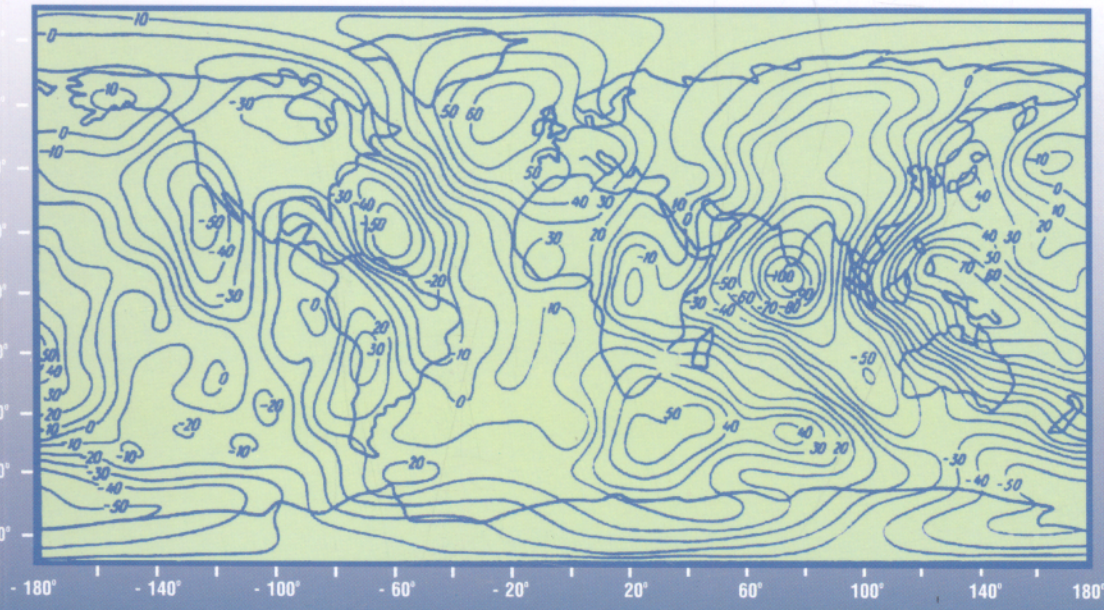
TS. TRẦN VĂN NHẠC

PHƯƠNG PHÁP TRỌNG LỰC
TRONG ĐỊA VẬT LÝ



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRẦN VĂN NHẠC

PHƯƠNG PHÁP
TRỌNG LỰC TRONG ĐỊA VẬT LÝ

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

LỜI NÓI ĐẦU

Quyển sách này được sử dụng làm tài liệu giáo khoa, trong đó 8/12 là các chương mục mà tác giả đã giảng dạy nhiều năm tại trường Đại Học Tổng Hợp rồi tiếp là trường Đại học Khoa học Tự Nhiên Tp HCM.

Nội dung đào tạo định hướng theo nghiên cứu khoa học cơ bản. Một phần được biên soạn dựa theo nôi dung chương trình của trường Đại học Tổng hợp Moskva, nơi tác giả đã từng học tâp nghiên cứu. Các công thức được chứng minh đầy đủ, chặt chẽ. Tuy nhiên, trong lực thăm dò cũng được chú trọng đặc biệt. Khối lượng, cũng như mức độ sâu của nội dung sách này vượt nôi dung chương trình được giảng dạy theo quy định 45 tiết học ở bậc đại học, nhằm phục vụ thêm cho các đối tượng là nghiên cứu sinh, cao học và là tài liệu tham khảo cho cán bộ đang công tác trong các ngành địa vật lý.

Tác giả muốn giới thiệu với bạn đọc các ứng dụng của phương pháp trọng lực vào các lĩnh vực khác nhau của khoa học về trái đất, như nghiên cứu cấu trúc địa chất sâu, hình thể Trái đất, địa triều, thăm dò địa chất, tìm kiếm khoáng sản. Về phương pháp nghiên cứu, ngoài các phương pháp truyền thống như: tiếp tục giải tích trường, trung bình hoá, phương pháp lựa chọn,... sách còn giới thiệu về phương pháp phổ, xác suất thống kê, thuật toán điều chỉnh, phương pháp cực tiểu hoá phiếm hàm, phương pháp vệ tinh để nội dung mang tính hiện đại. Để cho nội dung được sinh động, và mang tính Việt Nam, các kết quả nghiên cứu khoa học ở Việt Nam của tác giả và đồng nghiệp cũng đã được sử dụng làm ví dụ, minh hoạ cho lý thuyết. Các máy móc được giới thiệu trong sách là các máy đo trọng lực từ thế hệ cũ đến thế hệ hiện đại, độ chính xác cao.

Muốn nắm rõ nội dung của sách, bạn đọc phải tìm hiểu trước cuốn sách " Lý thuyết thế và trường trong địa vật lý" do tác giả và TS Nguyễn Thành Vấn biên soạn; giáo trình "Thiên văn học đại cương". Nhân dịp cuốn sách này được xuất bản tác

giả bày tỏ lòng cám ơn đến TS Lê Ngọc Thanh đã biên soạn chương XII về phương pháp xác suất, thống kê.

Cho dù tác giả đã hết sức cố gắng nâng cao chất lượng cuốn sách, tuy nhiên, không tránh khỏi thiếu sót, chúng tôi chân thành mong bạn đọc lượng thứ và góp ý, phê bình để cuốn sách ngày một thêm hay cho các lần xuất bản tiếp theo. Xin chân thành cám ơn bạn đọc.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ của tác giả: Bộ môn vật lý trái đất, trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, Tp HCM, hoặc địa chỉ của Chi Nhánh Nhà Xuất Bản Khoa Học Và Kỹ Thuật : 28 Đồng Khởi, Q.1, Tp. HCM.

Điện thoại: (08) 8225062 - 8296628.

