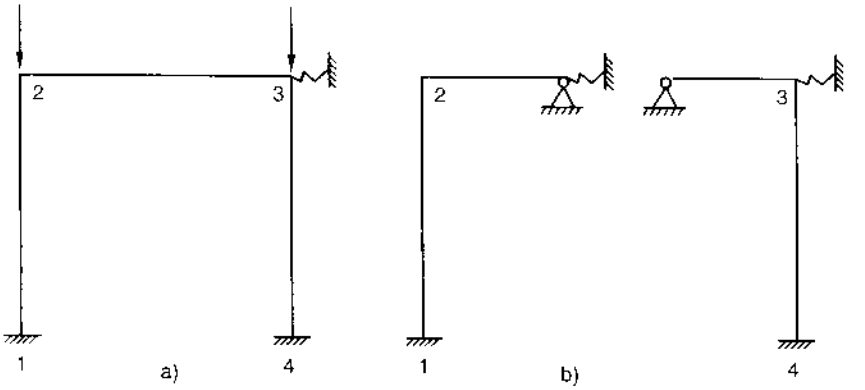
$$10^3 \begin{bmatrix} 190,71 & 0 & -1,34 & -191,10 & 0 & 0 \\ & 208,92 & -0,48 & 0 & -0,32 & -0,48 \\ & & 2,57 & -1,34 & 0,48 & 0,48 \\ & & & 187,97 & 0,25 & -0,55 \\ & 0 & & & 209,15 & -0,09 \\ & & & & & -0,40 \end{bmatrix}$$

$|K_2| = (10^3)^6[190,71 \times 208,92 \times 2,57 \times 187,97 \times 209,15 \times (-0,40)] = -1,62 \times 10^{27} < 0$ kết cấu mất ổn định.

Kiểm tra sự đổi dấu của dãy số S_r (r = 0, 1, ...6): + − + − + − −, có một lần lặp lại dấu (−) chứng tỏ có một hệ số tải trọng tới hạn λ_{th} bé hơn $\lambda_2 = 1,1$. Áp dụng (7.6):

$$\lambda_{th} = 1,0 + \frac{(1,1 - 1,0)}{(2,82 + 1,62)}.2,82 = 1,0635$$

So sánh kết quả tính toán giữa 2 thí dụ (7.1) và (7.3), ta thấy ảnh hưởng của biến dạng dọc đến hệ số tải trọng tới hạn không đáng kể.



Hình 7.12

Thí dụ 7.4: Đầu đề giống thí dụ (7.2) nhưng khung được chống đỡ bởi một hệ giằng chống chuyển vị ngang, tương đương với một gối tựa đàn hồi có độ cứng bằng 7300 kN/m. Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc và biến dạng trượt.

Giải:

Trước hết, ta chọn hệ số tải trọng ban đầu gần đúng theo phương pháp R.H. Wood. Như trong thí dụ (7.2) đã trình bày, trong dạng biến dạng mất ổn định của khung, có điểm uốn giữa nhịp dầm 2–3 nên sơ đồ tính đưa về một nửa khung như trên hình (7.12b).

$$\frac{K_c}{K_c + K_{bb}} = 0 \quad ; \quad \frac{K_c}{K_c + K_{bt}} = 0,4 \text{ (xem kết quả ở thí dụ 7.2)}$$

Vì tính với nửa khung nên độ cứng của gối tựa đàn hồi được chia đôi do đó:

$$\overline{K} = \frac{4 \times (7300/2).3^2}{K_c} = 4,94$$

Từ hình (7.7), tra được $\rho = 1,18$; $F_{th} = 1,28 \times F_{Euler} = 1,18.2,188.10^4$; $F = 1,56.10^4$ kN do đó $\lambda_{th} = 1,18.2,19/1,56 = 1,66$. Ta bắt đầu tính với giá trị $\lambda_1 = 1,6$.

1) Bậc tự do và các số liệu ban đầu như trong thí dụ (7.2)

2) Thành lập các ma trận độ cứng theo (7.5):

Phần tử 1: $F = 1,6.1,56.10^4 = 2,496.10^4$, $F_{Euler} = 2,188.10^4$; $\rho = 1,14$.

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_1 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} -0,13 & -1,06 \\ -1,06 & 1,47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: $F = 0$, $\rho = 0$, hoàn toàn giống thí dụ (7.2)

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 42,56 & 0 & -42,56 & 0 \\ 0 & 2,66 & 0 & 1,33 \\ -42,56 & 0 & 42,56 & 0 \\ 0 & 1,33 & 0 & 2,66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_1 \\ d_3 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3: $\rho = 1,14$ (giống phần tử 1)

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} -0,13 & -1,06 \\ -1,06 & 1,47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

3) Thành lập ma trận độ cứng tổng thể K_1 ($\lambda = 1,6$). Chú ý lực tác dụng từ gối tựa đàn hồi vào khung là $F_3 = -10^4.0,73.d_3$. Khi thành lập ma trận K_1, cần xét đến phần đóng góp của gối tựa đàn hồi (xem chương 5).

$$K_1 = 10^4 \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1,47 \\ \underline{2,66} \\ 4,13 \end{matrix} & 1,33 & -1,06 \\ & \begin{matrix} 1,47 \\ \underline{2,66} \\ 4,13 \end{matrix} & -1,06 \\ & & \begin{matrix} -0,13+42,56 \\ -0,13-42,56 \\ 0,73+42,56 \\ \underline{-42,56} \\ 0,47 \end{matrix} \\ \text{đối} & \text{xứng} & \end{bmatrix}$$

4) Đưa K_1 về ma trận tam giác:

$$10^4 \begin{bmatrix} 4,13 & 1,33 & -1,06 \\ 0 & 0,70 & -0,72 \\ 0 & 0 & 0,066 \end{bmatrix}$$

$|K_1| = (10^4)^3.4,13.3,70.0,066 = 1,01 \times 10^{12} > 0$ kết cấu vẫn ổn định.

5) Kiểm tra dấu của dãy số S_r theo (7.7). Sự đổi dấu như sau: + − + −, không có sự lặp lại dấu, chứng tỏ λ_{th} lớn hơn $\lambda_1 = 1,6$.

6) Tăng hệ số tải trọng. Thay λ bằng $\lambda_2 = \lambda_1 + 0,1 = 1,7$

Thành lập các ma trận độ cứng:

Phần tử 1: $F = 1,7.1,56.10^4 = 2,65.10^4$; $F_{Euler} = 2,19.10^4$; $\rho = 1,21$.

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_1 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} -0,19 & -1,04 \\ -1,04 & 1,37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: $F = 0$; $\rho = 0$, giống như trường hợp $\lambda = 1,6$

Phần tử 3: giống phần tử 1, $\rho = 1,21$.

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} -0,19 & -1,04 \\ -1,04 & 1,37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Thành lập ma trận độ cứng toàn bộ K_2 ($\lambda = 1,7$). Chú ý phần đóng góp của gối tựa dàn hồi vào thành phần tải trọng $F_3 = -10^4.0,73.d_3$. Ma trận K_2 và dạng ma trận tam giác tương ứng như sau:

$$K_2 = 10^4 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 1,37 \\ \underline{2,66} \\ 4,03 \end{array} & 1,33 & -1,04 \\ & \begin{array}{r} 1,37 \\ \underline{2,66} \\ 4,03 \end{array} & -1,04 \\ & & \begin{array}{r} -0,19+42,56 \\ -0,19-42,56 \\ 0,73+42,56 \\ \underline{-42,56} \\ 0,35 \end{array} \\ \text{đối xứng} & & \end{bmatrix} \Rightarrow 10^4 \begin{bmatrix} 4,03 & 1,33 & -1,04 \\ 0 & 3,60 & -0,70 \\ 0 & 0 & -0,055 \end{bmatrix}$$

$|K_2| = (10^4)^3.4,03.3,60.(-0,055) = -0,804 \times 10^{12} < 0$

Kết cấu mất ổn định, kiểm tra dấu của dãy số S_r theo (7.7): + − + +, có 1 lần lặp lại dấu + chứng tỏ có một hệ số tải trọng tới hạn λ_{th} bé hơn $\lambda_2 = 1,7$. Áp dụng (7.6):

$$\lambda_{th} = 1,6 + \frac{(1,7-1,6)}{(1,01+0,80)}.1,01 = 1,656$$

So sánh kết quả tính toán giữa 2 thí dụ (7.2) và (7.4), ta thấy việc đặt thêm các vách ngang cứng hoặc các hệ giằng vừa có tác dụng chống gió, vừa góp phần làm tăng tải trọng tới hạn một cách đáng kể.

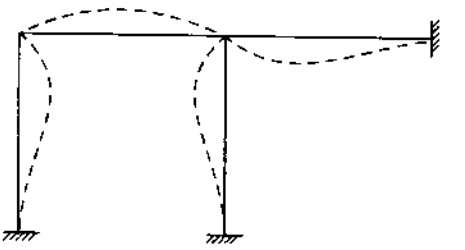
§7.6. Dạng biến dạng mất ổn định

Như đã trình bày, khi hệ mất ổn định, hệ số tải trọng bằng hệ số tải trọng tới hạn λ_{th} và định thức của ma trận độ cứng toàn bộ K triệt tiêu. Về mặt toán học, điều này có nghĩa là số ẩn bằng số bậc tự do lớn hơn số phương trình độc lập tuyến tính trong hệ thức ma trận giữa vectơ tải trọng và vectơ chuyển vị. Vì vậy, để xác định dạng biến dạng mất ổn định, cần giảm bớt số lượng các ẩn bằng cách gán cho một ẩn nào đó (ở đây là chuyển vị) một giá trị nào đó (thường bằng đơn vị) rồi dùng giá trị này để tính các ẩn còn lại. Cần chú ý rằng dạng biến dạng mất ổn định không biểu thị giá trị tuyệt đối của các thành phần chuyển vị mà chỉ biểu thị giá trị tỷ đối của chúng.

Vận dụng phương pháp đã trình bày (xem thí dụ 6.5) để xác định dạng biến dạng mất ổn định.

Thí dụ 7.5: Xác định dạng biến dạng mất ổn định của khung trên hình (7.9) (thí dụ 7.1). Ma trận độ cứng tổng thể K ứng với hệ số tải trọng tới hạn $\lambda_{th} = 1{,}064$ như sau:

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 2{,}66 & 0{,}48 \\ 0{,}48 & 0{,}09 \end{bmatrix}$$

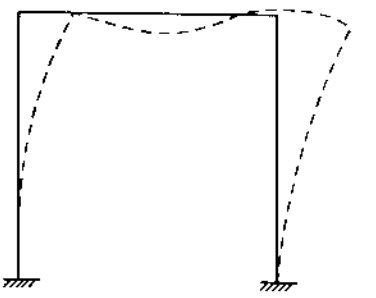


Hình 7.13

Giải:

Giả sử $d_2 = 10$. Dùng phương pháp đã trình bày trong chương sáu, ta thay số $0{,}09.10^3$ bằng số $0{,}09.10^3.10^6$ do đó $F_2 = 0{,}09.10^9.1$. Kết hợp với $F_1 = 0$, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9.10^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$



Hình 7.14

Giải hệ phương trình trên, ta được $d_1 = 0{,}18$; $d_2 = 1{,}0$. Dạng biến dạng mất ổn định biểu thị trên hình (7.13)

Thí dụ 7.6: Xác định dạng biến dạng mất ổn định của khung trên hình (7.10) (thí dụ 7.2). Ma trận độ cứng tổng thể K ứng với hệ số tải trọng tới hạn $\lambda_{th} = 1{,}05$ như sau:

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 4,59 & 1,33 & -1,16 \\ 1,33 & 4,59 & -1,16 \\ -1,16 & -1,16 & 0,45 \end{bmatrix}$$

Giải

Giả sử $d_3 = 1,0$. Tương tự như trong thí dụ trên, ta thay số $0,45.10^3$ bằng số $0,45.10^3.10^6$, do đó $F_3 = 0,45 \times 10^9 \times 1.0$. Kết hợp với $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 45.10^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được $d_1 = d_2 = 0,196$; $d_3 = 1,0$. Dạng biến dạng mất ổn định biểu thị trên hình (7.14).

Chương tám
DẠNG MA TRẬN CỦA BÀI TOÁN DAO ĐỘNG TRONG HỆ PHẲNG CÓ NÚT CỨNG

Trong thực tế, kết cấu có khả năng chịu tác dụng của các lực động, một số lực có tính chất chu kỳ như lực rung động do máy móc chuyển động gây ra, một số lực khác thường không có tính chất chu kỳ như lực gió, lực động đất v.v... Các lực này có vận tốc thay đổi gây nên lực quán tính và sự dao động của kết cấu. Trong một số trường hợp đặc biệt, biên độ của chuyển vị có thể rất lớn, làm cho kết cấu bị hư hỏng. Một trong những đặc trưng quan trọng liên quan đến hiện tượng này là tần số dao động riêng của kết cấu. Chương này nghiên cứu các tính tần số dao động riêng của hệ phẳng có nút cứng và hệ dầm giao nhau.

§8.1. Dao động tự do không có lực cản, dao động tự do có lực cản, dao động cưỡng bức

Nếu một lực động tác dụng lên kết cấu sau đó cất đi thì có khả năng xảy ra các hiện tượng sau:

1) Kết cấu dao động, tần số dao động và biên độ của chuyển vị không thay đổi theo thời gian. Ta gọi hiện tượng dao động này là *dao động tự do không lực cản.*

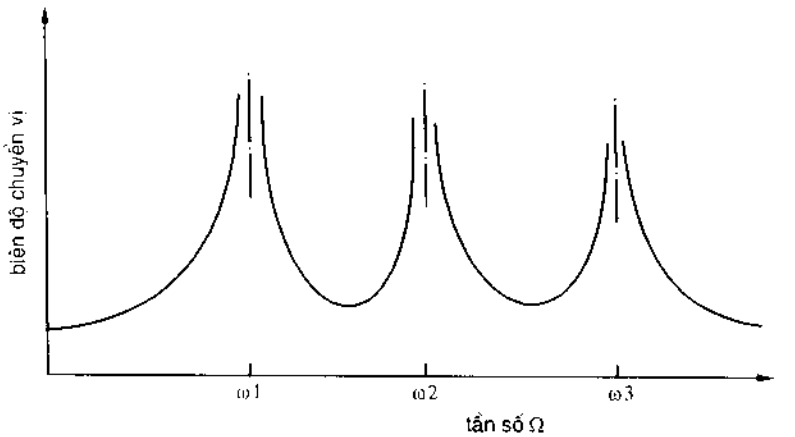
2) Kết cấu dao động, tần số dao động không đổi nhưng biên độ chuyển vị giảm. Nguyên nhân của sự giảm này là lực cản gây ra bởi sự ma sát trong các nút, trong các vết nứt, sự ma sát bên trong vật liệu, môi trường nhớt như trong không khí, nước v.v... Ta gọi hiện tượng dao động này là *dao động tự do có lực cản.*

Nếu lực cản tăng dần lên thì đến một lúc nào đó, kết cấu ngừng dao động, chuyển vị của nó giảm theo thời gian. Ta gọi lực cản tương ứng là lực cản *tới hạn.*

Lực cản được biểu thị bằng số phần trăm của lực cản tới hạn và thông thường không vượt quá 10% lực cản tới hạn đối với các kết cấu được sử dụng trong thực tế. Nếu lực cản không lớn, sự khác nhau giữa tần số dao động không có lực cản và tần số dao động tự do có lực cản có thể bỏ qua, do đó trong thực tế, khi tính tần số dao động tự do, ta bỏ qua lực cản.

Trong quá trình *dao động cưỡng bức*, kết cấu chịu tác dụng của một lực rung động (chẳng hạn do sự chuyển động của máy móc gây ra) với tần số Ω. Biên độ chuyển vị của kết cấu có thể

biểu diễn như trên hình (8.1). Tại những điểm $\Omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3...$, biên độ chuyển vị rất lớn và vô cùng lớn khi không có lực cản. Nói một cách khác, kết cấu *cộng hưởng* khi tần số Ω của lực rung động đạt đến một số giá trị đặc biệt bằng $\omega_1, \omega_2, ...$ Các tần số làm cho biên độ chuyển vị vô cùng lớn gọi là *tần số riêng* (hoặc tần số tự nhiên).



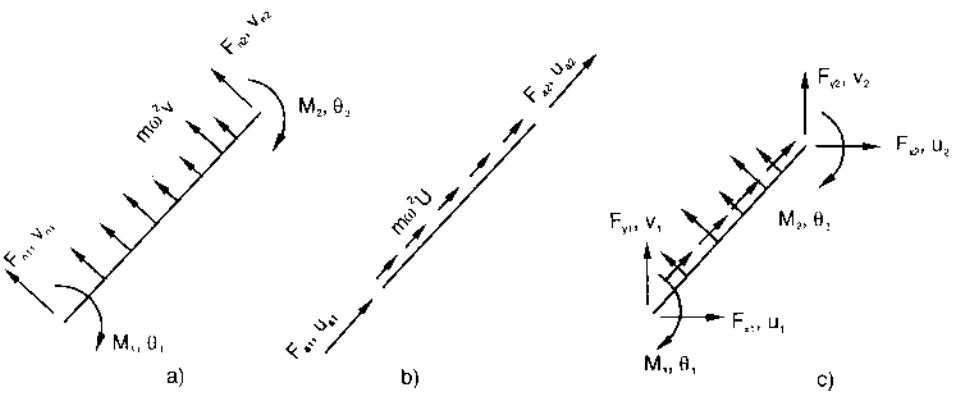
Hình 8.1

Sau đây nghiên cứu cách thành lập ma trận độ cứng của một phần tử trong trường hợp dao động tự do không có lực cản.

§8.2. Ma trận độ cứng của một phần tử

Giả sử một phần tử chịu uốn có khối lượng phân bố đều m và dao động tự do. Ta chỉ xét đến trường hợp dao động tự do không có lực cản và bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt, ảnh hưởng của sự xoay đến lực quán tính. Ta có phương trình đạo hàm riêng:

$$EI\frac{\partial^4 v}{dx^4} + m\frac{\partial^2 v}{dt^2} = 0 \qquad \text{(a)}$$



Hình 8.2

v là thành phần chuyển vị vuông góc với trục của phần tử, nó là hàm của toạ độ x và thời gian t, EI là độ cứng chống uốn.

Nghiệm của phương trình trên có dạng:

$$v = V\cos\omega t \tag{b}$$

V – biên độ chuyển vị; ω – tần số vòng

Thay (b) vào (a), ta được:

$$EI\frac{d^4V}{dx^4} - m\omega^2 V = 0 \tag{c}$$

Gọi: F_{n1}, F_{n2} – biên độ của các thành phần nội lực vuông góc với trục của phần tử tại đầu 1 và đầu 2; V_{n1}, V_{n2}, biên độ của các thành phần chuyển vị tương ứng tại đầu 1 và đầu 2; $m\omega^2V$ lực phân bố vuông góc với phần tử do lực quán tính gây ra; M_1, M_2 – biên độ của mô men uốn tại đầu 1 và đầu 2; θ_1, θ_2 – biên độ của góc xoay tương ứng tại đầu 1 và đầu 2. Các đại lượng này ghi trên hình (8.2a).

Nghiệm của phương trình vi phân (c) có dạng như sau:

$$V = C_1\sin kx + C_2\cos kx + C_3\sinh kx + C_4\cosh kx \tag{d}$$

C_1, C_2, C_3, C_4 – các hằng số có giá trị bất kỳ, $k^4 = \dfrac{m\omega^2}{EI}$

Các điều kiện biên như sau:

$$\left.\begin{array}{lll} V = V_{n1} & \text{và } \dfrac{dV}{dx} = \theta_1 & \text{tại } x = 0 \\ V = V_{n2} & \text{và } \dfrac{dV}{dx} = \theta_2 & \text{tại } x = L \end{array}\right\} \tag{e}$$

Từ (d) và (e) giải được:

$$D.C_1 = -V_1(Sc + Cs) + V_2(S + s) + \theta_1 L\frac{(Ss + Cc - 1)}{kL} + \theta_2 L\frac{(C - c)}{kL}$$

$$D.C_2 = -V_1(Ss - Cc + 1) - V_2(C - c) - \theta_1 L\frac{(Cs - Sc)}{kL} - \theta_2 L\frac{(S - s)}{kL}$$

$$D.C_3 = V_1(Sc + Cs) - V_2(S + s) - \theta_1 L\frac{(Ss - Cc + 1)}{kL} - \theta_2 L\frac{(C - c)}{kL}$$

$$D.C_4 = V_1(1 - Ss - Cc) + V_2(C - c) + \theta_1 L\frac{(Cs - Sc)}{kL} + \theta_2 L\frac{(S - s)}{kL}$$

$$D = 2(1 - Cc)$$

$$S = \sinh kL,\quad C = \cosh kL,\quad s = \sin kL,\quad c = \cos kL$$

Các thành phần nội lực tại 2 dầu của phần tử tính theo các điều kiện biên:

$$M_1 = EI\frac{d^2V}{dx^2} \quad \text{và} \quad F_{n1} = EI\frac{d^3V}{dx^3} \quad \text{tại } x = 0$$

$$M_2 = -EI\frac{d^2V}{dx^2} \quad \text{và} \quad F_{n2} = -EI\frac{d^3V}{dx^3} \quad \text{tại } x = L$$

Sau khi thực hiện các phép tính, ta có hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của phần tử trong hệ toạ độ *riêng* như sau:

$$\begin{bmatrix} F_{n1} \\ M_1 \\ F_{n2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{T_1}{L^2} & -\frac{Q_1}{L} & -\frac{T_2}{L^2} & -\frac{Q_2}{L} \\ & S_1 & \frac{Q_2}{L} & S_2 \\ & & \frac{T_1}{L^2} & \frac{Q_1}{L} \\ \text{đối xứng} & & & S_1 \end{bmatrix}}_{k}\begin{bmatrix} V_{n1} \\ \theta_1 \\ V_{n2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

Trong đó: k là ma trận độ cứng của phần tử trong hệ toạ độ riêng:

$$\left.\begin{array}{lll} S_1 = B\,(Cs - Sc); & S_2 = B\,(S - s); & Q_1 = B.kL.Ss \\ Q_2 = B.kL\,(C - c); & T_1 = B(kL)^2\,(Cs + Sc) & \\ T_2 = B(kL)^2\,(S + s); & B = \dfrac{kL}{(1 - Cc)}; & S = \sinh kL \\ C = \cosh kL; & s = \sin kL; & c = \cos kL \\ k^4 = \dfrac{m\omega^2}{EI} & & \end{array}\right\} \tag{8.2}$$

Trong trường hợp dao động *dọc trục* của một phần tử có khối lượng phân bố đều m, ta có phương trình đạo hàm riêng:

$$AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

u – chuyển vị dọc trục, nó là hàm của toạ độ x và thời gian t. Nghiệm của phương trình trên có dạng:

$$u = U\cos\omega t$$

U – biên độ của chuyển vị dọc trục; ω – tần số vòng.

Thay u vào phương trình đạo hàm riêng, ta có phương trình vi phân:

$$AE\frac{d^2U}{dx^2} + m\omega^2 U = 0$$

Nghiệm của phương trình trên có dạng:

$$U = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \qquad (a)$$

$$k^2 = \frac{m\omega^2}{AE}; \quad C_1, C_2 \text{ – hằng số bất kỳ}$$

Các điều kiện biên như sau:

$$U = U_{a1} \text{ tại } x = 0; \; U = U_{a2} \text{ tại } x = L \qquad (b)$$

U_{a1}, U_{a2} – biên độ của chuyển vị dọc trục tại đầu 1 và đầu 2 (hình 8.2b). Từ (a) và (b) giải được:

$$C_1 = U_{a1}; \; C_2 = \frac{(U_{a2} - U_{a1} \cos kL)}{\sin kL}$$

Các thành phần nội lực tại 2 đầu được xác định từ điều kiện biên:

$$F_{a1} = -AE\frac{dU}{dx} \text{ tại } x = 0; \; F_{a2} = AE\frac{dU}{dx} \text{ tại } x = L$$

F_{a1}, F_{a2} – biên độ của lực dọc tại đầu 1 và đầu 2 (hình 8.2b). Sau khi thực hiện các phép tính, ta được hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_{a1} \\ F_{a2} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \end{bmatrix} \qquad (8.3)$$

Trong đó, A_1 và A_2 là các hàm của $\beta L = \sqrt{\frac{m\omega^2}{AE}}.L$, giá trị A_1, A_2 có thể tra ở bảng (8.2).

Trong hệ toạ độ chung X, Y, các thành phần nội lực và chuyển vị biểu thị trên hình (8.2c). Phân tích tương tự như trong mục 7.1 (chương 7), cuối cùng ta được hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của phần tử trong hệ tọa độ *chung* như sau:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{T_1m^2+\alpha_1 l^2}{L^2} & \frac{(-T_1+\alpha_1)lm}{L^2} & \frac{Q_1 m}{L} & \frac{(-T_2m^2+\alpha l^2)}{L^2} & \frac{(T_2+\alpha_2)lm}{L^2} & \frac{Q_2 m}{L} \\ & \frac{T_1 l^2+\alpha m^2}{L^2} & \frac{-Q_1 l}{L} & \frac{(T_2+\alpha_2)lm}{L^2} & \frac{(-T_2 l^2+\alpha_2 m^2)}{L^2} & \frac{-Q_2 l}{L} \\ & & s_1 & \frac{-Q_2 m}{L} & \frac{Q_2 l}{L} & s_2 \\ & & & \frac{T_1m^2+\alpha l^2}{L^2} & \frac{(-T_1+\alpha_1)lm}{L^2} & \frac{-Q_1 m}{L} \\ & \text{đối xứng} & & & \frac{T_1 l^2+\alpha_1 m^2}{L^2} & \frac{Q_1 l}{L} \\ & & & & & s_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \qquad (8.4)$$

$\alpha_1 = \frac{AL^2}{I}A_1$; $\alpha_2 = \frac{AL^2}{I}A_2$; S_1, S_2, Q_1, Q_2, T_1, T_2 tính theo (8.2) và có thể tra ở bảng (8.1). Khi chưa biết diện tích tiết diện A trong trường hợp bỏ qua biến dạng dọc, thay $\frac{AE}{L}.A_1 = \frac{AE}{L}.A_2 = 0{,}25$. (tổng khối lượng của phần tử). ω^2. A_1, A_2 tra ở bảng (8.2)

§8.3. Trình tự tính toán tần số riêng của hệ phẳng có nút cứng

Trong phần trước, ta đã thành lập được ma trận độ cứng của một phần tử chịu uốn trong trường hợp dao động tự do không có lực cản. Các phần tử của ma trận này là những hàm phi tuyến của tần số ω. Ứng với một giá trị nào đó của ω, ta thành lập được một ma trận độ cứng tương ứng. Mục 8.1. đã trình bày, khi tần số dao động của một lực kích động bằng một trong những tần số riêng của kết cấu, kết cấu cộng hưởng và biên độ chuyển vị trở nên vô cùng lớn khi không có lực cản. Phân tích tương tự như trong 7.2 (chương bảy), biên độ chuyển vị vô cùng lớn khi định thức của ma trận độ cứng tổng thể triệt tiêu. Vì giá trị của ω làm cho biên độ chuyển vị vô cùng lớn là giá trị tần số riêng của kết cấu nên ta có nguyên tắc: *định thức của ma trận độ cứng tổng thể triệt tiêu là điều kiện xuất phát để xác định các tần số riêng của kết cấu.*

Khác với bài toán ổn định, ngoài tần số riêng có giá trị bé nhất gọi là *tần số cơ bản*, ta cần tìm một vài tần số có giá trị lớn hơn.

Trình tự xác định tần số cơ bản tương tự như trình tự xác định hệ số tải trong tới hạn đã được trình bày trong chương 7.

1) Trước hết, cần xác định giá trị ban đầu gần đúng ω_1 của tần số cơ bản (sẽ trình bày trong phần sau).

2) Xác định bậc tự do và thống kê các số liệu ban đầu.

3) Ứng với $\omega = \omega_1$, thành lập các ma trận độ cứng riêng, từ đó thành lập ma trận độ cứng tổng thể K_1 ($\omega = \omega_1$)

4) Dùng phương pháp Gauss đưa ma trận K_1 về dạng ma trận tam giá. Tính định thức của ma trận K_1 và kiểm tra sự đổi dấu của dãy số S_r (xem mục 7.3, hệ thức 7.7). Nếu $|K_1| > 0$ và không có sự lặp lại dấu, tần số cơ bản vẫn lớn hơn ω_1.

5) Thay $\omega = \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$. Lặp lại bước 3, 4 và tính $|K_2|$. Nếu $|K_2| > 0$, tiếp tục tăng ω. Ngược lại, nếu $|K_2| < 0$ và có một lần lặp lại dấu, chứng tỏ có một tần số cơ bản nhỏ hơn ω_2. Dùng công thức nội suy để xác định tần số cơ bản:

$$\omega_{th} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{|K_1| - |K_2|}.|K_1| + \omega_1 \qquad (8.5)$$

6) Xác định dạng biến dạng dao động

Bảng 8.1. Giá trị S_1, S_2, Q_1, Q_2, T_1, T_2 tính theo tham số kL

$$kL=\sqrt{\sqrt{\frac{m\omega^2}{EI}}}.L$$

kL	S_1	S_2	Q_1	Q_2	T_1	T_2
0	4,00	2,00	6,00	6,00	12,00	12,00
1,0	3,99	2,01	5,95	6,03	11,63	12,13
1,5	3,95	2,04	5,73	6,16	10,11	12,66
1,6	3,94	2,05	5,65	6,21	9,55	12,86
1,7	3,92	2,06	5,56	6,26	8,87	13,10
1,8	3,90	2,08	5,44	6,33	8,06	13,39
1,9	3,87	2,10	5,30	6,42	7,10	13,73
2,0	3,84	2,12	5,14	6,51	5,96	14,14
2,2	3,77	2,18	4,73	6,77	3,09	15,20
2,4	3,67	2,26	4,17	7,11	−0,75	16,66
2,6	3,53	2,36	3,43	7,58	−5,81	18,64
2,8	3,35	2,51	2,45	8,21	−12,39	21,33
3,0	3,10	2,70	1,16	9,07	−20,92	25,01
3,2	2,78	2,97	−0,55	10,25	−31,97	30,10
3,4	2,33	3,34	−2,85	11,91	−46,41	37,30
3,6	1,71	3,87	−6,02	14,29	−65,61	47,78
3,8	0,81	4,67	−10,56	17,89	−92,06	63,80
4,0	−6,60	5,95	17,53	23,73	−130,7	90,09
4,2	−3,08	8,28	−29,54	34,41	−193,9	138,6
4,4	− 8,54	13,56	−55,49	58,77	−323,1	250,6
4,6	− 30,66	35,47	−159,0	160,4	−813,9	721,1
4,8	73,22	−68,67	323,0	323,9	1415	−1531
5,0	22,99	−18,74	88,72	−92,17	312,4	−456,6
5,2	15,37	−11,48	52,21	−58,80	127,5	−304,3
5,4	12,15	−8,69	36,01	−46,34	34,76	−249,9
5,6	10,26	−7,32	25,77	−40,59	−32,98	−227,5
5,8	8,90	−6,61	17,77	− 38,05	− 93,38	−221,2
6,0	7,79	−6,29	10,53	−37,51	−153,9	−225,8
6,2	6,74	−6,25	3,22	−38,57	−219,3	−240,1
6,4	5,67	−6,46	−4,82	−41,24	−293,9	− 264,9
6,6	4,45	−6,96	−14,32	−45,85	−382,8	−303,7

Bảng 8.1 *(tiếp theo)*

kL	S_1	S_2	Q_1	Q_2	T_1	T_2
6,8	2,94	−7,83	−26,35	−53,22	−494,4	363,0
7,0	0,90	− 9,30	−42,80	−65,06	−643,5	−456,6
7,2	−2,20	−11,85	−67,80	−85,35	−862,3	−615,8
7,4	−7,79	−16,90	−112,5	−125,1	−1239	−927,6
7,6	−21,76	−30,34	− 223,4	−230,7	−2139	−1756
7,8	−138,7	−146,7	−1143	−1145	−9400	−8938
8,0	62,11	54,69	433,2	437,9	2956	3505
8,2	30,89	24,13	186,2	198,0	976,4	1624
8,4	22,20	16,16	116,0	135,8	382,4	1141
8,6	17,90	12,66	79,98	108,9	52,15	936,9
8,8	15,14	10,84	55,82	95,46	−190,0	840,0
9,0	13,07	9,87	36,63	88,90	−399,2	800,0
9,2	11,30	9,44	19,35	86,82	−600,5	798,7
9,4	9,63	9,40	2,19	88,39	−809,9	830,7
9,6	7,90	9,75	−16,31	93,59	−1041	898,3
9,8	5,94	10,53	−37,82	103,2	−1312	1011
10,0	3,52	11,92	−64,83	119,2	− 1648	1192

Bảng 8.2. Giá trị A_1, A_2 tính theo tham số βL
(dao động dọc trục hay dao động xoắn)

$$\beta L = \sqrt{\frac{m\omega^2}{AE}}\,.L \qquad \text{hoặc} \qquad \beta L = \sqrt{\frac{m\omega^2 I_p}{GJA}}\,.L$$

βL	A_1	A_2
0	1,0	−1,0
0,1	0,997	−1,002
0,2	0,987	−1,007
0,3	0,970	−1,015
0,4	0,946	−1,027
0,5	0,915	−1,043
0,6	0,877	−1,063
0,7	0,931	−1,087
0,8	0,777	−1,115
0,9	0,714	−1,149

βL	A_1	A_2
4,4	1,421	4,624
4,8	−0,422	4,815
5,2	−2,758	5,886
5,6	−6,880	8,871
6,0	− 20,618	21,473
6,4	54,538	−54,912
6,8	11,965	−13,762
7,2	5,519	−9,072
7,6	1,973	−7,852
8,0	−1,177	−8,086

Bảng 8.2 *(tiếp theo)*

βL	A_1	A_2
1,0	0,642	−1,188
1,2	0,467	−1,288
1,4	0,242	−1,421
1,6	−0,047	−1,601
1,8	−0,420	−1,848
2,0	−0,915	−2,200
2,2	−1,601	−2,721
2,4	−2,620	−3,553
2,6	−4,322	−5,044
2,8	−7,876	−8,359
3,0	−21,046	−21,259
3,2	54,725	54,819
3,4	12,863	13,305
3,6	7,295	8,135
3,8	4,912	6,211
4,0	3,455	5,285

βL	A_1	A_2
8,4	−5,104	−9,829
8,8	−12,203	−15,045
9,2	− 40,238	−41,276
9,6	54,226	55,069
10,0	15,424	18,382
10,4	7,048	12,563
10,8	2,140	11,010
11,2	−2,322	11,438
11,8	−8,012	8,545
12,0	−18,872	22,364

§8.4. Cách chọn giá trị gần đúng của tần số cơ bản

1. Dầm

Tần số cơ bản của dầm chịu uốn có khối lượng phân bố đều m có thể tính theo công thức gần đúng như sau:

$$\omega = C\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \tag{8.6}$$

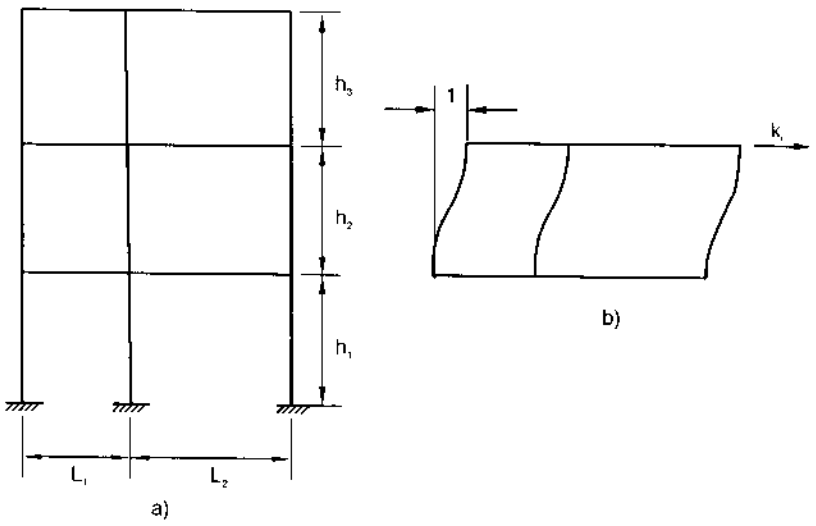
C – hằng số, tính theo các điều kiện biên trong bảng sau:

Bảng 8.3

Điều kiện biên	C
Dầm kê tự do ở hai đầu	π^2
Dầm ngàm ở hai đầu	22,373
Dầm côngxon	3,5156
Dầm 1 đầu ngàm, 1 đầu kê tự do	15,4213
Dầm 1 đầu kê tự do, một đầu ngàm trượt	2,4680
Dầm 1 đầu ngàm, một đầu ngàm trượt	5,5932

2. Khung nhiều tầng

Đối với khung nhiều tầng trên hình (8.3a) dùng công thức của A. Bolton [15] để xác định giá trị gần đúng của tần số cơ bản.



Hình 8.3

Gọi k_i là lực cần thiết để gây ra một chuyển vị ngang bằng đơn vị ở tầng thứ i (xem hình 8.3b). k_i tính như sau:

$$k_i = \Sigma 12 \frac{EI}{h^3} \tag{8.7}$$

Trong đó, dấu tổng Σ áp dụng cho toàn bộ các cột trong tầng thứ i. Khi 1 đầu của cột là khớp, thay hệ số 12 bằng hệ số 3 trong vế phải của (8.7).

Độ cứng tương đương của toàn bộ khung tính theo công thức:

$$K = \frac{1,0}{\Sigma \frac{1,0}{k_i}} \tag{8.8}$$

Dấu tổng Σ áp dụng cho toàn bộ các tầng của khung. Công thức (8.8) được thành lập với giả thiết toàn bộ các dầm đều cứng tuyệt đối nghĩa là góc xoay tại mỗi nút đều bằng không. Vì vậy, phải dùng hệ số điều chỉnh sau để xét đến tính chất cứng hữu hạn của các dầm:

$$\text{Hệ số điều chỉnh} = \frac{1,0}{1,0 + 0,5\left[\dfrac{\Sigma EI/h \text{ toàn bộ các cột}}{\Sigma EI/L \text{ toàn bộ các dầm}}\right]} \tag{8.9}$$

Khối lượng tương đương của M của hệ tính như sau:

$$M = \frac{\Sigma(\text{tổng khối lượng của tầng} \times \text{cao trình của khối lượng kể từ đáy})}{\text{tổng chiều cao của khung}} \quad (8.10)$$

Cuối cùng, xác định tần số cơ bản theo công thức:

$$\omega = \sqrt{\frac{K \times \text{hệ số điều chỉnh}}{M}} \quad (8.11)$$

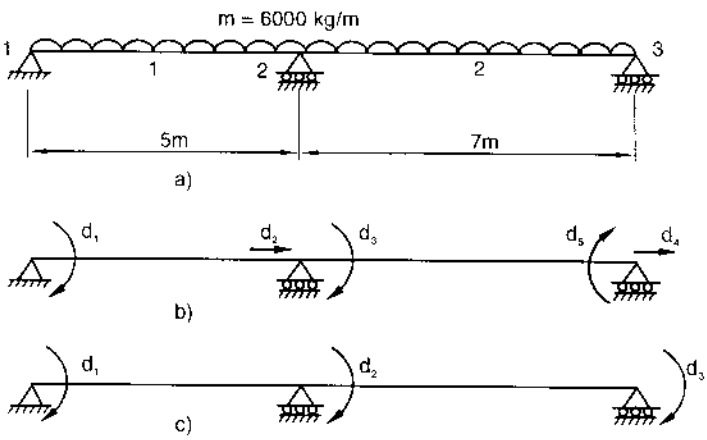
Trong đó: K tính theo (8.8), hệ số điều chỉnh tính theo (8.9), M tính theo (8.10)

§8.5. Thí dụ tính toán

Thí dụ 8.1: Tìm tần số cơ bản của dầm liên tục trên hình (8.4a). E = 210 kN/m^2, I = 558.10^{-6} m^4, A = 11780. 10^{-6} m^2. Cường độ của khối lượng phân bố đều m = 6000 kg/m. Xét 2 trường hợp:

a) Xét biến dạng dọc trục.

b) Bỏ qua biến dạng dọc trục



Hình 8.4

Giải:

1) Trước hết ta xác định giá trị gần đúng của tần số cơ bản theo công thức (8.6) và bảng (8.3). Giả sử nút 2 là gối tựa tự do. Ta có:

Nhịp 1–2:

$$EI = 210 \times 558 \text{ kN/m}^2 = 1{,}172.108 \text{ N.m}^2$$

$$m = 6000 \text{ kg/m}, L = 5\text{m}$$

$$\omega = \pi^2\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = 55,17 \text{radian/s}$$

Nhịp 2–3:

$EI = 1,172.10^8$ N.m^2

m = 6000 kg/m, L = 7m

ω = 28,15 radian/s.

Nếu giả thiết nút 2 là ngàm, thay C = 15,4213 (tra ở bảng 8.3) để tính ω cho 2 nhịp:

Nhịp 1–2, ω = 86,18 và nhịp 2–3, ω = 43,97

Vì trong thực tế nút 2 là một nút trung gian của dầm liên tục nên:

Nhịp 1–2: $55,17 < \omega < 86,18$

Nhịp 2–3: $28,15 < \omega < 43,97$

Ta sẽ chọn dầm trên nhịp 2–3 để tính giá trị gần đúng ban đầu của tần số cơ bản cho toàn bộ dầm liên tục. Chọn ω_1 = 30 và cứ mỗi vòng tính, tăng thêm 6 đơn vị.

2) Bậc tự do của hệ trong trường hợp xét đến biến dạng dọc như trên hình (8.4b), trong trường hợp bỏ qua biến dạng dọc như trên hình (8.4c). Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Bậc tự do
Trường hợp (a)

Nút	u	v	0
1	0	0	d_1
2	d_2	0	d_3
3	d_4	0	d_5

Bậc tự do
Trường hợp (b)

Nút	u	v	θ
1	0	0	d_1
2	0	0	d_2
3	0	0	d_3

Vị trí các đầu 1 và 2

Ph.tử	Đầu 1	Đầu 2
1	1	2
2	2	3
l = 1	m = 0	

3) Thay $\omega = \omega_1$ = 30 radian/s và thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (8.4):

Phần tử 1: kL = 2,32 βL = 0,234

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 8,74 & 0 & 5,28 \\ 0 & 48,57 & 0 \\ 5,28 & 0 & 8,74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 8,74 & 5,28 \\ 5,28 & 8,74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

Phần tử 2: $kL = 3,24$; $\beta L = 0,327$

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 34,07 & 0 & -35,98 & 0 \\ 0 & 4,52 & 0 & 5,10 \\ -35,98 & 0 & 34,07 & 0 \\ 0 & 5,10 & 0 & 4,52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 4,52 & 5,10 \\ 5,10 & 4,52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

4) Tính ΣF_i và thành lập ma trận cứng tổng thể K_1 ($\omega = \omega_1 = 30$):

Trường hợp (a)

$$K_1 = 10^4 \begin{bmatrix} 8,74 & 0 & 5,28 & 0 & 0 \\ & \begin{matrix} 48,57 \\ \underline{34,07} \\ 82,64 \end{matrix} & 0 & -35,98 & 0 \\ & & \begin{matrix} 8,74 \\ \underline{4,52} \\ 13,26 \end{matrix} & 0 & 5,10 \\ & & & 34,07 & 0 \\ \text{đối xứng} & & & & 4,52 \end{bmatrix}$$

Trường hợp (b)

$$K_1^* = 10^4 \begin{bmatrix} 8,74 & 5,28 & 0 \\ & \begin{matrix} 8,74 \\ \underline{4,52} \\ 13,26 \end{matrix} & \begin{matrix} 5,10 \\ 0 \end{matrix} \\ \text{đối xứng} & & 4,52 \end{bmatrix}$$

5) Đưa K_1 về dạng ma trận tam giác theo phương pháp Gauss:

Trường hợp (a)

$$10^4\begin{bmatrix} 8,74 & 0 & 5,28 & 0 & 0 \\ & 82,64 & 0 & -35,98 & 0 \\ & & 10,07 & 0 & 5,10 \\ & 0 & & 18,41 & 0 \\ & & & & 1,94 \end{bmatrix}$$

$|K_1| = (10^4)^5.8,74.82,64.10,07.18,41.1,94 = 2,59.10^{25} > 0$

Trường hợp (b)

$$10^4\begin{bmatrix} 8,74 & 5,28 & 0 \\ 0 & 10,07 & 5,10 \\ 0 & 0 & 1,94 \end{bmatrix}$$

$|K_1^*| = (10^4)^3 8,74.10,07.1,94 = 1,71.10^{14} > 0$

6) Kiểm tra sự đổi dấu của dãy số S_r, theo (7.7):

Trường hợp (a): $S_o = +1$ theo định nghĩa, $S_1 = -(8,74) = -8,74$,

$S_2 = 8,74.82,64 = 722,27$; $S_3 = -722,27.10,07 = -7,27.10^3$;

$S_4 = -(-7,27.10^3).18,41 = 1,34.10^5$; $S_5 = -1,34.10^5.1,94 = -2,59.10^5$

Sự đổi dấu của dãy số trên là: + − + − + −, không có lần nào lặp lại dấu, vậy tần số cơ bản vẫn lớn hơn $\omega_1 = 30$

Trường hợp (b): $S_o = +1$, $S_1 = -8,74$, $S_2 = -(-8,74).10,07 = 88,01$, $S_3 = -88,01.1,94 = -170,74$, không có lần nào lặp lại dấu, vậy tần số cơ bản lớn hơn 30.

7) Tiếp tục tăng ω; Thay $\omega = \omega_2 = 36$ và thành lập ma trận độ cứng của các phần tử:

Phần tử 1: $kL = 2,54$; $\beta L = 0,28$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^4\begin{bmatrix} 8,42 & 0 & 5,51 \\ 0 & 48,17 & 0 \\ 5,51 & 0 & 8,42 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^4\begin{bmatrix} 8,42 & 5,51 \\ 5,51 & 8,42 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

Phần tử 2: $kL = 3,55$, $\beta L = 0,393$

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 33,51 & 0 & -36,26 & 0 \\ 0 & 3,16 & 0 & 6,25 \\ -36,26 & 0 & 33,51 & 0 \\ 0 & 6,25 & 0 & 3,16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 3,16 & 6,25 \\ 6,25 & 3,16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

Tính ΣF_1 và thành lập ma trận độ cứng tổng thể K_2 ($\omega = \omega_2 = 36$)

trường hợp (b)

$$K_2 = 10^4 \begin{bmatrix} 8,42 & 0 & 5,51 & 0 & 0 \\ & \begin{matrix} 48,17 \\ \underline{33,51} \\ 81,68 \end{matrix} & 0 & -36,26 & 0 \\ & & \begin{matrix} 8,42 \\ \underline{3.16} \\ 11,58 \end{matrix} & 0 & 6,25 \\ \text{đối xứng} & & & 33,51 & 0 \\ & & & & 3,16 \end{bmatrix}$$

trường hợp (a)

$$K_2^* = 10^4 \begin{bmatrix} 8,42 & 5,51 & 0 \\ & \begin{matrix} 8,42 \\ \underline{3,16} \\ 11,58 \end{matrix} & 6,25 \\ \text{đối xứng} & & 3,16 \end{bmatrix}$$

Đưa ma trận K_2 về dạng ma trận tam giác theo phương pháp Gauss:

Trường hợp (a)

$$10^4 \begin{bmatrix} 8,42 & 0 & 5,51 & 0 & 0 \\ & 81,68 & 0 & -36,26 & 0 \\ & & 7,98 & 17,41 & 6,25 \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & -1,74 \end{bmatrix}$$

$$|K_2| = (10^4)^5.8,42.81,68.7,98.17,41.(-1,74) = -1,66.10^{25} < 0$$

Trường hợp (b)

$$10^4\begin{bmatrix} 8,42 & 5,51 & 0 \\ 0 & 7,98 & 6,25 \\ 0 & 0 & -1,74 \end{bmatrix}$$

$$|K_2^*| = (10^4)^3.8,42.7,98.(-1,74) = -1,17.10^{14} < 0$$

Kiểm tra sự đổi dấu của dãy số S_r theo (7.7). Kết quả:

Trường hợp (a): + − + − + +

Trường hợp (b) + − + +

Trong cả 2 trường hợp, $|K_2| < 0$ và có 1 lần lặp lại dấu. Vậy có 1 tần số cơ bản ω_{th} bé hơn $\omega_2 = 36$. Áp dụng (8.5).

Trường hợp (a) $$\omega_{th} = 30 + \frac{(36-30)}{(2,59+1,66)}2,59 = 33,66$$

Trường hợp (b) $$\omega_{th} = 30 + \frac{(36-30)}{(1,71+1,17)}1,71 = 33,56$$

Các kết quả trên cho thấy ảnh hưởng của biến dạng dọc đến tần số cơ bản không đáng kể.

Thí dụ 8.2. Xác định tần số cơ bản của hệ trên hình (8.5a)

$E = 210.10^6$ kN/m²,

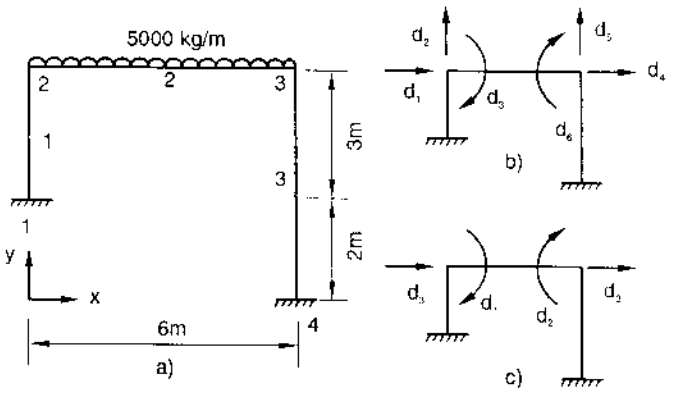
$I = 1698,43.10^{-6}$m⁴,

$A = 21630.10^{-6}$m².

Xét 2 trường hợp:

a) Xét biến dạng dọc

b) Bỏ qua biến dạng dọc và biến dạng trượt.



Hình 8.5

Giải

1) Trước hết, xác định giá trị gần đúng ban đầu của tần số cơ bản theo 8.7 – 8.11:

$$k_1 = \Sigma 12\frac{EI}{h^3} = 12\times 210\times 1698,43\times\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}\right) = 1,93.10^5\,kN/m$$

$K = k_1 = 1,93 \times 10^5$ kN/m, $\quad M = (5.10^3).6 = 30.10^3$ kg

$\Sigma \frac{EI}{h} = 1,902.105$ (cột), $\quad \Sigma \frac{EI}{L} = 0,595.10^5$

$$\text{Hệ số điều chỉnh} = \frac{1,0}{\left(1,0+0,5\frac{1,902}{0,595}\right)} = 0,39$$

Vậy: $\omega = \sqrt{\frac{1,93.10^5.0,39.10^3}{30.10^3}} = 50,99$

Chọn $\omega_1 = 52$, cứ mỗi vòng tính tăng 12 đơn vị

2) Xác định bậc tự do. Trong trường hợp (a), bậc tự do biểu thị trên hình (8.5b). Trong trường hợp (b), bậc tự do biểu thị trên hình (8.5c). Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Toạ độ

Nút	x	y
1	0	2
2	0	5
3	6	5
4	6	0

Vị trí đầu 1 và đầu 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 1
1	1	2
2	2	3
3	4	3

Bậc tự do

Nút	Trường hợp (a)			Trường hợp (b)		
	u	v	θ	u	v	θ
1	0	0	0	0	0	0
2	d_1	d_2	d_3	d_3	0	d_1
3	d_4	d_5	d_6	d_3	0	d_2
4	0	0	0	0	0	0

3) Thay $\omega = \omega_1 = 52$ và thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (8.4) và các bảng (8.1), (8.2):

Phần tử 1: $kL = \beta L = 0$ (không có khối lượng)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1,59 & 0 & -2,38 \\ 0 & 15,14 & 0 \\ -2,38 & 0 & 4,76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \qquad \text{Trường hợp (a)}$$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_1 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1,59 & -2,38 \\ -2,38 & 4,76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_1 \end{bmatrix} \qquad \text{Trường hợp (a)}$$

Phần tử 2: $kL = 2,648$; $\beta L = 0,327$

$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_1 \\ F_{y1} = F_2 \\ M_1 = F_3 \\ F_{x2} = F_4 \\ F_{y2} = F_5 \\ M_2 = F_6 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 7,30 & 0 & 0 & -7,71 & 0 & 0 \\ 0 & -0,12 & -0,32 & 0 & -0,32 & -0,76 \\ 0 & -0,32 & 2,09 & 0 & 0,76 & 1,44 \\ -7,71 & 0 & 0 & 7,30 & 0 & 0 \\ 0 & -0,32 & 0,76 & 0 & -0,12 & 0,32 \\ 0 & -0,76 & 1,44 & 0 & 0,32 & 2,09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 7,30 & 0 & -7,71 & 0 \\ 0 & 2,09 & 0 & 1,44 \\ -7,71 & 0 & 7,30 & 0 \\ 0 & 1,44 & 0 & 2,09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_1 \\ d_3 \\ d_2 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

Phần tử 3: $kL = \beta L = 0$ (không có khối lượng)

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,34 & 0 & -0,86 \\ 0 & 9,09 & 0 \\ -0,86 & 0 & 2,85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,34 & -0,86 \\ -0,86 & 2,85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

4) Tính ΣF_1 và thành lập ma trận độ cứng tổng thể ($\omega = \omega_1 = 52$)

Trường hợp (a)

$$K_1 = 10^5 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 1,59 \\ \underline{7,30} \\ 8,89 \end{array} & 0 & -2,38 & -7,71 & 0 & 0 \\ & \begin{array}{r} 15,14 \\ \underline{-0,12} \\ 15,02 \end{array} & -0,32 & 0 & -0,32 & 0,76 \\ & & \begin{array}{r} 4,76 \\ \underline{2,09} \\ 6,85 \end{array} & 0 & 0,76 & 1,44 \\ & & & \begin{array}{r} 7,30 \\ \underline{0,34} \\ 7,64 \end{array} & 0 & -0,86 \\ & & & & \begin{array}{r} -0,12 \\ \underline{9,09} \\ 8,97 \end{array} & 0,32 \\ \text{đối xứng} & & & & & \begin{array}{r} 2,09 \\ \underline{2,85} \\ 4,94 \end{array} \end{bmatrix}$$

Trường hợp (b)

$$K_1^* = 10^5 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 4,76 \\ \underline{2,09} \\ 6,85 \end{array} & 1,44 & -2,38 \\ & \begin{array}{r} 2,09 \\ \underline{2,85} \\ 4,94 \end{array} & -0,86 \\ \text{đối xứng} & & \begin{array}{r} 1,59 + 7,30 \\ 0,34 - 7,71 \\ + 7,30 \\ \underline{- 7,71} \\ 1,11 \end{array} \end{bmatrix}$$

5) Đưa ma trận K_1 về dạng ma trận tam giác theo phương pháp Gauss:

Trường hợp (a)

$$10^5 \begin{bmatrix} 8,89 & 0 & -2,38 & -7,71 & 0 & 0 \\ & 15,02 & -0,32 & 0 & -0,32 & -0,76 \\ & & 6,20 & -2,06 & 0,76 & 1,42 \\ & & & 0,27 & 0,25 & -0,38 \\ & 0 & & & 8,63 & 0,50 \\ & & & & & 3,99 \end{bmatrix}$$

$|K_1| = (10^5)^6.8,89.15,02.6,20.0,27.8,63.3,99 = 7,59.10^{33} > 0$

Trường hợp (b)

$$10^5 \begin{bmatrix} 6,85 & 1,44 & -2,38 \\ 0 & 4,64 & -0,36 \\ 0 & 0 & 0,26 \end{bmatrix}$$

$|K_1^*| = (10^5)^3 6,85.4,64.0,26 = 8,26.10^{15} > 0$

6) Kiểm tra sự đổi dấu của dãy số S_r theo (7.7)

Trường hợp (a):

$S_0 = 1$, $S_1 = -8,89$, $S_2 = -(-8,89) \times 15,02 = 133,53$

$S_3 = -133,53(6,20) = -8,28 \times 10^2$, $S_4 = -(-8,28 \times 10^2)0,27 = 223,53$

$S_5 = -223,53(8,63) = -1,93 \times 10^3$

$S_6 = -(-1,93 \times 10^3)\ 3,99 = 7,70 \times 10^3$

Sự đổi dấu là: + − + − + − +. Vậy tần số cơ bản vẫn lớn hơn $\omega_1 = 52$.

Trường hợp (b):

$S_o = 1,\ S_1 = -6{,}85,\ S_2 = 31{,}78;\ S_3 = -8{,}26$

Sự đổi dấu là: + − + − . Vậy tần số cơ bản vẫn lớn hơn $\omega_1 = 52$.

7) Tiếp tục tăng ω. Thay $\omega = \omega_2 = 52 + 12 = 64$. Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử:

Phần tử 1 và 3: giống như trường hợp ω = 52 vì không có khối lượng.

Phần tử 2: $kL = 2{,}94$; $\beta L = 0{,}403$

Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_{x1} = F_1 \\ F_{y1} = F_2 \\ M_1 = F_3 \\ F_{x2} = F_4 \\ F_{y2} = F_5 \\ M_2 = F_6 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 7{,}15 & 0 & 0 & -7{,}78 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}30 & -0{,}16 & 0 & -0{,}40 & -0{,}87 \\ 0 & -0{,}16 & 1{,}90 & 0 & 0{,}87 & 1{,}58 \\ -7{,}78 & 0 & 0 & 7{,}15 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}40 & 0{,}87 & 0 & -0{,}30 & 0{,}16 \\ 0 & -0{,}87 & 1{,}58 & 0 & 0{,}16 & 1{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Trường hợp (b)

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 7{,}15 & 0 & -7{,}78 & 0 \\ 0 & 1{,}90 & 0 & 1{,}58 \\ -7{,}78 & 0 & 7{,}15 & 0 \\ 0 & 1{,}58 & 0 & 1{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_1 \\ d_3 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Tính ΣF_1 và thành lập ma trận độ cứng tổng thể ($\omega = \omega_1 = 64$)

Trường hợp (a)

$$K_2 = 10^5 \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1{,}59 \\ \underline{7{,}15} \\ 8{,}74 \end{matrix} & 0 & -2{,}38 & -7{,}78 & 0 & 0 \\ & \begin{matrix} 15{,}14 \\ \underline{-0{,}30} \\ 14{,}84 \end{matrix} & -0{,}16 & 0 & -0{,}40 & -0{,}87 \\ & & \begin{matrix} 1{,}90 \\ \underline{4{,}76} \\ 6{,}66 \end{matrix} & 0 & 0{,}87 & 1{,}58 \\ & & & \begin{matrix} 7{,}15 \\ \underline{0{,}34} \\ 7{,}49 \end{matrix} & 0 & -0{,}86 \\ \text{đối xứng} & & & & \begin{matrix} -0{,}30 \\ \underline{9{,}09} \\ 8{,}79 \end{matrix} & 0{,}16 \\ & & & & & \begin{matrix} 1{,}90 \\ \underline{2{,}85} \\ 4{,}75 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Trường hợp (b)

$$K_2^* = 10^5 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 4,76 \\ \underline{1,90} \\ 6,66 \end{array} & 1,58 & -2,38 \\ & \begin{array}{r} 1,90 \\ \underline{2,85} \\ 4,75 \end{array} & -0,86 \\ \text{đối xứng} & & \begin{array}{r} 1,59+7,15 \\ 0,34-7,78 \\ +7,15 \\ \underline{-7,78} \\ 0,67 \end{array} \end{bmatrix}$$

Đưa ma trận K_2 về dạng ma trận tam giác theo phương pháp Gauss:

Trường hợp (a)

$$10^5 \begin{bmatrix} 8,74 & 0 & -2,38 & -7,78 & 0 & 0 \\ & 14,84 & -0,16 & 0 & -0,40 & -0,87 \\ & & 6,01 & -2,12 & 0,87 & 1,57 \\ & & & -0,18 & 0,31 & -0,30 \\ & 0 & & & 9,17 & -0,62 \\ & & & & & 4,77 \end{bmatrix}$$

$|K_2| = (10^5)^6.8,74.14,84.6,01.(-0,18).9,17.4,77 = -6,06.10^{33} < 0$

Trường hợp (b)

$$10^5 \begin{bmatrix} 6,66 & 1,58 & -2,38 \\ 0 & 4,38 & -0,29 \\ 0 & 0 & -0,20 \end{bmatrix} \quad |K_2^*| = (10^5)^3.6,66.4,38.(-0,20) = -5,72.10^{15} < 0$$

Kiểm tra dấu của dãy số S_r theo (7.7). Kết quả:

Trường hợp (a): + – + – – + –

Trường hợp (b): + – + +

Kết quả trên cho thấy có một lần lặp lại dấu nghĩa là có 1 tần số cơ bản nhỏ hơn $\omega_2 = 64$. áp dụng (8.5), ta có:

Trường hợp (a) $\qquad \omega_{th} = 5,20 + \dfrac{(64-52)}{(7,59+6,06)} 7.59 = 58,67$

Trường hợp (b) $\omega_{th} = 5,20 + \frac{(64-52)}{(8,26+5,72)} 8,26 = 59,09$

Kết quả trên cho thấy ảnh hưởng của biến dạng dọc đến tần số cơ bản của hệ đã cho không đáng kể.

Thí dụ 8.3: Xác định tần số cơ bản của hệ cho trên hình (8.6a). $E = 210.10^6$ kN/m^2. Đối với dầm:

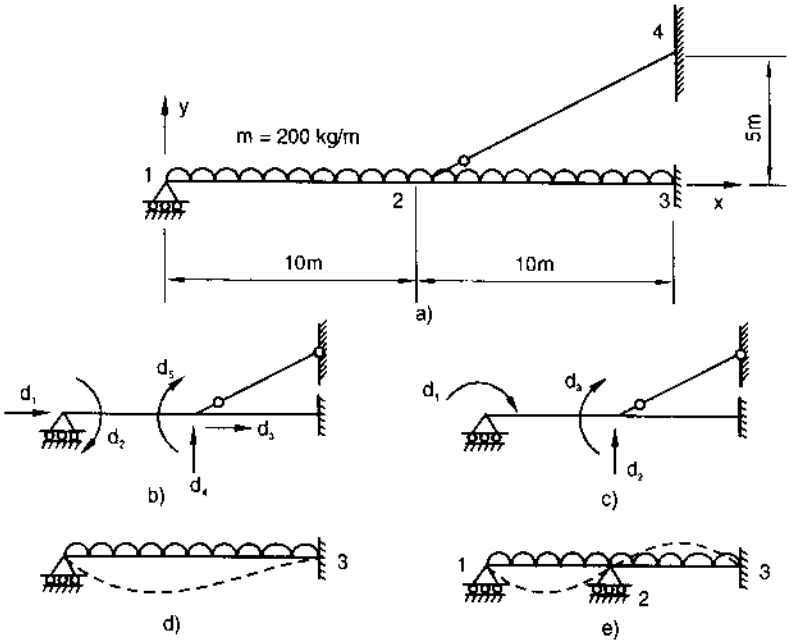
$I = 361,6.10^6$ m^4, $A = 10440.10^6$m^2. Đối với thanh chéo: $A = 2143.10^6$m^2. Xét các trường hợp sau:

(a) Xét đến biến dạng uốn và biến dạng dọc.

(b) Bỏ qua biến dạng dọc của dầm và bỏ qua biến dạng trượt.

Giải:

1) Trước hết xác định giá trị gần đúng ban đầu của tần số cơ bản theo (8.6) và bảng (8.3). Nếu thanh chéo rất mềm, dầm 1–2–3 dao động như dầm một đầu ngàm, một đầu kê tự do (hình 8.6d). Nếu thanh chéo rất cứng, dầm 1–2 dao động như dầm 2 đầu kê tự do, dầm 2–3 dao động như dầm một đầu ngàm, một đầu kê tự do (hình 8.6e). Vậy ta xét 2 trường hợp sau:



Hình 8.6

– Dầm 1–2–3: xem như dầm một đầu kê tự do một đầu ngàm

$EI = 7,59.10^4$ kNm^2 = $7,59.10^7$ Nm^2

$L = 20$, $m = 2000$ kg/m

$$\omega = 15,4213\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = 7,51$$

– Dầm 1–2 xem như dầm kê tự do ở hai đầu:

$$L = 10; \qquad \omega = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = 19,23$$

Trong thực tế, ω nằm trong phạm vi $7,51 < \omega < 29,23$. Ta chọn $\omega_1 = 16,5$ và cứ mỗi vòng tính tăng 3,3 đơn vị.

2) Bậc tự do trong trường hợp (a) biểu thị trên hình (8.6b), trong trường hợp (b) biểu thị trên hình (8.6c). Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Bậc tự do

Nút	Trường hợp (a)			Trường hợp (b)		
	u	v	θ	u	v	θ
1	d_1	0	d_2	0	0	d_1
2	d_3	d_4	d_5	0	d_2	d_3
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	–	0	0	–

Toạ độ

Nút	x	y
1	0	0
2	10	0
3	20	0
4	20	5

Vị trí Đầu 1 và Đầu 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	2	1	0
2	2	3	1	0
3	2	4	0,894	0,477

3) Thay $\omega = \omega_1 = 16,5$ và tính ma trận độ cứng của các phần tử theo (8. 4) và các bảng (8.1), (8.2):

Phần tử 1: $\qquad kL = 2,91, \qquad \beta L = 0,158$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 21,74 & 0 & -22,02 & 0 & 0 \\ 0 & 2,45 & 0 & 0,66 & 1,99 \\ -22,02 & 0 & 21,74 & 0 & 0 \\ 0 & 0,66 & 0 & -0,13 & 0,14 \\ 0 & 1,99 & 0 & 0,14 & 2,45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} \qquad \text{Trường hợp (a)}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 2,45 & 0,66 & 1,99 \\ 0,66 & -0,13 & 0,14 \\ 1,99 & 0,14 & 2,45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

Phần tử 2: $kL = 2,91$; $\beta L = 0,158$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 2,74 & 0 & 0 \\ 0 & -0,13 & -0,14 \\ 0 & -0,14 & 2,45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} -0,13 & -0,14 \\ -0,14 & 2,45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

Phần tử 3: Thanh chịu lực dọc không có khối lượng. Áp dụng (2.25) (chương hai):

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 3,22 & 1,61 \\ 1,61 & 0,81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

Trường hợp (b): $F_2 = 10^4 . 0,81\ d_2$

4) Tính ΣF_i và thành lập ma trận độ cứng tổng thể $K_1(\omega = \omega_1 = 16,5)$

Trường hợp (a)

$$K_1 = 10^4 \begin{bmatrix} 21,74 & 0 & -22,02 & 0 & 0 \\ & 2,45 & 0 & 0,66 & 1,99 \\ & & \begin{array}{r} 21,74 \\ 21,74 \\ \underline{3,22} \\ 46,70 \end{array} & 1,61 & 0 \\ & & & \begin{array}{r} -0,13 \\ -0,13 \\ \underline{0,81} \\ 0,55 \end{array} & \begin{array}{r} 0,14 \\ \underline{-0,14} \\ 0 \end{array} \\ \text{đối xứng} & & & & \begin{array}{r} 2,45 \\ \underline{2,45} \\ 4,90 \end{array} \end{bmatrix}$$

Trường hợp (b)

$$K_1^* = 10^4 \begin{bmatrix} 2,45 & 0,66 & 1,99 \\ & -0,13 & 0,14 \\ & -0,13 & -0,14 \\ & \underline{0,81} & \underline{0} \\ & 0,55 & \\ \text{đối xứng} & & 2,45 \\ & & \underline{2,45} \\ & & 4,90 \end{bmatrix}$$

5) Đưa K_1 về dạng ma trận tam giác theo phương pháp Gauss:

Trường hợp (a)

$$10^4 = \begin{bmatrix} 21,74 & 0 & -22,02 & 0 & 0 \\ & 2,45 & 0 & 0,66 & 1,99 \\ & & 24,41 & 1,61 & 0 \\ 0 & & & 0,27 & -0,53 \\ & & & & 2,22 \end{bmatrix}$$

$|K_1| = (10^4)^5.21,74.2,45.24,41.0,27.2,22 = 7,67.10^{22} > 0$

Trường hợp (b)

$$10^4 = \begin{bmatrix} 2,45 & 0,66 & 1,99 \\ 0 & 0,37 & -0,53 \\ 0 & 0 & 2,53 \end{bmatrix}$$

$|K_1| = (10^4)^3.2,45.0,37.2,53 = 2,30.10^{12} > 0$

6) Kiểm tra sự đổi dấu theo (7.7). Kết quả:

Trường hợp (a): + − + − + −

Trường hợp (b): + − + −

Vậy tần số cơ bản vẫn lớn hơn $\omega_1 = 16,5$.

7) Thay $\omega = \omega_2 = 16,5 + 3,3 = 19,8$

Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử

Phần tử 1: $kL = 3,14$, $\beta L = 0,19$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 21,66 & 0 & -22,06 & 0 & 0 \\ 0 & 2,13 & 0 & 0,77 & 2,25 \\ -22,06 & 0 & 21,66 & 0 & 0 \\ 0 & 0,77 & 0 & -0,24 & -0,03 \\ 0 & 2,25 & 0 & -0,03 & 2,13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 2,13 & 0,77 & 2,25 \\ 0,77 & -0,24 & -0,03 \\ 2,25 & -0,03 & 2,13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

Phần tử 2: $kL = 3,14$, $\beta L = 0,19$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 21,66 & 0 & 0 \\ 0 & -0,24 & 0,03 \\ 0 & 0;03 & 2,13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} -0,24 & 0,03 \\ 0,03 & 2,13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$ Trường hợp (b)

Phần tử 3: Không có khối lượng nên ma trận giống như trường hợp $\omega = 16,5$.

Tính ΣF_i và thành lập ma trận độ cứng tổng thể $K_2(\omega = \omega_2 = 19,8)$

Trường hợp (a)

$$K_2 = 10^4 \begin{bmatrix} 21,66 & 0 & -22,06 & 0 & 0 \\ & 2,13 & 0 & 0,77 & 2,25 \\ & & \begin{array}{r} 21,66 \\ 21,66 \\ \underline{3,22} \\ 46,54 \end{array} & 1,61 & 0 \\ & & & \begin{array}{r} 0,81 \\ -0,24 \\ \underline{-0,24} \\ 0,33 \end{array} & \begin{array}{r} 0,03 \\ \underline{-0,03} \\ 0 \end{array} \\ \text{đối xứng} & & & & \begin{array}{r} 2,13 \\ \underline{2,13} \\ 4,26 \end{array} \end{bmatrix}$$

Trường hợp (b)

$$K_2^* = 10^4 \begin{bmatrix} 2,13 & 0,77 & 2,25 \\ & 0,81 & 0,03 \\ & -0,24 & -0,03 \\ & -0,24 & 0 \\ & 0,33 & \\ & & 2,13 \\ & & 2,13 \\ \text{đối xứng} & & 4,26 \end{bmatrix}$$

Đưa K_2 về dạng ma trận tam giác theo phương pháp Gauss:

Trường hợp (a)

$$10^4 \begin{bmatrix} 21,66 & 0 & -22,06 & 0 & 0 \\ & 2,13 & 0 & 0,77 & 2,25 \\ & & 24,09 & 1,61 & 0 \\ & & & -0,06 & -0,81 \\ & & & & 13,36 \end{bmatrix}$$

$|K_2| = (10^4)^5.21,66.2,13.24,09.(-0,06).13,36 = -8,59.10^{22} < 0$

Trường hợp (b)

$$10^4 \begin{bmatrix} 2,13 & 0,77 & 2,25 \\ 0 & 0,05 & -0,78 \\ 0 & 5 & -9,99 \end{bmatrix}$$

$|K_2^*| = (10^4)^3.2,13.0,05.(-9,99) = -1,06.10^{12} < 0$

Kiểm tra dấu của dãy số S_r theo (7.7). Kết quả:

Trường hợp (a): $+ - + - - +$

Trường hợp (b): $+ - + +$

Kết quả trên cho thấy có 1 lần lặp lại dấu, vậy có một tần số cơ bản nhỏ hơn $\omega_2 = 19,8$. Áp dụng (8.5), ta có:

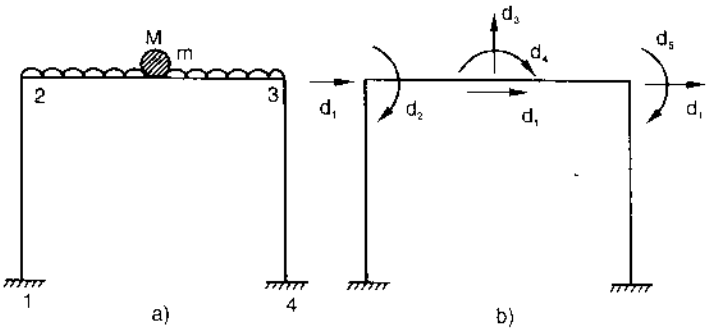
Trường hợp (a) $\quad \omega_{th} = 16,5 + \dfrac{(19,8 - 16,5)}{(7,67 + 8,59)} 7,67 = 18,06$

Trường hợp (b) $\quad \omega_{th} = 16,5 + \dfrac{(19,8 - 16,5)}{(2,30 + 1,06)} 2,30 = 18,76$

Kết quả trên cho thấy ảnh hưởng của biến dạng dọc đến tần số cơ bản không đáng kể.

§8.6. Trường hợp khối lượng tập trung

Ta đã nghiên cứu cách giải bài toán dao động trong trường hợp khối lượng phân bố đều. Trong thực tế, kết cấu có khả năng có các khối lượng tập trung. Trong trường hợp này ta có thể xem điểm đặt khối lượng tập trung là một nút (hình 8.7a) và lực quán tính tương ứng với khối lượng tập trung là một thành phần tải trọng tác dụng lên kết cấu.



Hình 8.7

Chẳng hạn đối với hệ trên hình (hình 8.7a), ta có thể bổ sung một nút tại điểm đặt khối lượng tập trung do đó bổ sung thêm 3 bậc tự do d_1, d_3, d_4 (hình 8.7b). Áp dụng nguyên lý D' Alembert:

Lực quán tính trên phương $d_1 = -[M\frac{d^2}{dt^2}(d_1 \cos\omega t)] = M\omega^2 d_1 \cos\omega t$

Lực quán tính trên phương $d_3 = -[M\frac{d^2}{dt^2}(d_3 \cos\omega t)] = M\omega^2 d_3 \cos\omega t$

Vậy biên độ của các thành phần tải trong tương ứng với d_1 là $M\omega^2 d_1$, ứng với d_3 là $M\omega^2 d_3$ (ở đây, ta bỏ qua lực quán tính do xoay). Các thành phần tải trọng bổ sung như sau:

Trên phương d_1: $F_1 = M\omega^2 d_1$

Trên phương d_3: $F_3 = M\omega^2 d_3$

Từ hệ thức ma trận giữa vectơ tải trọng và vectơ chuyển vị, ta có thể viết (chẳng hạn đối với hàng chứa F_1)

$$F_1 = M\omega^2 d_1 = k_{11}d_1 + k_{12}d_2 + k_{13}d_3 + k_{14}d_4 + k_{15}d_5$$

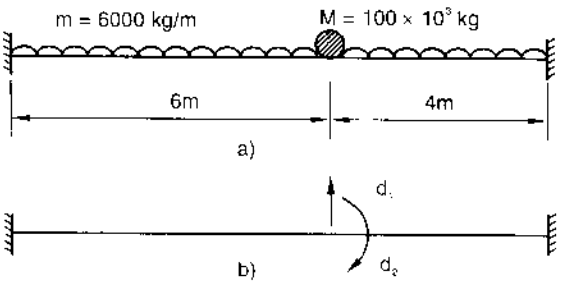
hoặc

$$(k_{11} - M\omega^2)d_1 + k_{12}d_2 + k_{13}d_3 + k_{14}d_4 + k_{15}d_5 = 0$$

Vậy khi *có khối lượng tập trung M, ma trận độ cứng tổng thể K vẫn được suy ra từ điều kiện khối lượng phân bố đều nhưng phần tử trên đường chéo chính ứng với thành phần chuyển vị trên đó có lực quán tính do M gây ra giảm đi một lượng $M\omega^2$.*

Thí dụ 8.4:

Xác định tần số cơ bản của hệ trên hình (8.8a)



Hình 8.8

$E = 210.10^6$ kN/m

$I = 5038.10^{-6}m^4$.

$A = 36850,0.10^{-6}m^2$.

Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc và biến dạng trượt.

Giải:

1) Trước hết xác định giá trị gần đúng của tần số cơ bản theo (8.6) và bảng (8.3). Giả sử toàn bộ khối lượng được phân bố đều trên dầm, cường độ của khối lượng phân bố là 6000 kg/m. Ta có:

$$\omega = 22,37\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = 58,04 \text{ radian/s}$$

Mặt khác, nếu giả thiết toàn bộ khối lượng M = 160.000kg tập trung vào giữa nhịp dầm, lực gay chuyển vị bằng đơn vị $K = 192\frac{EI}{L^3}$, do đó $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = 35,95$. Trong thực tế $35,95 < \omega < 58,64$. Ta chọn $\omega = 40$ và cứ mỗi vòng tính, tăng thêm 5 đơn vị.

2) Bậc tự do biểu thị trên hình (8.8b). Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Bậc tự do

Nút	u	v	θ
1	0	0	0
2	0	d_1	d_2
3	0	0	0

Vị trí đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	1	2
2	2	3
côsin định hướng $l = 1$, m = 0		

3) Thay $\omega = \omega_1 = 40$ và thành lập ma trận độ cứng của các phần tử :

Phần tử 1: m = 6000 kg, kL = 1,85, βL = 0,211

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,37 & 1,58 \\ 1,58 & 6,85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: m = 6000 kg, kL = 1,24, βL = 0,141

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1,84 & -3,89 \\ -3,89 & 10,52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

4) Thành lập ma trận độ cứng tổng thể $K_1(\omega = \omega_2 = 40)$. Chú ý lực quán tính do khối lượng M = 100.000 kg gây ra, tác dụng trên phương của d_1, nên phần tử k_{11} trên đường chéo chính ứng với d_1 giảm đi một lượng $M\omega^2 = 1{,}60.10^5$ (có đánh dấu "sao").

$$K_1 = 10^5 \begin{bmatrix} 0{,}37 & 1{,}58 \\ 1{,}84 & -3{,}89 \\ -1{,}60^* & -2{,}31 \\ 9{,}61 & \\ & 6{,}85 \\ & 10{,}52 \\ \text{đối xứng} & 17{,}37 \end{bmatrix}$$

5) Đưa K_1 về dạng ma trận tam giác theo phương pháp Gauss:

$$10^5 \begin{bmatrix} 0{,}61 & -2{,}31 \\ & \\ \text{đối xứng} & 0{,}007 \end{bmatrix}$$

$$|K_1| = (10^5)^2.0{,}61.0{,}007 = 0{,}004.10^{10} > 0$$

6) Kiểm tra sự đổi dấu theo (7.7). Kết quả: + – +. Vậy tần số cơ bản lớn hơn $\omega_1 = 40$.

7) Thay ω bằng $\omega_2 = 40 + 5 = 45$ và thành lập ma trận độ cứng của các phần tử

Phần tử 1: $kL = 1{,}96$, $\beta L = 0{,}238$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0{,}31 & 1{,}53 \\ 1{,}53 & 6{,}80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: $kL = 1{,}31$, $\beta L = 0{,}159$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1{,}80 & -3{,}87 \\ -3{,}87 & 10{,}51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Thành lập ma trận độ cứng tổng thể $K_2(\omega = \omega_2 = 45)$

Phần tử k_{11} giảm đi một lượng $M\omega^2 = 2{,}025.10^5$ (đánh dấu "sao")

$$K_2 = 10^5 \begin{bmatrix} 0{,}31 & 1{,}53 \\ 1{,}80 & -3{,}87 \\ -2{,}30^* & -2{,}34 \\ 0{,}08 & \\ & 6{,}80 \\ & 10{,}51 \\ \text{đối xứng} & 17{,}31 \end{bmatrix}$$

Đưa K_2 về dạng ma trận tam giác:

$$10^5\begin{bmatrix} 0,08 & -2,34 \\ 0 & -43,75 \end{bmatrix}$$

$|K_2| = (10^5)^2.0.08.(-43,75) = -3,91.10^{10} < 0$

Kiểm tra dấu. Kết quả: + – –. Có 1 lần lặp lại dấu, vậy có 1 tần số cơ bản nhỏ hơn $\omega_2 = 45$. Áp dụng (8.5):

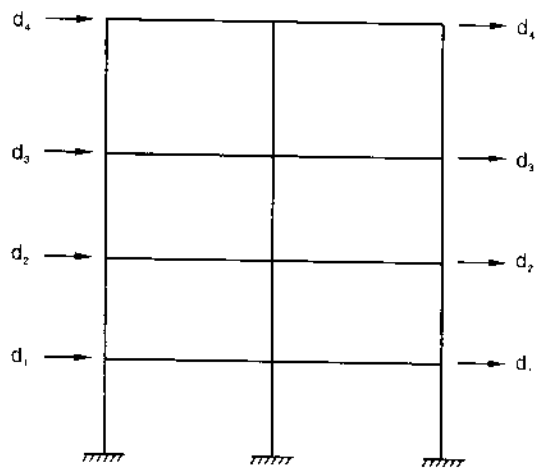
$$\omega_{th} = 40 + \frac{(45-40)}{(0,004+3,91)}0,004 = 40,01$$

§8.7. Tần số cơ bản của khung nhiều tầng

Đối với khung nhiều tầng, nếu để nguyên số bậc tự do, việc tính toán sẽ rất phức tạp. Vì vậy, khi tính tần số cơ bản của hệ khung nhiều tầng, người ta đưa ra các giả thiết sau:

1) Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc đối với toàn bộ các phần tử

2) Các dầm tuyệt đối cứng.



Hình 8.9

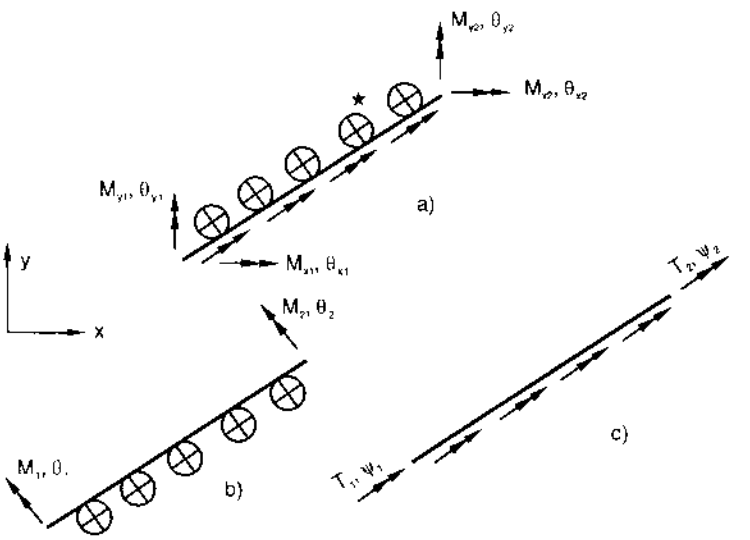
Với giả thiết thứ nhất, ở mức mỗi sàn, chỉ có một thành phần chuyển vị trên phương nằm ngang. Với giả thiết thứ hai, góc xoay tại các nút đều triệt tiêu. Số bậc tự do được giảm bớt một cách đáng kể (xem hình 8.9). Mô men quán tính I và diện tích A có thể lấy những giá trị bất kỳ vì điều này không ảnh hưởng đến ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu.

§8.8. Tần số cơ bản của hệ dầm giao nhau

Ta biết rằng mỗi phần tử trong hệ dầm giao nhau là một thanh vừa chịu uốn, vừa chịu xoắn. Trong trường hợp chịu uốn, ta đã suy ra ma trận độ cứng (8.1) của phần tử trong hệ toạ độ riêng. Đối với phần tử trong hệ dầm giao nhau, ma trận (8.1) có dạng:

$$\begin{bmatrix} F_{z1} \\ M_1 \\ F_{z2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{T_1}{L^2} & -\frac{Q_1}{L} & -\frac{T_2}{L^2} & -\frac{Q_2}{L} \\ & S_1 & \frac{Q_2}{L} & S_2 \\ & & \frac{T_1}{L^2} & \frac{Q_1}{L} \\ \text{đối xứng} & & & S_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \qquad (8.12)$$

Trong đó: F_{z1}, F_{z2} – thành phần nội lực trên phương trục z (vuông góc với mặt phẳng của hệ dầm) tại đầu 1 và đầu 2; w_1, w_2 – các thành phần chuyển vị tương ứng tại đầu 1 và đầu 2; ý nghĩa của M_1, M_2, θ_1, θ_2 xem hình (8.10b).



Hình 8.10

Trong trường hợp phần tử dao động xoắn (hình 8.10c), ta xuất phát từ phương trình vi phân.

$$GJ.\frac{d^2\psi}{dx^2} + t = 0$$

t – cường độ của mô men xoắn phân bố đều

Phương trình vi phân trên có thể đưa về dạng phương trình đạo hàm riêng:

$$GJ.\frac{\partial^2\psi}{dx^2} - m\frac{I_p}{A}.\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (a)$$

Trong đó: GJ – độ cứng chống xoắn; A– diện tích tiết diện; I_p– mô men quán tính độc cực; m – khối lượng phân bố trên đơn vị dài; – ψ góc xoắn, nó là hàm của toạ độ x và thời gian t.

Trong trường hợp dao động tự do không có lực cản, nghiệm của phương trình (a) có dạng

$$\psi = \phi \cos \omega t \qquad (b)$$

ϕ – biên độ của góc xoắn.