Tác giả

CHƯƠNG I

CƠ SỞ LÝ THUYẾT VỀ TRƯỜNG TRỌNG LỰC CỦA TRÁI ĐẤT

§1. TRƯỜNG TRỌNG LỰC CỦA TRÁI ĐẤT

Trọng lực là lực làm cho mọi vật đều rơi về phía Trái đất. Theo định nghĩa, trọng lực là tổng hợp của lực hấp dẫn của Trái đất và lực ly tâm. Chính xác hơn là lực ly trục, sinh ra do sự quay hàng ngày của Trái đất xung quanh trục của nó. Ngoài ra còn phải kể đến những lực khác tác dụng vào mọi vật như lực hấp dẫn của Mặt trời, Mặt trăng và các hành tinh khác, lực hấp dẫn của khối không khí dày đặc trong khí quyển. Nhưng vì những lực này rất bé so với lực hấp dẫn của Trái đất và lực ly tâm nên chúng ta bỏ qua chúng trong định nghĩa của trọng lực. Những lực này sẽ được xem như những lượng biến thiên nhỏ của trọng lực theo thời gian, gọi là nhiễu. Trường trọng lực được hiểu nghĩa rộng bao gồm thế, trọng lực và các đạo hàm các bậc của nó.

Theo định luật vạn vật hấp dẫn của Newton (Niutơn), hai chất điểm có khối lượng m_1 và m_2 ở cách nhau một khoảng là r, hút nhau với một lực có trị số bằng:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (1.1)$$

Trong đó G là hằng số hấp dẫn.

Hệ SI: $G = (6{,}673 \pm 0{,}003).\ 10^{-11}\ m^3/kg\ s^2$

Hệ GGS: $G = (6{,}673) \pm 0{,}003)\ .\ 10^{-8}\ cm^3/g.s^2$

Thứ nguyên của G được xác định theo định luật Newton II:

$$F = ma$$

Theo đó, thứ nguyên [F] = [khối lượng]x[chiều dài]x[thời gian]$^{-2}$

Để lực F ở (1.1) cũng có thứ nguyên như trên, thì G phải có thứ nguyên như sau:

$$[G] = [\text{khối lượng}]^{-1}\,[\text{chiều dài}]^{3}\,[\text{thời gian}]^{-2}$$

G được xác định bằng thực nghiệm và chỉ phụ thuộc vào hệ đơn vị đo lường. Trong trọng lực học, người ta sử dụng $G = 6{,}673.10^{-8}\ cm^2/gs^2$.

Trường hợp tương tác giữa Trái đất và một chất điểm khối lượng đơn vị $m_1 = 1$ (khối lượng thử; đặt tại vị trí quan sát P), ta chia nhỏ Trái đất thành nhiều khối lượng vi phân dm. Lực tương tác giữa một khối lượng dm với m_1 theo định luật Newton (1.1) là:

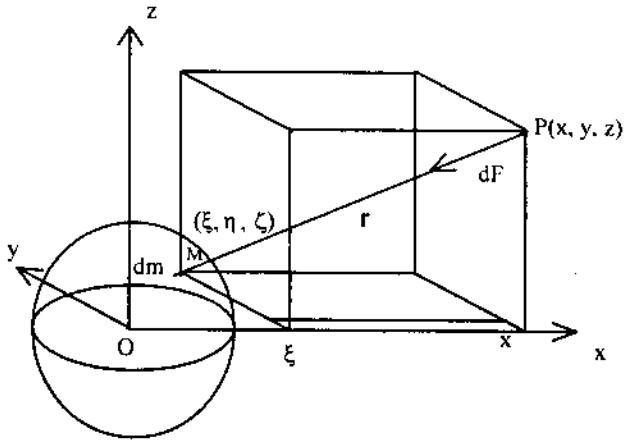
$$d\vec{F} = -G\frac{\vec{r}\,dm}{r^3} \qquad (1.2)$$

r = MP - khoảng cách từ khối lượng vi phân dm tại điểm M đến khối lượng đơn vị m_1 tại điểm P. Dấu trừ biểu hiện vectơ $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$ ngược chiều với vectơ lực hấp dẫn $d\vec{F}$.

Lực hấp dẫn của cả Trái đất đối với 1 đơn vị khối lượng m_1 đặt tại điểm quan sát P chính là tích phân khối:

$$\vec{F} = -G\int_{\Omega}\frac{dm}{r^3}\vec{r} \qquad (1.3)$$

Ω - thể tích của Trái đất.



Hình 1

Chọn hệ tọa độ x, y, z gắn chặt với Trái đất. Chọn gốc O tại khối tâm Trái đất. Mặt phẳng tọa độ xOy chọn trùng với mặt xích đạo của Trái đất. Trục z trùng với trục quay của Trái đất.

Ký hiệu x, y, z là tọa độ của P, còn ξ η φ là tọa độ của M.

Hình chiếu của vectơ lực $\vec{F}$ trên ba trục tọa độ bằng:

$$F_x = G\int\frac{\xi - x}{r^3}dm$$

$$F_y = G\int\frac{\eta - y}{r^3}dm \qquad (1.4)$$

$$F_z = G\int\frac{\zeta - z}{r^3}dm$$

Ngoài lực hấp dẫn $\vec{F}$ tác dụng vào 1 đơn vị khối lượng m_1, còn có lực ly tâm có trị số L tỷ lệ với bán kính quay ρ_0 (là khoảng cách từ m_1 đến trục quay của Trái đất) và với bình phương của vận tốc góc quay ngày đêm ω của Trái đất. Ký hiệu OP = ρ, ta có :

$$L = \rho_0\omega^2 \qquad (1.5)$$

$$\rho_0 = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho\cos\varphi \qquad (1.6)$$

Thành phần chiếu của vectơ $\vec{L}$ trên các trục tọa độ bằng:

$$L_x = L\cos(L, x) = \omega^2 x$$

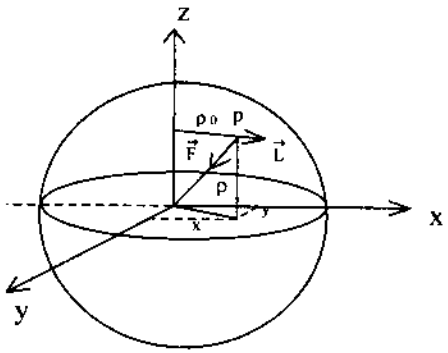
$$L_y = L\cos(L, y)) = \omega^2 y \qquad (1.7)$$

$$L_z = 0$$

Suy ra L_x và L_y bằng đạo hàm riêng của hàm số vô hướng

$$Q = \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right) \qquad (1.8)$$

$$L_x = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad , \quad L_y = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad (1.9)$$



Hình 2

Hàm Q gọi là thế của lực ly tâm, hay của gia tốc ly tâm.