Căn cứ vào (b) và các điều kiện biên, ta suy ra hệ thức ma trận:

Chú thích: * + là phân bố trên phương trục z (vuông góc với mặt phẳng của hệ dầm)

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{GJ}{L}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \tag{8.13}$$

$$A_1 = kL\cot kL, \qquad A_2 = -\,kL\operatorname{cosec} kL \tag{8.14}$$

Sau khi kết hợp 2 ma trận (8.12) và (8.13), ta suy ra ma trận độ cứng của phần tử trong hệ toạ độ chung như sau (hình 8.10a):

Chú thích: lực phân bố trên phương trục z (vuông góc với mặt phẳng của hệ dầm)

$$\begin{bmatrix} F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{T_1}{L^2} & \frac{Q_1 m}{L} & \frac{-Q_1 l}{L} & \frac{-T_2}{L^2} & \frac{-Q_2 m}{L} & \frac{-Q_2 l}{L} \\ & S_1 m^2 + \alpha_1 l^2 & -(S_1 - \alpha_1) lm & \frac{-Q_2 m}{L} & S_2 m^2 + \alpha_2 l^2 & -(S_2 - \alpha_2) lm \\ & & S_1 l^2 + \alpha_1 m^2 & \frac{Q_2 l}{L} & -(S_2 - \alpha_2) lm & S_2 l^2 + \alpha_2 m^2 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & \frac{T_1}{L^2} & \frac{Q_1 m}{L} & \frac{Q_1 l}{L} \\ & & & & S_1 m^2 + \alpha_1 l^2 & -(S_1 - \alpha_1) lm \\ & & & & & S_1 l^2 + \alpha_1 m^2 \end{bmatrix}}_{k}\begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

$$\alpha_1 = \frac{GJ}{EI}A_1, \alpha_2 = \frac{GJ}{EI}A_2$$

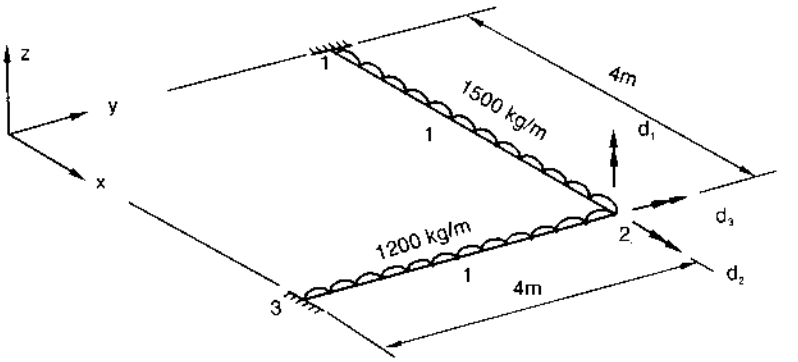
Trong đó: k là ma trận độ cứng của một phần tử trong hệ dầm giao nhau trong trường hợp dao động tự do không có lực cản. S_1, S_2, Q_1, Q_2, T_1, T_2 tính theo (8.2) hoặc tra ở bảng (8.1). A_1, A_2 tính theo (8.14) hoặc tra ở bảng (8.2) .

Thí dụ 8.5:

Xác định tần số cơ bản của hệ cho trên hình (8.11).

Tiết diện các phần tử có dạng hình chữ nhật, kích thước 0,5 × 0,25 m.E = 14.10^6 kN/m^2, G = $6,36.10^6$ kN/m^2, I = 2604.10^{-6}m^4, J = 1821.10^{-6}m^4, A = 125000.10^{-6}m^2, L = 4m. Mô men quán tính độc cực

$$I_p = (0,25 \times 0,5^3 + 0,5 \times 0,25^3) = 3255.10^{-6}\text{m}^4$$



Hình 8.11

Giải:

1) Xác định giá trị gần đúng của tần số cơ bản. Có thể xem các dầm dao động như những dầm côngxon với khối lượng trung bình là (1500 + 1200) × 0,5 = 1350 kg/m. Theo (8.6) và bảng (8.3), ta được:

$$\omega = 3{,}5156\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = 3{,}5156.\sqrt{\frac{14\times 2604\times 10^3}{1350\times 4^4}} = 36{,}11$$

Chọn ω = 38 và cứ mỗi vòng tính tăng thêm 10 đơn vị.

2) Bậc tự do biểu thị trên hình (8.11). Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng

Bậc tự do

Nút	w	θ_x	θ_y
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_3
3	0	0	0

Tọa độ

Nút	x	y
1	0	4
2	4	4
3	4	0

Vị trí các đầu 1 và 2

Ph.tử	Đầu 1	Đầu 2	*l*	m
1	1	2	1	0
2	3	2	0	1

3) Thay $\omega = \omega_1 = 38$ và thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (8.15) và các bảng (8.1), (8.2):

Phần tử 1: kL = 1,975, βL = 0,279, m = 1500 kg

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 3{,}53 & 0 & 11{,}78 \\ 0 & 2{,}82 & 0 \\ 11{,}78 & 0 & 35{,}04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: kL = 1,868, βL = 0,2496, m = 1200 kg

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 4,21 & -12,17 & 0 \\ -12,17 & 35,32 & 0 \\ 0 & 0 & 2,84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

4) Tính ΣF_1 và thành lập ma trận độ cứng tổng thể $K_1(\omega = \omega_2 = 38)$

$$K_1 = 10^3 \begin{bmatrix} \begin{matrix} 3,53 \\ \underline{4,21} \\ 7,74 \end{matrix} & -12,17 & 11,78 \\ & \begin{matrix} 2,82 \\ \underline{35,32} \\ 38,14 \end{matrix} & 0 \\ \text{đối xứng} & & \begin{matrix} 35,04 \\ \underline{2,84} \\ 37,88 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

5) Đưa K_1 về dạng ma trận tam giác theo phương pháp Gauss:

$$10^3 \begin{bmatrix} 7,74 & -12,17 & 11,78 \\ 0 & 19,01 & 18,52 \\ 0 & 0 & 1,91 \end{bmatrix}$$

$$|K_1| = (10^3)^3 \times 7,74 \times 19,01 \times 1,91 = 2,81 \times 10^{11} > 0$$

6) Kiểm tra sự đổi dấu của dãy số S_r theo (7.7): + − + −, vậy tần số cơ bản vẫn lớn hơn ω_1 = 38.

7) Thay ω bằng ω_2 = 38 + 10 = 48 và thành lập ma trận độ cứng của các phần tử

Phần tử 1: kL = 2,22, βL = 0,352, m = 1500 kg/m

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 1,57 & 0 & 10,65 \\ 0 & 2,78 & 0 \\ 10,65 & 0 & 34,21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: kL = 2,10, βL = 0,315, m = 1200kg/m

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 2,64 & -11,26 & 0 \\ -11,26 & 34,65 & 0 \\ 0 & 0 & 2,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Thành lập ma trận độ cứng tổng thể $K_2(\omega = \omega_2 = 48)$ và đưa về dạng ma trận tam giác:

$$K_2 = 10^3 \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1,57 \\ \underline{2,64} \\ 4,21 \end{matrix} & -11,26 & 10,65 \\ & \begin{matrix} 2,78 \\ \underline{34,65} \\ 37,43 \end{matrix} & 0 \\ \text{đối xứng} & & \begin{matrix} 34,21 \\ \underline{2,64} \\ 36,85 \end{matrix} \end{bmatrix} \Rightarrow 10^3 \begin{bmatrix} 4,21 & -11,26 & 10,65 \\ 0 & 7,23 & 28,55 \\ 0 & 0 & -102,90 \end{bmatrix}$$

$$|K_2| = (10^3)^3 \times 4,21 \times 7,23 \times (-102,90) = -31,24.10^{11} < 0$$

Kiểm tra sự đổi dấu theo (7.7): + − + +, vậy có 1 lần lặp lại dấu, chứng tỏ có một tần số cơ bản nhỏ hơn $\omega_2 = 48$. Áp dụng (8.5):

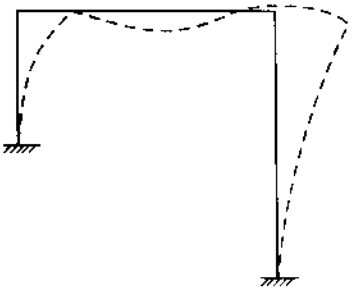
$$\omega_{th} = 38 + \frac{48-38}{2,81+31,24}.2,81 = 38,82$$

§8.9. Dạng biến dạng dao động

Cách xác định dạng biến dạng trong quá trình dao động của một hệ ứng với một tần số riêng nào đó hoàn toàn giống như đã trình bày khi xác định dạng biến dạng mất ổn định (xem 7.6)

Thí dụ 8.6. Xác định dạng biến dạng dao động của hệ cho trên hình (8.5) (thí dụ 8.2). Tần số cơ bản $\omega = 59,03$, ma trận độ cứng tổng thể trong trường hợp (b) có dạng:

$$K = 10^5 \begin{bmatrix} 6 & 1,55 & -2,38 \\ & 4,50 & -0,86 \\ \text{đối xứng} & & 0,79^* \end{bmatrix}$$



Hình 8.12

Giải

Chọn $d_3 = 1,0$ (d_3 là thành phần chuyển vị ngang). Thay phần tử $0,79 \times 10^5$ ứng với d_3

(đánh dấu "sao") trong ma trận K bằng giá trị $0,79 \times 10^5 \times 10^6$, ta được thành phần tải trọng $F_3 = 0,79 \times 10^{11} \times d_3 = 0,79 \times 10^{11}$. Các thành phần tải trọng còn lại $F_1 = F_2 = 0$. Ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,79 \times 10^{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$D = [d_1 \;\; d_2 \;\; d_3]' = [0,34 \qquad 0,07 \qquad 1,0]'$$

Dạng biến dạng dao động biểu thị trên hình (8.12)

Thí dụ 8.7: Xác định dạng biến dạng dao động của hệ cho trên hình (8.4) (thí dụ 8.1). Tần số cơ bản $\omega = 33,56$, ma trận độ cứng tổng thể K trong trường hợp (b) có dạng như sau:

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 8,55 & 5,41 & 0 \\ & 12,26 & 5,78 \\ \text{đối xứng} & & 3,71^* \end{bmatrix}$$

Hình 8.13

Giải

Chọn $d_3 = 1,0$ và thay giá trị $3,71 \times 10^4$ của phần tử ứng với d_3 (đánh dấu "sao") trong ma trận K bằng giá trị $3,71 \times 10^4$ của phần tử ứng với d_3 (đánh dấu "sao") trong ma trận K bằng giá trị $3,71 \times 10^4 \times 10^6$. Ta có $F_3 = 3,71 \times 10^{10}.d_3 = 3,71 \times 10^{10}$. Các thành phần tải trọng còn lại $F_1 = F_2 = 0$. Ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,71 \times 10^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$D = [d_1 \; d_2 \; d_3]' = [0,41 \; -0,65 \; 1,0]'$$

Dạng biến dạng dao động biểu thị trên hình (8.13)

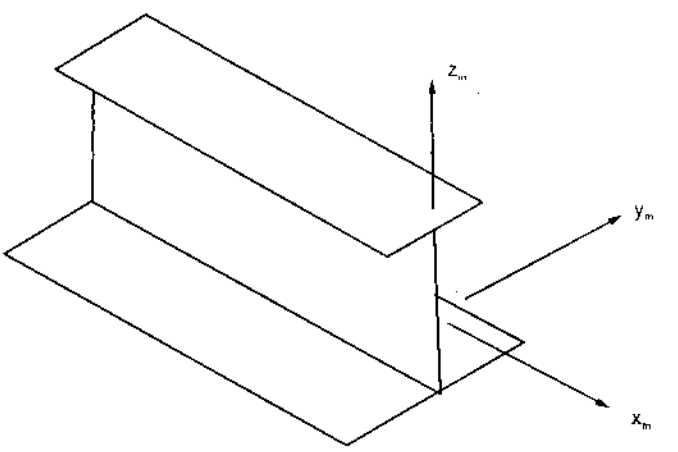
Chương chín
HỆ KHÔNG GIAN CÓ NÚT CỨNG

Các kết cấu thường gặp trong thực tế là những hệ không gian có nút cứng trong đó các phần tử vừa chịu uốn, vừa chịu xoắn. Để đơn giản hoá tính toán, ta thường đưa chúng về hệ phẳng. Sự đơn giản hoá này xuất phát từ tình hình tính toán hệ không gian quá phức tạp: số ẩn tăng lên đáng kể, trong trường hợp tiết diện không đối xứng, việc tính toán lại càng phức tạp hơn. Tuy nhiên những khó khăn này có thể khắc phục được trong điều kiện sử dụng máy tính điện tử.

Chương này nghiên cứu cách tính hệ không gian có nút cứng. Trình tự tính toán tương tự như đã trình bày trong chương ba. Tuy nhiên ở đây cần phải chuyển đổi từ hệ toạ độ riêng 3 chiều sang hệ toạ độ chung 3 chiều. Trước hết ta xét trường hợp tiết diện có 2 trục đối xứng nghĩa là các trục này tạo thành 1 hệ quán tính chính trung tâm.

§9.1. Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ toạ độ riêng

Giả sử tiết diện của một phần tử có 2 trục đối xứng như trên hình (9.1). Mỗi phần tử có hệ toạ độ riêng 3 chiều x_m, y_m, z_m. Ta quy ước chiều dương của trục x_m trùng với chiều dương của trục phần tử (đi từ đầu 1 đến đầu 2). 2 trục còn lại trùng với 2 trục đối xứng sao cho khi nhìn về phía chiều dương của trục x_m, chiều xoay để trục y_m trùng với trục z_m là chiều kim đồng hồ. Gọi: F_{x1m}, F_{x2m} – lực dọc tại đầu 1 và đầu 2; u_{1m}, u_{2m} – chuyển vị dọc trục tại đầu 1 và đầu 2; M_{x1m}, M_{x2m} – mômen xoắn quanh trục x_m tại đầu 1 và đầu 2; θ_{x1m}, θ_{x2m} – các góc xoắn tương ứng tại đầu 1 và đầu 2. Ta có các hệ thức ma trận:



Hình 9.1

$$\begin{bmatrix} F_{x1m} \\ F_{x2m} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1m} \\ u_{2m} \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x1m} \\ M_{x2m} \end{bmatrix} = \frac{GJ}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_{x1m} \\ \theta_{x2m} \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

Gọi: F_{z1m}, F_{z2m} – lực trên phương trục z_m tại đầu 1 và đầu 2; W_{1m}, W_{2m} – các chuyển vị tương ứng tại đầu 1 và đầu 2; M_{y1m}, M_{y2m} – mô men uốn quanh trục y_m tại đầu 1 và đầu 2; θ_{y1m}, θ_{y2m} : các góc xoay tương ứng tại đầu 1 và đầu 2. Theo (3.21) (chương ba), ta có:

$$\begin{bmatrix} F_{z1m} \\ M_{y1m} \\ F_{z2m} \\ M_{y2m} \end{bmatrix} = \frac{EI_y}{L(1+\beta_y)}\begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ & 4+\beta_y & \frac{6}{L} & 2-\beta_y \\ & & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \text{đối xứng} & & & 4+\beta_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{1m} \\ \theta_{y1m} \\ w_{2m} \\ \theta_{y2m} \end{bmatrix} \tag{9.3}$$

$$\beta_y = \frac{12EI_y}{GAL^2}\gamma_y$$

Gọi: F_{y1m}, F_{y2m} – lực trên phương trục y_m tại đầu 1 và đầu 2; V_{1m}, V_{2m} – chuyển vị tương ứng tại đầu 1 và đầu 2; M_{z1m}, M_{z2m} – mô men uốn quanh trục z_m tại đầu 1 và đầu 2; θ_{z1m}, θ_{z2m} – góc xoay tương ứng tại đầu 1 và đầu 2. Cũng theo (3.21), ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_{y1m} \\ M_{z1m} \\ F_{y2m} \\ M_{z2m} \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{L(1+\beta_z)}\begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & 4+\beta_z & -\frac{6}{L} & 2-\beta_z \\ & & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \text{đối xứng} & & & 4+\beta_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{1m} \\ \theta_{z1m} \\ V_{2m} \\ \theta_{z2m} \end{bmatrix} \tag{9.4}$$

$$\beta_z = \frac{12EI_z}{GAL^2}\gamma_z$$

Gọi F_1, Δ_1 là vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của phần tử trong hệ toạ độ riêng. Kết hợp (9.1), (9.2), (9.3), (9.4), ta có hệ thức ma trận:

$$F_1 = K_1.\Delta_1 \tag{9.5}$$

Trong đó:

$$K_1 = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} A & & & & & & -A & & & & & \\ & GJ/E & & & & & & -GJ/E & & & & \\ & & 2d/L & & & d & & & -2d/I & & & d \\ & & & b & a & & & & & c & a & \\ & & & & 2a/L & & & & & -a & -2a/L & \\ & & & & & e & & & -d & & & f \\ & & & & & & A & & & & & \\ & & & & & & & GJ/E & & & & \\ & & & & & & & & 2d/I & & & -d \\ & & & & & & & & & b & a & \\ & & & & & & & & & & 2a/I & \\ & & & & & & & & & & & e \end{bmatrix} \qquad (9.6)$$

$$a = \frac{6I_y}{L(1+\beta_y)}, \qquad b = \frac{I_y(4+\beta_y)}{(1+\beta_y)}, \qquad c = \frac{I_y(2-\beta_y)}{(1+\beta_y)}$$

$$d = \frac{6I_z}{(1+\beta_z)}, \qquad e = \frac{I_z(4+\beta_z)}{(1+\beta_z)}, \qquad f = \frac{I_z(2-\beta_z)}{(1+\beta_z)}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} F_{x1m} & M_{x1m} & F_{y1m} & M_{y1m} & F_{z1m} & M_{z1m} & F_{x2m} & M_{x2m} & F_{y2m} & M_{y2m} & F_{z2m} & M_{z2m} \end{bmatrix} \qquad (9.7)$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} u_{1m} & \theta_{x1m} & V_{1m} & \theta_{y1m} & W_{1m} & \theta_{z1m} & u_{2m} & \theta_{x2m} & V_{2m} & \theta_{z2m} & W_{2m} & \theta_{z2m} \end{bmatrix}' \qquad (9.8)$$

Để chuyển sang hệ toạ độ chung x, y, z, cần phải tiến hành một số phép tính trung gian như sau.

§9.2 Ma trận xoay

Giả sử hệ toạ độ chung là x, y, z. Gọi U_m, V_m, W_m là các thành phần chuyển vị trên phương các trục x_m, y_m, z_m; u, v, w – các thành phần chuyển vị trên phương các trục x, y, z. Ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \qquad (9.9)$$

Trong đó: l_1, m_1, n_1 – các cô sin định hướng của trục x_m đối với các trục x, y, z; l_2, m_2, n_2 – các cô sin định hướng của trục y_m; l_3, m_3, n_3 – các cô sin định hướng của trục z_m.

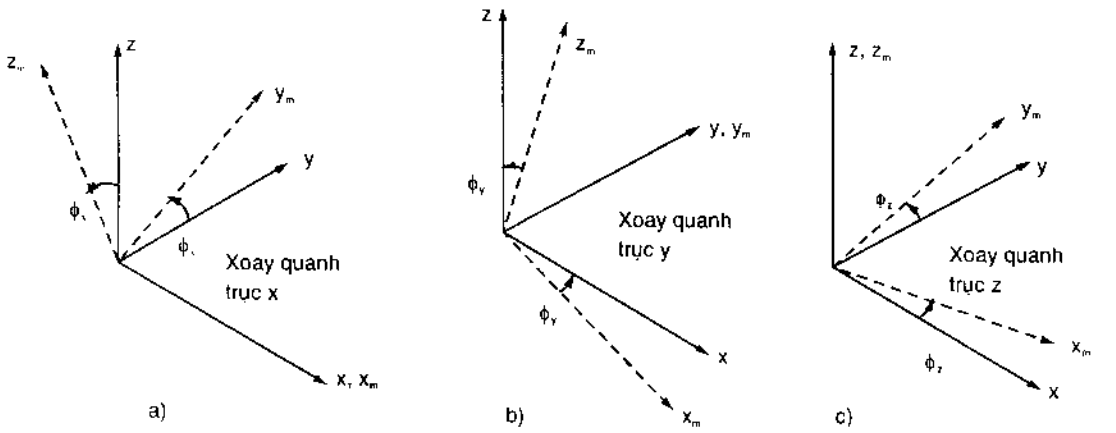
Gọi: F_{xm}, F_{ym}, F_{zm} – các thành phần lực trên phương các trục x_m, y_m, z_m; F_x, F_y, F_z – các thành phần lực trên phương các trục x, y, z. Ta có hệ thức ma trận sau (xem chú thích ở cuối chương).

$$\begin{bmatrix} F_{xm} \\ F_{ym} \\ F_{zm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \tag{9.10}$$

Ma trận trong vế phải của (9.9) gọi là ma trận xoay:

$$R = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \tag{10.11}$$

Các côsin định hướng của trục x_m, y_m, z_m trong hệ toạ độ chung x, y, z được xác định như sau. Trước hết hãy tưởng tượng các trục x_m, y_m, z_m trùng với các trục tương ứng x, y, z. Sau đó, ta lần lượt xoay quanh trục x một góc ϕ_x (hình 9.2a), quay quanh trục y một góc ϕ_y (hình 9.2b), quay quanh trục z một góc ϕ_z (hình 9.2c). Cuối cùng, ta trở về vị trí thực tế của hệ toạ độ riêng x_m, y_m, z_m.



Hình 9.2

Từ đại số tuyến tính, ta có hệ thức ma trận:

$$R = R_x . R_y . R_z \tag{9.12}$$

Trong đó:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_x & \sin\phi_x \\ 0 & -\sin\phi_x & \cos\phi_x \end{bmatrix} \tag{9.13a}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\phi_y & 0 & -\sin\phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi_y & 0 & \cos\phi_y \end{bmatrix} \tag{9.13b}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\phi_z & \sin\phi_z & 0 \\ -\sin\phi_z & \cos\phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.13c}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được:

$$R_z = \begin{bmatrix} l_y l_z & l_y m_z & -m_y \\ -l_x m_z + m_x m_y l_z & l_x l_z + m_x m_y m_z & m_x l_y \\ m_x m_z + l_x m_y l_z & -m_x l_z + l_x m_y m_z & l_x l_y \end{bmatrix} \tag{9.14}$$

$$\begin{aligned} l_x &= \cos\phi_x \quad & m_x &= \sin\phi_x \\ l_y &= \cos\phi_y \quad & m_y &= \sin\phi_y \\ l_z &= \cos\phi_z \quad & l_z &= \sin\phi_z \end{aligned} \tag{9.15}$$

Gọi: L_x, L_y, L_z – hình chiếu của trục phần tử lên các trục x, y, z. Từ (9.11) và (9.14), ta có:

$$\frac{L_x}{L} = l_y l_z, \qquad \frac{L_y}{L} = l_y m_z \qquad \frac{L_z}{L} = -m_y$$

từ đây suy ra:

$$L_x^2 + L_y^2 = L^2 l_y^2 \text{ và } L_x^2 = (L_x^2 + L_y^2) l_z^2 \tag{9.16}$$

Biết được các hình chiếu của trục phần tử lên các trục x và y, từ (9.15), (9.16), ta có thể suy ra các góc xoay ϕ_y (quanh trục y) và ϕ_z (quanh trục z)

§9.3. Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ toạ độ chung

Trong phần trước, ta đã suy được hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của phần tử trong hệ toạ độ riêng như sau:

$$F_I = K_I \Delta_I \tag{9.5}$$

Từ (9.9), ta suy ra hệ thức ma trận giữa vectơ Δ_I trong hệ toạ độ riêng và vectơ chuyển vị Δ_{II} trong hệ toạ độ chung như sau:

$$\Delta_I = ROT.\Delta_{II} \tag{9.17}$$

Trong đó:

$$ROT = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & m_1 & 0 & n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & 0 & m_1 & 0 & n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 0 & m_2 & 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & m_2 & 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_3 & 0 & m_3 & 0 & n_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 0 & m_3 & 0 & n_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 & 0 & m_1 & 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 & 0 & m_1 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_2 & 0 & m_2 & 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_2 & 0 & m_2 & 0 & n_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_3 & 0 & m_3 & 0 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_3 & 0 & m_3 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \quad (9.18)$$

Hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực F_{II} trong hệ toạ độ chung và vectơ nội lực F_I trong hệ toạ độ riêng có thể viết (xem chú thích ở cuối chương)

$$F_{II} = ROT'.F_I$$

Kết hợp với (9.5), (9.17), ta có Hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của phần tử trong hệ toạ độ chung như sau:

$$F_{II} = K_{II} \cdot \Delta_{II} \quad (9.19)$$

trong đó:

$$K_{II} = ROT.\ K_I\ .\ ROT' \quad (9.20)$$

(9.19) sẽ giúp ta thành lập ma trận độ cứng tổng thể của hệ không gian có nút cứng theo các nguyên tắc đã được trình bày trong các chương trước.

§9.4. Trình tự tính toán hệ không gian có nút cứng

1) Xác định bậc tự do và thống kê các số liệu ban đầu như trong các chương trước đã làm.

2) Tính ma trận xoay của các phần tử theo (9.13), (9.14).

3) Tính K_I theo (9.6), ROT theo (9.18) và K_{II} theo (9.20).

4) Thành lập ma trận độ cứng tổng thể K;

6) Tính nội lực ở trạng thái ngàm và các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do như đã làm trong các chương trước.

7) Tính vectơ chuyển vị của hệ trong hệ toạ độ chung.

8) Từ (9.17), tính vectơ chuyển vị trong hệ toạ độ riêng.

9) Tính nội lực của các phần tử ở trạng thái tự do theo các công thức sau:

Lực dọc $\quad F = \dfrac{AE}{L}(u_{2m} - u_{1m})$

Mô men xoắn $\quad T_1 = -T_2 = \dfrac{GJ}{L}(\theta_{x1m} - \theta_{x2m})$

Mô men uốn:

$$\left.\begin{aligned}
M_{y1m} &= \frac{EI_y}{L(1+\beta_y)}\left\{(4+\beta_y)\theta_{y1m} + (2-\beta_y)\theta_{y2m} - \frac{6}{L}(w_{1m} - w_{2m})\right\}\\
M_{y2m} &= \frac{EI_y}{L(1+\beta_y)}\left\{(2-\beta_y)\theta_{y1m} + (4+\beta_y)\theta_{y2m} - \frac{6}{L}(w_{1m} - w_{2m})\right\}\\
M_{z1m} &= \frac{EI_z}{L(1+\beta_z)}\left\{(4+\beta_z)\theta_{z1m} + (2-\beta_z)\theta_{z2m} + \frac{6}{L}(v_{1m} - v_{2m})\right\}\\
M_{z2m} &= \frac{EI_z}{L(1+\beta_z)}\left\{(2-\beta_z)\theta_{z1m} + (4+\beta_z)\theta_{z2m} + \frac{6}{L}(v_{1m} - v_{2m})\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (9.21)$$

10) Xác định nội lực cuối cùng = nội lực ở trạng thái ngầm + nội lực ở trạng thái tự do.

Thí dụ 9.1:

Cho một hệ như trên hình (9.3a)

$I_y = 361,6.10^{-6}m^4$,

$I_z = 10,93.10^{-6}m^4$,

$J = 0,93.10^{-6}m^4$,

$A = 10440.10^{-6}m^2$,

$E = 210,6.10^6 kN/m^2$

$G = 80,77.10^6 kN/m^2$

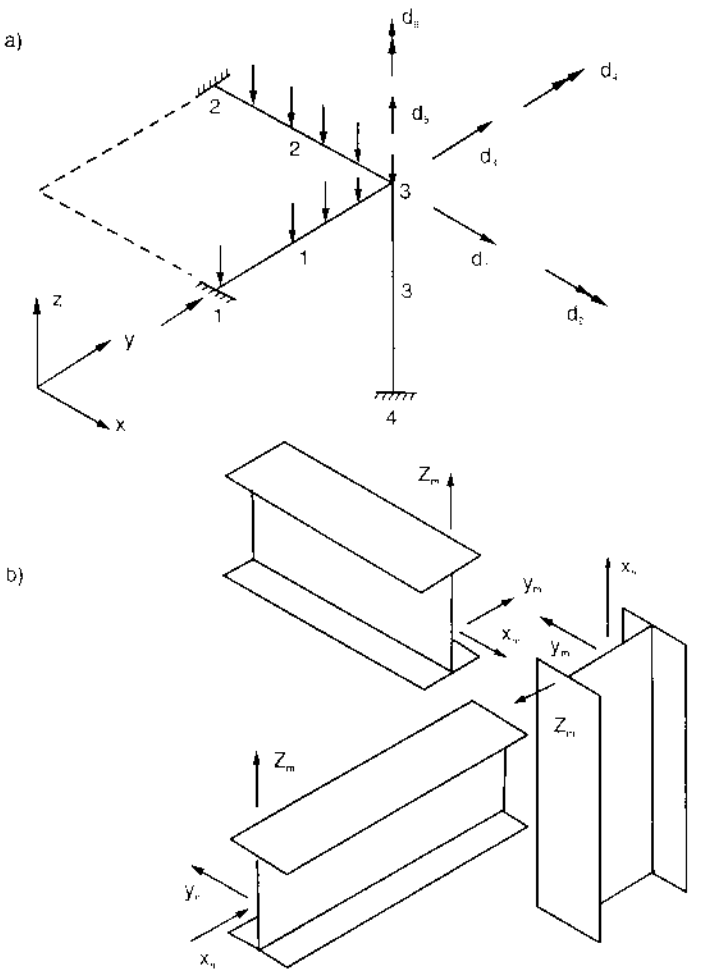
L = 4m, tải trọng phân bố đều q = 10 kN/m

Bỏ qua biến dạng trượt và xét 2 trường hợp:

a) Xét biến dạng dọc.

b) Bỏ qua biến dạng dọc.

Giải:



Hình 9.3

1) Bậc tự do biểu thị trên hình (9.3a). Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

	Toạ độ			**Bậc tự do trường hợp (a)**					
Nút	x	y	z	u	θ_x	V	θ_y	w	θ_z
1	4	0	4	0	0	0	0	0	0
2	0	4	4	0	0	0	0	0	0
3	4	4	4	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
4	4	4	0	0	0	0	0	0	0

Bậc tự do trong trường hợp (b): $u = v = w = 0$, $\theta_x = d_2$; $\theta_y = d_4$, $\theta_z = d_6$

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	1	3
2	2	3
3	4	3

2) Tính ma trận xoay của các phần tử theo (9.13), (9.14).

Hệ toạ độ riêng của các phần tử biểu thị trên hình (9.3b)

Phần tử 1: Xoay quanh trục z một góc 90°, $\phi_x = \phi_y = 0$, $\phi_z = 90°$. Vậy:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: Hệ toạ độ chung và hệ toạ độ riêng hoàn toàn trùng nhau: $\phi_x = \phi_y = \phi_z = 0$

Vậy
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3: Xoay quanh trục x một góc 90° sau đó xoay quanh trục y một góc 90°; $\phi_x = 90°$, $\phi_y = 90°$, $\phi_z = 0$. Vậy:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Tính K_I theo (9.6), ROT theo (9.18) và K_{II} theo (9.20). Kết quả thống kê trong các bảng sau.

Bảng 9.1: ma trận K_I cho cả 3 phần tử

$$10^3\begin{bmatrix}
548,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -548,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0,43 & 0 & 0 & 0,86 & 0 & 0 & -0,43 & 0 & 0 & 0,86 \\
 & & & 75,94 & -28,48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37,97 & 28,48 & 0 \\
 & & & & 14,24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -28,48 & -14,24 & 0 \\
 & & & & & 2,30 & 0 & 0 & -0,86 & 0 & 0 & 1,15 \\
 & & & & & & 548,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 0,43 & 0 & 0 & -0,86 \\
 & & & & & & & & & 75,94 & 28,48 & 0 \\
 & \text{đối} & \text{xứng} & & & & & & & & 14,24 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 2,30
\end{bmatrix}$$

Bảng 9.2: ma trận K_{II} (phần tử 1)

$$10^3\begin{bmatrix}
0,43 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,86 & -0,43 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,86 \\
 & 75,94 & 0 & 0 & 28,48 & 0 & 0 & 37,97 & 0 & 0 & -28,48 & 0 \\
 & & 548,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -548,1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,02 & 0 & 0 \\
 & & & & 14,24 & 0 & 0 & 28,48 & 0 & 0 & -14,24 & 0 \\
 & & & & & 2,30 & 0,86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,15 \\
 & & & & & & 0,43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,86 \\
 & & & & & & & 75,94 & 0 & 0 & -28,48 & 0 \\
 & & & & & & & & 548,1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0,02 & 0 & 0 \\
 & \text{đối} & \text{xứng} & & & & & & & & 14,24 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 2,30
\end{bmatrix}$$

Bảng 9.3: ma trận K_{II} (phần tử 2)

$$10^3\begin{bmatrix} 548,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -548,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0,43 & 0 & 0 & 0,86 & 0 & 0 & -0,43 & 0 & 0 & 0,86 \\ & & & 75,94 & -28,48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37,97 & 28,48 & 0 \\ & & & & 14,24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -28,48 & -14,24 & 0 \\ & & & & & 2,30 & 0 & 0 & -0,86 & 0 & 0 & 1,15 \\ & & & & & & 548,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0,43 & 0 & 0 & -0,86 \\ & & & & & & & & & 75,94 & 28,48 & 0 \\ & \text{đối} & \text{xứng} & & & & & & & & 14,24 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 2,30 \end{bmatrix}$$

Bảng 9.4: ma trận K_{II} (phần tử 3)

$$10^3\begin{bmatrix} 0,43 & 0 & 0 & 0,86 & 0 & 0 & -0,43 & 0 & 0 & 0,86 & 0 & 0 \\ & 75,94 & -28,48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37,97 & 28,48 & 0 & 0 & 0 \\ & & 14,24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -28,48 & -14,24 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2,30 & 0 & 0 & -0,86 & 0 & 0 & 1,15 & 0 & 0 \\ & & & & 548,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -548,1 & 0 \\ & & & & & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,02 \\ & & & & & & 0,43 & 0 & 0 & -0,86 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 75,94 & 28,48 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 14,24 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 2,30 & 0 & 0 \\ & \text{đối} & \text{xứng} & & & & & & & & 548,1 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0,02 \end{bmatrix}$$

4) Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử trong hệ toạ độ chung theo (9.19).

Phần tử 1:

Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 0,43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.86 \\ 0 & 75,94 & 0 & 0 & -28,48 & 0 \\ 0 & 0 & 548,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & -28,48 & 0 & 0 & 14,24 & 0 \\ 0,86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Trường hợp (b)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 75,94 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 2,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 548,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,43 & 0 & 0 & -0.86 \\ 0 & 0 & 0 & 75,94 & 28,48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14,24 & 0 \\ 0 & 0 & -0,86 & 28,48 & 0 & 2.30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Trường hợp (b)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & 75,94 & 0 \\ 0 & 0 & 2,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:

Trường hợp (a)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 0,43 & 0 & 0 & -0,86 & 0 & 0 \\ 0 & 75,94 & 28,48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28,48 & 14,24 & 0 & 0 & 0 \\ -0,86 & 0 & 0 & 2,30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 548,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

Trường hợp (b)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 75,94 & 0 & 0 \\ 0 & 2,30 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

5) Tính ΣF_i và thành lập ma trận độ cứng tổng thể K:

Trường hợp (a)

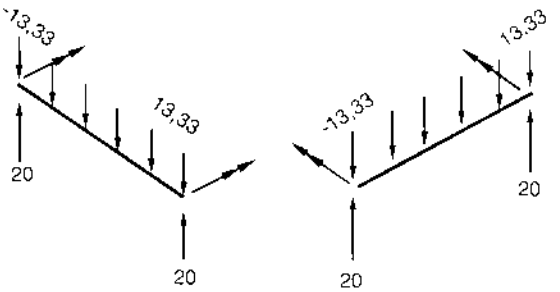
$$K = 10^3 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 0,43 \\ 548,1 \\ \underline{0,43} \\ 548,96 \end{array} & 0 & 0 & -0,86 & 0 & 0,86 \\ & \begin{array}{r} 75,94 \\ 0,02 \\ \underline{75,94} \\ 151,90 \end{array} & 28,48 & 0 & -28,48 & 0 \\ & & \begin{array}{r} 548,1 \\ 0,43 \\ \underline{14,24} \\ 562,77 \end{array} & 0 & 0 & -0,86 \\ & & & \begin{array}{r} 0,02 \\ 75,94 \\ \underline{2,30} \\ 78,26 \end{array} & 28,48 & 0 \\ & & & & \begin{array}{r} 14,24 \\ 12,24 \\ \underline{548,10} \\ 576,58 \end{array} & 0 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & & & \begin{array}{r} 2,30 \\ 2,30 \\ \underline{0,02} \\ 4,62 \end{array} \end{bmatrix}$$

Trường hợp (b)

$$K^* = 10^3 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 75,94 \\ 0,02 \\ \underline{75,94} \\ 151,90 \end{array} & 0 & 0 \\ & \begin{array}{r} 0,02 \\ 75,94 \\ \underline{2,30} \\ 78,26 \end{array} & 0 \\ & & \begin{array}{r} 2,30 \\ 2,30 \\ \underline{0,02} \\ 4,62 \end{array} \\ \text{đối xứng} & & \end{bmatrix}$$

6) Tính nội lực ở trạng thái ngàm và các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do (hình 9.4).

Các nội lực ở trạng thái ngàm thống kê trong bảng sau:



Hình 9.4

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M_{x1m}	M_{y2m}	M_{y1m}	M_{y2m}
1	−13,33	13,33	0	0
2	0	0	−13,33	13,33
3	0	0	0	0

Từ các kết quả trên, suy ra các thành phần tải trọng ở trạng thái tự do như sau:

Trường hợp (a):

$$F_1 = 0;\quad F_2 = -(-13,33) = 13,33;\quad F_3 = 0;\quad F_4 = -(13,33) = -13,33$$

$$F_5 = -(20 + 20) = -40,0;\quad F_6 = 0$$

Trường hợp (b):

$$F_2 = -(-13,33) = 13,33;\quad F_4 = -(13,33) = -13,33;\quad F_6 = 0,0.$$

7) Tính vectơ chuyển vị của hệ trong hệ toạ độ chung. Từ các kết quả trên, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 13,33 \\ 0 \\ -13,33 \\ -40,0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \qquad \text{Trường hợp (a)}$$

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_4 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,33 \\ -13,33 \\ 0,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_4 \\ d_6 \end{bmatrix} \qquad \text{Trường hợp (b)}$$

Giải hệ các phương trình trên, ta được:

Trường hợp (a):

$$D = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6]'$$

$$= 10^{-4}\,[-0{,}0023 \quad 0{,}776 \quad -0{,}039 \quad -1{,}492 \quad -0{,}582 \quad -0{,}0069]'$$

Trường hợp (b):

$$D = [d_2 \quad d_4 \quad d_6]' = 10^{-4}[0{,}878 \quad 1{,}704 \quad 0{,}0]'$$

8) Từ (9.17), tính vectơ chuyển vị trong hệ toạ độ riêng:

Phần tử 1:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{2m} \\ v_{2m} \\ w_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ -d_3 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

Một cách tương tự, $\theta_{x2m} = d_4$, $\theta_{y2m} = -d_2$, $\theta_{z2m} = d_6$

Phần tử 2:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{2m} \\ v_{2m} \\ w_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \\ d_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

Một cách tương tự, $\theta_{x2m} = d_2$, $\theta_{y2m} = d_4$, $\theta_{z2m} = d_6$

Phần tử 3:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{2m} \\ v_{2m} \\ w_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \\ d_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_5 \\ -d_1 \\ -d_3 \end{bmatrix}$$

Một cách tương tự, $\theta_{x2m} = d_6$, $\theta_{y2m} = -d_2$, $\theta_{z2m} = -d_4$

Trường hợp (b):

Phần tử 1: $\theta_{x2m} = d_2$, $\theta_{y2m} = -d_1$, $\theta_{z2m} = d_3$

Phần tử 2: $\theta_{x2m} = d_1$, $\theta_{y2m} = d_2$, $\theta_{z2m} = d_3$

Phần tử 3: $\theta_{x2m} = d_3$, $\theta_{y2m} = -d_1$, $\theta_{z2m} = -d_2$

9) Tính nội lực của các phần tử ở trạng thái tự do theo (9.21). Kết quả thống kê trong các bảng sau:

Nội lực ở trạng thái tự do (trường hợp (a))

Phần tử	M_{y1m}	M_{y2m}	M_{z1m}	M_{z2m}	T	F
1	−4,60	−7,55	0	0	0	−2,15
2	−7,32	−12,99	0	0	0	−0,12
3	−2,83	−5,78	0,17	0,34	0	−31,88

Nội lực ở trạng thái tự do (trường hợp (b))

Phần tử	M_{y1m}	M_{y2m}	M_{z1m}	M_{z2m}	T
1	−3,33	−6,66	0	0	0
2	−6,47	−12,93	0	0	0
3	−3,33	−6,66	0,20	0,39	0

10) Tính nội lực cuối cùng = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết thống kê trong các bảng sau:

Nội lực cuối cùng (trường hợp (a))

Phần tử	M_{y1m}	M_{y2m}	M_{z1m}	M_{z2m}	T	F
1	−17,93	5,78	0	0	0	−2,15
2	−20,65	−0,34	0	0	0	−0,12
3	−2,83	5,78	0,17	0,34	0	−31,88

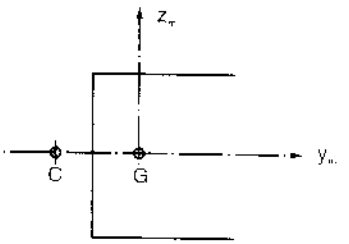
Nội lực cuối cùng (trường hợp (b))

Phần tử	M_{y1m}	M_{y2m}	M_{z1m}	M_{z2m}	T
1	−16,66	−6,67	0	0	0
2	−19,80	−0,40	0	0	0
3	−3,33	−6,66	0,20	0,32	0

§9.5. Trường hợp tiết diện không đối xứng. Tâm cắt

9.5.1. Tâm cắt

Giả sử một dầm côngxon có tiết diện hình chữ U như trên hình (9.5) và chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng đi qua trọng tâm của tiết diện (phương của tải trọng trùng với trục z_m). Dầm không những chịu uốn quanh trục y_m mà còn chịu xoắn quanh trục x_m (trục x_m đi qua trọng tâm G và vuông góc với mặt phẳng của hình vẽ trên hình (9.5). Để tránh sự xoắn, đường tác dụng của tải trọng phải đi qua điểm C, ta gọi điểm này là *tâm cắt*.



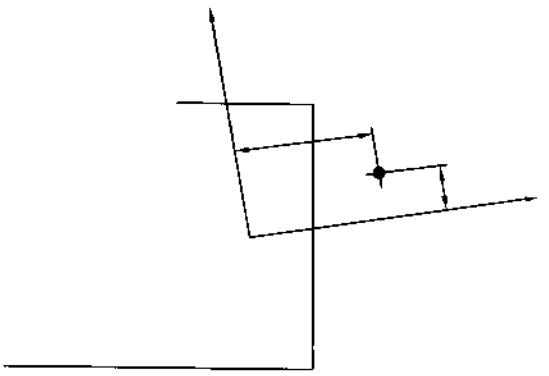
Hình 9.5

Đối với những tiết diện có 2 trục đối xứng, trọng tâm và tâm cắt trùng nhau nhưng đối với những tiết diện chỉ có một trục đối xứng (chẳng hạn tiết diện trên hình 9.5) trọng tâm và tâm cắt không trùng nhau và tâm cắt nằm trên trục đối xứng.

9.5.2. Ma trận độ cứng của phần tử có tiết diện không đối xứng

Giả sử một phần tử có tiết diện không đối xứng như trên hình (9.6). G là trọng tâm của tiết diện; x_m, y_m, z_m là các trục quán tính chính trung tâm. Tâm cắt C có toạ độ y_{om} và z_{om} kể từ trọng tâm G. Trong trường hợp này, các thành phần nội lực F_{xm}, M_{xm}, M_{ym}, M_{zm} tác dụng tại trọng tâm G của tiết diện nhưng các thành phần lực cắt F_{ym}, F_{zm} lại đi qua tâm cắt C. Do đó, tổng mô men xoắn quanh trục x_{md} có thể viết:

$$M_{xm} = M_{xm} + F_{zm}.y_{om} - F_{ym}.z_{om}$$



Hình 9.6

Ta có hệ thức ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} F_{x1m} \\ M_{x1m} \\ F_{y1m} \\ M_{y1m} \\ F_{z1m} \\ M_{z1m} \\ F_{x2m} \\ M_{x2m} \\ F_{y2m} \\ M_{y2m} \\ F_{z2m} \\ M_{z2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & 1 & -z_{om} & 0 & y_{om} & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & 1 & -z_{om} & 0 & y_{om} & \\ & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x1m} \\ M_{x1m} \\ F_{y1m} \\ M_{y1m} \\ F_{z1m} \\ M_{z1m} \\ F_{x2m} \\ M_{x2m} \\ F_{y2m} \\ M_{y2m} \\ F_{z2m} \\ M_{z2m} \end{bmatrix} \qquad (9.22)$$

F_1 $\qquad$ R $\qquad$ F_1

Trong đó: F_1^* – vectơ nội lực của phần tử trong hệ toạ độ riêng khi tiết diện không đối xứng; F_1 – vectơ nội lực theo (9.7); R – ma trận chuyển đổi.