Vận tốc góc của Trái đất quay quanh trục của mình có trị số:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164}$$

86164 là số giây trung bình mà Trái đất quay hết một vòng quanh trục so với các ngôi sao, được coi là hệ qui chiếu cố định.

Kết hợp (1.4) và (1.7) trọng lực được đồng nhất với gia tốc trọng trường $\vec{g}$ có các hình chiếu trên 3 trục tọa độ bằng:

$$g_x = G\int\frac{(\xi - x)}{r^3}dm + \omega^2 x$$

$$g_y = G\int\frac{(\eta - y)}{r^3}dm + \omega^2 y \qquad (1.10)$$

$$g_z = G\int\frac{(\xi - z)}{r^3}dm$$

Môđun của vectơ $\vec{g}$ bằng:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} \qquad (1.11)$$

Thế của trọng lực bằng tổng của thế hấp dẫn V và thế ly tâm Q:

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + Q(x, y) \quad (1.12)$$

Như vậy $g_x = \frac{\partial W}{\partial x}$, $g_y = \frac{\partial W}{\partial y}$, $g_z = \frac{\partial W}{\partial z}$ (1.13)

và $$\vec{g} = \frac{\partial W}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\vec{k} \quad (1.14)$$

Vectơ $\vec{g}$ không hướng vào khối tâm O của Trái đất do sự có mặt của lực ly tâm $\vec{L}$, mà chỉ hướng gần đúng vào khối tâm (hình 3).

Biểu thức (1.11) viết lại thông qua W sẽ là:

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2} \quad (1.15)$$

Khoảng cách giữa khối lượng m_1 và dm bằng:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

Vectơ $\vec{r}$ ngược chiều với lực vi phân $d\vec{F}$ (hướng về dm), do đó các cosin chỉ hướng của hai vectơ $d\vec{F}$ và $\vec{r}$ có dấu trái nhau:

$$\cos(dF,x) = -\cos(r,x) = -\frac{x-\xi}{r}$$

$$\cos(dF,y) = -\cos(r,y) = -\frac{y-\eta}{r}$$

$$\cos(dF,x) = -\cos(r,z) = -\frac{z-\xi}{r}$$

Ba thành phần chiếu của vectơ $d\vec{F}$ trên các trục x, y, z:

$$dF_x = G\frac{dm}{r^2}\cos(dF,x) = -G\frac{x-\xi}{r^3}dm = G\frac{\xi - x}{r^3}dm = \frac{\partial}{\partial x}G\frac{dm}{r}$$

$$dF_y = G\frac{dm}{r^2}\cos(dF,y) = -G\frac{y-\eta}{r^3}dm = G\frac{\eta - y}{r^3}dm = \frac{\partial}{\partial y}G\frac{dm}{r}$$

$$dF_z = G\frac{dm}{r^2}\cos(dF,z) = -G\frac{y-\zeta}{r^3}\,dm = G\frac{\zeta - z}{r^3}dm = \frac{\partial}{\partial z}G\frac{dm}{r}$$

Vậy thành phần của $\vec{F}$ trên các trục x, y, z bằng:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}G\int\frac{dm}{r}$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}G\int\frac{dm}{r} \qquad (1.16)$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}G\int\frac{dm}{r}$$

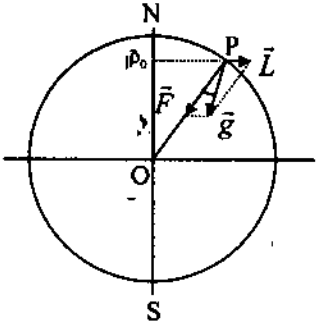
Thành phần của lực hấp dẫn theo một trục tọa độ bằng đạo hàm riêng của hàm số:

$$V = G\int\frac{dm}{r} \qquad (1.17)$$

theo các tọa độ tương ứng:

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z} \qquad (1.18)$$

Chúng ta gọi hàm số V này là thế của lực hấp dẫn của Trái đất đối với khối lượng đơn vị đặt tại P, là hàm của tọa độ quan sát x, y, z. Hàm thế là hàm cùng trị số, nhưng ngược dấu với thế năng.



Hình 3

Đơn vị đo g là Gal = 1cm/s^2 = 10^{-2} m/s^2 để kỷ niệm nhà bác học Galilê đã làm thí nghiệm về sự rơi tự do từ tháp nghiêng Pizê ở Ý. Đơn vị bé hơn Gal 1000 lần gọi là miligal: mGal = 1/1000 Gal.

Giả sử Trái đất có dạng cầu bán kính R, qua hình 3, ta thấy nếu tiến về cực Bắc N, $\varphi = 90^0$, khi đó L = 0 (vì $\rho_0 = 0$) và g sẽ có trị số cực đại g_p, bằng lực hấp dẫn. Càng đi về xích đạo

thì L càng lớn và tại đây $\vec{F}$ và $\vec{L}$ ngược chiều nhau, trừ nhau, làm cho g có trị số bé nhất g_e.

Khi ρ_0 = R - bán kính, tại xích đạo, lực ly tâm đạt giá trị cực đại và bằng :

$$\omega^2 R = 3{,}4 \text{ Gal}$$

Nghĩa là g giảm một lượng 3,4 Gal khi ta đi từ cực về xích đạo.

Tại vị trí có φ giữa 0° và 90^0 thì lực ly tâm bằng $\omega^2 R \cos\varphi$.

Lực ly tâm làm cho Trái đất phình ra ở xích đạo, làm cho R tăng thành a – bán trục lớn của ellipsiod. Lực ly tâm cũng tăng thêm một lượng, do đó làm cho trọng lực bé hơn ở cực một lượng nữa là 1,7 Gal. Kết quả tổng chênh lệch giữa cực và xích đạo là 5 Gal. Cụ thể ở xích đạo g_e = 978 Gal còn ở cực g_p = 983 Gal.