Gọi: Δ_1^* – vectơ chuyển vị ứng với vectơ nội lực F_1^*; Δ_1 – vectơ chuyển vị ứng với vectơ nội lực F_1. Ta có các hệ thức sau (xem chú thích cuối chương)

$$F_1^* = K_1^*.\Delta_1^* \qquad K_1^* = R.\,K_1.R' \qquad \Delta_1 = R'.\Delta_1^* \tag{9.23}$$

Trong đó:

$$K_1^* = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} A & & & & & & & & & & \\ & g & -h & -j & p & -q & -g & h & -j & -p & -q \\ & & 2d/L & & & d & h & -2d/L & & & d \\ & & & b & -a & & j & & c & a & \\ & & & & 2a/L & & p & & -a & 2a/L & \\ & & & & & c & q & -d & & & f \\ & & & & & & A & & & & \\ & & & & & & g & -h & j & p & q \\ & & & & & & & -2d/L & & & -d \\ & & & & & & & & b & a & \\ & & & & & & & & & 2a/L & \\ & & & & & & & & & & e \end{bmatrix} \tag{9.24}$$

Trong đó: a, b, c, d, e, f đã được suy ra trong (9.6)

$$g = \frac{GJ}{E} + \frac{2d}{L}z_{om}^2 + \frac{2a}{L}y_{om}^2$$

$$h = \frac{2d}{L}z_{om},\ j = a.y_{om},\ p = \frac{2a}{L}y_{om},\ z = d.z_{om} \tag{9.25}$$

Sau khi thành lập ma trận K_1^* cho các phần tử, ta tiến hành tính toán như trong trường hợp tiết diện có 2 trục đối xứng đã được trình bày trong phần trước.

§9.6. Ma trận độ cứng của phần tử khi tính tần số cơ bản của hệ không gian có nút cứng

Cách tính tần số cơ bản của hệ không gian có nút cứng tương tự như cách tính tần số cơ bản của hệ phẳng có nút cứng. Ở đây, có sự khác biệt là mỗi phần tử vừa chịu uốn, vừa chịu xoắn.

Từ (8.3) và (8.13) (chương tám), ta có các hệ thức ma trận trong hệ toạ độ riêng:

1) Dao động dọc trục:

$$\begin{bmatrix} F_{x1m} \\ \\ F_{x2m} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1m} \\ \\ u_{2m} \end{bmatrix} \qquad (9.26)$$

Trong đó:

$$A_1 = kL\cot kL, \qquad A_2 = -kL\operatorname{cosec} kL$$

$$kL == \sqrt{\frac{m\omega^2}{AE}}.L$$

A_1, A_2 có thể tra bảng (8.2) (chương tám)

2) Dao động xoắn:

$$\begin{bmatrix} M_{x1m} \\ \\ M_{x2m} \end{bmatrix} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1m} \\ \\ \theta_{x2m} \end{bmatrix} \qquad (9.27)$$

Trong đó:

$$B_1 = kL\cot kL, \qquad B_2 = -kL\operatorname{cosec} kL \qquad kL = \sqrt{\frac{m\omega^2 I_p}{GJ.A}}.L$$

B_1, B_2 có thể tra bảng (8.2)

Từ (8.1) (chương tám), ta có các hệ thức ma trận sau:

3) Dao động uốn quanh trục y_m:

$$\begin{bmatrix} F_{z1m} \\ M_{y1m} \\ F_{z2m} \\ M_{y2m} \end{bmatrix} = \frac{EI_y}{L} \begin{bmatrix} \frac{T_1}{L^2} & -\frac{Q_1}{L} & -\frac{T_2}{L^2} & -\frac{Q_2}{L} \\ & S_1 & \frac{Q_2}{L} & S_2 \\ & & \frac{T_1}{L^2} & \frac{Q_1}{L} \\ \text{đối xứng} & & & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1m} \\ \theta_{y1m} \\ w_{2m} \\ \theta_{y2m} \end{bmatrix} \qquad (9.28)$$

Trong đó: T_1, T_2, S_1, S_2, Q_1, Q_2 là những hàm của $k_y L = \sqrt{\sqrt{\frac{m\omega^2}{EI_y}}}$, có thể tra ở bảng (8.1).

4) Dao động uốn quanh trục z_m:

$$\begin{bmatrix} F_{y1m} \\ M_{z1m} \\ F_{y2m} \\ M_{z2m} \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{T_1}{L^2} & \frac{Q_1}{L} & -\frac{T_2}{L^2} & \frac{Q_2}{L} \\ & S_1 & -\frac{Q_2}{L} & S_2 \\ & & \frac{T_1}{L^2} & -\frac{Q_1}{L} \\ \text{đối} & \text{xứng} & & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1m} \\ \theta_{z1m} \\ v_{2m} \\ \theta_{z2m} \end{bmatrix} \qquad (9.29)$$

Trong đó: T_1, T_2, S_1, S_2, Q_1, Q_2 là những hàm của $k_z L = \sqrt{\sqrt{\frac{m\omega^2}{EI_z}}}.L$, có thể tra ở bảng (8.1).

** Chú thích:*

Giả sử hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của kết cấu trong hệ toạ độ riêng và trong hệ toạ độ riêng như sau:

$$F_I = K_I D_I \text{ và } F_{II} = K_{II} D_{II}$$

Trong đó:

F_I – vectơ nội lực trong hệ toạ độ riêng;

F_{II} – vectơ nội lực trong hệ toạ độ chung;

D_I – vectơ chuyển vị trong hệ toạ độ riêng;

D_{II} – vectơ chuyển vị trong hệ toạ độ chung;

K_I, K_{II} – các ma trận độ cứng tương ứng.

Giả sử từ các điều kiện cân bằng, ta có:

$F_{II} = R.\ F_I$ trong đó R là ma trận liên hệ F_I với F_{II}

Vì công của ngoại lực

$F'_I D_I = F'_{II} D_{II}$ = thế năng biến dạng của kết cấu nên ta suy ra:

$D_I = R'.D_{II}$ và $K_{II} = R.K_I.R'$

Chương mười
DẠNG MA TRẬN CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC

Phương pháp lực lấy lực làm ẩn và cũng như phương pháp chuyển vị, xuất phát từ giả thiết tải trọng là các lực tập trung tác dụng tại các nút. Trong trường hợp có nhiều lực tập trung hoặc lực phân bố, ta tạo ra trạng thái ngàm và trạng thái tự do như đã trình bày trong bài §3.2.5. Mặt khác đối với hệ siêu tĩnh, cần thành lập hệ cơ bản tương ứng và xem lực trong các liên kết thừa là những đại lượng cần phải tìm. Dưới đây trình bày dạng ma trận của cách tính một số hệ theo phương pháp lực.

§10.1. Một số công thức tổng quát

10.1.1. Công thức tính nội lực và chuyển vị

Trước hết, ta xét hệ siêu tĩnh. Hệ tĩnh định được xem như trường hợp riêng của hệ siêu tĩnh.

Giả sử một hệ siêu tĩnh chịu tác dụng của n lực tập trung và có m liên kết thừa. Ta có:

Vectơ tải trọng:

$$P = [P_1\ P_2 \dots P_n]' \tag{10.1}$$

Vectơ lực trong liên kết thừa:

$$R = [R_1\ R_2 \dots R_m]' \tag{10.2}$$

Gọi: S_o – vectơ nội lực do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản; S_R – vectơ nội lực do các liên kết thừa gây ra trong hệ cơ bản.

Ta có:

$$S_o = B_o P \tag{10.3}$$

$$S_R = B_1 R \tag{10.4}$$

Trong đó B_o, B_1 – ma trận ảnh hưởng nội lực trong hệ cơ bản ứng với P và R.

Vậy vectơ nội lực trong hệ siêu tĩnh

$$S = B_o P + B_1 R \tag{10.5}$$

Vectơ chuyển vị trong hệ siêu tĩnh

$$U = f.S = f(B_o P + B_1 R) \qquad (10.6)$$

f – ma trận độ mềm

10.1.2. Công thức tính chuyển vị tại các nút. Điều kiện biến dạng liên tục

Gọi chuyển vị trên phương các ngoại lực P và X_p và chuyển vị trên phương các lực trong các liên kết thừa là X_R.

Để tìm chuyển vị X_p, ta tạo ra trạng thái giả tạo trên hệ cơ bản bằng cách vứt bỏ toàn bộ các lực P, R và đặt vào các điểm đặt lực P những tải trọng giả tạo $\overline{P}$ có giá trị bất kỳ.

Gọi trạng thái thực là trạng thái của hệ siêu tĩnh đã cho, $\overline{S}_p$ là nội lực trong hệ cơ bản do các tải trọng giả tạo gây ra. Theo công thức (10.3) ta có:

$$\overline{S}_p = B_o \overline{P}$$

Áp dụng nguyên lý công ảo, ta có:

$$\overline{P}'.X_p = \overline{S}_p.U$$

Trong đó, vế trái biểu thị công ảo của các ngoại lực ở trạng thái giả tạo trên những chuyển dời ảo ở trạng thái thực; vế phải biểu thị công ảo của các nội lực ở trạng thái giả tạo trên những chuyển dời ảo ở trạng thái thực.

Nhưng $\overline{S}_p = B_o \overline{P} \Rightarrow \overline{P}'.X_p = \overline{P}'.B_o'.U$

Vì $\overline{P}$ có giá trị bất kỳ nên:

$$X_p = B'_o U \qquad 10.7)$$

Thay U bằng hệ thức (10.6):

$$X_p = B'_o(f.B_o P + f.B_1 R) \quad \text{hay}$$

$$X_p = B'_o f.B_o P + B'_o f.B_1 R \qquad (10.8)$$

Để tìm X_R, ta tạo ra trạng thái giả tạo trên hệ cơ bản bằng cách vứt bỏ toàn bộ các lực P, R và đặt vào điểm đặt của các lực R những lực giả tạo $\overline{R}$ có giá trị bất kỳ. Gọi $\overline{S}_R$ là nội lực trong hệ cơ bản do $\overline{R}$ gây ra. Từ công thức (10.4) ta có: $\overline{S}_R = B_1.\overline{R}$

Áp dụng nguyên lý công ảo tương tự như trên:

$\overline{R}'.X_R = \overline{S}_R'.U$ nhưng $\overline{S}_R = B_1 \overline{R}$ nên

$\bar{R}'.X_R = \bar{R}'B'_1.U$ hay $X_R = B'_1.U$. Thay U bằng hệ thức (10.6)

$X_R = B'_1.(fB_oP + fB_1R)$ hay

$$X_R = B'_1f.B_oP + B'_1f.B_1R \tag{10.9}$$

Vì trong hệ thực $X_R = 0$ nên

$$B'_1f.B_oP + B'_1f.B_1R = 0 \tag{10.10}$$

Phương trình (10.10) gọi là phương trình cơ bản của phương pháp lực hoặc còn gọi là *điều kiện biến dạng liên tục*.

Đối với *hệ tĩnh định*, vì R = 0 nên ta suy ra:

$$S = B_oP \tag{10.11}$$

$$U = f.S = f.B_oP \tag{10.12}$$

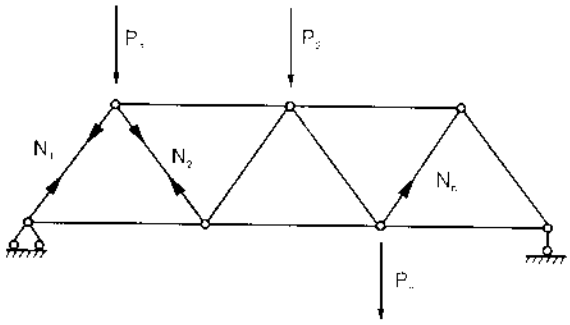
$$X_p = F.P \tag{10.13}$$

Trong đó $$F = B_o.f.B_o \tag{10.14}$$

§10.2. Phương pháp lực áp dụng cho hệ giàn

10.2.1. Giàn tĩnh định

Giả sử giàn tĩnh định có m tải trọng và n thanh giàn (hình 10.1)



Hình 10.1

Vectơ tải trọng:

$$P = [P_1P_2 \dots P_m]'$$

Vectơ nội lực:

$$S = [N_1N_2 \dots N_n]'$$

Trong đó: N_1, N_2, ... là các lực dọc trong các thanh giàn. Ta qui ước lực kéo là dương, lực nén là âm.

Áp dụng (10.11), ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_i \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ B_{i1} & B_{i2} & \dots & B_{im} \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nm} \end{bmatrix}}_{B_o} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} \tag{10.15}$$

Các phần tử của ma trận Bo được xác định bằng cách lần lượt đặt tải trọng $P_1 = 1$, $P_2 = 1$,... lên kết cấu và tính các lực dọc tương ứng trong các thanh giàn bằng phương pháp tách nút hoặc phương pháp mặt cắt.

Áp dụng (10.12), ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1/EA_1 & & & \\ & L_2/EA_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & L_n/EA_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N_n \end{bmatrix} \qquad (10.16)$$

U f S

Trong đó: u_i – tổng biến dạng dọc trục của phần tử i; L_i, A_i – chiều dài, diện tích tiết diện của phần tử i; f – ma trận độ mềm.

Để tính chuyển vị tại nút giàn trên phương tác dụng của tải trọng, ta áp dụng (10.13)

Thí dụ 10.1: Cho một giàn tĩnh định như trên hình (10.2a). Yêu cầu tính nội lực trong các thanh giàn và tính chuyển vị trên phương tác dụng của tải trọng tại các nút 1 và 2.

Giải:

Trước hết, ta hãy tìm ma trận ảnh hưởng B_{ij}. Lần lượt đặt các tải trọng $P_1 = 1$ và $P_2 = 1$ lên giàn và tiến hành tính nội lực trong giàn theo phương pháp tách nút hoặc phương pháp mặt cắt.

Khi $P_1 = 1$ (hình 10.2b)

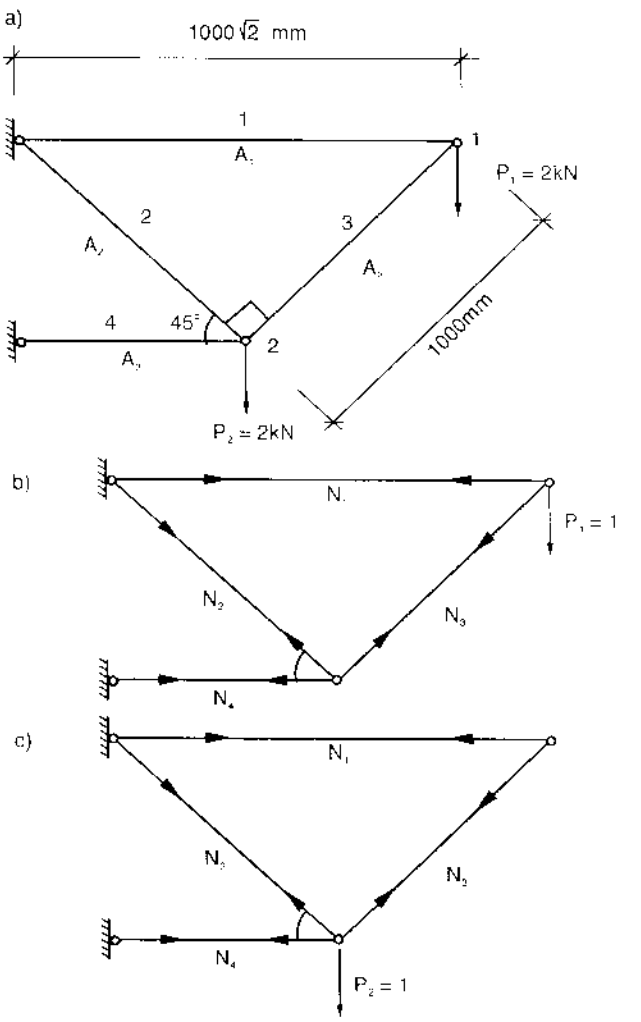
$N_1 = 1$; $N_2 = \sqrt{2}$; $N_3 = \sqrt{2}$

$N_4 = -2$

Khi $P_2 = 1$ (hình 10.2c)

$N_1 = 0$; $N_2 = \sqrt{2}$

$N_3 = 0$; $N_4 = -1$



Hình (10.2)

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta có:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= 1.P_1 + 0.P_2 \\ N_2 &= \sqrt{2}P_1 + \sqrt{2}P_2 \\ N_3 &= -\sqrt{2}P_1 + 0.P_2 \\ N_4 &= -2.P_1 - 1.P_2 \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Biểu thị (a) dưới dạng ma trận:

$$\underset{S}{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}} = \underset{B_0}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}} \underset{P}{\begin{bmatrix} P_1 \\ \\ P_2 \end{bmatrix}}$$

Ma trận ảnh hưởng nội lực B_0 có dạng:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ mềm f (xem hệ thức (10.16)) có dạng:

$$f = \begin{bmatrix} L_1/EA_1 & & & 0 \\ & L_2/EA_1 & & \\ & & L_3/EA_2 & \\ 0 & & & L_4/EA_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1414/EA_1 & & & 0 \\ & 1000/EA_1 & & \\ & & 1000/A_2 & \\ 0 & & & 707/EA_2 \end{bmatrix}$$

Thực hiện các phép nhân ma trận:

$$f.B_0 = \begin{bmatrix} \frac{141}{EA_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1000}{EA_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1000}{EA_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{707}{EA_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 1/E \begin{bmatrix} \frac{1414}{A_1} & 0 \\ \frac{1414}{A_1} & \frac{1414}{A_1} \\ \frac{-1414}{A_2} & 0 \\ \frac{-1414}{A_2} & \frac{-707}{A_2} \end{bmatrix}$$

Áp dụng công thức (10.14):

$$F = B_0^{'}.f.B_0 = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1414}{A_1} & 0 \\ \frac{1414}{A_1} & \frac{1414}{A_1} \\ \frac{-1414}{A_2} & 0 \\ \frac{-1414}{A_2} & \frac{-707}{A_2} \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 3414/A_1 + 4828/A_2 & 2000/A_1 + 1414/A_2 \\ 2000/A_1 + 1414/A_2 & 2000/A_1 + 707/A_2 \end{bmatrix}$$

Áp dụng công thức (10.13):

$$X_p = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = F.P$$

Trong đó: y_1, y_2– chuyển vị trên phương tác dụng của tải trọng đặt tại nút 1 và nút 2.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 3414/A_1 + 4828/A_2 & 2000/A_1 + 1414/A_2 \\ 2000/A_1 + 1414/A_2 & 2000/A_1 + 707/A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Thay P_1, P_2, A_1, A_2 bằng các giá trị đã cho, ta sẽ tính được nội lực và chuyển vị.

10.2.2. Giàn siêu tĩnh

Đối với giàn siêu tĩnh, cần thành lập hệ cơ bản và lấy các lực trong các liên kết thừa làm ẩn. Vectơ nội lực S tính theo (10.5) trong đó các phần tử của ma trận B_0 được xác định bằng cách lần lượt đặt tải trọng $P_1 = 1$, $P_2 = 1$... lên trên hệ cơ bản và tính nội lực trong giàn theo phương pháp tách nút hoặc phương pháp mặt cắt. Các phần tử của ma trận B_1 được xác định bằng cách lần lượt đặt các lực trong các liên kết thừa $R_1 = {}_1$, $R_2 = 1$ ... lên hệ cơ bản và làm như trên. Ma trận độ mềm f như trong (10.16). Để xác định vectơ lực trong các liên kết thừa R, ta giải hệ phương trình biến dạng liên tục 10.10).

Thí dụ 10.2: Cho hệ giàn siêu tĩnh như trên hình (2.7) (thí dụ (2.2) chương hai). Yêu cầu tính nội lực.

Giải:

1) Trước hết, ta chọn hệ cơ bản như trên hình (10.3)

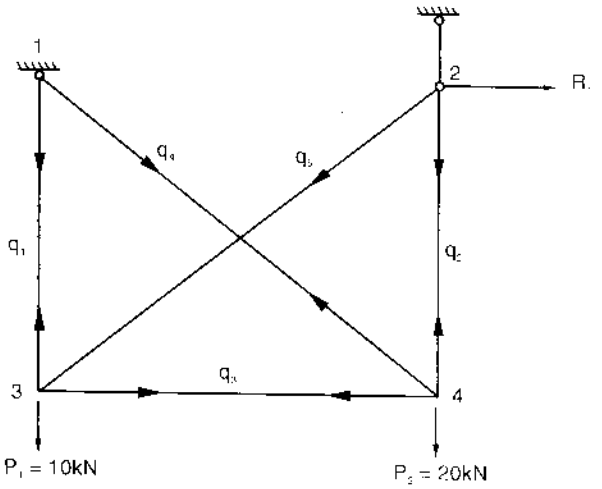
Vectơ tải trọng:

$$P = [P_1 \quad P_2]'$$

Vectơ lực trong các liên kết thừa:

$$R = [R_1].$$

Gọi $q_1, q_2, \ldots q_5$ là các lực dọc trong các thanh giàn (hình 10.3) Lần lượt đặt $P_1 = 1$, $P_2 = 1$ sau đó đặt $R_1 = 1$ lên hệ cơ bản và tính lực dọc trong giàn theo phương pháp tách nút hoặc phương pháp mặt cắt, ta được hệ thức ma trận (10.5) như sau:



Hình 10.3

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,75 \\ -0,75 \\ -1,0 \\ 1,25 \\ 1,25 \end{bmatrix} .[R_1] + \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = B_1[R_1] + B_0P$$

2) Thành lập ma trận độ mềm f theo (10.16):

$$f = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0,7143 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0,7143 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3,1746 & 0 & 0 \\ & & & 3,9683 & 0 \\ & & & & 3,9683 \end{bmatrix}$$

3) Thực hiện các phép nhân ma trận theo (10.10)

$$B'_1.f.B_1 = 1,6379.10^{-4}; \qquad B'_1.f.B_0.P = -1,6071.10^{-4}$$

4) Giải phương trình (10.10):

$$B'_1.f.B_1R_1 + B'_1.f.B_0.P = 0 \Rightarrow$$
$$R_1 = 0,9812.$$

5) Tính nội lực theo (10.5):

$$S = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5]' = [9,26 \quad 19,26 \quad -0,98 \quad 1,23 \quad 1,23]' \text{ kN}$$

§10.3. Phương pháp lực áp dụng cho hệ phẳng có nút cứng

Trình tự tính toán như đã trình bày trong phần trước và dựa vào các công thức cơ bản nêu trong mục 10.1. Mỗi phần tử trong hệ phẳng có nút cứng là một thanh chịu uốn nên ma trận độ mềm f có dạng như sau.

a) Khi không xét đến biến dạng dọc:

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}=\frac{L}{12EI}\begin{bmatrix}(4+\beta) & -(2-\beta)\\ -(2-\beta) & (4+\beta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix} \qquad (10.17)$$

b) Khi không xét đến biến dạng dọc:

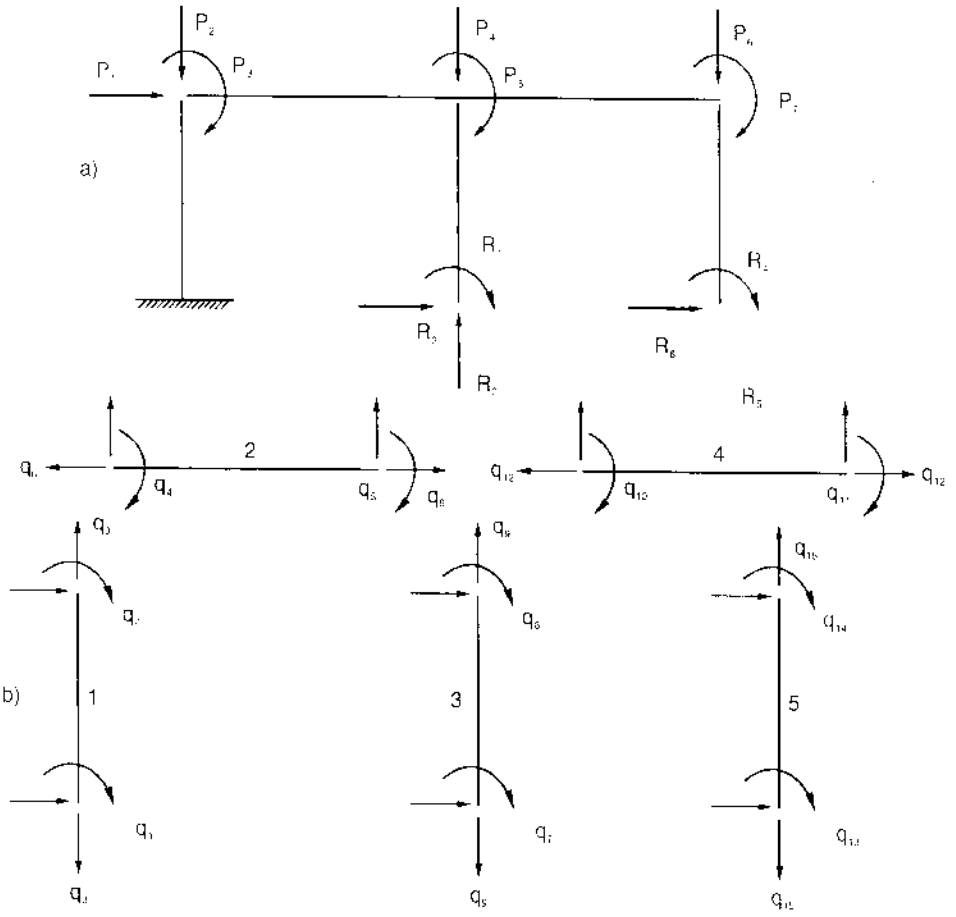
$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \Delta\end{bmatrix}=\frac{L}{12EI}\begin{bmatrix}(4+\beta) & -(2-\beta) & 0\\ & (4+\beta) & 0\\ \text{đối xứng} & & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\\ F\end{bmatrix} \qquad (10.18)$$

$$\alpha=12\frac{I}{A}$$

Trong các hệ thức trên: EI– độ cứng chống uốn; M_1, M_2– mô men uốn tại đầu 1 và đầu 2 của phần tử; θ_1, θ_2– các góc xoay tại đầu 1 và đầu 2; L, A– chiều dài và diện tích tiết diện của phần tử; β– hệ số xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt.

Thí dụ 10.3: Tính nội lực của hệ cho trên hình (3.14), thí dụ (3.5) (chương ba). Xét đến ảnh hưởng của biến dạng dọc và biến dạng trượt.

P_1 = 45 kN; P_2 = 100 kN; P_3 = 77,5 kNm;
P_4 = 180 kN; P_5 = 46,67 kNm;
P_6 = 80 kN; P_7 = –53,33 kNm;



Hình 10.4

Giải:

1) Hệ cơ bản biểu thị trên hình (10.4a) trong đó:

Vectơ tải trọng:

$$P = [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6 \quad P_7]'$$

Vectơ lực trong các liên kết thừa:

$$R = [R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6]'$$

Vì hệ chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều nên ta vẫn phải tạo ra trạng thái ngàm và trạng thái tự do hoàn toàn giống như trong thí dụ (3.5) (chương ba). Các thành phần tải trọng ở trên ứng với trạng thái tự do.

2) Lần lượt đặt lên hệ cơ bản tải trọng $P_1 = 1, P_2 = 1, \ldots$ sau đó lần lượt đặt các lực trong các liên kết thừa $R_1 = 1, R_2 = 1$ và tính nội lực trong hệ cơ bản, dựa trên các phương trình cân bằng. Các thành phần nội lực của các phần tử được ký hiệu bằng $q_1, q_2, \ldots$ như trên hình (10.4b). Sau khi thực hiện các phép tính và chỉnh lý kết quả tính toán, ta có hệ thức ma trận (10.5) như sau:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \\ q_{14} \\ q_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 & 8 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & 1 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & -1 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1472,5 \\ 1337,5 \\ -360,0 \\ -1260,0 \\ 220,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -266,67 \\ -53,33 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$S = B_1 R + B_0 P$$

3) Thành lập ma trận độ mềm của các phần tử theo (10.18):

Phần tử 1:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 = d_1 \\ \theta_2 = d_2 \\ \Delta = d_3 \end{bmatrix} = 10^5 \underbrace{\begin{bmatrix} 8,948 & 3,936 & 0 \\ & 8,948 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 0,301 \end{bmatrix}}_{f_1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 = d_4 \\ \theta_2 = d_5 \\ \Delta = d_6 \end{bmatrix} = 10^{-5} \underbrace{\begin{bmatrix} 5,617 & -2,533 & 0 \\ & 5,617 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 0,279 \end{bmatrix}}_{f_2} \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 = d_7 \\ \theta_2 = d_8 \\ \Delta = d_9 \end{bmatrix} = 10^{-5} \underbrace{\begin{bmatrix} 16,997 & -7,805 & 0 \\ & 16,997 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 0,376 \end{bmatrix}}_{f_3} \begin{bmatrix} q_7 \\ q_8 \\ q_9 \end{bmatrix}$$

Phần tử 4:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 = d_{10} \\ \theta_2 = d_{11} \\ \Delta = d_{12} \end{bmatrix} = 10^{-5} \underbrace{\begin{bmatrix} 11,721 & -5,457 & 0 \\ & 11,721 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 0,402 \end{bmatrix}}_{f_4} \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix}$$

Phần tử 5:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 = d_{13} \\ \theta_2 = d_{14} \\ \Delta = d_{15} \end{bmatrix} = 10^{-5} \underbrace{\begin{bmatrix} 16,997 & -7,805 & 0 \\ & 16,997 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 0,376 \end{bmatrix}}_{f_5} \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{14} \\ q_{15} \end{bmatrix}$$

4) Ghép các ma trận trên, ta được ma trận độ mềm của toàn hệ (cấp 15 x 15)

$$f = \begin{bmatrix} f_1 & & & & 0 \\ & f_2 & & & \\ & & f_3 & & \\ & & & f_4 & \\ 0 & & & & f_5 \end{bmatrix}$$

5) Thực hiện các phép nhân ma trận theo (10.10). Kết quả:

$$B_1'.f.B_1 = 10^{-3}\begin{bmatrix} 0,917 & -1,358 & -1,620 & 0,421 & -3,040 & -0,876 \\ & 5,028 & 2,524 & -1,357 & 10,451 & 2,524 \\ & & 3,805 & -0,876 & 6,026 & 2,275 \\ & & & 1,260 & -3,727 & -2,650 \\ & & & & 24,488 & 8,088 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & & & 6,901 \end{bmatrix}$$

$$B_1'.f.B_0.P = \begin{bmatrix} 0,483 \\ -1,755 \\ -0,895 \\ 0,519 \\ -3,799 \\ -1,005 \end{bmatrix}$$

6) Giải hệ phương trình biến dạng liên tục (10.10):

$B'_1.f.B_1R + B'_1.f.B_0P = 0 \Rightarrow$

$R = [R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6]' = [-28,08 \quad 208,17 \quad -20,45 \quad -28,14 \quad 70,35 \quad -20,26]'$

7) Tính nội lực ở trạng thái tự do theo (10.5). Kết quả thống kê trong bảng sau:

Ph.tử	M_1	M_2	F
1	−20,79	9,01	−81,48
2	68,49	5,59	−41,07
3	−28,08	−33,27	−208,17
4	−18,99	−19,59	−20,62
5	−28,14	−33,74	−70,35

8) Tính nội lực cuối cùng = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do (hoàn toàn giống như trong thí dụ 3.5).

§10.4 Phương pháp lực áp dụng cho hệ dầm giao nhau

Mỗi phần tử trong hệ dầm giao nhau vừa chịu uốn, vừa chịu xoắn nên ma trận độ mềm được suy ra như sau:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \psi \end{bmatrix} = \frac{L}{12EI}\begin{bmatrix} (4+\beta) & -(2-\beta) & 0 \\ & (4+\beta) & 0 \\ \text{đối xứng} & & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ T \end{bmatrix} \qquad (10.19)$$

$$\alpha = 12\frac{EI}{GJ}$$

Trong đó: M_1, M_2, θ_1, θ_2 được định nghĩa như trong §10.3; T, ψ – mô men xoắn và góc xoắn.

Trình tự tính toán như đã trình bày trong phần trước.

Thí dụ 10.4: Tính nội lực của hệ trên hình (4.6), thí dụ (4.1) (chương bốn).

Giải:

1) Hệ cơ bản biểu thị trên hình (10.5).

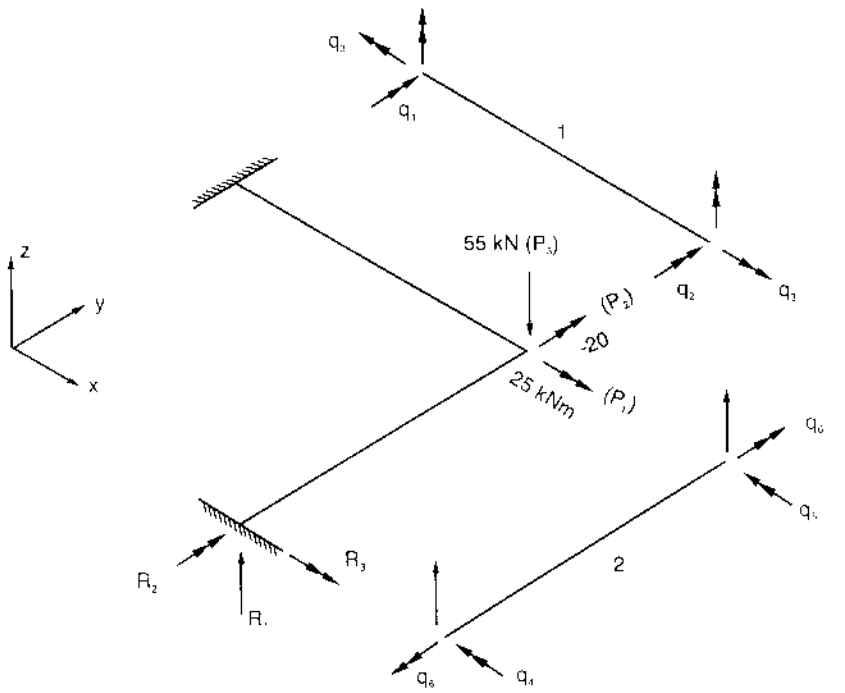
Vectơ tải trọng:

$$P = [P_1 \quad P_2 \quad P_3]' = [25 \quad -20 \quad -55]'$$

Vectơ lực trong các liên kết thừa:

$$R = [R_1 \quad R_2 \quad R_3]'$$

Ta tạo ra trạng thái ngàm và trạng thái tự do hoàn toàn giống như trong thí dụ (4.1). Các thành phần tải trọng vừa nêu trên ứng với trạng thái tự do.



Hình 10.5

2) Lần lượt đặt các tải trọng cơ bản $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = 1$ lên hệ cơ bản sau đó lần lượt đặt các lực $R_1 = 1$, $R_2 = 1$, $R_3 = 1$ và tính các nội lực tương ứng dựa trên các phương trình cân bằng. Ta được hệ thức ma trận (10.5) như sau:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -200 \\ -20 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = B_1 R + B_0 P$$

Trong đó: $q_1, q_2, \ldots q_6$– các thành phần nội lực, biểu thị trên hình (10.5)

3) Thành lập ma trận độ mềm của các phần tử theo (10.19):

Phần tử 1:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 = d_1 \\ \theta_2 = d_2 \\ \psi = d_3 \end{bmatrix} = 10^4 \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}3666 & 0{,}183 & 0 \\ & 0{,}336 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 3{,}454 \end{bmatrix}}_{f_1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 = d_4 \\ \theta_2 = d_5 \\ \psi = d_6 \end{bmatrix} = 10^4 \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}3666 & -0{,}183 & 0 \\ & 0{,}336 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 3{,}454 \end{bmatrix}}_{f_2} \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

4) Ghép các ma trận trên để được ma trận độ mềm tổng thể:

$$f = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}$$

5) Thực hiện các phép nhân ma trận theo (10.10).

$$B_1^{'}.f.B_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 6{,}698 & -0{,}220 & -1{,}601 \\ & 0{,}455 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 0{,}455 \end{bmatrix}$$

$$B_1.f.B_0P = 10^{-3}\begin{bmatrix} -62,376 \\ 9,890 \\ 8,634 \end{bmatrix}$$

6) Giải hệ phương trình biến dạng liên tục (10.10):

$$B'_1.f.B_1R + B'_1.f.B_0P = 0 \quad \Rightarrow$$

$$R = [R_1 \quad R_2 \quad R_3]' = [28,37 \quad -8,03 \quad 80,81]'$$

7) Tính nội lực ở trạng thái tự do theo (10.5). Kết quả thống kê trong bảng sau:

Phần tử	M_1	M_2	F
1	−78,50	−28,03	−7,66
2	−80,81	−32,66	−8,03

8) Tính nội lực cuối cùng = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do (hoàn toàn giống như thí dụ 4.1 chương bốn).

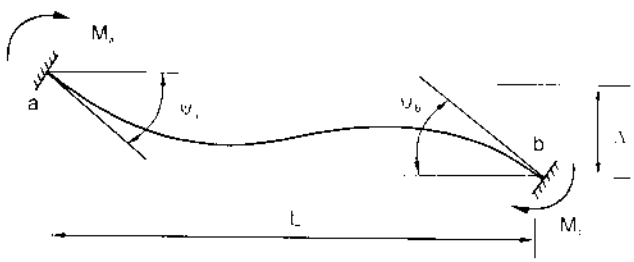
Chương mười một
DẠNG MA TRẬN CỦA PHƯƠNG PHÁP PHÂN PHỐI MÔ MEN

Ngoài các phương pháp đã trình bày, còn có những phương pháp cho ta thông tin về nội lực trong kết cấu, dựa trên phương pháp tính lặp để tìm ẩn. Phương pháp tính lặp được sử dụng nhiều trong thực tế là phương pháp phân phối men của G.Kani. Phương pháp này có những hạn chế nhất định, chẳng hạn như chỉ áp dụng cho hệ khung nhiều tầng nhiều nhịp có các cột song song, phải tuân theo một số điều kiện nhất định trong quá trình tính lặp mới hội tụ... Tuy nhiên, người kỹ sư thiết kế thường quan tâm đến vấn đề tìm nội lực trong kết cấu để từ đó kiểm tra độ bền và chọn tiết diện. Vì vậy, ma trận hoá phương pháp phân phối mô men để có điều kiện sử dụng máy tính điện tử là vấn đề cần thiết.

Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu dạng ma trận của phương pháp phân phối mô men, dựa trên phương pháp tính lặp đơn giản đã trình bày trong §1.7.6 (chương một)

§11.1. Một số công thức cơ bản

Giả sử một phần tử bất kỳ của khung biến dạng như trên hình (11.1) sau khi chịu tác dụng của một nguyên nhân bên ngoài nào đó. Mô men ở đầu thanh có thể viết:



Hình 11.1

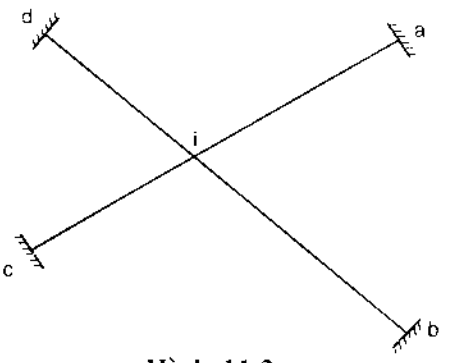
$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= S_{ab}.\psi_a + C_{ba}.S_{ba}.\psi_b - (S_{ab} + C_{ba}.S_{ba})\frac{\Delta}{L} + \overline{M}_{ab} \\ M_{ba} &= S_{ba}.\psi_b + C_{ab}.S_{ab}.\psi_a - (S_{ba} + C_{ab}.S_{ab})\frac{\Delta}{L} + \overline{M}_{ba} \end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

Trong đó: S_{ab}, S_{ba} – hệ số độ cứng tại đầu a và b của thanh; C_{ab}, C_{ba} – hệ số truyền từ đầu a và đầu b; $\overline{M}_{ab}$, $\overline{M}_{ba}$ – mô men ngàm tại đầu a và đầu b do tải trọng cục bộ gây ra.

Hệ thức (11.1) có thể viết

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= M'_{ab} + C_{ab}.M'_{ba} + M''_{ab} + \bar{M}_{ab} \\ M_{ba} &= M'_{ba} + C_{ab}.M'_{ab} + M''_{ba} + \bar{M}_{ba} \end{aligned}\right\} \qquad (11.2)$$

Trong đó: M'_{ab} – mô men do xoay tại đầu a; M'_{ba} – mô men do xoay tại đầu b; M''_{ab}, M''_{ba} – mô men tại các đầu a và b do chuyển vị thẳng tương đối Δ gây ra.



Hình 11.2

Đối với một nút bất kỳ i trên hình (11.2) ta có:

$$M_{i\phi} = M'_{i\phi} + C_{\phi i}M'_{\phi i} + M''_{i\phi} + \bar{M}_{i\phi} \qquad (a)$$

Trong đó, ϕ là một đầu đối diện nào đó với nút i, $\bar{M}_{i\phi}$ là mô men ngàm tại đầu i của phần tử iϕ.

Điều kiện cân bằng tại nút i có thể viết:

$\sum_i M_{i\phi} = 0$. Từ (a), ta có:

$$\sum_i M'_{i\phi} + \sum_i C_{\phi i}M'_{\phi i} + \sum_i M''_{i\phi} + \sum_i \bar{M}_{i\phi} = 0$$

$$\sum_i M'_{i\phi} = -\sum_i C_{\phi i}M'_{\phi i} - \sum_i M''_{i\phi} - \sum_i \bar{M}_{i\phi} \qquad (b)$$

Trong đó, dấu tổng $\sum_i$ áp dụng cho toàn bộ các phần tử quy tụ tại nút i. Vì $M'_{i\phi} = S_{i\phi}\phi_i$, ϕ_i là góc xoay tại nút i nên ta có:

$$M'_{i\phi} = \alpha_{i\phi}.\sum_i M'_{i\phi} \qquad (c)$$

trong đó $$\alpha_{i\phi} = \frac{S_{i\phi}}{\sum_i S_{i\phi}} \qquad (11.3)$$

Thay (c) vào (b), ta có:

$$M'_{i\phi} = -\sum_i \alpha_{i\phi}C_{\phi i}M'_{\phi i} - \sum_i \alpha_{i\phi}M''_{i\phi} - \sum_i \alpha_{i\phi}\bar{M}_{i\phi}$$

hay $$M'_{i\phi} + \sum_i \alpha_{i\phi}C_{\phi i}M'_{\phi i} = -\sum_i \alpha_{i\phi}M''_{i\phi} - \sum_i \alpha_{i\phi}\bar{M}_{i\phi} \qquad (11.4)$$

Công thức (11.4) có tính chất tổng quát, có thể áp dụng cho trường hợp không có chuyển vị ngang hoặc có chuyển vị ngang.

Như đã biết, mô men do xoay $M'_{i\phi}$ và mô men do chuyển vị ngang $M''_{i\phi}$ là những ẩn cần phải tìm. Biết được giá trị của các ẩn này, ta dễ dàng tìm được mô men tại đầu thanh theo (11.2)

§11.2. Trường hợp khung không có chuyển vị ngang

Khi khung không có chuyển vị ngang, $M''_{i\phi} = 0$, do đó (11.4) có dạng:

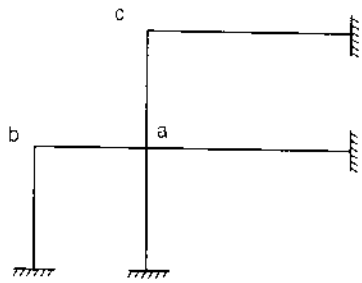
$$M_{i\phi} + \sum_i \alpha_{i\phi} C_{\phi i} M_{\phi i} = -\sum_i \alpha_{i\phi} \bar{M}_{i\phi} \qquad (11.5)$$

Theo (11.2), mô men tại đầu thanh có thể viết:

$$\left.\begin{aligned} M_{i\phi} &= M'_{i\phi} + C_{oi} M'_{\phi i} + \bar{M}_{i\phi} \\ M_{\phi i} &= M'_{oi} + C_{i\phi} . M'_{i\phi} + \bar{M}_{\phi i} \end{aligned}\right\} \qquad (11.6)$$

Phương trình (11.5) có thể viết dưới dạng ma trận cho toàn bộ khung như sau:

$$A.M' = -[\alpha \bar{M}]$$



Hình 11.3

Chẳng hạn đối với khung trên hình (11.3), sau khi viết phương trình (11.5) cho các nút a, b, c, ta có hệ thức ma trận:

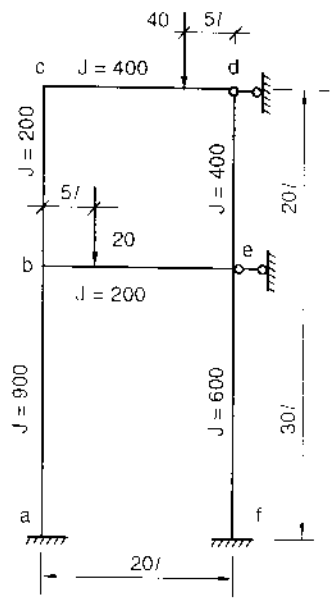
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_{ab}C_{ba} & \alpha_{ab}C_{ca} \\ 0 & 1 & \alpha_{ac}C_{ba} & \alpha_{ac}C_{ca} \\ \alpha_{ba}C_{ab} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_{ca}C_{ac} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} M'_{ab} \\ M'_{ac} \\ M'_{ba} \\ M'_{ca} \end{bmatrix}}_{M'} = -\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{ab}\bar{M}_a \\ \alpha_{ac}\bar{M}_a \\ \alpha_{ba}\bar{M}_b \\ \alpha_{ca}\bar{M}_b \end{bmatrix}}_{[\alpha\bar{M}]}$$

Để giải phương trình ma trận nên ta đặt B=I–A và suy ra phương trình ma trận:

$$M' = B.M' - [\alpha \bar{M}] \qquad (11.7)$$

$$M' = B.M' - C$$

Trong đó: I– ma trận đơn vị; B– ma trận giống ma trận A nhưng toàn bộ các phần tử trên đường chéo chính đều triệt tiêu, các phần tử còn lại đều đổi dấu.



Hình 11.4

Ta giải phương trình (11.7) theo phương trình tính lặp đơn gian đã trình bày trong §1.7.6 (chương một). Lúc bắt đầu tính, cho M' = 0 ở vế phải để được $M'^{(1)}$. Tiếp tục thay $M'^{(1)}$ vào vế phải để được $M'^{(2)}$. Tiếp tục các vòng tính cho đến khi các giá trị của vectơ M' trong vòng tính trước xấp xỉ với các giá trị tương ứng trong vòng tính sau thì kết thúc.

Thí dụ 11.1: Một khung không có chuyển vị ngang với các kích thước, đặc trưng hình học và tải trọng biểu thị trên hình (11.4).

Giải:

Áp dụng công thức (11.3): $\alpha_{ba} = 0{,}60$; $\alpha_{bc} = 0{,}2$; $\alpha_{be} = 0{,}2$; $\alpha_{cb} = 0{,}33$; $\alpha_{cd} = 0{,}67$; $\alpha_{dc} = 0{,}5$; $\alpha_{de} = 0{,}5$; $\alpha_{ed} = 0{,}40$; $\alpha_{eb} = 0{,}20$; $\alpha_{ef} = 0{,}40$.

Vì mỗi phần tử của khung đều có tiết diện không đổi nên C = 0,5; S = 4EI/L.

Mô men ngàm tại các đầu thanh: $\bar{M}_{ab} = \bar{M}_{ba} = 0$; $\bar{M}_{ef} = \bar{M}_{fe} = 0$; $\bar{M}_{cb} = \bar{M}_{bc} = 0$; $\bar{M}_{bc} = -56{,}20$; $\bar{M}_{eb} = 18{,}70$; $\bar{M}_{de} = \bar{M}_{ed} = 0$; $\bar{M}_{cd} = -37{,}50$; $\bar{M}_{dc} = 112{,}50$

Áp dụng (11.5) cho toàn bộ khung, ta được các ma trận sau:

$$M' = [M'_{ba} \quad M'_{bc} \quad M'_{be} \quad M'_{cb} \quad M'_{cd} \quad M'_{dc} \quad M'_{de} \quad M'_{ed} \quad M'_{eb} \quad M'_{ef}]'$$

$$B = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}10 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}165 & 0 & 0 & 0{,}165 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}335 & 0 & 0 & 0{,}335 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tổng mô men ngàm tại các nút: $\bar{M}_b = -56{,}20$, $\bar{M}_d = 112{,}50$, $\bar{M}_c = -37{,}50$, $\bar{M}_e = 18{,}70$

Ma trận $[\alpha\bar{M}]$ có dạng như sau:

$$[\alpha\bar{M}] = \begin{bmatrix} 0{,}60.(-56{,}20) \\ 0{,}20.(-56{,}20) \\ 0{,}20.(-56{,}20) \\ 0{,}33.(-37{,}50) \\ 0{,}67.(-37{,}50) \\ 0{,}50.(112{,}50) \\ 0{,}50.(112{,}50) \\ 0{,}4.(18{,}70) \\ 0{,}20.(18{,}70) \\ 0{,}40.(18{,}70) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33{,}72 \\ -11{,}24 \\ -11{,}24 \\ -12{,}37 \\ -25{,}12 \\ 56{,}25 \\ 56{,}25 \\ 7{,}48 \\ 3{,}74 \\ 7{,}48 \end{bmatrix}$$

Ta giải hệ phương trình trên theo phương pháp tính lặp đơn giản. Sau vòng thứ nhất ta được kết quả sau:

$$M'^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -33,72 \\ -11,24 \\ -11,24 \\ -12,37 \\ -25,12 \\ 56,25 \\ 56,25 \\ 7,48 \\ 3,74 \\ 7,48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33,72 \\ 11,24 \\ 11,24 \\ 12,37 \\ 25,12 \\ -56,25 \\ -56,25 \\ -7,48 \\ -3,74 \\ -7,48 \end{bmatrix}$$

Tiếp tục cho đến vòng tính thứ 4, ta được:

$$M'^{(2)} = \begin{bmatrix} 31,13 \\ 10,37 \\ 10,37 \\ 19,80 \\ 40,20 \\ -60,66 \\ -60,66 \\ 1,53 \\ 0,76 \\ 1,53 \end{bmatrix} \quad M'^{(3)} = \begin{bmatrix} 27,55 \\ 9,19 \\ 9,19 \\ 20,65 \\ 42,00 \\ -60,68 \\ -60,68 \\ 2,57 \\ 1,26 \\ 2,57 \end{bmatrix} \quad M'^{(4)} = \begin{bmatrix} 27,15 \\ 9,06 \\ 9,06 \\ 21,86 \\ 44,38 \\ -67,39 \\ -67,39 \\ 4,02 \\ 2,01 \\ 4,02 \end{bmatrix}$$

Áp dụng (11.6), ta được kết quả cuối cùng:

$$\begin{bmatrix} M_{ab} \\ M_{ba} \\ M_{bc} \\ M_{bc} \\ M_{cb} \\ M_{cd} \\ M_{dc} \\ M_{de} \\ M_{ed} \\ M_{eb} \\ M_{ef} \\ M_{fe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -56,20 \\ 0 \\ 0 \\ -37,50 \\ 112,50 \\ 0 \\ 0 \\ 18,70 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 27,15 \\ 9,06 \\ 9,06 \\ 21,86 \\ 44,38 \\ -67,39 \\ -67,39 \\ 4,02 \\ 2,01 \\ 4,02 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13,57 \\ 0 \\ 1,00 \\ 10,93 \\ 4,53 \\ -33,69 \\ 22,19 \\ 2,00 \\ -33,69 \\ 4,53 \\ 0 \\ 2,01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,57 \\ 27,15 \\ -46,14 \\ 20,00 \\ 26,39 \\ 26,86 \\ 67,3 \\ -65,39 \\ -29,67 \\ 25,24 \\ 4,02 \\ 2,01 \end{bmatrix}$$

$$M_{ik} \qquad \overline{M}_{ik} \qquad M'_{ik} \qquad 0,5.M'_{ki}$$

Hoàn toàn có khả năng lập chương trình để thực hiện quá trình tính toán trên máy vi tính. Thuật toán không đòi hỏi phép nghịch đảo ma trận mà chỉ cần đến các phép tính nhân và cộng ma trận.

§11.3. Trường hợp khung có chuyển vị ngang

Trong trường hợp khung có chuyển vị ngang, ta áp dụng phương trình (11.4). Nếu viết phương trình này cho toàn bộ các nút, ta có hệ thức ma trận:

$$A.M' = -[\alpha M''] - [\alpha \bar{M}] \tag{11.8}$$

Đặt B = I−A, I là ma trận đơn vị, ta có hệ thức tương tự như trong §11.2:

$$M' = B.M' - [\alpha M''] - [\alpha \bar{M}] \tag{11.9}$$

$$M' = BM' - DM'' - C \tag{11.9a}$$

Trong đó, ma trận B giống ma trận A nhưng toàn bộ các phần tử trên đường chéo chính đều triệt tiêu, các phần tử còn lại đều đổi dấu.

Ngoài điều kiện cân bằng nút, ta còn có điều kiện cân bằng tầng. Tương tự như trong phương pháp G.Kanin, ta có thể suy ra công thức phân phối mô men do chuyển vị ngang như sau:

$$M''_{ik} = \nu_{ik}[M_r + \sum_r (M'_{ik} + M'_{ki})] \tag{11.10}$$

Trong đó:

$$\nu_{ik} = -\frac{3}{4}\frac{R_{ik}}{\sum_r R_{ik}} \tag{11.11}$$

$$M_r = \frac{2}{3}h_{ik}\left[\sum_r P_{ng} - \sum_r Q^d_{ik} + \sum_r \frac{(\bar{M}_{ik} + \bar{M}_{ki})}{h_{ik}}\right] \tag{11.12}$$

Các công thức trên được suy ra trong điều kiện chiều cao của tầng không đổi và toàn bộ các nút đều cứng. Sau khi viết phương trình cân bằng (11.10) cho toàn bộ các tầng, ta có hệ thức ma trận:

$$M'' = [\nu M'] + [\nu M_r] \tag{11.13}$$

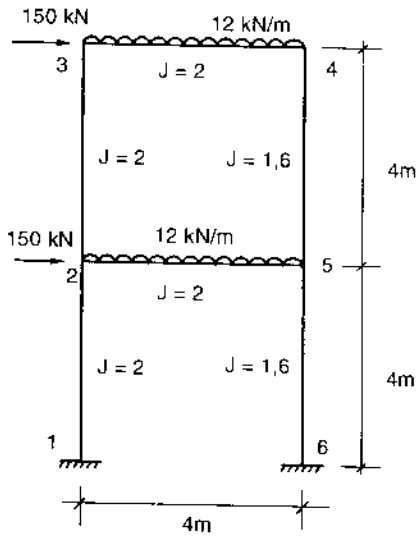
Trong đó M'' là vectơ các mô men do chuyển vị ngang. Ma trận $[\nu M']$ là vectơ các mô men xoay tương ứng với các đầu cột trong các tầng. Ma trận $[\nu M_r]$ là vectơ các hằng số.

Quá trình tính lặp chia làm hai giai đoạn. Trong giai đoạn đầu, ta thực hiện quá trình tính lặp đối với M'. Trong giai đoạn 2, ta tiến hành tính lặp đối với M''. Lúc bắt đầu tính cho M' = 0 và M'' = 0 trong vế phải của (11.9) để tính $M'^{(1)}$. Tiếp theo, thay $M'^{(1)}$ vào vế phải của (11.13) để

tính $M''^{(1)}$. Tiếp theo, thay $M'^{(1)}$ và $M''^{(1)}$ vào vế phải của (11.9) để tính $M'^{(2)}$. Cứ như vậy, ta tiếp tục các vòng tính cho đến khi giá trị của M', M" trong vòng tính trước xấp xỉ với các giá trị tương ứng trong vòng tính sau thì kết thúc.

Thí dụ 11.2: Tính nội lực của khung cho trên hình (11.5)

Giải:



Hình 11.5

Khung gồm các phần tử có tiết diện không đổi nên S = 4EI/L, C = 0,5. Theo (11.3), ta tính được:

$\alpha_{21} = \alpha_{25} = \alpha_{23} = 0{,}33$; $\alpha_{32} = \alpha_{34} = 0{,}5$;

$\alpha_{43} = 0{,}56$; $\alpha_{45} = 0{,}44$; $\alpha_{56} = 0{,}31$

$\alpha_{52} = 0{,}38$; $\alpha_{54} = 0{,}31$. Theo (11.11) tính được:

$\nu_{12} = \nu_{23} = -0{,}42$; $\nu_{45} = \nu_{56} = -0.33$. Theo (11.12) tính được:

$$M_r^{(1)} = 800 \text{ kN (tầng 1)}$$

$$M_r^{(2)} = 800 \text{ kN (tầng 2)}$$

Mô men ngàm: $\bar{M}_2 = -16$ kNm; $\bar{M}_3 = -16$ kNm; $\bar{M}_4 = -16$ kNm; $\bar{M}_5 = 16$ kNm.

Viết phương trình (11.4) cho toàn bộ các nút, ta có hệ thức ma trận:

$$M' = B.M' - [\alpha M''] - [\alpha \bar{M}]$$

Trong đó:

$$B = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}17 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}28 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}22 \\ 0 & 0{,}15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}192 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}192 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}15 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M' = \begin{bmatrix} M'_{21} \\ M'_{25} \\ M'_{23} \\ M'_{32} \\ M'_{34} \\ M'_{43} \\ M'_{45} \\ M'_{56} \\ M'_{52} \\ M'_{54} \end{bmatrix} \quad D.M'' = [\alpha M''] = \overbrace{\begin{bmatrix} 0,33 & 0,33 & 0 & 0 \\ 0,33 & 0,33 & 0 & 0 \\ 0,33 & 0,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 & 0 \\ 0 & 0 & 0,44 & 0 \\ 0 & 0 & 0,31 & 0,31 \\ 0 & 0 & 0,38 & 0,38 \\ 0 & 0 & 0,31 & 0,31 \end{bmatrix}}^{D} \overbrace{\begin{bmatrix} M''_{12} \\ M''_{23} \\ M''_{45} \\ M''_{56} \end{bmatrix}}^{M''} \quad C = [\alpha \bar{M}] = \begin{bmatrix} -5,33 \\ -5,33 \\ -5,33 \\ -8 \\ -8 \\ 8,96 \\ 7,04 \\ 4,96 \\ 6,08 \\ 4,96 \end{bmatrix}$$

Viết phương trình (11.10) cho toàn bộ các tầng, ta có hệ thức ma trận:

$$M' = [\nu M'] + [\nu M_r] \tag{11.14}$$

M'' – vectơ mô men chuyển vị; $[\nu M'] = E.M'$; $[\nu M_r] = F$

$$M'' = \begin{bmatrix} M''_{12} \\ M''_{23} \\ M''_{45} \\ M''_{56} \end{bmatrix} \quad [\nu M'] = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0,42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,42 \\ 0 & 0,42 & 0,42 & 0,42 & 0,42 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,33 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} M'_{21} \\ M'_{23} \\ M'_{32} \\ M'_{45} \\ M'_{54} \\ M'_{56} \end{bmatrix}}_{M'}$$

$$F = [\nu M_r] = \begin{bmatrix} -336 \\ -168 \\ -132 \\ -264 \end{bmatrix}$$

Tiến hành phương pháp tính lặp đơn giản để tìm giá trị đúng dần của vectơ M' và M''. Kết quả cuối cùng như sau:

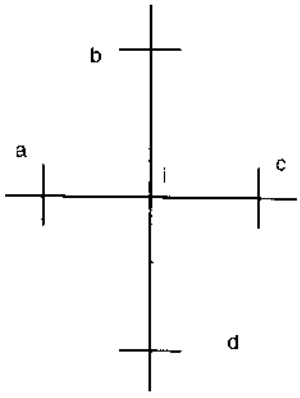
$$\begin{bmatrix} M'_{21} \\ M'_{25} \\ M'_{52} \\ M'_{23} \\ M'_{32} \\ M'_{34} \\ M'_{43} \\ M'_{45} \\ M'_{54} \\ M'_{56} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 265,48 \\ 265,48 \\ 222,56 \\ 265,48 \\ 137,94 \\ 137,94 \\ 99,6 \\ 80,2 \\ 178,5 \\ 178,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M''_{21} \\ M''_{25} \\ M''_{23} \\ M''_{32} \\ M''_{45} \\ M''_{54} \\ M''_{56} \\ M''_{56} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -518,1 \\ -518,1 \\ -442,4 \\ -442,4 \\ -353,92 \\ -353,92 \\ -414,48 \\ -414,48 \end{bmatrix}$$

Mô men cuối cùng tại các đầu thanh tính theo (11.6). Kết quả như sau:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{21} \\ M_{12} \\ M_{25} \\ M_{52} \\ M_{23} \\ M_{32} \\ M_{34} \\ M_{43} \\ M_{45} \\ M_{54} \\ M_{56} \\ M_{65} \end{bmatrix}}_{M_{ik}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 265,48 \\ 0 \\ 265,48 \\ 222,56 \\ 265,48 \\ 137,94 \\ 137,94 \\ 99,6 \\ 80,2 \\ 178,5 \\ 178,5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{M'_{ik}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 132,74 \\ 111,28 \\ 132,74 \\ 68,97 \\ 132,74 \\ 49,80 \\ 68,97 \\ 89,25 \\ 40,10 \\ 0 \\ 89,25 \end{bmatrix}}_{0,5M_{ki}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -518,1 \\ -518,1 \\ 0 \\ 0 \\ -442,4 \\ -442,4 \\ 0 \\ 0 \\ -353,92 \\ -353,92 \\ -414,48 \\ -414,48 \end{bmatrix}}_{M''_{ik}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ -16 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{M}_{ik}} = \begin{bmatrix} -252,62 \\ -385,36 \\ 360,76 \\ 371,3 \\ -107,95 \\ -171,72 \\ 171,74 \\ 184,57 \\ -184,47 \\ -135,32 \\ -235,98 \\ -235,23 \end{bmatrix}$$

§11.4. Đơn giản hoá dạng ma trận của phương pháp phân phối mô men

Ta đã nghiên cứu dạng ma trận của phương pháp phân phối mô men trong đó ẩn là các mô men do xoay M' và các mô men do chuyển vị ngang M". Đối với những khung có bậc siêu tĩnh rất cao, số lượng các ẩn rất lớn, do đó khối lượng tính toán tăng lên đáng kể.



Hình 11.6

Để giảm bớt khối lượng tính toán, ta giảm số lượng ẩn bằng cách chọn tổng mô men do xoay tại các nút làm ẩn. Giả sử một nút i bất kỳ của khung được liên kết với các nút lân cận a, b, c, d như trên hình (11.6). Trong §11.1, ta đã suy ra phương trình:

$$\sum_i M'_{i\phi} = -\sum_i C_{\phi i} M'_{\phi i} - \sum_i M''_{i\phi} - \sum_i \overline{M}_{i\phi}$$

Trong đó, dấu tổng áp dụng cho toàn bộ các phần tử quy tụ tại nút i. Đặt:

$$\overline{M}''_i = \sum_i M''_{i\phi}, \qquad \overline{M}_i = \sum_i \overline{M}_{i\phi}$$

$\overline{M}'_i = \sum_i M'_{i\phi}$, phương trình trên có dạng :

$$\overline{M}''_i = -\sum_i C_{i\phi} M'_{\phi i} - \overline{M}''_i - \overline{M}_i \qquad (11.15)$$

Trong đó: M'_i – tổng mô men do xoay tại nút i; $\overline{M}''_i$ – tổng mô men do chuyển vị ngang tại nút i; $\overline{M}_i$ – tổng mô men ngàm tại nút i.

Viết phương trình (11.15) cho nút i trên hình (11.6):

$$\begin{aligned} M'_i &= \sum M'_{i\phi} = M'_{ia} + M'_{ib} + M'_{ic} + M'_{id} \\ &= -(\overline{M}_i + C_{ai}.M'_{ai} + C_{bi}.M'_{bi} + C_{ci}.M'_{ci} + C_{di}.M'_{di} + \overline{M}''_i) \end{aligned} \qquad (a)$$

Nhưng: $M'_{ai} = \alpha_{ai}.M'_a$; $M'_{bi} = \alpha_{bi}.M'_b$;

$M'_{ci} = \alpha_{ci}M'_c$; $M'_{di} = \alpha_{di}M'_d$

Trong đó:

M'_i là tổng mô men do xoay tại nút i. Thay các hệ thức trên vào (a):

$$M'_i + C_{ai}.\alpha_{ai}.M'_a + C_{bi}.\alpha_{bi}.M'_b + C_{ci}.\alpha_{ci}.M'_c + C_{di}.\alpha_{di}.M'_d = -\overline{M}'_i - \overline{M}''_i$$

Một cách tổng quát phương trình có thể viết:

$$M'_i + \sum_i C_{\phi i}.\alpha_{\phi i}.M'_\phi = -\overline{M}_i - \overline{M}''_i \qquad (11.16)$$

Viết (11.15) dưới dạng ma trận:

$$A.M' = -\overline{M} - \overline{M}'' \qquad (11.17)$$

M'– vectơ mô men xoay; – vectơ tổng mô men ngàm; M''– vectơ mô men chuyển vị.

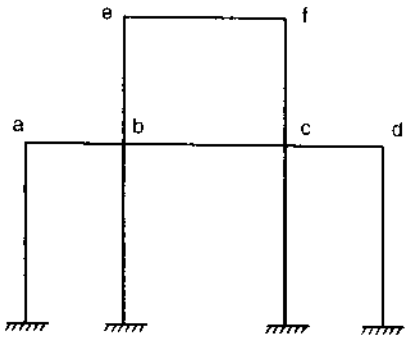
Chẳng hạn sau khi viết phương trình (11.16) cho toàn bộ các nút a, b, c, d, e, f trên hình (11.7), ta có hệ thức ma trận:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{ba}C_{ba} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{ab}C_{ab} & 1 & \alpha_{cb}C_{cb} & 0 & \alpha_{eb}C_{eb} & 0 \\ 0 & \alpha_{bc}C_{bc} & 1 & \alpha_{dc}C_{dc} & 0 & \alpha_{fc}C_{fc} \\ 0 & 0 & \alpha_{cd}C_{cd} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{be}C_{be} & 0 & 0 & 1 & \alpha_{fe}C_{fe} \\ 0 & 0 & \alpha_{cf}C_{cf} & 0 & \alpha_{ef}C_{ef} & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} M'_a \\ M'_b \\ M'_c \\ M'_d \\ M'_e \\ M'_f \end{bmatrix}}_{M'} = -\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{M}_a \\ \bar{M}_b \\ \bar{M}_c \\ \bar{M}_d \\ \bar{M}_e \\ \bar{M}_f \end{bmatrix}}_{[\bar{M}_i]} - \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{M}''_a \\ \bar{M}''_b \\ \bar{M}''_c \\ \bar{M}''_d \\ \bar{M}''_e \\ \bar{M}''_f \end{bmatrix}}_{[\bar{M}''_i]}$$

Tương tự như phần trước, đặt B = I–A, I là ma trận đơn vị, hệ thức ma trận trên có dạng:

$$MXN^{(k+1)} = B.MXN^{(k)} - C - M'' \qquad (11.18)$$

MXN– vectơ mô men xoay tại nút; B– ma trận chứa các hệ số phân phối mô men; C– vectơ chứa mô men ngàm; M''– vectơ chuyển vị.



Hình 11.7

Trong đó, ma trận B giống ma trận A nhưng các phần tử trên đường chéo chính đều triệt tiêu và toàn bộ các phần tử còn lại đều đổi dấu.

Ta giải phương trình (11.18) theo phương pháp lặp đơn giản. Đầu tiên, thay $M'_i = 0$ và $\bar{M}''_i = 0$ ở vế phải để được $M_i'^{(1)}$. Dùng $M_i'^{(1)}$ để tính $M''^{(1)}$ như trong thí dụ (11.2) đã trình bày. Tiếp tục thay $M_i'^{(1)}$ và $M_i''^{(1)}$ vào vế phải để được $M_i'^{(2)}$. Tiếp tục các vòng tính tiếp theo cho đến khi các giá trị M'_i và M'' trong vòng tính trước xấp xỉ với các giá trị tương ứng trong vòng tính sau thì kết thúc. Cuối cùng, tính mô men xoay ở đầu thanh theo công thức:

$$MX = D.\ MXN... \qquad (11.19)$$

MX– vectơ mô men xoay; D– ma trận chứa các hệ số phân phối mô men; MXN– vectơ các mô men xoay tại nút.

Giá trị mô men cuối cùng tính theo công thức (11.2).

Thí dụ 11.3: Tính lại khung cho trên hình (11.4), thí dụ (11.1)

Giải

Vì khung không có chuyển vị ngang nên $\bar{M}''_i = 0$. Các phần tử của khung có tiết diện không đổi nên hệ số độ cứng S = 4EI/L, hệ số truyền C = 0,5. Căn cứ vào các số liệu trong thí dụ (11.1) và phương trình (11.16) (viết cho toàn bộ các nút), ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} M'_b \\ M'_c \\ M'_d \\ M'_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,17 & 0 & 0,10 \\ 0,10 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,34 & 0 & 0,20 \\ 0,10 & 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M'_b \\ M'_c \\ M'_d \\ M'_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -56,2 \\ -37,5 \\ 112,5 \\ 18,7 \end{bmatrix}$$

Sau khi giải hệ phương trình trên theo phương pháp tính lặp đơn giản, ta được kết quả: $M'_b = 45,27$; $M'_c = 66,24$; $M'_d = -134,73$; $M'_e = 10,24$.

Cuối cùng, tính mô men tại đầu thanh theo (11.2). Kết quả như sau:

$$\begin{bmatrix} M_{ab} \\ M_{ba} \\ M_{be} \\ M_{bc} \\ M_{cb} \\ M_{cd} \\ M_{dc} \\ M_{de} \\ M_{ed} \\ M_{eb} \\ M_{ef} \\ M_{fe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{ab} \\ \bar{M}_{ba} \\ \bar{M}_{be} \\ \bar{M}_{bc} \\ \bar{M}_{cb} \\ \bar{M}_{cd} \\ \bar{M}_{dc} \\ \bar{M}_{de} \\ \bar{M}_{ed} \\ \bar{M}_{eb} \\ \bar{M}_{ef} \\ \bar{M}_{fe} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_{ba}.M'_b \\ \alpha_{be}.M'_b \\ \alpha_{bc}.M'_b \\ \alpha_{cb}.M'_c \\ \alpha_{cd}.M'_c \\ \alpha_{dc}.M'_d \\ \alpha_{de}.M'_d \\ \alpha_{ed}.M'_e \\ \alpha_{eb}.M'_e \\ \alpha_{ef}.M'_e \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ba}.\alpha_{ba}.M'_b \\ 0 \\ C_{eb}.\alpha_{eb}.M'_e \\ C_{cb}.\alpha_{cb}.M'_c \\ C_{bc}.\alpha_{bc}.M'_b \\ C_{dc}.\alpha_{dc}.M'_d \\ C_{cd}.\alpha_{cd}.M'_c \\ C_{ed}.\alpha_{ed}.M'_e \\ C_{de}.\alpha_{de}.M'_d \\ C_{be}.\alpha_{be}.M'_b \\ 0 \\ C_{ef}.\alpha_{ef}.M'_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -56,2 \\ 0 \\ 0 \\ -37,5 \\ 112,5 \\ 0 \\ 0 \\ 18,7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

So sánh các kết quả tính toán trong 2 thí dụ (11.1) và (11.3), ta thấy: số ẩn trong thí dụ (11.1) là 10, số ẩn trong thí dụ (11.3) là 4. Điều này cho thấy với cách đơn giản hoá vừa được trình bày ở trên, khối lượng tính toán giảm đáng kể. Cách tính này có thể áp dụng trong điều kiện tính bằng tay hoặc dùng máy vi tính có bộ nhớ không lớn hoặc khi khung có bậc siêu tĩnh rất cao.

§11.5. Thuật toán lập trình tính khung không có chuyển vị ngang theo phương pháp phân phối mô men (CT 29)

1. Các nguyên tắc cần được tuân thủ:

Thuật toán này áp dụng có hệ khung có dầm nằm ngang, có cột thẳng đứng, số nhịp ở các tầng bằng nhau (hình 11.8).

a) Số thứ tự các thanh:

– Xếp cho dầm trước, từ trái sang phải, từ trên xuống dưới (hình 11.8).

– Xếp cho cột sau, từ trái sang phải, từ trên xuống dưới (hình 11.8).

Thí dụ trên hình (11.8), ta có số thứ tự của các dầm 1, 2, 3, 4, 5, 6; Số thứ tự các cột: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

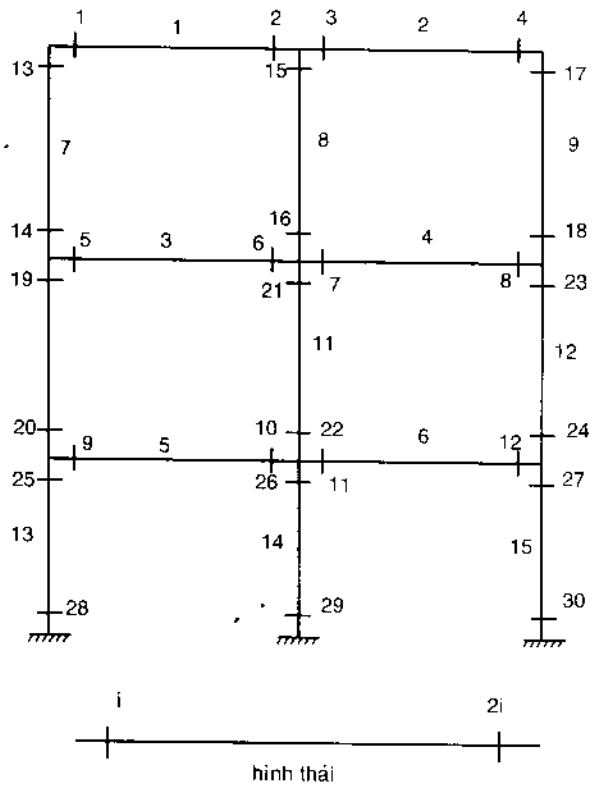
b) Số thứ tự các tiết diện để tính mô men:

– Đối với dầm: từ trái sang phải.

– Đối với cột: từ trên xuống dưới.

Đối với dầm cũng như cột (trừ các cột bị ngàm ở đáy), số thứ tự của tiết diện xác định như trên hình (11.8).

Thí dụ trên hình (11.8), ta có số thứ tự của các tiết diện: 1, 2, 3, 4, ... 18, 19, 30.



Hình 11.8

2) Nhập số liệu:

– Tổng số thanh (ST).

– Số thanh không có gối tựa (STO) (thí dụ trên hình (11.9) có 12 thanh).

– Số thứ tự tiết diện tại mỗi đầu thanh (N_1, N_2)

– Mô men ngàm tại mỗi đầu thanh (mn).

– Nhập các phần tử của ma trận B theo công thức (11.7) (B có được bằng cách lấy ma trận A trừ đi ma trận đơn vị, các phần tử trên đường chéo chính triệt tiêu, toàn bộ các phần tử đều mang dấu âm.

– Nhập các phần tử của ma trận C theo 11.7 (ma trận mô men ngàm nhân với hệ số phân phối).

3) Thực hiện quá trình tính lặp theo phương pháp Gauss–Seidel (xem công thức (1.59) §1.7.6)

$$MX^{(k+1)} = B.MX^{(k)} + C$$

k– số thứ tự vòng tính; MX– vectơ mô men xoay.

Tính cho đến khi nào các giá trị mô men xoay xấp xỉ bằng nhau.

4) Tính giá trị mô men cuối cùng ở các đầu thanh theo (11.2) (trừ các cột ngàm ở đáy).

§11.6 Thuật toán lập trình tính khung có chuyển vị ngang theo phương pháp phân phối mô men (CT30).

1. Các nguyên tắc cần tuân thủ:

Như đã trình bày trong CT29 §11.5

2) Nhập số liệu:

– Tổng số thanh (ST)

– Số dầm (Sd)

– Số cột (Sc).

– Số cột không có gối tựa.

– Số thứ tự, các tiết diện ở mỗi đầu thanh (N_1, N_2).

– Mô men ngàm ở mỗi tiết diện (mn).

– Các phần tử của ma trận B theo (11.7).

– Các phần tử của ma trận C theo (11.7).

– Các phần tử của ma trận D theo (11.9) (liên quan đến mô men chuyển vị).

– Nhập các phần tử của ma trận E theo (11.13) (liên quan đến mô men xoay ở các cột)

– Nhập các phần tử của ma trận F theo (11.13) (liên quan đến mô men tầng).

3) Thức hiện quá trình tính lặp theo phương pháp Gauss–Seidel (xem công thức (1.59) §1.7.6).

Tính lặp đối với mô men xoay:

$$MX^{(k+1)} = B.MX^{(k)} + D.MC^{(k)} + C \qquad \text{(theo 11.9)}$$

Tính lặp đối với mô men chuyển vị:

$$MC^{(k+1)} = E.MX^{(k)} + F \qquad \text{(theo 11.3)}$$

k– số thứ tự vòng tính; MX– vectơ mô men xoay; MC– vectơ mô men chuyển vị.

Tính lặp cho đến khi nào các giá trị mô men xoay xấp xỉ nhau và các giá trị mô men chuyển vị xấp xỉ nhau

4) Tính giá trị mô men ở các đầu thanh theo (11.2)

§11.7. Thuật toán lập trình tính khung không có chuyển vị ngang theo phương pháp mô men đơn giản hóa (CT31)

1. Các nguyên tắc cần tuân thủ:

Như đã trình bày trong §11.5

2) Nhập số liệu:

– Số nút (Sn)

– Số thanh (ST)

– Số thanh không có gối tựa (STO).

– Số thứ tự tiết diện tại mỗi đầu thanh (N_1, N_2).

– Mô men ngàm tại mỗi đầu thanh (mn).

– Các phần tử của ma trận B theo (11.7).

– Các phần tử của ma trận C theo (11.7). (liên quan đến tổng mô men ngàm tại nút).

– Các phần tử của ma trận D để tính mô men xoay tại các tiết diện (theo công thức 11.9).

3) Thức hiện quá trình tính lặp theo phương pháp Gauss–Seidel để xác định mô men xoay tại nút theo (11.7) công thức (1.59) §1.7.6).

Tính lặp đối với mô men xoay:

$$MXN^{(k+1)} = B.MXN^{(k)} - C$$

4) Tính mô men xoay tại các tiết diện theo (11.19)

$$MX = D \,.\, MXN$$

5) Tính mô men tại các đầu thanh theo (11.2)

BÀI TẬP

Bài 1: Tính tổng 2 ma trận A và B:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 & 7 \\ 20 & 8 & -6 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 23 \\ 25 & 17 & 4 & 0 \\ 6 & 8 & 42 & 18 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 3 & 2 \\ -9 & 15 & 18 & 27 \\ 1 & 0 & -6 & 5 \\ 9 & -23 & 27 & 61 \\ -7 & 8 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

$$ĐA = \begin{bmatrix} -1 & 12 & 1 & 9 \\ 11 & 23 & 12 & 28 \\ 4 & 4 & 3 & 28 \\ 34 & -6 & 31 & 61 \\ -1 & 16 & 57 & 16 \end{bmatrix}$$

Bài 2: Tính tổng 2 ma trận A và B:

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 7 & 6 & -12 & 9 & 0 \\ 23 & 19 & -5 & 4 & 62 & 78 \\ 15 & 2 & 0 & -15 & 5 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 62 & 17 & 83 & 4 \\ 7 & 9 & 15 & -3 & 18 & 23 \\ 24 & 67 & 53 & 14 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$ĐA = \begin{bmatrix} 19 & 7 & 68 & 5 & 92 & 4 \\ 30 & 28 & 10 & 1 & 80 & 101 \\ 39 & 69 & 53 & -1 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

Bài 3: Tính tích 2 ma trận A và B:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 21 & 3 \\ 5 & 3 & -18 \\ 9 & 4 & 21 \\ 13 & 9 & 27 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 7 & 4 \\ 15 & 8 & 9 & 3 \\ 27 & 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$ĐA = \begin{bmatrix} 460 & 230 & 250 & 100 \\ -400 & -110 & -28 & -43 \\ 710 & 270 & 200 & 130 \\ 980 & 380 & 310 & 190 \end{bmatrix}$$

Bài 4: Tính tích 2 ma trận A và B:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 15 \\ 6 & 15 & 8 \\ 9 & 32 & -12 \\ 15 & 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 23 & 4 \\ 32 & 29 & -14 \\ 52 & 31 & 15 \end{bmatrix}$$

$$ĐA = \begin{bmatrix} 1000 & 780 & 150 \\ 940 & 820 & -66 \\ 470 & 760 & -590 \\ 520 & 640 & 36 \end{bmatrix}$$

Bài 5: Tính chuyển vị của ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \qquad Đ = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 2 \\ 8 & 5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Bài 6: Tính chuyển vị của ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 2 \\ 15 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 15 & 2 \\ 8 & 5 & 4 & 0 \\ 9 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Bài 7: Đưa ma trận A về dạng tam giác theo phương pháp Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 15 & 28 & -5 \\ 7 & 42 & -9 & 12 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 4{,}00 & 2{,}00 & 8{,}00 & 1{,}00 \\ & 2{,}00 & -9{,}00 & 2{,}50 \\ & & 57{,}25 & -20{,}37 \\ 0 & & & 15{,}60 \end{bmatrix}$$

Bài 8: Đưa ma trận A về dạng tam giác theo phương pháp Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 23 & 5 & -4 & 27 \\ 2 & 1 & 9 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 15 & 2 & 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 23{,}00 & 5{,}00 & 21{,}00 & 27{,}00 \\ & 0{,}57 & 9{,}35 & 5{,}65 \\ & & -82{,}92 & -53{,}00 \\ 0 & & & -24{,}75 \end{bmatrix}$$

Bài 9: Đưa ma trận A về dạng tam giác theo phương pháp Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 21 & 8 \\ & 9 & 3 & 2 \\ & & 16 & 25 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & 8 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 7{,}00 & 5{,}00 & 21{,}00 & 8{,}00 \\ & 5{,}43 & -12{,}00 & -3{,}71 \\ & & -73{,}53 & -7{,}21 \\ & 0 & & -2{,}98 \end{bmatrix}$$

Bài 10: Đưa ma trận A về dạng tam giác theo phương pháp Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 & -12 \\ & 4 & 7 & 6 \\ & & 15 & -4 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & -10 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 5{,}00 & 8{,}00 & 9{,}00 & -12{,}00 \\ & -8{,}80 & -7{,}40 & 25{,}20 \\ & & 5{,}02 & -3{,}59 \\ & 0 & & 30{,}80 \end{bmatrix}$$

Bài 11: Giải hệ phương trình tuyến tính sau theo phương pháp Gauss:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 17 & 23 \\ 29 & 41 & 6 & 1 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 15 \\ -32 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 6{,}80 \\ -3{,}37 \\ -10{,}50 \\ 7{,}80 \end{bmatrix}$$

Bài 12: Giải hệ phương trình tuyến tính sau theo phương pháp Gauss:

$$\begin{bmatrix} 11 & 8 & 12 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 15 & 9 & 32 & 7 \\ 8 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \\ -39 \\ 42 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 4{,}61 \\ -11{,}47 \\ -8{,}73 \\ 39{,}18 \end{bmatrix}$$

Bài 13: Giải hệ phương trình tuyến tính kiểu ma trận đối xứng theo phương pháp Gauss:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 & 6 \\ & 1 & 12 & 28 \\ & & 9 & 3 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & 12 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 15 \\ 29 \\ -37 \\ 51 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 5{,}10 \\ 0{,}27 \\ -8{,}26 \\ 3{,}15 \end{bmatrix}$$

Bài 14: Giải hệ phương trình tuyến tính kiểu ma trận đối xứng theo phương pháp Gauss:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ & 9 & 15 & 18 \\ & & 4 & 12 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & 23 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 30 \\ 65 \\ 52 \\ -14 \end{bmatrix} \qquad \text{ĐA} = \begin{bmatrix} -26{,}44 \\ 42{,}90 \\ 62{,}91 \\ -65{,}86 \end{bmatrix}$$

Bài 15: Giải hệ phương trình tuyến tính kiểu ma trận dải đối xứng theo phương pháp Gauss:

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & & & 0 \\ & 11 & 8 & & \\ & & 2 & 6 & \\ \text{đối} & \text{xứng} & & 15 & 2 \\ & & & & 19 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 4 \\ 22 \\ 19 \end{bmatrix} \qquad \text{ĐA} = \begin{bmatrix} 1{,}83 \\ -0{,}57 \\ -0{,}99 \\ 1{,}75 \\ 0{,}82 \end{bmatrix}$$

Bài 16: Giải hệ phương trình tuyến tính kiểu ma trận dải đối xứng theo phương pháp Gauss:

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 & & & 0 \\ & 5 & 7 & & \\ & & 9 & 13 & \\ \text{đối} & \text{xứng} & & 12 & 1 \\ & & & & -28 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} -32 \\ 57 \\ -63 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix} \qquad \text{ĐA} = \begin{bmatrix} 0{,}39 \\ -2{,}86 \\ 9{,}52 \\ -9{,}89 \\ -1{,}00 \end{bmatrix}$$

Bài 17: Giải hệ phương trình tuyến tính kiểu ma trận đối xứng theo từng cột theo phương pháp Gauss:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 & 2 \\ & 6 & 19 & 23 \\ \text{đối} & \text{xứng} & 11 & 7 \\ & & & 9 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} -18 \\ 5 \\ 32 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad \text{ĐA} = \begin{bmatrix} 32{,}46 \\ 0{,}19 \\ -25{,}56 \\ 11{,}40 \end{bmatrix}$$

Bài 18: Tính định thức của ma trận A theo phương pháp Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 2 \\ 10 & 2 & 6 & 1 \\ 14 & 3 & 2 & 8 \\ 7 & 8 & 15 & 21 \end{bmatrix} \qquad \text{ĐA} = 9036{,}00$$

Bài 19: Tính định thức của ma trận A theo phương pháp Gauss:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 & 1 & 6 \\ & 2 & 18 & 21 & 15 \\ & & 16 & 27 & 32 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & 39 & 21 \\ & & & & 7 \end{bmatrix} \qquad ĐA = 7{,}46043 \times 10^5$$

Bài 20: Nghịch đảo ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & \\ 3 & 5 & & \\ 6 & 7 & 12 & \\ 5 & 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 1{,}00 & & 0 & \\ -0{,}60 & 0{,}20 & & \\ -0{,}25 & -0{,}12 & 0{,}08 & \\ 0{,}50 & -0{,}67 & -1{,}17 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

Bài 21: Nghịch đảo ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 1 \\ & -13 & 2 & 8 \\ & & 9 & 3 \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 0{,}14 & 0{,}07 & -0{,}09 & -0{,}39 \\ & -0{,}08 & 0{,}02 & 0{,}56 \\ & & 0{,}11 & -0{,}33 \\ & 0 & & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Bài 22: Nghịch đảo ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ & 12 & 11 & 9 \\ & & 13 & 11 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & 19 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 20{,}17 & -13{,}03 & 8{,}50 & -1{,}33 \\ & 7{,}17 & -4{,}50 & 0{,}67 \\ & & 3{,}00 & -0{,}50 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & 0{,}17 \end{bmatrix}$$

Bài 23: Nghịch đảo ma trận A theo phương pháp Gauss–Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 3 \\ 8 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} -0{,}09 & 0{,}09 & 0{,}11 & -0{,}04 \\ 0{,}07 & -0{,}29 & 0{,}05 & 0{,}15 \\ -0{,}02 & 0{,}18 & -0{,}10 & 0{,}02 \\ 0{,}13 & -0{,}05 & 0{,}04 & -0{,}05 \end{bmatrix}$$

Bài 24: Nghịch đảo ma trận A theo phương pháp chia khối

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 12 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 0,88 & 0,27 & -0,09 \\ -0,69 & -0,13 & -2,18 \\ 0,55 & 0,02 & -0,09 \end{bmatrix}$$

Bài 25: Giải hệ phương trình tuyến tính sau theo phương pháp tính lặp:

$$\begin{bmatrix} 1,00 & -0,17 & 0 & -0,10 \\ -0,10 & 1,00 & -0,25 & 0 \\ 0 & -0,34 & 1,00 & -2,00 \\ -0,10 & 0 & -0,25 & 1,00 \end{bmatrix} . X = \begin{bmatrix} 56,20 \\ 37,50 \\ -112,50 \\ -18,70 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 54,3249 \\ 13,8700 \\ -116,2502 \\ -42,3300 \end{bmatrix}$$

Bài 26: Giải hệ phương trình tuyến tính sau theo phương pháp tính lặp:

$$\begin{bmatrix} 1,02 & 0 & -0,12 & -0,15 \\ -0,12 & 1,05 & -0,30 & 0 \\ 0 & -0,28 & 1,00 & -0,23 \\ 0 & -0,12 & -0,20 & 1,07 \end{bmatrix} . X = \begin{bmatrix} 40,00 \\ 32,00 \\ -120,00 \\ -20,00 \end{bmatrix} \qquad ĐA = \begin{bmatrix} 17,2943 \\ -5,1245 \\ -131,5202 \\ -43,8495 \end{bmatrix}$$

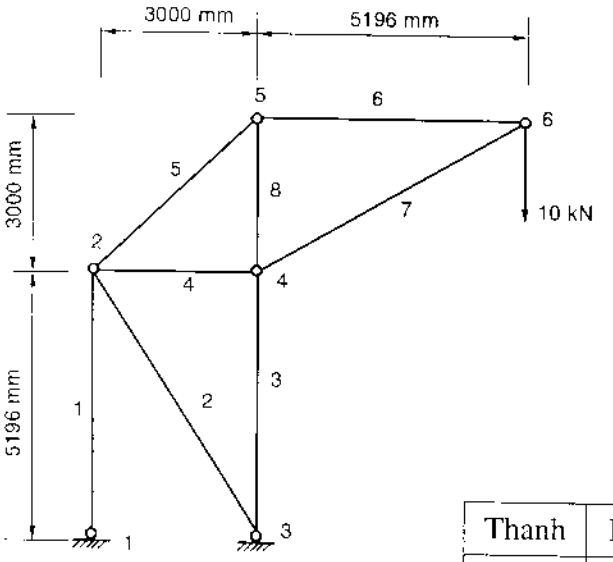
Bài 27: Tính giá trị riêng lớn nhất và vectơ riêng tương ứng của ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 0,59 & 0,55 & 0,23 \\ 0,55 & 0,77 & 0,36 \\ 0,23 & 0,36 & 0,32 \end{bmatrix} \quad VRT = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,2271 \\ 0,6217 \end{bmatrix} \qquad \lambda_3 = 1,4016$$

Bài 28: Tính giá trị riêng bé nhất và vectơ riêng tương ứng của ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \quad VTR = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,2277 \\ 0,6217 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 1,4016$$

Bài 29: Cho 1 giàn phẳng như trên hình B1.