Tỷ số $$\beta = \frac{g_p - g_e}{g_e} = \frac{1}{189}$$

§2. KHAI TRIỂN THẾ CỦA TRỌNG LỰC THÀNH CHUỖI HÀM CẦU

Theo định nghĩa thế của trọng lực bằng:

$$W(x, y, z) = G\int_{\Omega}\frac{\delta d\Omega}{r} + \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right) \qquad (1.19)$$

Đây là biểu thức chính xác của thế trọng lực. Nhưng trong thực tế, không thể tính W bằng biểu thức này được, vì ta không biết sự phân bố của đất đá trong Trái đất (không biết mật độ δ như hàm của x, y, z và không biết cả dạng chính xác của Trái đất, tức không biết thể tích Ω). Nhưng, có thể nhận được thế W của trọng lực ở dạng gần đúng bằng cách đưa (1.16) về dạng chuỗi hàm cầu. Những hệ số của chuỗi này có thể xác định bằng thực nghiệm.

Để khai triển (1.19) thành chuỗi hàm cầu, trước tiên ta khai triển $\frac{1}{r}$ trong (1.19) thành chuỗi hàm cầu. Ngoài hệ tọa độ Descartes chọn như trên, còn có hệ tọa độ cực ρ, φ, λ có gốc cũng tại 0. Tọa độ ρ có thể coi như khoảng cách cực, còn φ, λ là vĩ tuyến và kinh tuyến của điểm quan sát. Giữa hệ tọa độ vuông góc và hệ tọa độ cầu có mối liên hệ:

$$x = \rho \cos \varphi \cos\lambda$$

$$y = \rho \cos \varphi \sin\lambda$$

$$z = \rho \sin \varphi$$

Chúng ta hãy xét thế trọng lực W của Trái đất quan sát tại điểm $P(\rho, \varphi\ \lambda)$ trong không gian ngoài gồm tổng của thế hấp dẫn Newton của Trái đất và thế ly tâm xác định tại P.

Trước tiên, chúng ta hãy xét riêng thế hấp dẫn Newton quan sát tại điểm P nói trên.

Thể tích vi phân $d\Omega$ của Trái đất được đặt tại điểm chạy M $(\rho_1, \varphi_1, \lambda_1)$ nằm trong thể tích Ω của Trái đất và được biểu diễn qua tọa độ điểm của chạy ρ_1, φ_1, λ_1 như sau :

$$d\Omega = \rho_1^2 \cos\varphi_1 d\varphi_1\, d\lambda_1\, d\rho_1$$

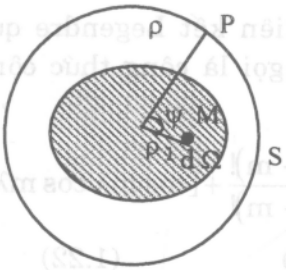
Đại lượng $\frac{1}{r}$ trong biểu thức tích phân của thế hấp dẫn có thể khai triển thành chuỗi đa thức Legendre (Lơ giăng) như sau:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 + 2\rho\rho_1 \cos\psi}} = \frac{1}{\rho\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2 - 2\frac{\rho_1}{\rho}\cos\psi}}$$

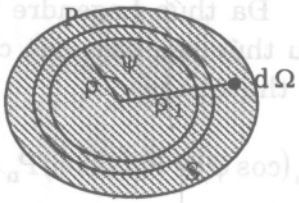
$$= \frac{1}{\rho}\sum_{nủ=0}^{\infty}\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^n P_n(\cos\psi) \qquad (1.20)$$

Ở đây góc ψ là góc hợp bởi hai bán kính vectơ ρ và ρ_1 như hình 4.

Như chuỗi MacLaurin (Mác Loren), chuỗi (1.20) cũng hội tụ với bán kính $\rho_1 < \rho$. Vì vậy ta chỉ sử dụng chuỗi này khi quan sát ở không gian ngoài $\rho > \rho_1$. Nếu dựng một quả cầu S có bán kính là ρ thì Trái đất sẽ hoàn toàn nằm gọn trong quả cầu này (hình 4).



Hình 4



Hình 5

Trường hợp điểm quan sát nằm trong thể tích Trái đất, thì quả cầu bán kính ρ sẽ cắt Trái đất, chia nó ra làm ba phần:

– Phần nằm ngoài quả cầu có $\rho_1 > \rho$ là những khối lượng "dư".

– Phần nằm bên trong quả cầu $\rho_1 < \rho$ có dạng hình cầu.

– Phần nằm trong lớp cầu mỏng có độ dày $\pm\, d\rho$ so với mặt cầu S

Đối với thế của phần nằm trong quả cầu S, ta áp dụng chuỗi (1.20) bình thường. Chuỗi này hội tụ đối với phần này.

Đối với thế của phần nằm ngoài quả cầu S, ta khai triển $\frac{1}{r}$ thành chuỗi sau:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho_1\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2 - 2\frac{\rho}{\rho_1}\cos\psi}} = \frac{1}{\rho_i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\rho_i}\right)^n P_n(\cos\psi) \qquad (1.21)$$

Vì $\rho < \rho_1$ nên chuỗi này hội tụ với bán kính ρ.

Đối với phần 3 là lớp cầu mỏng, khi cho $d\rho \to 0$ thì thế hấp dẫn của lớp này sẽ không đáng kể và có thể bỏ qua.

Như vậy thế hấp dẫn của Trái đất đối với điểm quan sát ở bên trong thể tích của Trái đất sẽ là tổng của thế do hai phần đầu gây nên. Chuỗi (120) và (1.21a) sẽ được áp dụng. Còn nếu quan sát ở không gian ngoài của Trái đất, thì chỉ áp dụng chuỗi (1.20).

Đa thức Legendre liên hệ với hàm liên kết Legendre qua biểu thức sau đây viết cho điểm P và M, gọi là công thức cộng (Lý thuyết thế).

$$P_n(\cos\psi) = P_n(\sin\varphi)P_n(\sin\varphi_1) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} + [\cos m\lambda\cos m\lambda$$

$$+ \sin m\lambda \sin m\lambda_1]\, P_{nm}(\sin\varphi)\, P_{nm}(\sin\varphi_1) \qquad (1.22)$$

Ở đây $P_{nm}(\sin\varphi)$ P_{nm} $(\sin\varphi_1)$ là những hàm liên kết Legendre. Đặt biểu thức (1.20) và (1.22) vào tích phân (1.19), sau một vài phép biến đổi ta nhận được biểu thức cho thế của trọng lực dưới dạng chuỗi hàm cầu phụ thuộc tọa độ vị trí quan sát :

$$W(\rho,\varphi,\lambda) = \frac{GM}{\rho}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{\rho}\right)^n (C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\sin\varphi\right]$$

$$+ \frac{\omega^2\rho^2}{3}[1 - P_2(\sin\varphi)] \qquad (1.23)$$

M – là khối lượng của Trái đất.