Hình B1

Nút	x	y	u	v
1	0	0	0	0
2	0	5196	d_1	d_2
3	3000	0	0	0
4	3000	5196	d_3	d_4
5	3000	8196	d_5	d_6
6	8196	8196	d_7	d_8

Thanh	Diện tích tiết diện A
1 và 6	375 mm^2
2	875
3 và 7	1150
4 và 8	750
5	500

x, y: toạ độ
u: chuyển vị trên phương ngang.
v: chuyển vị trên phương đứng.

1) Ghi ma trận độ cứng tổng thể (ứng với các bậc tự do có chuyển vị)

2) Tính chuyển vị $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8$

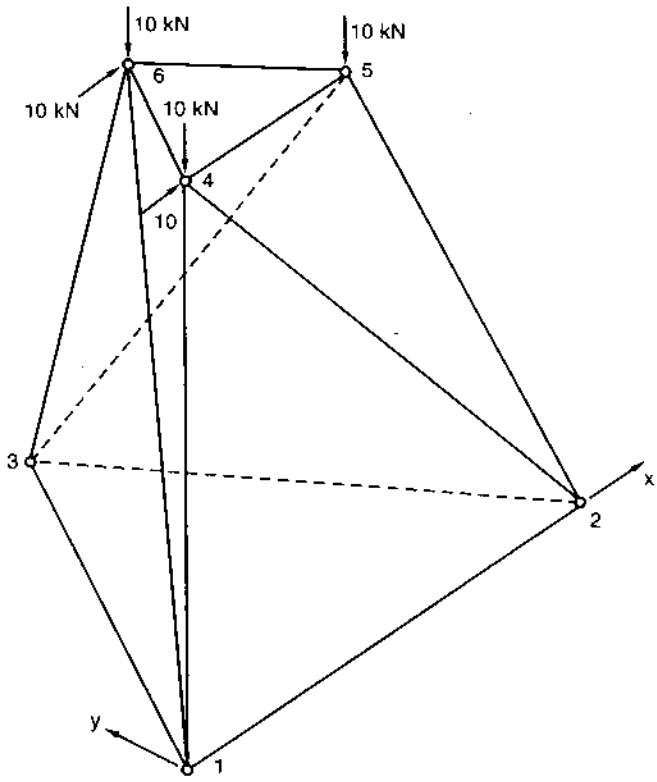
Đáp án: Xem bảng B1:

Bảng B1

$$K = \begin{bmatrix} 72,53 & -0,88 & -52,5 & 0 & -12,38 & -12,38 & 0 & 0 \\ & 50,50 & 0 & 0 & -12,38 & -12,38 & 0 & 0 \\ & & 82,69 & 17,43 & 0 & 0 & -30,19 & -17,43 \\ & & & 109,04 & 0 & -52,5 & -17,43 & -10,06 \\ & & & & 27,33 & 12,38 & -15,16 & 0 \\ \text{đối xứng} & & & & & 61,87 & 0 & 0 \\ & & & & & & 45,35 & 17,43 \\ & & & & & & & 10,06 \end{bmatrix}$$

$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8)$=(1,979; 1,143; 1,649; −0,588; 5,440; −0,918; 6,582; −19,125)

Bài 30: Cho 1 giàn không gian như trên hình B2.



Hình B2

Diện tích tiết diện của các thanh như sau (bằng mm^2):

1–2 = 100; 1–3, 2–3 = 95; 1–4, 2–5, 3–6 = 105;

1–6, 2–4, 3–5 = 125; 4–5, 4–6, 5–6 = 40

Toạ độ và bậc tự do của các nút như sau:

Nút	x	y	z	u	v	w
1	0	0	0	0	0	0
2	8500	0	0	d_1	0	0
3	4250	7000	0	d_2	d_3	0
4	2500	1400	8500	d_4	d_5	d_6
5	6000	1400	8500	d_7	d_8	d_9
6	4250	4200	8500	d_{10}	d_{11}	d_{12}

Mô đun đàn hồi E = 210 kN/mm^2

Viết ma trận tổng thể của toàn hệ

Đáp án: Xem bảng B2.

Bảng B2

$$K = \begin{bmatrix} 4,14 & -0,66 & 1,09 & -0,82 & 0,19 & 1,16 & -0,19 & 0,11 & 0,65 & 0 & 0 & 0 \\ & 1,39 & -0,23 & 0 & 0 & 0 & -0,07 & 0,23 & -0,35 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4,55 & 0 & 0 & 0 & 0,23 & -0,75 & 1,13 & 0 & -0,24 & 0,73 \\ & & & 4,12 & 1,06 & -0,51 & -2,40 & 0 & 0 & -0,72 & -1,14 & 0 \\ & & & & 1,93 & 0,63 & 0 & 0 & 0 & -1,14 & -1,83 & 0 \\ & & & & & 3,85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 3,38 & -1,48 & -0,30 & -0,72 & 1,14 & 0 \\ & & & & & & & 2,64 & 0,77 & 1,14 & -1,83 & 0 \\ & & & & & & & & 3,93 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0,85 & 0,42 & 0,85 \\ & & & & & & & & & & 4,31 & 0,10 \\ & & & & & & & & & & & 3,91 \end{bmatrix}$$

Bài 31: Cho 1 khung phẳng như trên hình B3.

$E = 210 \times 10^6$ kN/m².

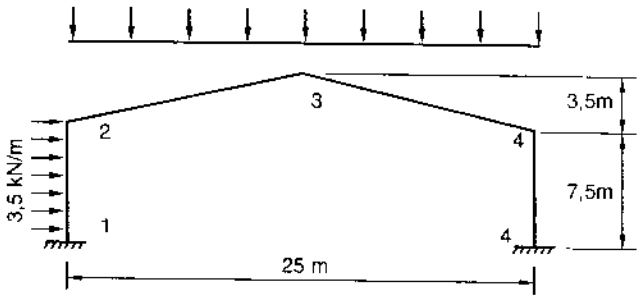
$I = 269,38 \times 10^{-6}$ m⁴

$A = 9480 \times 10^{-6}$ m²

$G = 80,77 \times 10^6$ kN/m²; $\gamma = 2,74$;

1) Viết ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ.

2) Tính các thành phần chuyển vị tại các nút 2, 3, 4. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.



Hình B3

Đáp án: 1) Xem bảng B.3.

Toạ độ và bậc tự do tại các nút

Nút	x	y	u	v	θ
1	0	0	0	0	0
2	0	7,5	d_1	d_2	d_3
3	12,5	11,0	d_4	d_5	d_6
4	25,0	7,5	d_7	d_8	d_9
5	25,0	0,0	0	0	0

Bảng B3

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 14,39 & 3,97 & -0,55 & -14,22 & -3,97 & 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ & 27,69 & -0,19 & -3,97 & -1,14 & -0,19 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4,76 & -0,05 & 0,19 & 0,87 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 28,45 & 0 & -0,11 & -14,22 & 3,97 & -0,05 \\ & & & & 2,29 & 0 & 3,97 & -1,14 & -0,19 \\ & & & & & 3,49 & 0,05 & 0,19 & 0,87 \\ & & & & & & 14,38 & -3,97 & -0,55 \\ & & & & & & & 27,69 & 0,19 \\ & & & & & & & & 4,76 \end{bmatrix}$$

2) Thành phần chuyển vị tại các nút 2, 3, 4:

$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9) =$

$= 10^{-3}(-14,851; -0,279; 2,989; 7,10; -80,10; -0,4; 28,980; -0,286; -1,397)$

Bài 32: Cho 1 hệ dầm trực giao như trên hình B4.

$E = 14 \times 10^6$ kN/m².

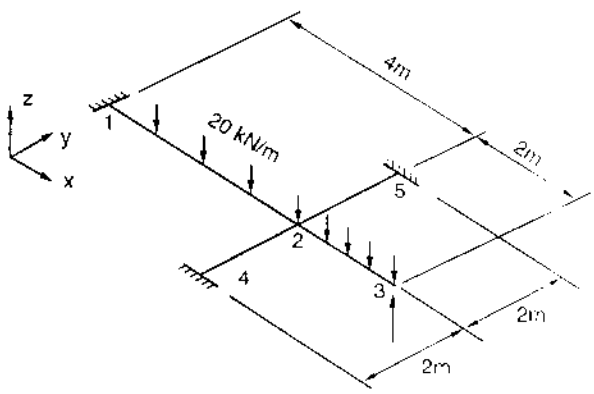
$G = 6,36 \times 10^{-6}$/ m²

$I = 1070 \times 10^{-6}$ m⁴

$J = 749 \times 10^{-6}$ m⁴

$A = 80000 \times 10^{-6}$ m²

$\gamma = 1,2$;



Hình B4

1) Viết ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ.

2) Tính các thành phần chuyển vị tại các nút $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$

3) Tính nội lực trong các thanh.

Tọa độ và bậc tự do tại các nút

Nút	x	y	w	θ_x	θ_y
1	0	2	0	0	0
2	4	2	d_1	d_2	d_3
3	6	2	0	d_4	d_5
4	4	0	0	0	0
5	4	4	0	0	0

Đáp án:

1) Xem bảng B4

2) $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) =$

$= 10^{-3}(-1,28;\ 0,0;\ -0,565;\ 0,0;\ -8,898)$

3) Xem bảng B5.

Bảng B4

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 7,022 & 0 & -1,685 & 0 & -2,247 \\ & 6,349 & 0 & -0,238 & 0 \\ & & 4,970 & 0 & 1,498 \\ & & & 0,238 & 0 \\ \text{đối} & \text{xứng} & & & 2,966 \end{bmatrix}$$

Bảng B.5

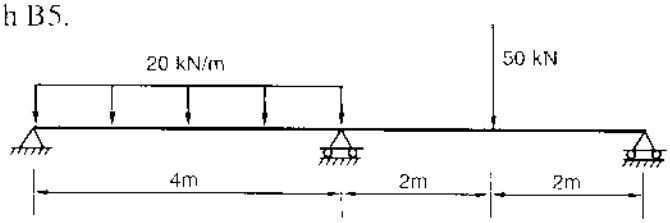
Thanh	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1–2	−38,09	11,04	0
2–3	−8,34	0	0
4–2	−28,71	−28,71	−1,35
2–5	28,71	28,71	1,35

Bài 33: Cho 1 dầm liên tục như trên hình B5.

$E = 210 \times 10^6$ kN/m².

$I = 55 \times 10^{-6}$ m⁴

$A = 4500 \times 10^{-6}$ m²



Hình B5

1) Viết ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ.

2) Tính góc xoay tại các nút.

3) Tính mô men tại các đầu thanh.

4) Tính lực cắt tại các đầu thanh.

Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt.

Đáp án:

1) Xem bảng B6.

2) $(d_1, d_2, d_3) = 10^{-3}$ (2,389; −0,144; −2,092) radian

3), 4) Xem bảng B7.

Bảng B6

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 11550 & 5775 & 0 \\ & 20212,5 & 5725 \\ \text{đối} & \text{xứng} & 9900 \end{bmatrix}$$

Bảng 7

Thanh	M_1	M_2	Q_1	Q_2
1	0	38,75	30,31	49,69
2	−38,75	0	34,69	15,31

Bài 34: Cho 1 khung như trên hình B6.

$E = 210 \times 106$ kN/m²;

Thanh 1–2:

$I = 105,22 \times 10^{-6}$ m⁴; $A = 8540 \times 10^{-6}$ m²; $\gamma = 3,09$

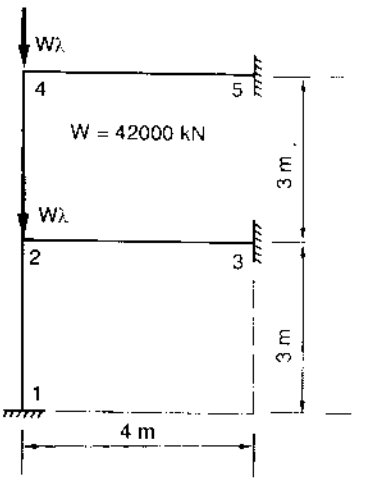
Các thanh còn lại:

$I = 98,48 \times 10^{-6}$ m⁴; $A = 5890 \times 10^{-6}$ m²;

Toạ độ và bậc tự do như trong bảng B8.

Bảng B8

Nút	x	y	u	v	θ
1	0	0	0	0	0
2	0	3	0	0	d_2
3	4	3	0	0	0
4	0	6	0	0	d_1
5	4	6	0	0	0



Hình B6

Xác định hệ số tải trọng tới hạn. Bỏ qua ảnh hưởng lực cắt và lực dọc. Chọn hệ số tới hạn ban đầu $\lambda = 1,0$

Đáp số: $\lambda_{th} = 1,07$

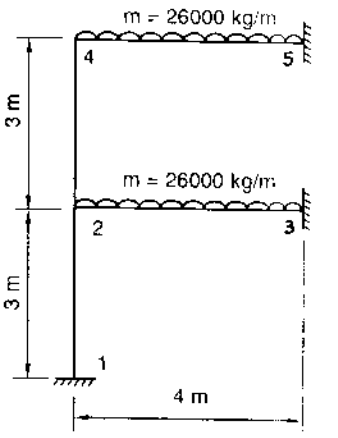
Bài 35: Cho 1 khung như trên hình B7.

Các đặc trưng cơ học, toạ độ và các bậc tự do như trong bài 34.

Xác định tần số cơ bản. Bỏ qua ảnh hưởng lực cắt và lực dọc.

Chọn tần số cơ bản ban đầu: 30,0.

Đáp số: $\omega_{th} = 32,43$



Hình B7

Bài 36: Cho một khung cùng với các tiết diện, hệ số phân phối mô men và mô men ngàm biểu thị như trên hình B8 (mô men ngàm có dấu gạch ngang ở trên).

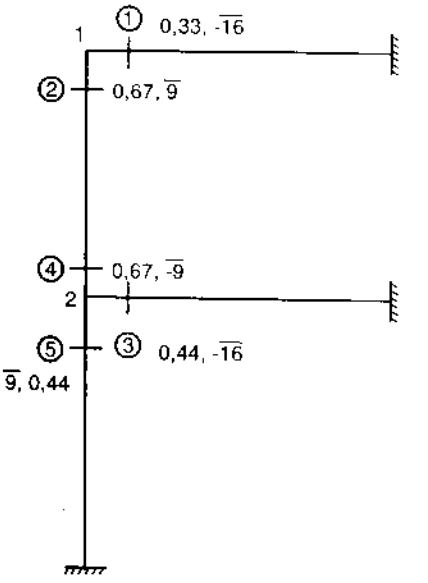
1) Viết ma trận B trong hệ thức:

$$MX^{(k+1)} = B.\ MX^{(k)} + C$$

2) Viết ma trận C trong hệ thức trên.

Đáp án:

$$B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0,17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,34 & 0 \\ 0 & -0,22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,22 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad C = \begin{bmatrix} 2,38 \\ 4,69 \\ 11,00 \\ 3,00 \\ 13,0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$



Hình B8

Bài 37: Cho một khung với các tiết diện, hệ số phân phối mô men xoay, hệ số phân phối mô men chuyển vị, mô men ngàm và mô men tầng biểu thị như trên hình B9.

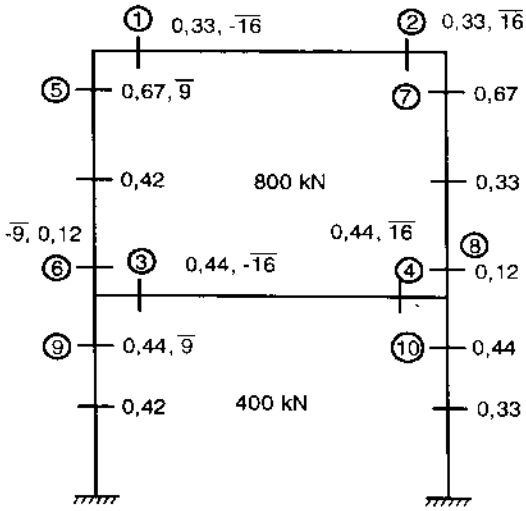
1) Viết ma trận B trong hệ thức:

$$MX^{(k+1)} = B.\ MX^{(k)} + C + D.MC^{(k)}$$

2) Viết ma trận D trong hệ thức trên.

3) Viết ma trận E và F trong hệ thức:

$$MC^{(k+1)} = E.\ MX^{(k+1)} + F$$



Hình B9

Đáp án:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -0,17 & 0 & 0 & 0 & -0,17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,22 & -0,22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,22 & 0 & 0 & 0 & -0,22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,34 & 0 & 0 & 0 & -0,34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,06 & -0,06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,06 & 0 & 0 & 0 & -0,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,22 & -0,22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,22 & 0 & 0 & 0 & -0,22 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0 & 0 \\ 0,44 & 0 & 0,44 & 0 \\ 0 & 0,44 & 0 & 0,44 \\ 0,67 & 0 & 0 & 0 \\ 0,12 & 0 & 0,12 & 0 \\ 0 & 0,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0,12 & 0 & 0,12 \\ 0,44 & 0 & 0,44 & 0 \\ 0 & 0,44 & 0 & 0,44 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}$$

$$E = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -0,42 & -0,42 & -0,42 & -0,42 & 0 & 0 \\ -0,33 & -0,33 & -0,33 & -0,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,42 & -0,42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,33 & -0,33 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \qquad F = \begin{bmatrix} -336 \\ -246 \\ -168 \\ -132 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Bài 38: Cho một khung như trên hình B8.

1) Viết ma trận B trong hệ thức:

$$MXN^{(k+1)} = B.\ MXN^{(k)} + C$$

2) Viết ma trận D trong hệ thức

$$MX = D.\ MXN$$

Đáp án:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0,66 \\ -0,34 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,33 & 0 \\ 0,67 & 0 \\ 0 & 0,44 \\ 0 & 0,12 \\ 0 & 0,44 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

PHỤ LỤC

Phụ lục gồm 31 chương trình tính ma trận và tính kết cấu theo ngôn ngữ TURBO PASCAL 7.0.

- CT1: Tính tổng ma trận.
- CT2: Tính tích ma trận.
- CT3: Tính ma trận chuyển vị.
- CT4: Đưa ma trận bất kỳ về dạng tam giác theo phương pháp Gauss.
- CT5: Đưa ma trận đối xứng về dạng tam giác theo phương pháp Gauss.
- CT6: Giải hệ phương trình tuyến tính bất kỳ theo phương pháp Gauss.
- CT7: Giải hệ phương trình tuyến tính kiểu ma trận đối xứng theo phương pháp Gauss.
- CT8: Giải hệ phương trình tuyến tính kiểu ma trận đối xứng theo phương pháp Gauss.
- CT9: Giải hệ phương trình tuyến tính kiểu ma trận đối xứng theo từng cột.
- CT10: Giải hệ phương trtình tuyến tính kiểu ma trận đối xứng có nhiều phần tử triệt tiêu.
- CT11: Tính định thức của ma trận bất kỳ.
- CT12: Tính định thức của ma trận đối xứng theo phương pháp Gauss.
- CT13: Tính nghịch đảo ma trận tam giác dưới.
- CT14: Tính nghịch đảo ma trận tam giác trên.
- CT15: Tính nghịch đảo ma trận đối xứng.
- CT16: Tính nghịch đảo ma trận theo phương pháp Gauss–Jordan.
- CT17: Tính nghịch đảo ma trận theo phương pháp chia khối.
- CT18: Phương pháp tính lặp giải hệ phương trình tuyến tính.
- CT19: Tính giá trị riêng lớn nhất theo phương pháp tính lặp.
- C20: Tính giá trị riêng bé nhất theo phương pháp tính lặp.
- CT21: Tính giàn phẳng.
- CT22: Tính giàn không gian.
- CT23: Tính dầm liên tục.

– CT24: Tính khung phẳng

– CT25: Tính hệ dầm trực giao.

– CT26: Tính dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi.

– CT27: Tính giàn phẳng chịu tác dụng của nhiệt độ.

– CT28: Tính giàn phẳng chế tạo không chính xác.

– CT29: Tính khung không có chuyển vị ngang theo phương pháp phân phối mô men.

– CT30: Tính khung có chuyển vị ngang theo phương pháp phân phối mô men.

– CT31: Tính khung theo phương pháp phân phối mô men đơn giản.

```
Program CT1_Tinh_tong_ma_tran;
 Uses crt;
Type
  Mang=array[1..10,1..10 ]of real;
 Var
   A,B,Tong:mang;
  i,j,m,n:integer;

 Procedure nhap (var T :mang; m ,n:integer;X,Y:integer);
    Var
      i,j:integer;
      Begin
        For i:= 1 to m do
         For j:=1 to n do
           Begin
             gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
             Readln (T[i,j]);
           End;
      End;
 Procedure DOCKQ (var MT:mang  ;m,n:integer);
  var
   i,j:integer;
     Begin
       For i:=1 to m do
         Begin
           For j:=1 to n do
           Write (MT[i,j]:6:2);
```

```
            Writeln;
          End;
      End;
Begin  Clrscr;
   Writeln ('nhap so hang');
   Readln (m);
   Writeln ('nhap so cot');
   Readln (n);
   Writeln ('nhap cac fan tu cua ma tran a');
   nhap (a, m, n,WhereX,WhereY);
   Writeln ('nhap cac fan tu cua ma tran b');
   nhap (b,m,n,WhereX,WhereY);
   Writeln ('Tinh tong ma tran');
    for i:=1 to m do
     For j:=1 to n do
       Tong[i,j]:=a[i,j]+b[i,j];
   Writeln ('tong ma tran la');
    DOCKQ (Tong, m,n);
  Readln;
End.
```

****

```
Program CT2_Tinh_tich_ma_tran;
 Uses crt;
Type
  Mang=array[1..30,1..30] of real ;
 Var
   A,B,Tich:mang;
  i,j,k,m,n,s:integer;

  Procedure nhap (var T :mang; u ,v :integer;X,Y:integer);
     Var
      i,j:integer;
      Begin
        For i:= 1 to u do
         For j:=1 to v do
           Begin
             gotoxy(X+5*(j-1),Y+(i-1));
             Readln (T[i,j]);
```

```
            End;
        End;
  Procedure DOCKQ (var MT:mang  ; u,v:integer);
   var
    i,j:integer;
      Begin
        For i:=1 to u do
          Begin
            For j:=1 to v do
            Write (MT[i,j]:8);
            Writeln;
          End;
      End;
Begin  Clrscr;
    Writeln ('nhap so hang cua a ');
    Readln (m);
    Writeln ( 'nhap so cot cua a ');
    Readln (n);
    Writeln ('nhap cac fan tu cua ma tran a');
    nhap (a, m, n,WhereX,WhereY);
    Writeln ('nhap so hang cua b');
    Readln (n);
    Writeln ('nhap so cot cua b');
    Readln (s);
    Writeln ('nhap cac fan tu cua ma tran b');
    nhap (b,n ,s ,WhereX,WhereY);
    Writeln ('Tinh tich ma tran');
     for i:=1 to m  do
      For j:=1 to s do
        Begin
          Tich[i,j]:=0;
          For k:=1 to n do
          Tich [i,j]:=Tich[i,j ] + a[i ,k]*b[k,j];
        End;
 Writeln ('tich ma tran la');
    DOCKQ (Tich , m,s );
  Readln;
End.
```

****

```
Program CT3_Tinh_ma_tran_chuyen_vi;
 Uses crt;
Type
  Mang=array[1..10,1..10 ] of real;
 Var
   A,B:mang;
  i,j,m,n:integer;
 Procedure nhap (var P:mang; m ,n:integer;X,Y:integer);
     Var
      i,j:integer;
      Begin
        For i:= 1 to m do
         For j:=1 to n do
           Begin
             gotoxy(X+7*(j-1),Y+(i-1));
             Readln (P[i,j]);
           End;
      End;
  Procedure DOCKQ (var MT:mang  ;m,n:integer);
   var
    i,j:integer;
      Begin
        For i:=1 to m do
          Begin
             For j:=1 to n do
            Write (MT[i,j]:6:2);
            Writeln;
          End;
      End;

      {=============================================}
Begin
   Clrscr;
 Writeln ('so dong ma tran');
   Readln(m);
 Writeln('so cot ma tran');
   Readln(n);
 Writeln('nhap cac fan tu cua ma tran');
    Nhap(A,m,n,whereX,whereY);
     for i:=1 to n do
```

```
      for j:=1 to m do
      b[i,j]:=a[j,i];
  Writeln('ma tran chuyen vi la:');
    DOCKQ(b ,n ,m );
  Readln;
End.
```

****

```
Program CT4_Dua_ma_tran_bat_ky_ve_dang_tam_giac_theo_ff_Gauss;

 Uses crt;
Type
  Mang=array[1..10,1..10 ] of real ;
 Var
  A:mang;  i,j,k,n,s:integer; q:real ;
 Procedure nhap (var P:mang;  n :integer;X,Y:integer);
     var  i,j:integer;
       Begin
         For i:= 1 to n do
           For j:=1 to n do
             Begin
               gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
               Readln (P[i,j]);
             End;
       End;
  Procedure DOCKQ (var MT:mang;n:integer);
    var   i,j:integer;
    begin
      For i:=1 to n do
           Begin
             For j:=1 to n do
            Write (MT[i,j]:6:2);
             Writeln;
           End;
    end;
    {=============================================}
 Begin   (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
   Clrscr;
  Writeln ('nhap cap ma tran vuong');
```

```
 Readln(n);
Writeln('nhap cac fan tu cua ma tran');
  Nhap(A, n ,whereX,whereY);

 (*kiem tra a[i,i]=0 ?*);
  For i:=1 to n -1 do
    Begin
      if( a[i,i]=0)  then
        Begin
          for k:=i+1 to n do
            for j:=i to n do
             a[i,j]:=a[i,j]+a[k,j];
        End;
    End
(*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
    s:=0;
 REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
       q:=a[i,s]/a[s,s];
       a[i,s]:=0;
       for j:=s+1 to n do
       a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ;
      End
 UNTIL(s= n -1);

  Writeln ('ma tran tam giac la');
   DOCKQ (a, n);
  Readln;
End.
```

****

```
Program CT5_Dua_ma_tran_doi_xung_ve_dang_tam_giac_theo_ff_Gauss;

  Uses crt;
 Type
    Mang=array[1..10,1..10 ] of real ;
   Var
```

```
  A:mang;  i,j,k,n,s:integer; q:real ;
Procedure nhap (var P:mang;  n :integer;X,Y:integer);
    var  i,j:integer;
      Begin
        For i:= 1 to n do
         For j:=i to n do
          Begin
            gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
            Readln (P[i,j]);
          End;
      End;
 Procedure DOCKQ (var MT:mang;n:integer);
   var   i,j:integer;
   begin
    For i:=1 to n do
         Begin
           For j:=1 to n do
          Write (MT[i,j]:6:2);
          Writeln;
         End;
   end;
   {==========================================}
Begin   (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
  Clrscr;
 Writeln ('nhap cap ma tran vuong');
  Readln(n);
 Writeln('nhap cac fan tu cua ma tran');
  Nhap(A, n ,whereX,whereY);

 (*kiem tra a[i,i]=0 ?*);
  For i:=1 to n -1 do
    Begin
      if( a[i,i]=0)  then
        Begin
          for k:=i+1 to n do
           for j:=i to n do
            a[i,j]:=a[i,j]+a[k,j];
        End;
    End
```

```
(*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
   s:=0;
 REPEAT
   s:=s+1;
   for i:= s+1 to n do
     Begin
      if(a[s,s]<>0) then
      q:=a[s,i]/a[s,s];
       for j:=i to n do
       a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ;
     End
 UNTIL(s= n -1);

  Writeln ('ma tran tam giac la');
  DOCKQ (a, n);
  Readln;
End.
```

****

```
Program CT6_Giai_he_fuong_trinh_tuyen_tinh_bat_ky_theo_ff_Gauss:
 Uses crt;
Type
   Mang1=array[1..10,1..10 ]of real ; mang2=Array[1..10] of real;
  Var
    A:mang1 ;  B,X:mang2;
   i,j,k,n,s:integer;   q,r:real;
 Procedure nhap (var P: mang1 ; n:integer;X,Y:integer);
     Var
      i,j:integer;
      Begin
        For i:= 1 to n do
         For j:=1 to n do
           Begin
             gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
             Readln (P[i,j]);
           End;
      End;

      {==========================================}
```

```
Begin  (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
 Clrscr;
 Writeln ('nhap cap ma tran vuong');
  Readln(n);
Writeln('nhap fan tu cua ma tran');
  Nhap(A, n, whereX,whereY);
Writeln ('nhap  so hang tu do ');
  for i:=1 to n do  Readln(b[i]);

 (*kiem tra a[i,i]=0 ?*);

   For i:=1 to n-1 do
     Begin
     if a[i,i]=0 then
         Begin
          for J:=1 to n do
              for K:=i+1 to n do
         a[i,j]:=a[i,j]+a[k,j];
         End;
     End;
  (* khu dan cac an so*);
   s:=0;
  REPEAT
   s:=s+1;
   For i := s+1 to n do
     begin
       q:=a[i,s]/a[s,s];   a[i,s]:=0;
       for j :=s+1 to n do   a[i,j]:=a[i,j]- a[s,j]*q;
       b[i]:=b[i]-b[s]*q;
     end;
  UNTIL(s=n-1);

  (*tinh cac an so*);
    X[n]:=b[n]/a[n,n];
          for i:= n -1  downto 1 do
            Begin
              r :=0;
             for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*X[j];
             X[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
            End;
```

```
            for i:=1 to n do
            Writeln (X[i]:6:2);
Readln;
End.
```

****

```
Program CT7_Giai_he_FTTT_kieu_ma_tran_doi_xung_theo_ff_Gauss;

 Uses crt;
Type
  Mang1=array[1..10,1..10 ] of real ; mang2=array[1..10] of real:
 Var
  A:mang1; B,X:mang2;  i,j,k,n,s:integer; q,r:real ;
 Procedure nhap (var P:mang1;  n :integer;X,Y:integer);
    var   i,j:integer;
      Begin
        For i:= 1 to n do
         For j:=i to n do
           Begin
             gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
             Readln (P[i,j]);
           End;
      End;

   {=============================================}
 Begin   (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
   Clrscr;
  Writeln ('nhap cap ma tran vuong');
   Readln(n);
  Writeln('nhap cac fan tu cua ma tran a');
   Nhap(A, n ,whereX,whereY);
  Writeln('nhap cac so hang tu do');
  for i:=1 to n do
  readln(b[i]);

   (*kiem tra a[i,i]=0 ?*);
    For i:=1 to n -1 do
      Begin
        if( a[i,i]=0)  then
```

```
      Begin
        for k:=i+1 to n do
         for j:=i to n do
          a[i,j]:=a[i,j]+a[k,j];
      End;
   End

(*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
   s:=0;
REPEAT
   s:=s+1;
   for i:= s+1 to n do
     Begin
      if(a[s,s]<>0) then
      q:=a[s,i]/a[s,s];
       for j:=i to n do
      a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
     End
UNTIL(s= n -1);
x[n]:=b[n]/a[n,n];
for i:= n -1  downto 1 do
   Begin
      r :=0;
      for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
      if(a[i,i]<>0) then
      x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
   End;

Writeln ('gia tri an so la');
for i:=1 to n do
writeln(x[i]);
readln;
 End.
```

****

```
Program CT8_Giai_he_FTTT_kieu_ma_tran_dai_doi_xung_theo_ff_Gauss;

 Uses crt;
Type
  Mang1=array[1..10,1..10 ] of real ; mang2=array[1..10] of real;
```

```
 Var
  A,B:mang1; c,u:mang2;  i,j,k,n,m,s,nbw,nbk:integer; q,r,t:real ;
Procedure nhap (var P:mang1 ;m,n :integer;X,Y:integer);
    var   i,j:integer;
      Begin
       For i:= 1 to m do
        For j:=1 to n do
              Begin
               gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
               Readln (P[i,j]);
              End;
     end;
   {=============================================}
Begin   (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
  Clrscr;
  Writeln('nhap be rong dai');
   Readln(nbw);
  Writeln ('nhap so cot ma tran B ');
   Readln(n);
 Writeln('nhap so hang ma tran B');
   Readln(m);
   Writeln('nhap cac fan tu cua ma tran B');
    Nhap(B,m,n,whereX,whereY);
   writeln ('nhap so hang tu do');
   for i:=1 to m do
   readln (c[i]);

   (*kiem tra a[i,i]=0 ?*);
    For i:=1 to n -1 do
      Begin
        if( a[i,i]=0)  then
          Begin
            for k:=i+1 to n do
              for j:=i to n do
                a[i,j]:=a[i,j]+a[k,j];
          End;
     End

(*chuyen cac fan tu ma tran tu MTB sang MTA*);
     if(m -i+1> nbw) then nbk:=nbw  else nbk:= m-i+1;
```

```
    for i:=1 to m do
     for j:= i to m do
      a[i,j]:=b[i,j-i+1];

(*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
    s:=0;
 REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to s+nbk-1  do
      Begin
       if(a[s,s]<>0) then
       q:=a[s,i]/a[s,s];
       for j:=i to s+nbk-1  do
       a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ;  c[i]:=c[i]-c[s]*q;
      End;
   for i:=s+1 to m do a[i,s]:=0;
 UNTIL(s= m -1);

(*tinh cac an so*);
u[m]:=c[m]/a[m,m];
 for i:= m -1  downto m-nbw+1 do
    Begin
       r :=0;
       for j:= i+1  to m do r:=r+a[i,j]*u[j];
       if(a[i,i]<>0) then
       u[i]:= (c[i]-r)/ a[i,i];
    End;
 for i:=m -nbw downto 1 do
    begin
      t:=0;
      for j:= i+1 to i+nbw-1 do t:=t+a[i,j]*u[j];
     u[i]:=(c[i]-t)/a[i,i];
    end;

  writeln ('gia tri cac an la');
  for i:=1 to m do
  Writeln (u[i]:6:2);
  Readln;
End.
```

****

Program CT9_Giai_he_FTTT_kieu_ma_tran_doi_xung_theo_tung_cot;

```
 Uses crt;
Type
 Mang1=array[1..10,1..10 ] of real; mang2=array[1..10] of real;
 Var
   A:mang1;  B,X:mang2;  i,j,k,n,s:integer; q,r:real ;
 Procedure nhap (var P:mang1; n :integer;X,Y:integer);
     var   i,j:integer;
       Begin
         For i:= 1 to n do
           For j:=i to n do
             Begin
               gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
               Readln (P[i,j]);
             End;
       End;

  Procedure DOCKQ (var MT:mang1;n:integer);
    var    i,j:integer;
    begin
      For i:=1 to n do
           Begin
             For j:=1 to n do
             Write (MT[i,j]:6:2);
             Writeln;
           End;
    end;
    {=========================================}
 Begin    (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
    Clrscr;
   Writeln ('nhap cap ma tran vuong');
    Readln(n);
   Writeln('nhap cac fan tu cua ma tran');
     Nhap(A, n ,whereX,whereY);
     Writeln ('nhap  so hang tu do ');
    for i:=1 to n do  Readln (b[i]);

  (*kiem tra a[i,i]=0 ?*);
     For i:=1 to n -1 do
```

```
      Begin
        if( a[i,i]=0)  then
          Begin
            for k:=i+1 to n do
              for j:=i to n do
                a[i,j]:=a[i,j]+a[k,j];
          End;
     End

 (*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
    s:=0;
 REPEAT
    s:=s+1;
    for j:=2 to n do
     begin
       for i:= s+1 to j do
         Begin
         q:=a[s,i]/a[s,s];
         a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ;
         End
     end;
       for i:=s+1 to n do b[i]:=b[i]-b[s]*a[s,i]/a[s,s];
 UNTIL(s= n -1);

  (*tinh cac an so*);
 X[n]:=b[n]/a[n,n];
  for i:= n -1  downto 1 do
     Begin
        r :=0;
       for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*X[j];
       if(a[i,i]<>0) then
       X[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
     End;

  writeln ('gia tri cac an la');
  for i:=1 to n do
  Writeln (X[i]:6:2);
  Readln;
End.
```

****

Program CT10_Giai_he_FTTT_kieu_MT_doi_xung_co_nhieu_fan_tu_triet_tieu:

```
 Uses crt;
Type
 Mang1=array[1..10,1..10 ] of real; mang2=array[1..10] of real;
 mang3=array[1..10] of integer;
  Var
 A:mang1; B,X:mang2;  Z:mang3; i,j,k,n,s,p:integer; q,r:real;

Begin  (*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
 Clrscr;
writeln ('nhap cap ma tran vuong');
readln (n);
writeln ('Nhap so fan tu triet tieu trong moi cot');
  for j:=1 to n do
  readln (Z[j]);
writeln ('nhap cac fan tu ma tran');
for j:=1 to n do
  begin
     if(Z[j]=0) then
       begin
          for i:=1 to j do
          readln (A[i,j])
       end;
     if (Z[j]<>0) then
       begin
          p:=Z[j]+1;
          for i:= p to j do
          readln (A[i,j]);
       end;
  end;
 writeln ('nhap cac so hang tu do');
  for i:=1 to n do
  readln (B[i]);

  (*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
      s:=0;
  REPEAT
      s:=s+1;
      for j:=2 to n do
```

```
    begin
     for i:= s+1 to j do
       Begin
       q:=a[s,i]/a[s,s];
       a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ;
       End
    end;
     for i:=s+1 to n do b[i]:=b[i]-b[s]*a[s,i]/a[s,s];
UNTIL(s= n -1);

(*tinh cac an so*);
X[n]:=b[n]/a[n,n];
 for i:= n -1  downto 1 do
    Begin
      r :=0;
      for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*X[j];
      if(a[i,i]<>0) then
      X[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
    End;

  writeln ('gia tri cac an la');
  for i:=1 to n do
  Writeln (X[i]:6:2);
  Readln;
End.
```

****

```
Program CT11_Tinh_dinh_thus_cua_ma_tran_bat_ky;
 Uses crt;
Type
   Mang=array[1..10,1..10] of real;
  Var
    A:mang; q,T: real;
   i,j,k,m, n,s,r :integer;
 Procedure nhap (var P:mang; m,n:integer; X,Y:integer);
      Var
        i,j:integer;
        Begin
          For i:= 1 to m do
```

```
        For j:=1 to n do
          Begin
            gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
            Readln (P[i,j]);
          End;
      End;
  {=============================================}

Begin  (*Nguoi lap trinh:Vo Nhu Cau*);
  Clrscr;
 Writeln ('so dong ma tran');
  Readln( m);
 Writeln('so cot ma tran');
  Readln(n);
 Writeln('nhap cac fan tu cua ma tran');
  Nhap(A,m, n,whereX,whereY);

  (* kiem tra a[i,i]=0 ?*);
   For i:=1 to m-1  do
    Begin
      If a[i,i]=0 then
        begin
          for k:=i+1 to m  do
          for j:=1 to n do
            a[i,j]:=a[i,j]+a[k,j];
        End;
    End;

   (* dua ve dang ma tran tam giac*);

        s:=0;
   REPEAT
       s :=s+1;
        for i:=s+1 to m do
          Begin
           q:=a[i,s]/a[s,s];
           a[i,s] :=0;
            for j:= s+1 to n do
           a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q;
          End;
```

```
  UNTIL (s=m-1);

     (*Tinh dinh thuc ma tran*);
       T:=1;
       for r:=1 to m do
        T:=T*a[r,r];

  Writeln('dinh thuc cua ma tran la:',T:6:2);
{       Writeln(T:6:2;}
 Readln;
End.
```