C_{nm} và S_{nm} là hằng số Stokes (Xtốc) không phụ thuộc vào tọa độ điểm quan sát mà chỉ phụ thuộc vào mật độ đất đá δ của Trái đất và thể tích Ω của nó, và là những đại lượng không có thứ nguyên:

$$C_{no} = \frac{1}{MR^n}\iiint_{\Omega}\delta\rho_1{}^n P_n(\sin\varphi_1)d\Omega$$

$$\begin{matrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{matrix} = \frac{2(n-m)!}{MR^n(n+m)!}\,\frac{1}{MR^n}\iiint_{\Omega}\delta\rho_1^n P_{nm}(\sin\varphi_1)\begin{matrix}\cos m\lambda_1 \\ \sin m\lambda_1\end{matrix}\, d\Omega \qquad (1.24)$$

Chỉ số n bắt đầu từ 2, vì ta chọn tâm Trái đất là gốc tọa độ nên $C_{10} = C_{11} = 0$. Theo (1.24), C_{00} có trị số bằng 1. Các hằng số Stokes được xác định bằng thực nghiệm như sau:

Một là đo giá trị g trên mặt đất tại hàng vạn điểm khác nhau, sau đó giải hệ phương trình (1.40) bằng phương pháp tối thiểu bình phương. Hai là quan sát nhiễu trong đường bay của vệ tinh nhân tạo dưới ảnh hưởng của trọng trường rồi phân tích điều hòa. Tuy nhiên, những hằng số trên chỉ xác định được một số hữu hạn. Ngày nay, kết hợp cả hai phương pháp người ta có thể xác định chuỗi đến bậc n = 360 (gồm n(n+3)/2 = 65340 điều hoà). Những hằng số bé bậc cao hơn nữa có trị số quá nhỏ và sai số xác định chúng lớn, nên kết quả nhận được kém tin cậy. Nếu bỏ qua những hằng số bậc cao này, thì ta có giá trị gần đúng cho thế của trọng lực W xác định qua vệ tinh.

Thành phần thứ hai trong công thức (1.19) là thế ly tâm biểu diễn qua hàm liên kết Legendre $P_{20}(\sin\varphi)$ như sau:

$$Q = \frac{\omega^2\rho_0^2}{2} = \frac{\omega^2\rho^2\cos^2\varphi}{2} = \frac{\omega^2\rho^2}{3}\left[1 - P_{20}\right] \qquad (1.25)$$

trong đó hàm liên kết Legendre bậc 2:

$$P_{20}(\sin\varphi) = \frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}$$

Ký hiệu $$q = \frac{\omega^2 R^3}{GM} \qquad (1.26)$$

Ta có thế ly tâm viết dạng sau:

$$Q = \frac{1}{3}\frac{GM}{\rho}q\left(\frac{R}{\rho}\right)^{-3}\left[1 - P_{20}\right] = \frac{1}{2}\frac{GM}{\rho}q\left(\frac{R}{\rho}\right)^{-3}(1 - \sin^2\varphi) \qquad (1.27)$$

§3. GEOID VÀ SPHEROID

Nếu buộc hàm thế của trọng lực (1.23) phải bằng một hằng số bất kỳ C, ta có phương trình của một mặt đẳng thế:

$$W(\rho, \varphi, \lambda) = C \qquad (1.28)$$

Cho C những giá trị C_1, C_2, C_3... khác nhau, ta sẽ nhận được một họ các mặt đẳng thế khác nhau của trọng lực. Những mặt đẳng thế này không cắt nhau. Trọng lực bao giờ cũng hướng vuông góc với mặt đẳng thế, nghĩa là có phương theo pháp tuyến ngoài $\vec{n}$ của mặt đẳng thế, nhưng ngược chiều. Như vậy, trọng lực có giá trị bằng đạo hàm của thế W theo phương của pháp tuyến n:

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n} \qquad (1.29)$$

Dấu trừ có nghĩa trọng lực có hướng ngược với hướng pháp tuyến ngoài của mặt đẳng thế (ngược với cả trục chiều cao h hướng từ mặt đất lên).

Ta thấy khoảng cách ∂n giữa hai mặt đẳng thế trong (1.29) thay đổi tỷ lệ nghịch với gia tốc trọng trường g. Ở cực Bắc và Nam của Trái đất, g có giá trị lớn nhất, vậy khoảng cách giữa hai mặt đẳng thế ở đó cũng bé nhất và các mắt đẳng thế phân bố khít nhau.

Trong vô số các hằng số ta có thể tìm ra một hằng số C_0 sao cho mặt đẳng thế xác định bởi C_0 trùng với mặt đại dương (phải trùng nhau vì mặt đại dương xác lập theo mặt đẳng thế của trọng lực Trái đất). Mặt đẳng thế trùng với mặt đại dương được gọi là geoid (geôit). Geoid trùng với mặt đại dương không có sóng và kéo dài tiếp tục vào trong lục địa, đó là một mặt kín có hình dạng rất phức tạp chứ không phải là một mặt hình học đơn giản như ellipsoid, do bất đồng nhất của cấu trúc bên trong Trái đất và địa hình phức tạp trên bề mặt Trái đất gây nên. Geoid có thể được xác định qua thế trọng lực hoặc qua dị thường trọng lực. Trong trắc địa cao cấp (trắc địa toàn cầu), nhiệm vụ xác định hình thể của Trái đất được quan niệm là bài toán xác định mặt geoid. Dạng của geoid được coi là dạng của Trái đất. Tuy nhiên, mặt geoid hình dạng phức tạp khó giải các bài toán hình học trên đó, nên trong trắc địa cao cấp, người ta còn xem Trái đất là một ellipsoid đều đặn và chọn mặt ellipsoid làm mặt chuẩn để giải các bài toán trắc địa. Trái đất dạng hình học đơn giản như vậy gọi là Trái đất bình thường (normal Earth). Khái

niệm về geoid đã được nhà vật lý Đức Listing đưa ra năm 1873. Phương trình của geoid có dạng :

$$W(\rho, \varphi, \lambda) = C_O \qquad (1.30)$$

Những tọa độ ρ, φ, λ thỏa phương trình này là những tọa độ của những điểm nằm trên mặt geoid. Gọi tọa độ của một điểm nằm trên mặt geoid là ρ_i, φ_i, λ_i. Thay các tọa độ này vào phương trình (1.30), và sử dụng (1.23) ta có:

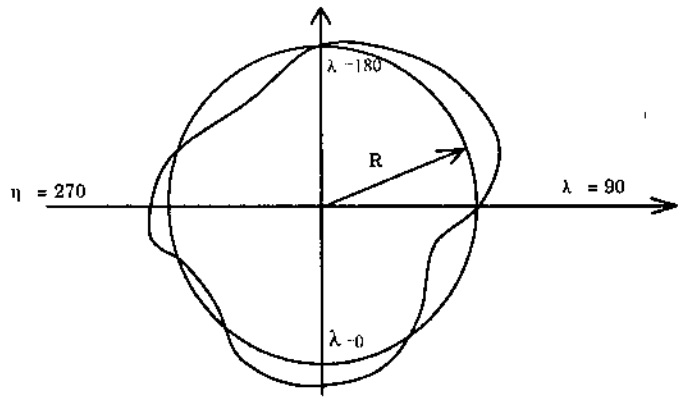
$$\frac{GM}{\rho_i}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{\rho_i}\right)^n\left(C_{nm}\cos m\lambda_i + S_{nm}\sin\lambda_i\right)P_{nm}(\sin\varphi_i)\right]$$

$$+\ \frac{\omega^2\rho^2}{3}\left[(1-P_{20}(\sin\varphi_i)\right] = C_o \qquad (1.31)$$

Vế bên trái của đẳng thức ta tính được và ký hiệu là Wo, là hằng, sau khi đã thay tọa độ nêu trên vào. Như vậy ta tìm được hằng số geoid $C_o = W_o$ – thế của trọng lực xác định cho điểm quan sát nằm trên geoid. Tương tự, lấy tọa độ rất nhiều điểm trên mặt biển (hoặc tọa độ đã qui về mặt biển) thay lần lượt vào (1.31) ta sẽ xác định được nhiều giá trị W_o và lấy trung bình. Giá trị trung bình của hằng số W_o xác định bởi các tọa độ đã qui về mặt geoid của 13 trạm quan sát vệ tinh bằng:

$$\overline{W}_o = 62637,23.\ 10^3\ m^2\ 6^{-2} \pm 0,08.\ 10^3\ m^2\ s^{-2}$$

Dạng geoid cường điệu theo lát cắt qua xích đạo được biểu diễn trên hình 6. Ta thấy geoid có dạng phức tạp.



Hình 6

Để có phương trình của geoid gần đúng đến đại lượng bậc nhất (là độ dẹt của Trái đất $\alpha = \frac{1}{300}$) ta chỉ giữ lại những đại lượng lớn hơn α^2. Cụ thể ta giữ lại trong chuỗi (1.31) thành phần đầu tiên $\frac{R^2}{\rho^2} C_{20} P_{20}$ cùng thế ly tâm. Phương trình mặt đẳng thế của trọng lực gần đúng bậc 1 bằng:

$$W = \frac{GM}{\rho}\left[1 + \frac{R^2}{\rho^2} C_{20} P_{20}\right] + \frac{\omega^2 \rho^2}{3}\left[1 - P_{20}\right] = C_o \qquad (1.32)$$

Trong đó $P_{20} = \frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}$; thay P_{20} bằng biểu thức của nó vào (1.32), ta có:

$$\frac{GM}{\rho}\left[1 + \frac{R^2}{\rho^2} C_{20}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{\omega^2 \rho^2}{3}\left[1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi + \frac{1}{2}\right] = C_o$$

(1.33)

Để xác định hằng C_o của mặt này, ta thay tọa độ của một điểm trên mặt đại dương như: $\varphi = 0$, $\rho = R$ vào (1.33) và sử dụng biểu thức $q = \frac{\omega^2 R^3}{GM}$, ta có:

$$C_0 = \frac{GM}{R}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{\rho^2} C_{20} + \frac{1}{2} q\right] \qquad (1.34)$$

Thay (1.34) vào (1.33) ta rút ra:

$$\frac{\rho}{R} = \frac{1 + \frac{R^2}{\rho^2} C_{20}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - 1\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} q\left(1 - \sin^2\varphi\right)}{1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{\rho^2} C_{20} + \frac{1}{2} q}$$

Khai triển mẫu số thành chuỗi và coi $\frac{R}{\rho} = 1$ ta có:

$$\frac{\rho}{R} = \left[1 + C_{20}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}q\left(1 - \sin^2\varphi\right)\right] \times \left[1 + \frac{1}{2}C_{20} - \frac{q}{2}\right]$$

Nhân hai biểu thức trong dấu móc và chỉ giữ lại đại lượng bậc nhất là C_{20} và q ta có:

$$\frac{\rho}{R} = 1 + \frac{1}{2}\left(3C_{20} - q\right)\sin^2\varphi \qquad (1.35)$$

Chúng ta sẽ chứng minh đây là phương trình của geoid chính xác đến các đại lượng bậc 1, là ellipsoid gần đúng hay spheroid.

Giả sử Trái đất là một ellipsoid quay, ta có phương trình:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Trong tọa độ cầu:

$\rho^2\dfrac{\cos^2\varphi}{a^2} + \rho\dfrac{\sin^2\varphi}{b^2} = 1$, cộng trừ vào một lượng $\dfrac{\rho^2}{a^2}\sin^2\varphi$

$$\frac{\rho^2}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{\rho^2}{a^2}\sin^2\varphi + \frac{\rho^2}{b^2}\sin^2\varphi - \frac{\rho^2}{a^2}\sin^2\varphi = 1$$

hay
$$\frac{\rho^2}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin^2\varphi\right) = 1$$

Theo định nghĩa $\dfrac{a-b}{a}$ là độ dẹt α của Trái đất, hay $b = a(1-\alpha)$. Sử dụng biểu thức này ta có:

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{1 - (1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} = 2\alpha + 3\alpha^2 + \ldots$$