****

```
Program CT12_Tinh_dinh_thuc_cua_ma_tran_doi_xung_theo_ff_Gauss;

 Uses crt;
Type
  Mang=array[1..10,1..10 ] of real ;
 Var
  A:mang;  i,j,k,n,s,r:integer; q,t:real;
 Procedure nhap (var P:mang;  n :integer;X,Y:integer);
    var  i,j:integer;
      Begin
        For i:= 1 to n do
          For j:=i to n do
            Begin
              gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
              Readln (P[i,j]);
            End;
      End;
  Procedure DOCKQ (var MT:mang;n:integer);
   var   i,j:integer;
   begin
    For i:=1 to n do
          Begin
             For j:=1 to n do
            Write (MT[i,j]:6:2);
             Writeln;
          End;
```

```
  end;
  {=============================================}
Begin   (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
  Clrscr;
 Writeln ('nhap cap ma tran vuong');
  Readln(n);
 Writeln('nhap cac fan tu cua ma tran');
  Nhap(A, n ,whereX,whereY);

  (*kiem tra a[i,i]=0 ?*);
   For i:=1 to n -1 do
    Begin
      if( a[i,i]=0)  then
        Begin
          for k:=i+1 to n do
            for j:=i to n do
             a[i,j]:=a[i,j]+a[k,j];
        End;
    End

 (*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
    s:=0;
 REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
       if(a[s,s]<>0) then
       q:=a[s,i]/a[s,s];
        for j:=i to n do
        a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ;
      End
 UNTIL(s= n -1);

  (*Tinh dinh thuc ma tran*);
         T:=1;
         for r:=1 to n do
         T:=T*a[r,r];

  Writeln('dinh thuc cua ma tran la:');
  Writeln(T);
```

```
  Readln;
End.
```

****

```
Program CT13_Tinh_nghich_dao_ma_tran_tam_giac_duoi;
 Uses crt;
Type
  Mang=array[1..10,1..10 ] of real ;
 Var
   A,B:mang;   i,j,k,n :integer;  s:real;
 Procedure nhap (var P:mang;  n:integer; X,Y:integer);
     Var
      i,j:integer;
      Begin
        For i:= 1 to n  do
          For j:=1 to i do
            Begin
              gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
              Readln (P[i,j]);
            End;
      End;
 Procedure DOCKQ (var MT:mang;n:integer);
  var
   i,j:integer;
     Begin
       For i:=1 to n  do
          Begin
             For j:=1 to n do
            Write (MT[i,j]:6:2);
             Writeln;
          End;
     End;

      {=================================================}
Begin   (*Nguoi lap trinh:Vo Nhu Cau*);
   Clrscr;
 Writeln ('nhap cap ma tran vuong');
  Readln(n);
 Writeln('nhap  fan tu  ma tran');
```

```
   Nhap(A, n, whereX, whereY);

  if(i<j) then  b[i,j]:=0;
   for i:=1 to n do   b[i,i]:=1/a[i,i];
   for i:=2 to n do
     for j:=1 to i-1 do
        Begin    s:=0;
         for k:=j to i-1 do
         s:=s+a[i,k]*b[k,j];
         b[i,j]:=-s/ a[i,i];
        End;
  Writeln('nghich dao ma tran la:');
   DOCKQ (b,n);
 readln;
End.
```

****

```
Program CT14_Tinh_nghich_dao_ma_tran_tam_giac_tren;
 Uses crt;
Type
  Mang=array[1..10,1..10] of real;
 Var
   A,B;mang;
  i,j,k,n :integer; T:real;
 Procedure nhap (var P:mang; n:integer;X,Y:integer);
     Var
      i,j:integer;
      Begin
        For i:= 1 to n do
         For j:=i to n do
           Begin
             gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
             Readln (P[i,j]);
           End;
      End;
 Procedure DOCKQ (var MT:mang; n:integer);
  var
   i,j:integer;
     Begin
```

```
        For i:=1 to n do
          Begin
            For j:=1 to n do
            Write (MT[i,j]:6:2);
            Writeln;
          End;
      End;

      {==========================================}
Begin  (*Nguoi lap trinh:Vo Nhu Cau*);
   Clrscr;
 Writeln ('nhap cap ma tran vuong');
  Readln(n);
 Writeln('nhap fan tu ma tran');
   Nhap(A,n,whereX, whereY);

     if(i>j) then   b[i,j]:=0;
     for i:=1 to n do  b[i,i]:=1/a[i,i];
      for i:=n -1 downto 1 do
        for j:=n downto i+1 do
              Begin   T:=0;
                for k:=i+1 to j do
                 Begin
                  T:=T+a[i,k]*b[k,j];
                  b[i,j]:=-T/a[i,i];
                 End;
               End;
  Writeln('nghich dao ma tran la:');
    DOCKQ(b , n );
   readln;
End.

*******************

Program CT15_Tinh_nghich_dao_ma_tran_doi_xung;
 Uses crt;
Type
   Mang=array[1..10,1..10] of real;
  Var
    A,B,C,D,S :mang;
```

```
  i,j,k,l,n:integer;  x,q,t:real;
Procedure nhap(var P:mang; n:integer; X,Y:integer);
    Var
     i,j:integer;
     Begin
       For i:= 1 to n do
         For j:=i to n do
           Begin
             gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
             Readln (P[i,j]);
           End;
     End;
 Procedure DOCKQ (var MT:mang; n:integer);
  var
   i,j:integer;
     Begin
       For i:=1 to n do
         Begin
           For j:=1 to n do
           Write (MT[i,j]:6:2);
           Writeln;
         End;
     End;

Begin  (*Nguoi lap  trinh:Vo Nhu Cau*)
Clrscr;
Writeln('nhap cap ma tran vuong');
Readln(n);
Writeln('nhap  phan tu  ma tran');
Nhap(A, n,whereX,whereY);
if(j<i) then a[i,j]:=a[j,i];

(*Dua ve dang ma tran tam giac tren*);
{ if(i<j) then  s[i,j]:=0;}

 {Tinh cac S[1,j], j=1 -> n}
   s[1,1]:= sqrt(a[1,1]) ;
   for j:=2 to n do s[1,j]:= a[1,j]/s[1,1];

 {Vong lap tinh S[i,j] voi i>=2}
```

```
for i:=2 to n do
    for j:=i to n do
     Begin
       If (j=i) then
       {tinh S[i,i]}
         Begin
           x:=0;
          for k:=1 to i-1 do x:=x+sqr(s[k,i]);
          if((a[i,i]-x) >0) then
         s[i,i]:=sqrt(a[i,i]-x);
         end;
       If (j>i) then
       {tinh S[i,j]}
         Begin
           T:=0;
          for k:=1 to i-1 do {T:=0;} T:=T+S[k,i]*S[k,j];
          if(s[i,i]<>0) then
         S[i,j]:=(a[i,j]-T)/S[i,i];
         End;
     End;
{Voi j<i —> S[i,j]=0, b[i,j]=0}
   for i:=2 to n do
    for j:=1 to i-1 do
      begin
       s[i,j]:=0;
       b[i,j]:=0;
      end;
(* Tinh nghich dao cua ma tran tam giac tren S *)
  {if (i>j) then   b[i,j]:=0;}
  if(s[i,i]<>0) then
  for i:=1 to n do b[i,i]:=1/s[i,i];

  for i:=n -1 downto 1 do
  for j:=n downto i+1 do
    Begin
      q:=0;
     for k:= i+1 to j do q:=q+s[i,k]*b[k,j];
     if(s[i,i]<>0) then
     b[i,j]:=-q/S[i,i];
    End;
```

```
(*tinh chuyen vi cua ma tran nghich dao B*)
    For i:= 1  to n do
    For j :=1 to n do
      c[i,j]:= b[j,i];

(* Tich hai ma tran B va C*)
     for i:=1 to n do
     for j:=1 to n do
          Begin
            d[i,j]:=0;
            for k:=1 to n do
           d[i,j]:=d[i,j]+b[i,k]*c[k,j];
          End;

    Writeln('ngich dao  cua ma tran doi xung la');
     DOCKQ (d,n);
  Readln;
End.
```

****

```
Program CT16_Nghich_dao_MT_theo_ff_Gauss_Jordan;
 Uses crt;
Type
   Mang= array[1..10,1..10 ] of real ;
  Var
    A,u:mang;
   i,j,m,n,p :integer;  c:real;
 Procedure nhap (var P:mang ;  n:integer;X,Y:integer);
 Var    i,j:integer;
       Begin
         For i:= 1 to n do
          For j:=1 to n do
            Begin
              gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
              Readln (P[i,j]);
            End;
       End;
  Procedure DOCKQ (var MT:mang ; n:integer);
```

```
  var
   i,j:integer;
    Begin
     For i:=1 to n do
      For j:=1 to n do
     Write (MT[i,j]);
     Writeln;
    End;
     {==========================================}
Begin (*nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
   Clrscr;
 Writeln ('nhap cap ma tran vuong');
  Readln(n);
 Writeln('nhap cac fan tu cua ma tran A');
  Nhap(A,n,whereX,whereY);
 Writeln('nhap cac fan tu cua ma tran u');
  Nhap(u,n,whereX,whereY);

 REPEAT  p:=0;
 p:=p+1;
 if(a[p,p]<>0)then
   begin
      c:=1/a[p,p];
      for j:=1 to n do
        begin
         a[p,j]:=a[p,j]*c;  U[p,j]:=U[p,j]*c;
        end;
      for i:=1 to n do if(i<>p) then
         begin
          c:=a[i,p];
          for j:=1 to n do
           begin
            a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
            U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
           end;
         end;
    end;
 UNTIL(p=n);
  Writeln ('ma tran ngich dao la:');
  DOCKQ(u,n);
```

```
  Readln;
End.

*******************

Program CT17_Nghich_dao_ma_tran_theo_ff_chia_khoi;
 Uses crt;
Type
   Mang1 = array[1..10,1..10 ] of real ; mang2=array[1..10]of real;
  Var
    A,B:mang1;        G,H:mang2;
   i,j,k,n,p,s :integer;  c,D,E:real;
  Procedure nhap (var P:mang1 ;n:integer;X,Y:integer);
  Var    i,j:integer;
       Begin
         For i:= 1 to n do
          For j:=1 to n do
            Begin
              gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
              Readln (P[i,j]);
            End;
       End;
   Procedure DOCKQ (var MT:mang1 ;n:integer);
    var
     i,j:integer;
       Begin
         For i:=1 to n do
           Begin
              For j:=1 to n do
             Write (MT[i,j]:6:2);
              Writeln;
           End;
       End;

  Begin  (* Nguoi lap trinh:Vo Nhu Cau*);
   Clrscr;
   Writeln ('nhap cap ma tran vuong');
    Readln(n);
   Writeln('nhap fan tu cua ma tran');
     Nhap(A,n,whereX, whereY);
```

```
  if(a[1,1]<>0) then
  c:=1/a[1,1];
 b[2,2]:=1/(a[2,2]-a[2,1]*c*a[1,2]);
 b[1,2]:=-c*a[1,2]*b[2,2];
 b[2,1]:=- b[2,2]*a[2,1]*c;
 b[1,1]:=c- c*a[1,2]*b[2,1];
 for i:=1 to 2 do  for j:=1 to 2 do  a[i,j]:=b[i,j];

REPEAT
   p:=2;
   For i:=1 to p  do;
      Begin
        k:=p+1;  G[i]:=0;
        for j:=1 to p do   G[i]:=G[i]+a[i,j]*a[j,k];
      End;
  for j:=1 to p do
     begin
       H[j]:=0;
       for s:=1 to p do    H[j]:=H[j]+a[k,s]*a[s,j];
     end;
  D:=0; for i:=1 to p do D:=D+a[k,i]*G[i]; E:=a[k,k]-D; a[k,k]:=1/E;
  for i:=1 to p do    a[i,k]:=-G[i]*a[k,k];
  for j:=1 to p do    a[k,j]:=-a[k,k]*H[j];
  for i:=1 to p do
    for j:=1 to p do
     a[i,j]:=a[i,j]-G[i]*a[k,j];
 UNTIL(p=n-1);

 Writeln('ma tran nghich dao la:');
  DOCKQ(a,n);
  Readln;
End.

*******************

Program CT18_Fuong_fap_tinh_lap_giai_he_fuong_trinh_tuyen_tinh;
 Uses crt;
Type
   Mang1 = array[1.. 20,1.. 20 ] of real; mang2=array[1..20]of real;
```

```
Var
  A,B,D,U,S:mang1 ; C,bien:mang2;
  i,j,k,n,p :integer;
Procedure nhap (var P:mang1; n:integer;X,Y:integer);
Var    i,j:integer;
     Begin
       For i:= 1 to n do
         For j:=1 to n do
           Begin
             gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
             Readln (P[i,j]);
           End;
     End;

begin  (*nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
Clrscr;
writeln('nhap cap ma tran vuong');
readln(n);
writeln('nhap fan tu ma tran A');
Nhap (a,n,whereX, whereY);
writeln ('nhap fan tu ma tran don vi');
Nhap (U,n,whereX, whereY);
writeln('nhap so hang tu do');
for i:=1 to n do
readln (C[i]);
writeln('so vong dau tien');
readln(k);
writeln ('gia tri bien ban dau');
for i:=1 to n do
readln(S[i,k]);

for i:= 1 to n do
  for j:=1 to n do
  b[i,j]:=U[i,j]-A[i,j];
   k:=0;
 Repeat
   k:=k+1;
   for i:=1 to n do
     begin
       D[i,k]:=0;  for p:=1 to n do
```

```
      D[i,k] :=D[i,k]+B[i,p]*S[p,k];
    end;
      for i:=1 to n do
      S[i,k+1]:=D[i,k]+C[i];
 Until(abs(S[n,k+1]-S[n,k]) <0.0001);
      for i:=1 to n do
      bien[i]:=S[i,k+1];

 writeln('gia tri bien la:');
 for i:=1 to n do
 writeln(bien[i]:6:4);
 readln;
End.
```

****

```
Program CT19_Timh_gia_tri_rieng_lon_nhat_theo_ff_tinh_lap;
Uses crt;
Type  mang1=Array [1..20 ,1..20] of real; mang2= array[1..20] of real;
Var i,j,k,n,p:integer; VTR,Y:mang2;
  A,B,X:mang1;   GTR:real;

  Procedure nhap (var P:mang1; n:integer;X,Y:integer);
  Var    i,j:integer;
      Begin
        For i:= 1 to n do
         For j:=1 to n do
           Begin
             gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
             Readln (P[i,j]);
           End;
      End;

Begin  (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
  clrscr;
  writeln ('nhap cap ma tran vuong');
  readln(n);
  writeln('nhap fan tu ma tran');
   Nhap(a,n,whereX,whereY);
  writeln('nhap so thu tu vong dau tien');
```

```
 readln(k);
 writeln ('nhap vecto rieng dau tien');
    for i:=1 to n do
     Readln (X[i,k]) ;

(*Qua trinh tinh lap de xac dinh gia tri rieng va vecto rieng*);
 REPEAT  k:=0;
       k:=k+1;
       for i:=1 to n do
         begin
          B[i,k]:=0;
          for p:=1 to n do
          B[i,k]:=B[i,k]+A[i,p] * X[p,k];
         end;
       if (X[1,k]<>0) then Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
       for i:=1 to n do
        begin
         if(Y[k]<>0) then
         X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
        end;
  UNTIL (abs(Y[k]-Y[k-1])<0.001);
  for i:=1 to n do    VTR[i]:=X[i,k+1];
       GTR:=Y[k];

  writeln('vecto rieng  la');
     for i:=1 to n do
     writeln(VTR[i]:8:4);
     writeln('gia tri rieng lon nhat la');
     writeln(GTR:8:4);
 Readln;
 End.

*******************

 Program CT20_Tinh_gia_tri_rieng_be_nhat_theo_ff_tinh_lap;
  Uses crt;
 Type
    Mang1 = array[1..20,1..20] of real ;
    mang2=array[1..20]of real;
     Var
```

```
  A,B,U,X:mang1;  vtr,Y:mang2;
  i,j,k,n,p :integer;  GTR,c:real;
Procedure nhap (var T :mang1; n:integer;X,Y:integer);
    Var
     i,j:integer;
     Begin
       For i:= 1 to n do
        For j:=1 to n do
         Begin
           gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
           Readln (T[i,j]);
         End;
     End;

Begin  (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
   Clrscr;
 Writeln ('cap ma tran vuong');
  Readln(n);
 Writeln('nhap cac fan tu cua ma tran A');
  nhap(a,n,whereX,whereY);
  for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
  begin
  if(i=j) then u[i,j]:=1;
  if(i<>j) then u[i,j]:=0;
  end;
 writeln('nhap so thu tu vong dau tien');
  readln(k);
 writeln ('nhap vecto rieng dau tien');
  for i:=1 to n do
  Readln (X[i,k]) ;

(*Tinh nghich dao cua ma tran A theo ff. Gauss-Jordan*);
 p:=0;
 REPEAT
 p:=p+1;
 if(a[p,p]<>0)then
    begin
       c:=1/a[p,p];
       for j:=1 to n do
```

```
        begin
         a[p,j]:=a[p,j]*c;  U[p,j]:=U[p,j]*c;
        end;
      for i:=1 to n do if(i<>p) then
         begin
           c:=a[i,p];
           for j:=1 to n do
            begin
             a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
              U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
            end;
         end;
    end;
UNTIL(p=n);

(*Tinh gia tri rieng lon nhat cua ma tran nghich dao*);
      k:=0;
  REPEAT
      k:=k+1;
      for i:=1 to n do
        begin
         B[i,k]:=0;
         for p:=1 to n do
         B[i,k]:=B[i,k]+U[i,p] * X[p,k];
        end;
      if (X[1,k]<>0) then
      Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
      for i:=1 to n do
       begin
        if(Y[k]<>0) then
        X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
       end;
  UNTIL (abs(Y[k]-Y[k-1])<0.001);

  for i:=1 to n do    VTR[i]:=X[i,k+1];
       GTR:=Y[k];
  writeln('vecto rieng la');
     for i:=1 to n do
     writeln (VTR[i]:8:4);
     writeln('gia tri rieng be nhat cua ma tran goc la');
```

```
    writeln(GTR:8:4);
 Readln;
end.


*******************

Program CT21_Tinh_gian_phang;
 uses crt;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr:integer;
e,a,cd,b,c,d,f,qq,fl,ld,l,m,eal:array[1..10] of real;
n1,n2,d1,d2,d3,d4:array[1..10]of integer;
s,sc,sr,ke :array[1..20,1..20] of real; q,r:real;

begin (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
clrscr;
writeln('nhap so nut');
readln(sn);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln ('nhap so BTD co chuyen vi');
readln (sbt);
writeln('nhap ngoai luc');
for i :=1 to sbt do
readln(f[i]);
writeln('nhap cosin dh l'); for i:=1 to st do  readln(l[i]);
writeln('nhap cosin dh m'); for i:=1 to st do readln(m[i]);
writeln('nhap dac trung co hoc EA/L'); for i:=1 to st do readln(eal[i]);
writeln('nhap thu tu bac tu do d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap thu tu bac tu do d2');  for i:=1 to st do   readln(d2[i]);
writeln('nhap thu tu bac tu do d3'); for i:=1 to st do   readln(d3[i]);
writeln('nhap thu tu bac tu do d4');  for i:=1 to st do   readln(d4[i]);

(* Lap cac matran do cung rieng*);
for i:=1 to st do
begin
  b[i]:=sqr(l[i])*eal[i];   c[i]:=l[i]*m[i]*eal[i];
  d[i]:=sqr(m[i])*eal[i];
end;
for i:=1 to st do
```

```
begin
  ke[d1[i],d1[i]]:=ke[d1[i],d1[i]]+b[i];
  ke[d1[i],d2[i]]:=ke[d1[i],d2[i]]+c[i];
  ke[d2[i],d2[i]]:=ke[d2[i],d2[i]]+d[i];
  ke[d1[i],d3[i]]:= ke[d1[i],d3[i]]-b[i];
  ke[d2[i],d3[i]]:= ke[d2[i],d3[i]]-c[i];
  ke[d3[i],d3[i]]:= ke[d3[i],d3[i]]+b[i];
  ke[d1[i],d4[i]]:=ke[d1[i],d4[i]]-c[i];
  ke[d2[i],d4[i]]:=ke[d2[i],d4[i]]-d[i];
  ke[d3[i],d4[i]]:=ke[d3[i],d4[i]]+c[i];
  ke[d4[i],d4[i]]:=ke[d4[i],d4[i]]+d[i];
end

(* Lap ma tran do cung tong the*);
tbt:=2*sn;
for i:=1 to tbt do
for j:=i to tbt do     s[i,j]:=ke[i,j];
for i:=1 to tbt do
for j:= 1 to i-1 do     s[i,j]:=s[j,i];

(*Chia khoi ma tran*);
for i := 1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
 sc[i,j]:=s[i,j];

(*Giai he fuong trinh theo fuong fap Gauss*);
    ss:=0;
 REPEAT
    ss:=ss+1;
    for i:= ss+1 to sbt do
      Begin
       if(sc[ss,ss]<>0) then
      q:=sc[ss,i]/sc[ss,ss];
       for j:=i to sbt do
      sc[i,j]:= sc[i,j]-sc[ss,j]*q; f[i]:=f[i]-f[ss]*q;
      End
 UNTIL(ss= sbt -1);
if(sc[sbt,sbt]<>0) then
qq[sbt]:=f[sbt]/sc[sbt,sbt];
 for i:= sbt -1  downto 1 do
```

```
    Begin
      r :=0;
      for j:= sbt  downto i+1 do r:=r+sc[i,j]*qq[j];
      if(sc[i,i]<>0) then
      qq[i]:= (f[i]-r)/ sc[i,i];
    End;

(*Tinh fan luc*);
rr:=sbt+1;
for j:=1 to sbt do
for i:=rr to tbt do    sr[i,j]:=s[i,j];
for i:= rr to tbt do
begin
 fl[i]:=0; for k:=1 to sbt do  fl[i]:= fl[i]+sr[i,k]*qq[k];
end;

(*Tinh luc doc*);
for i:=1 to st do
ld[i]:=cal[i]*(l[i]*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]])+m[i]*(qq[d4[i]]-qq[d2[i]]));

writeln ('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('gia tri luc doc la');
for i:=1 to st do
writeln(ld[i]);
writeln ('gia tri fan luc');
for i:=rr to tbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(fl[i]);
readln;
end.

*******************

Program CT22_Tinh_gian_khong_gian;
 uses crt;
Var i,j, k,sn,st,sbn,sbt,tbt,ss,rr:integer;
 x1,x2,y1,y2,z1,z2,md,cd,a,b,c,d,x,y,f,qq,fl,ld,l,m,n,cal:array[1..10] of real;
 d1,d2,d3,d4,d5,d6:array[1..10]of integer;
```

```
s,sc,sr,ke:array[1..30,1..30] of real; q,r:real;

begin (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
clrscr;
writeln('nhap so nut');
readln(sn);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln ('nhap so BTD co chuyen vi');
readln (sbt);
writeln('nhap ngoai luc');
for i :=1 to sbt do
readln(f[i]);
writeln('nhap cosin dh l'); for i:=1 to st do  readln(l[i]);
writeln('nhap cosin dh m'); for i:=1 to st do  readln(m[i]);
writeln('nhap cosin dh n'); for i:=1 to st do readln(n[i]);
writeln('nhap dac trung co hoc EA/L'); for i:=1 to st do readln(eal[i]);
writeln('nhap thu tu bac tu do');
writeln('nhap  d1[i]');  for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap  d2[i]');  for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap  d3[i]');  for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap  d4[i]');  for i:=1 to st do readln(d4[i]);
writeln('nhap  d5[i]');  for i:=1 to st do readln(d5[i]);
writeln('nhap  d6[i]');  for i:=1 to st do readln(d6[i]);

(*Lap cac ma tran do cung rieng*);
for i:=1 to st do
begin
 a[i]:=sqr(l[i])*eal[i];   b[i]:=l[i]*m[i]*eal[i];
 c[i]:=l[i]*n[i]*eal[i];   d[i]:=sqr(m[i])*eal[i];
 x[i]:=m[i]*n[i]*eal[i];   y[i]:=sqr(n[i])*eal[i];
end;
for i:=1 to st do
begin
 ke[d1[i],d1[i]]:=ke[d1[i],d1[i]]+a[i];
 ke[d1[i],d2[i]]:=ke[d1[i],d2[i]]+b[i];
 ke[d2[i],d2[i]]:=ke[d2[i],d2[i]]+d[i];
 ke[d1[i],d3[i]]:=ke[d1[i],d3[i]]+c[i];
 ke[d2[i],d3[i]]:=ke[d2[i],d3[i]]+x[i];
 ke[d3[i],d3[i]]:=ke[d3[i],d3[i]]+y[i];
```

```
ke[d1[i],d4[i]]:=ke[d1[i],d4[i]]-a[i];
ke[d2[i],d4[i]]:=ke[d2[i],d4[i]]-b[i];
ke[d3[i],d4[i]]:=ke[d3[i],d4[i]]-c[i];
ke[d4[i],d4[i]]:=ke[d4[i],d4[i]]+a[i];
ke[d1[i],d5[i]]:=ke[d1[i],d5[i]]-b[i];
ke[d2[i],d5[i]]:=ke[d2[i],d5[i]]-d[i];
ke[d3[i],d5[i]]:=ke[d3[i],d5[i]]-x[i];
ke[d4[i],d5[i]]:=ke[d4[i],d5[i]]+b[i];
ke[d5[i],d5[i]]:=ke[d5[i],d5[i]]+d[i];
ke[d1[i],d6[i]]:=ke[d1[i],d6[i]]-c[i];
ke[d2[i],d6[i]]:=ke[d2[i],d6[i]]-x[i];
ke[d3[i],d6[i]]:=ke[d3[i],d6[i]]-y[i];
ke[d4[i],d6[i]]:=ke[d4[i],d6[i]]+c[i];
ke[d5[i],d6[i]]:=ke[d5[i],d6[i]]+x[i];
ke[d6[i],d6[i]]:=ke[d6[i],d6[i]]+y[i];
end;

(*Lap ma tran do cung tong the*);
tbt:=3*sn;
for i:=1 to tbt do
for j:=i to tbt do      s[i,j]:=ke[i,j];
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do      s[i,j]:=s[j,i];

(*Chia khoi ma tran*);
for i := 1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
 sc[i,j]:=s[i,j];

(*Giai he fuong trinh theo fuong fap Gauss*);
    ss:=0;
 REPEAT
    ss:=ss+1;
    for i:= ss+1 to sbt do
      Begin
       if(sc[ss,ss]<>0) then
       q:=sc[ss,i]/sc[ss,ss];
        for j:=i to sbt do
      sc[i,j]:= sc[i,j]-sc[ss,j]*q; f[i]:=f[i]-f[ss]*q;
      End
```

```
UNTIL(ss= sbt -1);
if (sc[sbt,sbt]<>0) then qq[sbt]:=f[sbt]/sc[sbt,sbt];
for i:= sbt -1  downto 1 do
    Begin
      r :=0;
      for j:= sbt  downto i+1 do r:=r+sc[i,j]*qq[j];
      if(sc[i,i]<>0) then
     qq[i]:= (f[i]-r)/ sc[i,i];
    End;

(*Tinh fan luc*);
 rr:=sbt+1;
 for j:=1 to sbt do
for i:=rr to tbt do    sr[i,j]:=s[i,j];
for j:= 1 to sbt do
begin
 fl[i]:=0; for k:=1 to sbt do  fl[i]:= fl[i]+sr[i,k]*qq[k];
end;

(*Tinh luc doc*);
for i :=1 to st do
 ld[i]:=cal[i]*(l[i]*(qq[d4[i]]-qq[d1[i]])+m[i]*(qq[d5[i]]-qq[d2[i]])+n[i]*(qq[d6[i]]-
qq[d3[i]]));

 writeln ('gia tri chuyen vi');
 for i :=1 to sbt do
 writeln (qq[i]);
 writeln ('gia tri luc doc');
 for i :=1 to st do
 writeln (ld[i]);
 writeln ('gia tri fan luc');
 for i:= rr to tbt do
 for j:=1 to sbt do
 writeln (fl[i]);
readln;
end.

*******************
```

```
Program CT23_Tinh_dam_lien_tuc_goi_tua_thong_thuong;
uses crt;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,z,w:integer;
a1,b1,p,q1,e,f,fc,mq,qq,fl,l,m,m1,m2,cd,cd3,dt:array[1..10] of real;
c1,c2,c3,lc1,lc2,m1x,m2x,m1y,m2y,m1z,m2z,l1x,l2x,l1y,l2y,l1z,l2z:
array[1..10] of real;
el,el1,el2,el3,mb1,mb2,ma,la,lb1,lb2,z1,z2,z3:array[1..10] of real;
n1,n2,a,b,c,d,d1,d2,k1,k2,k3,k4:array[1..10]of integer;
s,sc:array[1..20,1..20] of real; q,r:real;

begin  clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so nut');
readln(sn);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap so bac tu do khong co chuyen vi');
readln(w);
writeln('nhap so  thu tu bac tu do khong co chuyen vi');
readln(d[i]);
writeln('nhap chieu dai thanh');
for i :=1 to st do  readln(cd[i]);
writeln('nhap cosin dinh huong l');
for i :=1 to st do  readln(l[i]);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln (x);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(y);
writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(z);
if(x<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (a[i]);
writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (q1[i]);
```

```
end;
if (y<>0)then
begin
 writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
 for i:=1 to y do     readln (b[i]);
 writeln('nhap tai trong tap trung');
 for i:= 1 to y do  readln (p[i]);
 writeln('nhap a1');
 for i:= 1 to y do  readln (a1[i]);
 writeln('nhap b1');
 for i:= 1 to y do readln (b1[i]);
end;
if (z<>0)then
 begin
 writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
 for i:=1 to z do
 readln(c[i]);
 end;
writeln('nhap mo dun dan hoi');  for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh');  for i:=1 to st do readln(mq[i]);
writeln('nhap BTD d1');  for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2 ');  for i:=1 to st do readln(d2[i]);

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
 if(cd[i]<>0) then
 begin
 for i:=1 to st do
 begin
  c1[i]:=4*e[i]*mq[i]/cd[i];
  c2[i]:=2*e[i]*mq[i]/cd[i];
  s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
  s[d2[i],d1[i]]:=s[d2[i],d1[i]]+c2[i];
  s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c1[i];
end;
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=i to sbt do    sc[i,j]:=s[i,j];
```

```
(*Tinh cac thanh fan tai trong o trang thai ngam*);
 if (x<>0)then
 begin
  for i:=1 to x do
  begin
 el[i]:=cd[a[i]]; k1[i]:=d1[a[i]]; k2[i]:=d2[a[i]];
 ma[i]:=(q1[i]*sqr(el[i])/12)*l[a[i]];
  end;
  for i:=1 to x do
  begin
 f[k1[i]]:=f[k1[i]]-ma[i];
 f[k2[i]]:=f[k2[i]]+ma[i];
  end;
 end;
if (y<>0) then
begin
  for i:=1 to y do
  begin
 k3[i]:=d1[b[i]]; k4[i]:=d2[b[i]];  el1[i]:=cd[b[i]];
 mb1[i]:=(p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(el1[i]))*l[b[i]];
 mb2[i]:= (p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(el1[i]))*l[b[i]];
  end;
  for i:=1 to y do
  begin
 f[k3[i]]:=f[k3[i]]-mb1[i];
 f[k4[i]]:=f[k4[i]]+mb2[i]
  end;
end;
for i:=1 to sbt do    fc[i]:=f[i];

(*Giai he fuong trinh bang fuong fap Gauss*);
    ss:=0;
 REPEAT
    ss:=ss+1;
    for i:= ss+1 to sbt do
      Begin
       if(s[ss,ss]<>0) then
       q:=s[ss,i]/s[ss,ss];
        for j:=i to sbt do
      s[i,j]:= s[i,j]-s[ss,j]*q; f[i]:=f[i]-f[ss]*q;
```

```
    End
UNTIL(ss= sbt -1);
if(s[sbt,sbt]<>0) then
qq[sbt]:=f[sbt]/s[sbt,sbt];
 for i:= sbt -1  downto 1 do
    Begin
       r :=0;
       for j:= sbt  downto i+1 do r:=r+s[i,j]*qq[j];
       if(s[i,i]<>0) then
       qq[i]:= (f[i]-r)/ s[i,i];
    End;
for i:=1 to w do     qq[d[i]]:=0;

(*Tinh mo men*);
if(cd[i]<>0) then
begin
for i:=1 to st do
begin
z1[i]:=(e[i]*mq[i]/cd[i])*(4*qq[d1[i]]+2*qq[d2[i]]);
z2[i]:=(e[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq[d1[i]]+4*qq[d2[i]]);
m1[i]:=z1[i];
m2[i]:=z2[i];
end;
end;
(*tinh tong mo men*);
if (x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
begin
 m1x[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
 m2x[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
begin  if(sqr(el1[i])<>0) then
  m1y[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
  m2y[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
end;
```

```
end;
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
begin
m1z[i]:=m1[c[i]];    m2z[i]:=m2[c[i]];
end;
end;

(*tinh luc cat*);
for i :=1 to st do
begin
z3[i]:=6*e[i]*mq[i]*(qq[d1[i]]+qq[d2[i]])/sqr(cd[i]);
if (sqr(cd[i])<>0) then
lc1[i]:=-z3[i];  lc2[i]:=-lc1[i];
end;
(*tinh tong luc cat*);
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
begin
la[i]:=q1[i]*cd[a[i]]/2;
l1x[i]:=lc1[a[i]]-la[i];;
l2x[i]:=lc2[a[i]]-la[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
 for i :=1 to y do
  begin
  cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; if (cd3[i]<>0) then
    begin
   lb1[i]:=(p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i]))/cd3[i];
   lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
    end;
   l1y[i]:= lc1[b[i]]-lb1[i];
   l2y[i]:= lc2[b[i]]-lb2[i];
  end;
end;
if(z<>0) then
```

```
begin
for i:=1 to z do
begin
l1z[i]:=lc1[c[i]];     l2z[i]:=lc2[c[i]];
end;
end;

writeln('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri mo men x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (m1x[i],m2x[i]);
end;
writeln('gia tri mo men y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (m1y[i],m2y[i]);
end;
writeln('gia tri mo men z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (m1z[i],m2z[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (l1x[i],l2x[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (l1y[i],l2y[i]);
end;
```

```
writeln('gia tri luc cat z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (l1z[i],l2z[i]);
end;
readln;
end.
```

****

```
Program CT24_Tinh_khung_phang;
 uses crt;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,w,z:integer;
 a1,b1,p,q1,c,dt,f,fn,mq,qq,fl,l,m,m1,m2,m1q,m2q,m1p,m2p:
 array[1..10] of real;
 c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,cd,cd3,cd4,el1,el2,g1,g2,g3,g4,ma,la,mb1,mb2,lb1,
 lb2,l1w,l2w,m1w,m2w:array[1..10] of real;
 lc1,lc2,l1q,l2q,l1p,l2p,u,v,z1,z2,z3,qq1,qq2,qq3,qq4,qq5,qq6:
 array[1..10] of real;
 d1,d2,d3,d4,d5,d6,a,b,c,d,x1,x2,x3,x4,x5,x6,y1,y2,y3,y4,y5,y6:
 array[1..10] of integer;
 s,sc:array[1..20,1..20] of real; q,r:real;

 begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
 writeln('nhap so nut');
 readln(sn);
 writeln('so thanh');
 readln(st);
 writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
 readln(sbt);
 writeln('nhap so BTD khong co chuyen vi');
 readln(z);
 writeln('nhap so so thu tu BTD khong co chuyen vi');
 for i :=1 to z do
 readln(d[i]);
 writeln('nhap tong so bac tu do');
 readln(tbt);
 writeln('nhap  cosin dh l');
```

```
for i :=1 to st do  readln(l[i]);
writeln('nhap cosin dh m');
for i :=1 to st do  readln(m[i]);
writeln('btd d1'); for i :=1 to st do  readln(d1[i]);
writeln('btd d2'); for i :=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('btd d3'); for i :=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('btd d4'); for i :=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln('btd d5'); for i :=1 to st do  readln(d5[i]);
writeln('btd d6'); for i :=1 to st do  readln(d6[i]);
writeln('nhap chieu dai thanh');
for i:=1 to st do  readln(cd[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh');
for i:=1 to st do  readln(mq[i]);
writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to sbt do
readln (fn[i]);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln (x);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(y);
writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(w);
if(x<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (a[i]);
writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (q1[i]);
end;
if (y<>0)then
begin
 writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
 for i:=1 to y do
 readln (b[i]);
```

```
 writeln('nhap tai trong tap trung');
 for i:=1 to y do
 readln (p[i]);
 writeln('nhap a1');
 for i:=1 to y do
 readln (a1[i]);
 writeln('nhap b1');
 for i:=1 to y do
 readln (b1[i]);
 end;
 if(w<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
for i:=1 to w do
readln (c[i]);
end;

(*Lap cac ma tran do cung rieng*);
for i:=1 to st do
begin
 cd3[i]:= sqr(cd[i])*cd[i];
 if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqr(cd[i])<>0)) then
  begin
 g1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; g2[i]:=6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
 g3[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i]; g4[i]:=e[i]*mq[i]/cd[i];
  end;
 c1[i]:=g3[i]*sqr(l[i])+g1[i]*sqr(m[i]);
 c2[i]:=(g3[i]-g1[i])*l[i]*m[i]; c3[i]:=g3[i]*sqr(m[i])+g1[i]*sqr(l[i]);
 c4[i]:=g2[i]*m[i]; c5[i]:=g2[i]*l[i]; c6[i]:=4*g4[i]; c7[i]:=2*g4[i];
end;
for i:=1 to st do
begin
 s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
 s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c4[i];
 s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c5[i];
 s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c6[i];
 s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c1[i];
 s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-c2[i];
```

```
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c4[i];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c1[i];
s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]-c2[i];
s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]-c3[i];
s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c5[i];
s[d4[i],d5[i]]:= s[d4[i],d5[i]]+c2[i];
s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c3[i];
s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c4[i];
s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-c5[i];
s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c7[i];
s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]-c4[i];
s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c5[i];
s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c6[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for i:=i to sbt do  sc[i,j]:=s[i,j];

(*Tinh cac tai trong tap trung o trang thai ngam*);
if(x<>0) then
begin
 for i:=1 to x do
 begin
 x1[i]:=d1[a[i]];      x2[i]:=d2[a[i]];     x3[i]:=d3[a[i]];
 x4[i]:=d4[a[i]];      x5[i]:=d5[a[i]];     x6[i]:=d6[a[i]];
 la[i]:=q1[i]*(cd[a[i]])*m[a[i]]/2;   ma[i]:=q1[i]*sqr(cd[a[i]])/12;
 end;
 for i:=1 to x do
 begin
 f[x1[i]]:=f[x1[i]]-(la[i])*m[a[i]];
 f[x2[i]]:=f[x2[i]]+(la[i])*l[a[i]];
 f[x3[i]]:=f[x3[i]]-ma[i];
 f[x4[i]]:=f[x4[i]]-(la[i])*m[a[i]];
 f[x5[i]]:=f[x5[i]]+(la[i])*l[a[i]];
 f[x6[i]]:=f[x6[i]]+ma[i];
 end;
end;
if (y<>0) then
 begin
  for i:=1 to y do
  begin
```

```
cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; y1[i]:=d1[b[i]];   y2[i]:=d2[b[i]];
 y3[i]:=d3[b[i]];              y4[i]:=d4[b[i]];   y5[i]:= d5[b[i]];
y6[i]:= d6[b[i]];  mb1[i]:=p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]);
mb2[i]:=p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]);
 if(cd3[i]<>0) then
      begin
     lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i];
      lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
      end;
 end;
 for i :=1 to y do
 begin
      if(sqr(cd[b[i]])<>0) then
        begin
      f[y1[i]]:=f[y1[i]]-(lb1[i])*m[b[i]];
      f[y2[i]]:=f[y2[i]]+(lb1[i])*l[b[i]];
      f[y3[i]]:=f[y3[i]]-mb1[i];
      f[y4[i]]:=f[y4[i]]-(lb2[i])*m[b[i]];
      f[y5[i]]:=f[y5[i]]+(lb2[i])*l[b[i]];
      f[y6[i]]:=f[y6[i]]+mb2[i];
        end;
 end;
 end;
 for i:=1 to sbt do   f[i]:=f[i]+fn[i];

(*Giai he fuong trinh theo fuong fap Gauss*);
ss:=0;
 REPEAT
    ss:=ss+1;
    for i:= ss+1 to sbt do
      Begin
       if(s[ss,ss]<>0) then
       q:=s[ss,i]/s[ss,ss];
        for j:=i to sbt do
      s[i,j]:= s[i,j]-s[ss,j]*q; f[i]:=f[i]-f[ss]*q;
      End
 UNTIL(ss= sbt -1);
 if(s[sbt,sbt]<>0) then
 qq[sbt]:=f[sbt]/s[sbt,sbt];
  for i:= sbt -1  downto 1 do
```

```
  Begin
    r :=0;
    for j:= sbt  downto i+1 do r:=r+s[i,j]*qq[j];
    if(s[i,i]<>0) then
    qq[i]:= (f[i]-r)/ s[i,i];
  End;

for i:=1 to st do
begin
qq1[i]:=qq[d1[i]];      qq2[i]:=qq[d2[i]];      qq3[i]:=qq[d3[i]];
qq4[i]:=qq[d4[i]];      qq5[i]:=qq[d5[i]];      qq6[i]:=qq[d6[i]];
end;
for i:=1 to z do      qq[d[i]]:=0;

(*Tinh mo men o trang thai tu do*);
for i:=1 to st do
begin
if(cd[i]<>0) then
 begin
 z1[i]:=(6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]))*((qq1[i]-qq4[i])*m[i]+(qq5[i]-
 qq2[i])*l[i]); z2[i]:=(2*e[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq3[i]+qq6[i]);
 z3[i]:=(2*e[i]*mq[i]/cd[i])*(qq3[i]+2*qq6[i]);
 end;
 m1[i]:=z1[i]+z2[i];
 m2[i]:=z1[i]+z3[i];
 end;
 (*Tinh tong momen*);
  if(x<>0) then
   begin
    for i:=1 to x do
    begin
    m1q[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
    m2q[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
    end;
   end;
  if(y<>0) then
  begin
   for i:=1 to y do
   begin
   m1p[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
```

```
 m2p[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
 end;
end;
if(w<>0) then
begin
 for i:=1 to w do
 begin
 m1w[i]:=m1[c[i]];
 m2w[i]:=m2[c[i]];
 end;
end;

(*tinh luc cat*);
for i:=1 to st do
begin
cd3[i]:= sqr(cd[i])*cd[i];
if((cd3[i]<>0) and (sqr(cd[i])<>0)) then
 begin
 g1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; g2[i]:=6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
 end;
u[i]:=(qq[d1[i]]-qq[d4[i]])*m[i]+(qq[d5[i]]-qq[d2[i]])*l[i];
v[i]:=g2[i]*(qq[d3[i]]+qq[d6[i]]); lc1[i]:=g1[i]*u[i]-v[i];
lc2[i]:=-lc1[i];
end;
(*tinh tong luc cat*);
if(x<>0) then
 begin
  for i:=1 to x do
  begin
  l1q[i]:=lc1[a[i]]-la[i]; l2q[i]:=lc2[a[i]]-la[i];
  end;
 end;
if(y<>0) then
begin
 for i:=1 to y do
  begin
   cd3[i]:= sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]];
    if (cd3[i]<>0) then
     begin
    lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i];
```

```
   lb2[i]:=p[i]-el1[i];
    end;
 l1p[i]:=lc1[b[i]]-lb1[i];
 l2p[i]:=lc2[b[i]]-lb2[i];
 end;
end;
if(w<>0) then
begin
 for i:=1 to w do
  begin
  l1w[i]:=lc1[c[i]];
  l2w[i]:=lc2[c[i]];
  end;
end;

writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('gia tri mo men w');
if (w<>0) then
begin
for i:=1 to w do
writeln (m1[c[i]],m2[c[i]]);
end;
writeln ('gia tri mo men x');
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
writeln (m1q[i],m2q[i]);
end;
writeln ('gia tri mo men y');
if (y<>0) then
begin
for i :=1 to y do
writeln (m1p[i],m2p[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat w');
if (w<>0) then
begin
for i :=1 to w do
```

```
writeln (l1w[i],l2w[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat x');
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
writeln (l1q[i],l2q[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat y');
if (y<>0) then
begin
for i :=1 to y do
writeln (l1p[i],l2p[i]);
end;
readln;
end.
```

****

```
Program CT25_Tinh_he_dam_truc_giao;
 uses crt;
 Var i,j, k,sn,sbn,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,z,w:integer;
 a1,b1,p,q1,e,dt,f,fc,mq,qq,l,m,m1q,m2q,m1p,m2p,m1z,m2z:array[1..10] of real;
 c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,el1,el2,g1,g2,g3,g4:array[1..10] of real;
 cd,cd3,mt,mqx,e1,m1,m2,t1,t2,la,ma,lb1,lb2,mb1,mb2,z1,z2:
 array[1..10] of real;
 d1,d2,d3,d4,d5,d6,a,b,c,d,x1,x2,x3,x4,x5,x6,y1,y2,y3,y4,y5,y6:
 array[1..10] of integer;
 s,sc:array[1..20,1..20] of real;  q,r:real;

 begin  (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
 clrscr;
 writeln('nhap so nut');
 readln(sn);
 writeln('nhap so thanh');
 readln(st);
 writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi');
 readln(sbt);
 writeln('nhap tong so bac tu do');
 readln(tbt);
```

```
writeln('nhap so bac tu do khong co chuyen vi');
readln(w);
if (w<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu bac tu do khong co chuyen vi');
for i:=1 to w do
readln(d[i]);
end;
writeln('nhap cosin dh l');
for i :=1 to st do  readln(l[i]);
writeln('nhap cosin dh m');
for i :=1 to st do  readln(m[i]);
writeln ('nhap thu tu bac tu do');
writeln('nhap d1');  for i :=1 to st do   readln(d1[i]);
writeln('nhap d2');  for i :=1 to st do   readln(d2[i]);
writeln('nhap d3');  for i :=1 to st do   readln(d3[i]);
writeln('nhap d4');  for i :=1 to st do   readln(d4[i]);
writeln('nhap d5');  for i :=1 to st do   readln(d5[i]);
writeln('nhap d6');  for i :=1 to st do   readln(d6[i]);
writeln('nhap chieu dai thanh');
for i:=1 to st do  readln(cd[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh');
for i:=1 to st do  readln(mq[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh xoan');
for i:=1 to st do  readln(mqx[i]);
 writeln('nhap mo dun truot');
for i:=1 to st do  readln(mt[i]);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln (x);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(y);
writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(z);
if(x<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
```

```
 for i:=1 to x do
 readln (a[i]);
 writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
 for i:=1 to x do
 readln (q1[i]);
 end;
 if (y<>0)then
 begin
  writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
  for i:=1 to y do
  readln (b[i]);
  writeln('nhap tai trong tap trung');
  for i:=1 to y do
  readln (p[i]);
  writeln('nhap a1');
  for i:=1 to y do
  readln (a1[i]);
  writeln('nhap b1');
  for i:=1 to y do
  readln (b1[i]);
  end;
  if(z<>0) then
 begin
 writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
 for i:=1 to z do
 readln (c[i]);
 end;

(*tinh cac tai trong tap trung o trang thai ngam*);
if(x<>0) then
begin
 for i:=1 to x do
 begin
 x1[i]:=d1[a[i]];      x2[i]:=d2[a[i]];   x3[i]:=d3[a[i]];
 x4[i]:=d4[a[i]];      x5[i]:=d5[a[i]];   x6[i]:=d6[a[i]];
la[i]:=(abs(q1[i]))*cd[a[i]]/2;
ma[i]:=q1[i]*sqr(cd[a[i]])/12;
 end;
 for i:=1 to x do
   begin
```

```
    f[x1[i]]:=f[x1[i]]-la[i];
    f[x2[i]]:=f[x2[i]]-(ma[i])*abs(m[a[i]]);
    f[x3[i]]:=f[x3[i]]-(ma[i])*abs(l[a[i]]);
    f[x4[i]]:=f[x4[i]]-la[i];
    f[x5[i]]:=f[x5[i]]+(ma[i])*abs(m[a[i]]);
    f[x6[i]]:=f[x6[i]]+(ma[i])*abs(l[a[i]]);
    end;
end;
if (y<>0) then
begin
 for i :=1 to y do
  begin
  y1[i]:=d1[b[i]];   y2[i]:=d2[b[i]];    y3[i]:=d3[b[i]];
  y4[i]:=d4[b[i]];   y5[i]:=d5[b[i]];    y6[i]:=d6[b[i]];
  cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]];
  mb1[i]:=p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]);
  mb2[i]:= p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]);
  if(cd3[i]<>0) then lb1[i]:=(abs(p[i]))*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+
  2*a1[i])/cd3[i];
  lb2[i]:=(abs(p[i])-lb1[i]);
   end;
   for i :=1 to y do
   begin
  if(sqr(cd[b[i]])<>0) then
   begin
  f[y1[i]]:=f[y1[i]]-lb1[i];
  f[y2[i]]:=f[y2[i]]-(mb1[i])*abs(m[b[i]]);
  f[y3[i]]:=f[y3[i]]-(mb1[i])*abs(l[b[i]]);
  f[y4[i]]:=f[y4[i]]-lb2[i];
  f[y5[i]]:=f[y5[i]]+(mb2[i])*abs(m[b[i]]);
  f[y6[i]]:=f[y6[i]]+(mb2[i])*abs(l[b[i]]);
   end;
   end;
 end;
 for i:=1 to sbt do  fc[i]:=f[i];

(*Lap cac ma tran do cung rieng *);
 for i:=1 to st do
 begin
  cd3[i]:= sqr(cd[i])*cd[i];
```

```
 if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqr(cd[i])<>0)) then
  begin
 g1[i]:=e[i]*mq[i]/cd[i]; g2[i]:=e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
 g3[i]:=e[i]*mq[i]/cd3[i]; g4[i]:=mt[i]*mqx[i]/cd[i];
  end;
c1[i]:=12*g3[i]; c2[i]:=6*g2[i]*m[i]; c3[i]:=6*g2[i]*l[i];
c4[i]:=4*g1[i]*sqr(m[i])+g4[i]*sqr(l[i]); c5[i]:=(4*g1[i]-g4[i])*l[i]*m[i];
c6[i]:=2*g1[i]*sqr(m[i])+g4[i]*sqr(l[i]); c7[i]:=(2*g1[i]+g4[i])*l[i]*m[i];
c8[i]:=4*g1[i]*sqr(l[i])+g4[i]*sqr(m[i]); c9[i]:=2*g1[i]*sqr(l[i])-
g4[i]*sqr(m[i]);
end;
for i:=1 to st do
begin
 s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c4[i];
 s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-c3[i];
 s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c5[i];
 s[d3[i],d3[i]]:= s[d3[i],d3[i]]+c8[i];
 s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c1[i];
 s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-c2[i];
 s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c3[i];
 s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+c6[i];
 s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]-c7[i];
 s[d4[i],d5[i]]:=s[d4[i],d5[i]]-c2[i];
 s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c4[i];
 s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]-c3[i];
 s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-c7[i];
 s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c9[i];
 s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+c3[i];
 s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]-c5[i];
 s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c8[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=i to sbt do    sc[i,j]:=s[i,j];

(*Giai he fuong trinh theo fuong fap Gauss*);
ss:=0;
```

```
REPEAT
   ss:=ss+1;
   for i:= ss+1 to sbt do
     Begin
      if(s[ss,ss]<>0) then
      q:=s[ss,i]/s[ss,ss];
      for j:=i to sbt do
     s[i,j]:= s[i,j]-s[ss,j]*q; f[i]:=f[i]-f[ss]*q;
     End
UNTIL(ss= sbt -1);
if(s[sbt,sbt]<>0) then
qq[sbt]:=f[sbt]/s[sbt,sbt];
 for i:= sbt -1  downto 1 do
    Begin
      r :=0;
      for j:= sbt  downto i+1 do r:=r+s[i,j]*qq[j];
      if(s[i,i]<>0) then
      qq[i]:= (f[i]-r)/ s[i,i];
    End;
 for i:=1 to w do
 qq[d[i]]:=0;

(*Tinh mo men uon*);
for i:=1 to st do
begin
 e1[i]:=6*(qq[d4[i]]-qq[d1[i]])/cd[i];
 z1[i]:=(e[i]*mq[i]/cd[i])*((4*qq[d3[i]]+2*qq[d6[i]])*l[i]-(4*qq[d2[i]]+
 2*qq[d5[i]])*m[i]);
 z2[i]:= (e[i]*mq[i]/cd[i])*((2*qq[d3[i]]+4*qq[d6[i]])*l[i]-(2*qq[d2[i]]
 +4*qq[d5[i]])*m[i]);
end;
for i:=1 to st do
begin
 m1[i]:=z1[i]-e1[i];
 m2[i]:=z2[i]-e1[i];
end;

(*Tinh tong momen*);
 if(x<>0) then
   begin
```

```
  for i:=1 to x do
  begin
 m1q[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
 m2q[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
  end;
 end;
if(y<>0) then
begin
 for i:=1 to y do
 begin
 m1p[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
 m2p[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
 end;
end;
 if(z<>0) then
begin
 for i:=1 to z do
 begin
 m1z[i]:=m1[c[i]];
 m2z[i]:=m2[c[i]];
 end;
 end;

(*tinh momen xoan*);
for i:=1 to st do
begin
t1[i]:=(mt[i]*mqx[i]/cd[i])*((qq[d5[i]]-qq[d2[i]])*l[i]+(qq[d6[i]]
-qq[d3[i]])*m[i]);    t2[i]:=-t1[i];
end;

writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('gia tri mo men mz');
if (z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (m1[c[i]],m2[c[i]]);
end;
writeln ('gia tri mo men mq');
```

```
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
writeln (m1q[i],m2q[i]);
end;
writeln ('gia tri mo men mp');
if (y<>0) then
begin
for i :=1 to y do
writeln (m1p[i],m2p[i]);
end;
writeln ('gia tri mo men tx');
for i :=1 to st do
writeln (t1[i],t2[i]);
readln;
end.
```

****

```
Program CT26_Tinh_dam_lien_tuc_tren_goi_tua_dan_hoi;
 uses crt;
Var i,j, k,sn,st,sbt,ss,rr,x,y,z,w,v:integer;
 a1,b1,p,q1,e,f,fc,mq,qq,l,m,m1,m2,cd,cd3,dt:array[1..10] of real;
 c1,c2,c3,c4,lc1,lc2,m1x,m2x,m1y,m2y,m1z,m2z,l1x,l2x,l1y,l2y,l1z,l2z:
 array[1..10] of real;
 mb1,mb2,ma,la,lb1,lb2,z1,hc:array[1..10] of real;
 n1,n2,a,b,c,d,dd,e1,d1,d2,d3,d4,x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4:
 array[1..10]of integer;
 s,sc:array[1..20,1..20] of real; q,r:real;

 begin  clrscr;
 (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
 writeln('nhap so nut');
 readln(sn);
 writeln('nhap so thanh');
 readln(st);
 writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi');
 readln(sbt);
 writeln('nhap so bac tu do khong co chuyen vi');
 readln(w);
```

```
writeln('nhap so  thu tu bac tu do khong co chuyen vi');
for i:=1 to w do  readln(d[i]);
writeln('nhap so goi tua dan hoi');
readln(v);
writeln('nhap so thu tu bac tu do co goi tua dan hoi');
for i:=1 to v do readln(e1[i]);
writeln('nhap he so do cung');
for i:=1 to v do readln(hc[i]);
writeln('nhap chieu dai thanh');
for i :=1 to st do   readln(cd[i]);
writeln('nhap cosin dinh huong l');
for i :=1 to st do   readln(l[i]);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln (x);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(y);
writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(z);
if(x<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (a[i]);
writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (q1[i]);
end;
if (y<>0)then
begin
 writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
 for i:=1 to y do      readln (b[i]);
 writeln('nhap tai trong tap trung');
 for i:= 1 to y do  readln (p[i]);
 writeln('nhap a1');
 for i:= 1 to y do  readln (a1[i]);
 writeln('nhap b1');
 for i:= 1 to y do readln (b1[i]);
end;
if (z<>0)then
 begin
```

```
 writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
 for i:=1 to z do
 readln(e[i]);
 end;
writeln('nhap mo dun dan hoi'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh'); for i:=1 to st do readln(mq[i]);
writeln('nhap BTD d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2 '); for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3'); for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4'); for i:=1 to st do readln(d4[i]);

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
 for i:=1 to st do
begin
   cd3[i]:=sqr(cd[i])*cd[i];
   if(((cd3[i]<>0)and(sqr(cd[i])<>0))and(cd[i]<>0)) then
    begin
   c1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; c2[i]:=-6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
   c3[i]:=4*e[i]*mq[i]/cd[i];  c4[i]:=2*e[i]*mq[i]/cd[i];
    end;
end;
for i:=1 to st do
begin
 s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
 s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-c1[i];
 s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c2[i];
 s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+c4[i];
 s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c2[i];
 s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c3[i];
end;
for i:=1 to v do  s[e1[i],e1[i]]:=s[e1[i],e1[i]]+hc[i];
for i:=1 to sbt do
for j:=i to sbt do  sc[i,j]:=s[i,j];

(*Xac dinh cac thanh phan tai trong tap trung o trang thai ngam*);
if (x<>0)then
```

```
begin
 for i:=1 to x do
 begin
 la[i]:= q1[i]*cd[a[i]]/2;   ma[i]:=(q1[i]*sqr(cd[a[i]])/12)*l[a[i]];
 x1[i]:=d1[a[i]];          x2[i]:=d2[a[i]];        x3[i]:=d3[a[i]];
 x4[i]:=d4[a[i]];
 f[x1[i]]:=f[x1[i]]+la[i];
 f[x2[i]]:=f[x2[i]]-ma[i];
 f[x3[i]]:=f[x3[i]]+la[i];
 f[x4[i]]:=f[x4[i]]+ma[i];
 end;
end;
if (y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
 begin
  cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; if(cd3[i]<>0) then
  lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i]; lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
  mb1[i]:=(p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]))*l[b[i]];
  mb2[i]:=(p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]))*l[b[i]];
   y1[i]:=d1[b[i]];        y2[i]:=d2[b[i]];        y3[i]:=d3[b[i]];
  y4[i]:=d4[b[i]];
   if (cd3[i]<>0) then
  f[y1[i]]:=f[y1[i]]+lb1[i];
  f[y2[i]]:=f[y2[i]]-mb1[i];
  f[y3[i]]:=f[y3[i]]+lb2[i];
  f[y4[i]]:=f[y4[i]]+mb2[i];
 end;
end;
for i:=1 to sbt do  fc[i]:=f[i];

(*Giai he fuong trinh bang fuong fap Gauss*);
    ss:=0;
 REPEAT
    ss:=ss+1;
    for i:= ss+1 to sbt do
      Begin
       if(s[ss,ss]<>0) then
       q:=s[ss,i]/s[ss,ss];
        for j:=i to sbt do
```

```
      s[i,j]:= s[i,j]-s[ss,j]*q; f[i]:=f[i]-f[ss]*q;
      End
UNTIL(ss= sbt -1);
if(s[sbt,sbt]<>0) then
qq[sbt]:=f[sbt]/s[sbt,sbt];
 for i:= sbt -1  downto 1 do
    Begin
       r :=0;
       for j:= sbt  downto i+1 do r:=r+s[i,j]*qq[j];
       if(s[i,i]<>0) then
       qq[i]:= (f[i]-r)/ s[i,i];
    End;
for i:=1 to w do      qq[d[i]]:=0;

(*Tinh mo men*);
for i:=1 to st do
begin
if (sqr(cd[i])<>0) then
z1[i]:=(6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]))*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]]);
if(cd[i]<>0) then
m1[i]:=z1[i]+(e[i]*mq[i]/cd[i])*(4*qq[d2[i]]+2*qq[d4[i]]);
m2[i]:=z1[i]+(e[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq[d2[i]]+4*qq[d4[i]]);
end;
(*tinh tong mo men*);
if (x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
begin
 m1x[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
 m2x[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
begin
 m1y[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
 m2y[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
end;
end;
```

```
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
begin
m1z[i]:=m1[c[i]];    m2z[i]:=m2[c[i]];
end;
end;

(*Tinh luc cat*);
for i :=1 to st do
begin
cd3[i]:= sqr(cd[i])*cd[i]; if ((cd3[i]<>0) and (sqr(cd[i])<>0)) then
 begin
  lc1[i]:=(12*e[i]*mq[i]/cd3[i])*(qq[d1[i]]-qq[d3[i]])
  -(6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]))*(qq[d2[i]]+qq[d4[i]]); lc2[i]:=-lc1[i];
 end;
end;
(*tinh tong luc cat*);
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
begin
 la[i]:=q1[i]*cd[a[i]]/2;
 l1x[i]:=lc1[a[i]]-la[i];;
 l2x[i]:=lc2[a[i]]-la[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
 for i :=1 to y do
  begin
   l1y[i]:= lc1[b[i]]-lb1[i];
   l2y[i]:= lc2[b[i]]-lb2[i];
  end;
end;
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
begin
l1z[i]:=lc1[c[i]];    l2z[i]:=lc2[c[i]];
```

```
end;
end;

writeln('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri mo men x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (m1x[i],m2x[i]);
end;
writeln('gia tri mo men y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (m1y[i],m2y[i]);
end;
writeln('gia tri mo men z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (m1z[i],m2z[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (l1x[i],l2x[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (l1y[i],l2y[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
```

```
writeln (l1z[i],l2z[i]);
end;
readln;
end.
```

****

```
Program CT27_Tinh_gian_phang_chiu_tac_dung_cua_nhiet_do;
uses crt;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr:integer;
e,a,cd,b,c,d,f,fe,qq,fl,ff,ld,l,m,eal:array[1..10] of real;
d1,d2,d3,d4:array[1..10]of integer;
s,sc,sr,ke:array[1..20,1..20] of real; q,r,hg,t:real;

begin (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
clrscr;
writeln('nhap so nut');
readln(sn);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln ('nhap so BTD co chuyen vi');
readln (sbt);
writeln('nhap so thu tu bac tu do ');
writeln('nhap d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap d2'); for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap d3'); for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('nhap d4'); for i:=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln('nhap cosin dh l'); for i:=1 to st do  readln(l[i]);
writeln('nhap cosin dh m'); for i:=1 to st do readln(m[i]);
writeln('nhap mo dun dan hoi E'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap dien tich tiet dien'); for i:=1 to st do readln(a[i]);
writeln('nhap he so gian no'); readln(hg);
writeln('nhap nhiet do');  readln(t);

(*Tinh cac thanh fan tai trong o trang thai ngam do nhiet do*);
for i:= 1 to st do
begin
ff[i]:=-a[i]*e[i]*hg*t;  fe[d1[i]]:=fe[d1[i]]+ff[i]*l[i];
fe[d2[i]]:=fe[d2[i]]+ff[i]*m[i];  fe[d3[i]]:= fe[d3[i]]-ff[i]*l[i];
fe[d4[i]]:=fe[d4[i]]-ff[i]*m[i];
```

```
end;
for i:=i to sbt do        f[i]:=fe[i];

(*Lap cac matran do cung rieng*);
for i:=1 to st do
begin
b[i]:=sqr(l[i])*e[i]*a[i]/cd[i];   c[i]:=l[i]*m[i]*e[i]*a[i]/cd[i];
d[i]:=sqr(m[i])*e[i]*a[i]/cd[i];
end;
for i:=1 to st do
begin
ke[d1[i],d1[i]]:=ke[d1[i],d1[i]]+b[i];
ke[d1[i],d2[i]]:=ke[d1[i],d2[i]]+c[i];
ke[d2[i],d2[i]]:=ke[d2[i],d2[i]]+d[i];
ke[d1[i],d3[i]]:= ke[d1[i],d3[i]]-b[i];
ke[d2[i],d3[i]]:= ke[d2[i],d3[i]]-c[i];
ke[d3[i],d3[i]]:= ke[d3[i],d3[i]]+b[i];
ke[d1[i],d4[i]]:=ke[d1[i],d4[i]]-c[i];
ke[d2[i],d4[i]]:=ke[d2[i],d4[i]]-d[i];
ke[d3[i],d4[i]]:=ke[d3[i],d4[i]]+c[i];
ke[d4[i],d4[i]]:=ke[d4[i],d4[i]]+d[i];
end;

(*Lap matran do cung tong the*);
for i:=1 to tbt do
for j:=i to tbt do        s[i,j]:=ke[i,j];
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do        s[i,j]:=s[j,i];

(*Chia khoi ma tran*);
for i := 1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
 sc[i,j]:=s[i,j];

(*Giai he fuong trinh theo fuong fap Gauss*);
   ss:=0;
 REPEAT
   ss:=ss+1;
   for i:= ss+1 to sbt do
     Begin
```

```
        if(sc[ss,ss]<>0) then
        q:=sc[ss,i]/sc[ss,ss];
        for j:=i to sbt do
       sc[i,j]:= sc[i,j]-sc[ss,j]*q; f[i]:=f[i]-f[ss]*q;
       End
UNTIL(ss= sbt -1);
if(sc[sbt,sbt]<>0) then
qq[sbt]:=f[sbt]/sc[sbt,sbt];
 for i:= sbt -1  downto 1 do
    Begin
       r :=0;
       for j:= sbt  downto i+1 do r:=r+sc[i,j]*qq[j];
       if(sc[i,i]<>0) then
       qq[i]:= (f[i]-r)/ sc[i,i];
    End;

(*Tinh fan luc*);
rr:=sbt+1;
for j:=1 to sbt do
for i:=rr to tbt do    sr[i,j]:=s[i,j];
for i:= rr to tbt do
begin
 fl[i]:=0; for k:=1 to sbt do  fl[i]:= fl[i]+sr[i,k]*qq[k];
end;

(*Tinh luc doc*);
for i:=1 to st do
ld[i]:=(e[i]*a[i]/cd[i])*l[i]*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]])
+m[i]*(qq[d4[i]]-qq[d2[i]]);

writeln ('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('gia tri luc doc');
for i:=1 to st do
writeln(ld[i]);
writeln ('gia tri fan luc');
for i:=rr to tbt do
for j:=1 to sbt do
```

```
writeln(fl[i]);
readln;
end.
```

****

```
Program CT28_Tinh_gian_phang_che_tao_khong_chinh_xac;
uses crt;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr,x:integer;
e,a,cd,b,c,d,f,fe,qq,fl,ff,ld,l,m,det,t:array[1..10] of real;
g,d1,d2,d3,d4:array[1..10]of integer;
s,sc,sr,ke:array[1..20,1..20] of real; q,r,hg:real;

begin (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
clrscr;
writeln('nhap so nut');
readln(sn);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln ('nhap so BTD co chuyen vi');
readln (sbt);
writeln('nhap so thu tu bac tu do ');
writeln('nhap d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap d2'); for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap d3'); for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('nhap d4'); for i:=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln('nhap cosin dh l'); for i:=1 to st do  readln(l[i]);
writeln('nhap cosin dh m'); for i:=1 to st do readln(m[i]);
writeln('nhap mo dun dan hoi E'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap dien tich tiet dien'); for i:=1 to st do readln(a[i]);
writeln('nhap he so gian no'); readln(hg);
writeln('nhap so thanh che tao khong chinh xac'); readln(x);
writeln('nhap so thu tu thanh che tao khong chinh xac');
for i:=1 to x do readln(g[i]);
writeln('nhap do dai doi ra hoac do ngan hut');
for i:=1 to x do readln(det[i]);

(*Tinh cac thanh fan tai trong do che tao khong chinh xac*);
for i:= 1 to x do
begin
```

```
t[i]:=det[i]/(hg*cd[g[i]]); ff[i]:=-e[g[i]]*a[g[i]]*hg*t[i];
fe[d1[g[i]]]:=fe[d1[g[i]]]+ff[i]*l[g[i]];
fe[d2[g[i]]]:=fe[d2[g[i]]]+ff[i]*m[g[i]];
fe[d3[g[i]]]:=fe[d3[g[i]]]-ff[i]*l[g[i]];
fe[d4[g[i]]]:=fe[d4[g[i]]]-ff[i]*m[g[i]];
end;
for i:=1 to sbt do      f[i]:=fe[i];

(*Lap cac matran do cung rieng*);
for i:=1 to st do
begin
b[i]:=sqr(l[i])*e[i]*a[i]/cd[i];   c[i]:=l[i]*m[i]*e[i]*a[i]/cd[i];
d[i]:=sqr(m[i])*e[i]*a[i]/cd[i];
end;
for i:=1 to st do
begin
ke[d1[i],d1[i]]:=ke[d1[i],d1[i]]+b[i];
ke[d1[i],d2[i]]:=ke[d1[i],d2[i]]+c[i];
ke[d2[i],d2[i]]:=ke[d2[i],d2[i]]+d[i];
ke[d1[i],d3[i]]:= ke[d1[i],d3[i]]-b[i];
ke[d2[i],d3[i]]:= ke[d2[i],d3[i]]-c[i];
ke[d3[i],d3[i]]:= ke[d3[i],d3[i]]+b[i];
ke[d1[i],d4[i]]:=ke[d1[i],d4[i]]-c[i];
ke[d2[i],d4[i]]:=ke[d2[i],d4[i]]-d[i];
ke[d3[i],d4[i]]:=ke[d3[i],d4[i]]+c[i];
ke[d4[i],d4[i]]:=ke[d4[i],d4[i]]+d[i];
end;

(*Lap ma tran do cung tong the*);
tbt:=2*sn;
for i:=1 to tbt do
for j:=i to tbt do    s[i,j]:=ke[i,j];
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do     s[i,j]:=s[j,i];

(*Chia khoi ma tran*);
for i := 1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
 sc[i,j]:=s[i,j];
```

```
(*Giai he fuong trinh theo fuong fap Gauss*);
   ss:=0;
 REPEAT
   ss:=ss+1;
   for i:= ss+1 to sbt do
     Begin
      if(sc[ss,ss]<>0) then
      q:=sc[ss,i]/sc[ss,ss];
      for j:=i to sbt do
     sc[i,j]:= sc[i,j]-sc[ss,j]*q; f[i]:=f[i]-f[ss]*q;
     End
 UNTIL(ss= sbt -1);
if(sc[sbt,sbt]<>0) then
qq[sbt]:=f[sbt]/sc[sbt,sbt];
 for i:= sbt -1  downto 1 do
   Begin
      r :=0;
      for j:= sbt  downto i+1 do r:=r+sc[i,j]*qq[j];
      if(sc[i,i]<>0) then
     qq[i]:= (f[i]-r)/ sc[i,i];
   End;

(*Tinh fan luc*);
rr:=sbt+1;
for j:=1 to sbt do
for i:=rr to tbt do    sr[i,j]:=s[i,j];
for i:= rr to tbt do
begin
 fl[i]:=0; for k:=1 to sbt do  fl[i]:= fl[i]+sr[i,k]*qq[k];
end;

(*Tinh luc doc*);
for i:=1 to st do
ld[i]:=(e[i]*a[i]/cd[i])*l[i]*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]])
+m[i]*(qq[d4[i]]-qq[d2[i]]);

writeln ('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('gia tri luc doc');
```

```
for i:=1 to st do
writeln(ld[i]);
writeln ('gia tri fan luc');
for i:=rr to tbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(fl[i]);
readln;
end.
```

****

```
Program CT29_Tinh_khung_khong_co_chuyen_vi_ngang_theo_ff_ffoi_momen;
 Uses crt;
 Type
   Mang1 = array[1.. 20,1.. 20 ] of real; mang2=array[1..20]of real;
   mang3= array[1..20] of integer;
 Var
   B,D,mx:mang1 ; C,mmx,mm,mn:mang2;   n1,n2:mang3;
   i,j,k,n,p,sn,st,sto,std:integer;
 Procedure nhap (var P:mang1; n:integer;X,Y:integer);
 Var    i,j:integer;
       Begin
         For i:= 1 to n do
           For j:=1 to n do
             Begin
               gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
               Readln (P[i,j]);
             End;
       End;

 begin  (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
 Clrscr;
 writeln('nhap tong so thanh');
 readln(st);
 writeln('nhap so tiet dien de tinh momen ');
 readln(std);
 writeln('nhap so thanh khong co goi tua');
 readln(sto);
 writeln('nhap mo men ngam');
 for i:=1 to std do
```

```
readln(mn[i]);
writeln('nhap so thu tu tiet dien thanh khong co goi tua');
writeln('nhap n1'); for i:=1 to sto do readln(n1[i]);
writeln('nhap n2'); for i:=1 to sto do readln(n2[i]);
writeln('nhap so thu tu tiet dien thanh co goi tua');
writeln('nhap n1'); for i:= sto+1 to st do readln(n1[i]);
writeln('nhap n2'); for i:= sto+1 to st do readln(n2[i]);
writeln('nhap cap ma tran vuong');
readln(n);
writeln('nhap fan tu ma tran B');
Nhap (b,n,whereX, whereY);
writeln('nhap so hang tu do');
for i:=1 to std do
readln (C[i]);
writeln('so thu tu vong dau tien');
readln(k);
writeln ('gia tri momen xoay ban dau');
for i:=1 to std do
readln(mx[i,k]);

(*Qua trinh tinh lap de xac dinh gia tri momen xoay*);
REPEAT   k:=0;
  k:=k+1;
  for i:=1 to std do
    begin
      D[i,k]:=0;  for p:=1 to std do
      D[i,k] :=D[i,k]+B[i,p]*mx[p,k];
    end;
      for i:=1 to std do
      mx[i,k+1]:=D[i,k]+C[i];
 UNTIL(abs(mx[std,k+1]-mx[std,k]) <0.0001);
      for i:=1 to std do
      mmx[i]:=mx[i,k+1];

(*Tinh gia tri mo men cuoi cung o dau thanh*);
 for i:=1 to sto do
 begin
  mm[n1[i]]:=mmx[n1[i]]+0.5*mmx[n2[i]]+mn[n1[i]];
  mm[n2[i]]:=mmx[n2[i]]+0.5*mmx[n1[i]]+mn[n2[i]];
 end;
```

```
n:=sto+1;
for i:= n to st do
begin
 mm[n1[i]]:=mmx[n1[i]]+mn[n1[i]];
 mm[n2[i]]:=0.5*mmx[n1[i]]+mn[n2[i]];
end;

writeln('gia tri mo men cuoi cung la');
for i:=i to sto do
begin
writeln(mm[n1[i]]);
writeln(mm[n2[i]]);
end;
for i:=n to st do
begin
writeln(mm[n1[i]]);
writeln(mm[n2[i]]);
end;
readln;
end.
```

****

```
Program CT30_Tinh_khung_co_chuyen_vi_ngang_theo_ff_fan_foi_momen;
 Uses crt;
 Type
   Mang1 = array[1.. 20,1.. 20 ] of real; mang2=array[1..20]of real;
   mang3= array[1..20] of integer;
  Var
   B,D,d1,d2,d3,E,mx,mc:mang1 ; C,F,mmx,mmc,mm,mn:mang2; n1,n2:mang3;
   i,j,k,m,n,p,sn,st,sto,std,sd,sc,sco,scn,q,s,l,r:integer;
 Procedure nhap (var P:mang1; m,n:integer;X,Y:integer);
  Var    i,j:integer;
       Begin
         For i:= 1 to m do
          For j:=1 to n do
            Begin
              gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
              Readln (P[i,j]);
            End;
       End;
```

```
begin  (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
Clrscr;
writeln('nhap tong so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so tiet dien de tinh momen ');
readln(std);
writeln('nhap so thanh khong co goi tua');
readln(sto);
writeln('nhap mo men ngam');
for i:=1 to std do
readln(mn[i]);
writeln('nhap so thu tu tiet dien thanh khong co goi tua');
writeln('nhap n1'); for i:=1 to sto do readln(n1[i]);
writeln('nhap n2'); for i:=1 to sto do readln(n2[i]);
writeln('nhap so thu tu tiet dien thanh co goi tua');
writeln('nhap n1'); for i:= sto+1 to st do readln(n1[i]);
writeln('nhap n2'); for i:= sto+1 to st do readln(n2[i]);
writeln('nhap cap ma tran vuong');
readln(n);
writeln('nhap fan tu ma tran B');
Nhap (b,n,n,whereX, whereY);
writeln('nhap so hang tu do');
for i:=1 to std do
readln (C[i]);
writeln('nhap so hang ma tran');
readln(m);
writeln('nhap so cot ma tran');
readln(n);
writeln('nhap cac fan tu ma tran D');
Nhap (d,m,n,whereX, whereY);
writeln('nhap so hang ma tran');
readln(m);
writeln('nhap so cot ma tran');
readln(n);
writeln('nhap cac fan tu ma tran E');
Nhap (e,m,n,whereX, whereY);
writeln('nhap so hang ma tran F');
readln(m);
for i:=1 to m do
readln(f[i]);
```

```
writeln('so thu tu vong dau tien');
readln(k);
writeln ('gia tri momen xoay ban dau');
for i:=1 to std do
readln(mx[i,k]);
writeln('so thu tu vong dau tien');
readln(k);
writeln ('gia tri momen chuyen vi ban dau');
for i:=sd+1 to st do
readln(mc[i,k]);

(*Qua trinh tinh lap de xac dinh gia tri momen xoay*);
REPEAT   k:=0;
  k:=k+1;
  for i:=1 to std do
   begin
     D1[i,k]:=0;  for p:=1 to std do
     D1[i,k] :=D1[i,k]+B[i,p]*mx[p,k];
   end;
   q:=sd+1;
   for i:=1 to std do
   begin
     D2[i,k]:=0;  for p:=q to st do
     D2[i,k] :=D2[i,k]+D[i,p]*mc[p,k];
   end;
   for i:= 1 to std do  mx[i,k+1]:=D1[i,k]+D2[i,k]+C[i];
   s:=2*sd+1;
   for i:=q to st do
   begin
     D3[i,k]:=0;  for p:=s to std do
     D3[i,k] :=D3[i,k]+E[i,p]*mx[p,k];
   end;
   for i:=q to st do   mc[i,k+1]:=D3[i,k+1]+F[i];
UNTIL(((abs(mx[std,k+1]-mx[std,k])<0.0001)and((abs(mc[st,k+1]
-mc[st,k])<0.0001))));
     for i:=1 to std do   mmx[i]:=mx[i,k+1];
     for i:=q to st do    mmc[i]:=mc[i,k+1];

(*Tinh gia tri mo men cuoi cung o dau thanh*);
 for i:=1 to sd do
```

```
begin
  mm[n1[i]]:=mmx[n1[i]]+0.5*mmx[n2[i]]+mn[n1[i]];
  mm[n2[i]]:=mmx[n2[i]]+0.5*mmx[n1[i]]+mn[n2[i]];
end;
l:=sd+sco;
for i:= q to l do
begin
 mm[n1[i]]:=mmx[n1[i]]+0.5*mmx[n2[i]]+mmc[i]+mn[n1[i]];
 mm[n2[i]]:=mmx[n2[i]]+0.5*mmx[n1[i]]+mmc[i]+mn[n2[i]];
end;
r:=l+1;
for i:= r to st do
begin
 mm[n1[i]]:=mmx[n1[i]]+mmc[i]+mn[n1[i]];
 mm[n2[i]]:=0.5*mmx[n1[i]]+mmc[i]+mn[n2[i]];
end;

writeln('gia tri mo men cuoi cung la');
for i:=i to sd do
begin
writeln(mm[n1[i]]);
writeln(mm[n2[i]]);
end;
for i:=q to l do
begin
writeln(mm[n1[i]]);
writeln(mm[n2[i]]);
end;
for i:=r to st do
begin
writeln(mm[n1[i]]);
writeln(mm[n2[i]]);
end;
readln;
end.

*******************

Program CT31_Tinh_khung_theo_ff_fan_foi_momen_don_gian;
  Uses crt;
```

```
Type
 Mang1 = array[1.. 20,1.. 20 ] of real; mang2=array[1..20]of real;
 mang3= array[1..20] of integer;
Var
  B,D,D1,E,mxn:mang1 ; C,D2,mmxn,mx,mm,mn:mang2;   n1,n2:mang3;
 i,j,k,m,n,p,sn,st,sto,std:integer;

Procedure nhap (var P:mang1; m,n:integer;X,Y:integer);
Var    i,j:integer;
     Begin
       For i:= 1 to m do
         For j:=1 to n do
           Begin
             gotoxy(X+8*(j-1),Y+(i-1));
             Readln (P[i,j]);
           End;
     End;

begin  (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
Clrscr;
writeln('nhap so nut');
readln(sn);
writeln('nhap tong so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so tiet dien de tinh momen ');
readln(std);
writeln('nhap so thanh khong co goi tua');
readln(sto);
writeln('nhap mo men ngam');
for i:=1 to std do
readln(mn[i]);
writeln('nhap so thu tu tiet dien thanh khong co goi tua');
writeln('nhap n1');  for i:=1 to sto do  readln(n1[i]);
writeln('nhap n2');  for i:=1 to sto do  readln(n2[i]);
writeln('nhap so thu tu tiet dien thanh co goi tua');
writeln('nhap n1');  for i:= sto+1 to st do  readln(n1[i]);
writeln('nhap n2');  for i:= sto+1 to st do  readln(n2[i]);
writeln('nhap so hang cua ma tran');
readln(m);
writeln('nhap so cot cua ma tran');
```

```
readln(n);
writeln('nhap cac fan tu cua ma tran B');
Nhap (b,m,n,whereX, whereY);
writeln('nhap so hang cua ma tran');
readln(m);
writeln('nhap so cot cua ma tran');
readln(n);
writeln('nhap cac fan tu cua ma tran E');
Nhap (e,m,n,whereX, whereY);
writeln('nhap cac fan tu cua ma tran C');
for i:=1 to sn do
readln (C[i]);
writeln('so thu tu vong dau tien');
readln(k);
writeln ('gia tri momen xoay ban dautai nut');
for i:=1 to std do
readln(mxn[i,k]);

(*Qua trinh tinh lap de xac dinh momen xoay tai nut*);
 k:=0;
 REPEAT
   k:=k+1;
   for i:=1 to sn do
     begin
       D1[i,k]:=0;  for p:=1 to sn do
       D1[i,k] :=D1[i,k]+B[i,p]*mxn[p,k];
     end;
       for i:=1 to sn do
       mxn[i,k+1]:=D1[i,k]+C[i];
 UNTIL(abs(mxn[sn,k+1]-mxn[sn,k]) <0.0001);
       for i:=1 to sn do
       mmxn[i]:=mxn[i,k+1];
   for i:=1 to std do
   begin
    D2[i]:=0;
    for p:=1 to sn do   D2[i]:=D2[i]+D[i,p]*mmxn[p];
   end;
   for i:=1 to std do    mx[i]:=D2[i];
```

```
(*Tinh gia tri mo men cuoi cung o dau thanh*);
 for i:=1 to sto do
 begin
   mm[n1[i]]:=mx[n1[i]]+0.5*mx[n2[i]]+mn[n1[i]];
   mm[n2[i]]:=mx[n2[i]]+0.5*mx[n1[i]]+mn[n2[i]];
 end;
 n:=sto+1;
 for i:= n to st do
 begin
  mm[n1[i]]:=mx[n1[i]]+mn[n1[i]];
  mm[n2[i]]:=0.5*mx[n1[i]]+mn[n2[i]];
 end;

 writeln('gia tri mo men cuoi cung la');
 for i:=i to sto do
 begin
 writeln(mm[n1[i]]);
 writeln(mm[n2[i]]);
 end;
 for i:=n to st do
 begin
 writeln(mm[n1[i]]);
 writeln(mm[n2[i]]);
 end;
 readln;
end.

readln;
end.
```

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Khắc Hùng, Lê Văn Mai. *Dạng ma trận của phương pháp cơ bản trong Cơ học kết cấu*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1976.
2. Lều Thọ Trình. *Ổn định và động lực học công trình*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1974.
3. Võ Như Cầu. *Tính toán khung có xét đến ảnh hưởng của lực dọc*. Tuyển tập công trình khoa học số 1/1998, Trường Đại học Xây Dựng.
4. Võ Như Cầu. *Một phương pháp thực dụng tăng nhanh tốc độ hội tụ của phương pháp Kani*. Tạp chí Xây dựng số 3/1990.
5. Võ Như Cầu. *Dạng ma trận của phương pháp phân phối mô men*. Tạp chí Xây dựng số 2/1992.
8. Võ Như Cầu. *Một cách giải nhanh bài toán ổn định của hệ phẳng*. Tạp chí Người Xây dựng số 3/1992.
9. Võ Như Cầu. *Một cách tính nhanh tần số cơ bản của hệ phẳng*. Tạp chí Người Xây dựng số 4/1992.
10. Alan Jenning. *Matrix computation of Engineers and Scientists*. Willey and Sons, Ltd. 1990.
11. Eduard C.Pestel. *Matrix methods in Elastic Mechanics*. New York 1992.
12. S.J. M.c. Minh. *Matrices for Structural Analysis*. John Willey and sons. New York, 1995.
13. R.H. Wood. *Effective lengths of columns in multi–storey buildings*. Structural Engineer, July. August and September
14. M.R. Horne. *A approximative method for calculating the elastic critical loads of plane frames*. Structural Engineer 1975.
15. Bolton a. *Natural frequencies of structures for designers*. Structural Engineer, September 1978.
16. David M. *Iterative solution of large linear systems. Cambridge*. Univ. Pr. 1981.
16. Bùi Thế Tâm. *Giáo trình TURBO PASCAL 7.0*. Nhà xuất bản Giao thông Vận tải. Hà Nội, 2001.
17. Đậu Quang Tuấn. *Lập trình song ngữ PASCAL & VISUAL BASIC*. Nhà xuất bản Thanh niên, 2001

MỤC LỤC

Chương hai

HỆ GIÀN

Chương ba

HỆ PHẲNG CÓ NÚT CỨNG

Chương bốn

HỆ DẦM GIAO NHAU

Chương năm

HỆ GỒM CÁC PHẦN TỬ KHÔNG CÙNG THỂ LOẠI

Chương sáu

HỆ CHỊU TÁC DỤNG CỦA CÁC NGUYÊN NHÂN NGOÀI TẢI TRỌNG

Chương bảy

DẠNG MA TRẬN CỦA BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH TRONG HỆ PHẲNG CÓ NÚT CỨNG

Chương tám

DẠNG MA TRẬN CỦA BÀI TOÁN DAO ĐỘNG TRONG HỆ PHẲNG CÓ NÚT CỨNG

Chương chín

HỆ KHÔNG GIAN CÓ NÚT CỨNG

Chương mười

DẠNG MA TRẬN CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC

Chương mười một

DẠNG MA TRẬN CỦA PHƯƠNG PHÁP PHÂN PHỐI MÔ MEN

TÍNH KẾT CẤU
THEO PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN

Chịu trách nhiệm xuất bản
BÙI HỮU HẠNH

Biên tập : TRẦN CƯỜNG
Chế bản : VIỆT HƯNG
Bìa : NGUYỄN HỮU TÙNG
Sửa bản in : HUY HOÀNG

In 1000 cuốn, khổ 19x27cm, tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng kí xuất bản số: 60/XB–QLXB–46 ngày 28 tháng 01 năm 2004. In xong nộp lưu chiểu tháng 05 năm 2004.

6X6-6X2
XD- 2004 1773 - 2003

Giá : 68.000đ