Nếu giữ lại đại lượng bậc 1 (cỡ α), ta có phương trình spheroid:

$$\frac{1}{\rho^2} \approx \frac{1}{a^2}\left(1 + 2\alpha\sin^2\varphi\right)$$

a chính là bán kính xích đạo trung bình = R. Vậy ta có:

$$\frac{\rho^2}{R^2} = \left(1 - 2\alpha \sin^2 \varphi\right)$$

Hay gần đúng $\frac{\rho}{R} = 1 - \alpha \sin^2 \varphi$ (1.36)

So sánh (1.35) với (136), ta có thể suy ra:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(q - 3C_{20}\right) \qquad (1.37)$$

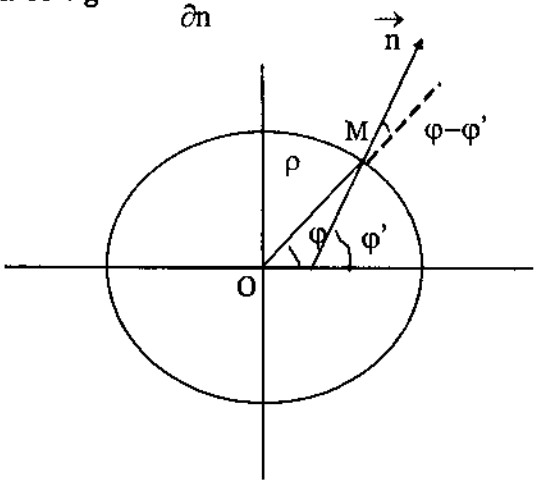
Vậy đại lượng $\frac{1}{2}q - \frac{3}{2}C_{20}$ chính là độ dẹt của spheroid.

Spheroid, nói nôm na là một quả cầu bị dẹt ở hai cực, đối xứng qua trục quay và xích đạo. Công thức (1.37) được sử dụng để xác định độ dẹt của Trái đất chính xác đến bậc 1.

§4. GIÁ TRỊ TRỌNG LỰC KHAI TRIỂN THÀNH CHUỖI HÀM CẦU

Hãy xem mặt đẳng thế geoid gần đúng là một spheroid. Vectơ $\vec{g}$ hướng theo trọng lực, được xem là vuông góc với mặt đẳng thế này, cũng là gần đúng, cùng phương ngược chiều với pháp tuyến ngoài $\vec{n}$ của mặt spheroid.

Theo (1.29) ta có : $g = -\frac{\partial W}{\partial n}$



Hình 7

Qua hình 7, ta thấy, phương của ρ xuất phát từ tâm Trái đất, được xác định bởi vĩ độ địa tâm φ, khác với phương của g theo phương pháp tuyến, xác định bởi vĩ độ địa lý φ'. Xét thành phần trọng lực theo ρ:

$$g_\rho = -\frac{\partial W}{\partial \rho} = g\cos(\varphi - \varphi') \qquad (1.38)$$

Hiệu của hai vĩ độ φ – φ' rất bé và đạt giá trị max khi cos (φ –φ') đạt giá trị min tại vĩ độ 45°, bằng 0,999996. Ở đây, ta sẽ phạm sai số 0,000005g (tối đa), là không đáng kể, nếu sử dụng biểu thức gần đúng:

$$g \approx -\frac{\partial W}{\partial \rho} \qquad (1.39)$$

Lấy đạo hàm biểu thức (1.23) theo ρ ta có giá trị trọng lực:

$$g = -\frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{GM}{\rho^2}\left\{1 + \sum_{n=2}\sum_{m=0}(n+1)\left(\frac{R}{\rho}\right)^n (C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)P_{nm} - \frac{2}{3}q\left(\frac{R}{\rho}\right)^{-3}[1 - P_{20}]\right\} \qquad (1.40)$$

§5. CÔNG THỨC TRỌNG LỰC BÌNH THƯỜNG

Trường trọng lực g của Trái đất được tạm chia thành trường bình thường γ và trường dị thường Δg, sao cho g = γ + Δg.

Trường bình thường biến thiên chậm, đều đặn nhưng với biên độ lớn, phản ánh trường của Trái đất bình thường, chịu ảnh hưởng của độ dẹt (và sự phình lớn theo kinh độ của Trái đất bình thường, nếu là ellipsoid ba trục). Trái lại, trường dị thường biến thiên nhanh với biên độ nhỏ hơn đặc trưng cho cấu trúc địa chất địa phương nhỏ ở gần mặt đất, thuộc vỏ Trái đất.

Thế bình thường được chọn gồm ba thành phần cơ bản: thế quả cầu, thế chịu ảnh hưởng của độ dẹt (hay phần phình ra gần xích đạo) phụ thuộc vĩ độ φ và thế ly tâm:

$$U(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{\rho}\left[1 + \frac{R^2}{\rho^2} C_{20} P_{20}\right] + \frac{\omega^2 \rho^2}{3}\left[1 - P_{20}\right] \qquad (1.41)$$

Để có giá trị trọng lực bình thường γ, ta lấy đạo hàm (1.41) theo ρ. Nói cách khác là giữ lại trong (1.40) ba thành phần lực tương ứng với ba loại thế nêu trên:

$$\gamma = \frac{GM}{\rho^2} + 3\frac{GM}{\rho^4} R^2 C_{20} P_{20}(\sin\varphi) - \frac{2}{3} q \left(\frac{R}{\rho}\right)^{-3} \frac{GM}{\rho^2}\left[1 - P_{20}\right] \qquad (1.42)$$

Để có giá trị của γ trên mặt spheroid chứ không phải trong không gian ngoài, ta thay vào (1.42) ρ ở (1.35) viết dạng sau:

$$\rho = R\left[1 + \frac{1}{3}(3C_{20} - q)(P_{20} + \frac{1}{2})\right]$$

$$= R\left[1 + (\frac{1}{2}C_{20} - \frac{1}{6}q) + (C_{20} - \frac{1}{3}q)P_{20}\right] \qquad (1.43)$$

Sau khi nhóm lại các đại lượng, ta có γ dạng chuỗi hàm cầu:

$$\gamma = \frac{GM}{R^2}\left[1 + \gamma_{00} + \gamma_{20} P_{20}(\sin\varphi)\right] \qquad (1.44)$$

Trong đó chỉ giữ lại các đại lượng bậc 1 (C_{20}, q), ta có:

$$\gamma_{00} = -\frac{1}{3}q - C_{20} \quad ; \quad \gamma_{20} = C_{20} + \frac{4}{3}q \ .$$

Hoặc nhóm gọn lại như sau:

$$\gamma = G_{00} + G_{20} P_{20}(\sin\varphi) \qquad (1.45)$$

Đây là công thức trọng lực bình thường dạng hàm cầu:

$$G_{00} = \frac{GM}{R^2}\left[1 + \gamma_{00}\right] = \frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{1}{3}q - C_{20}\right)$$

$$G_{20} = \frac{GM}{R^2}\gamma_{20} = \frac{GM}{R^2}\left(C_{20} + \frac{4}{3}q\right)$$

Thay P_{20} (sinφ) bằng biểu thức của nó $\frac{3}{2}\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\right)$ vào (1.44), sau khi nhóm, ta có dạng cổ điển quen thuộc:

$$\gamma = \gamma_e(1 + \beta \sin^2\varphi) \qquad (1.46)$$

Trong đó:

$$\gamma_e = \frac{GM}{R^2}\left[1 + \gamma_{00} - \frac{1}{2}\gamma_{20}\right] = \frac{GM}{R^2}\left(1 - q - \frac{3}{2}C_{20}\right) \qquad (1.47)$$

$$\beta = \frac{GM}{R^2}\frac{3}{2}\frac{1}{\gamma_e}\gamma_{20} = \frac{1}{\gamma_e}\frac{GM}{R^2}\left(2q + \frac{3}{2}C_{20}\right) \qquad (1.48)$$

Công thức trọng lực bình thường (1.46) ứng với một quả đất mô hình spheroid (hay ellipsoid quay), đã được Clairaut (Kle-rô, Pháp) tìm ra năm 1743 dựa vào trạng thái cần bằng thủy tĩnh mà Newton đã dựa vào để xác định dạng của thể lỏng quay, là ellipsoid hai bán trục. Biểu thức (1.46) còn được gọi là định lý Clairaut, mô tả sự phụ thuộc của trọng lực g vào vĩ độ địa lý.

Nếu thế bình thường xác định với độ chính xác cao hơn. Cụ thể trong biểu thức của thế W, nay ta giữ thêm điều hoà $C_{40}P_{40}(\sin\varphi)$, có biên độ lớn sau C_{20}, biến thiên theo vĩ độ φ, một cách đối xứng qua xích đạo thì ta có:

$$U = \frac{GM}{\rho}\left[1 + \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 C_{20}P_{20}(\sin\varphi) + \left(\frac{R}{\rho}\right)^4 C_{40}P_{40}(\sin\varphi)\right] + \frac{\omega^2\rho^2}{3}\left[1 - P_{20}(\sin\varphi)\right]$$

Tương tự, lặp lại quá trình ta có:

$$\gamma = \frac{GM}{R^2}\left[1 + \gamma_{00} + \gamma_{20}P_{20}(\sin\varphi) + \gamma_{40}P_{40}(\sin\varphi)\right] \qquad (1.49)$$

Trong đó:

$$\gamma_{00} = -\frac{1}{3}q - C_{20} + \frac{3}{4}C_{40}\,;\ \gamma_{20} = C_{20} + \frac{4}{3}q$$

$\gamma_{40} = 3\,C_{40}$, (C_{40} bằng cỡ 1/1000 của C_{20}).

Hoặc (1.49) có thể viết lại dưới dạng:

$$\gamma = G_{00} + G_{20}P_{20}(\sin\varphi) + G_{40}P_{40}(\sin\varphi) \quad (1.50)$$

Trong đó: $G_{00} = \frac{GM}{R}\left[1+\gamma_{00}\right]; G_{20} = \frac{GM}{R^2}\gamma_{20}$

Thành phần mới: $G_{40} = \frac{GM}{R^2}\gamma_{40} = 3\frac{GM}{R^2}C_{40}$

Để có dạng cổ điển, ta thay P_{20} và P_{40} trong (1.50) bằng biểu thức của nó, biết rằng:

$$P_{40}(\sin\varphi) = \frac{1}{8}(35\sin^4\varphi - 30\sin^2\varphi + 3)$$

Sử dụng công thức lượng giác: $\sin^4\varphi = \sin^2\varphi - \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi$

Kết quả ta có:

$$\gamma = G_{00} - \frac{1}{2}G_{20} + \frac{3}{8}G_{40} + (\frac{3}{2}G_{20} + \frac{5}{8}G_{40})\sin^2\varphi - \frac{35}{32}G_{40}\sin^2 2\varphi$$

Nhóm lại các hệ số bên cạnh $\sin^2\varphi$ và $\sin^2 2\varphi$ ta có dạng cổ điển:

$$\gamma = \gamma_e(1 + \beta\sin^2\varphi - \beta_1\sin^2 2\varphi) \quad (1.51)$$

Trong đó:

$$\gamma_e = G_{00} - \frac{1}{2}G_{20} + \frac{3}{8}G_{40} = \frac{GM}{R^2}\left(1 - q - \frac{3}{2}C_{20} + \frac{15}{8}C_{40}\right) \quad (1.52)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma_e}(\frac{3}{2}G_{20} + \frac{5}{8}G_{40}) = \frac{1}{\gamma_e}\frac{GM}{R^2}\left(2q + \frac{3}{2}C_{20} + \frac{15}{8}C_{40}\right) \quad (1.53)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\gamma_e}\frac{35}{32}G_{40} = \frac{1}{\gamma_e}\frac{GM}{R^2}\frac{105}{32}C_{40} \quad (1.54)$$

Công thức trọng lực bình thường kiểu (1.51) cho ellipsoid quay gần đúng (spheroid) từ lâu đã được nhiều người đưa ra với các hệ số xác định từ số liệu trọng lực quan sát trên mặt đất.

Để xác định β, β_1, γ_e, người ta đã tiến hành đo trực tiếp giá trị g tại nhiều nơi trên mặt đất, rồi lập hệ phương trình dạng

(1.51) và giải bằng phương pháp tối thiểu bình phương. Dưới đây là một số công thức trọng lực bình thường dạng cổ điển:

Người đầu tiên là Helmert (Hen-mét, Đức) đưa ra công thức trọng lực bình thường vào năm 1884, trên cơ sở 108 số liệu trọng lực quan sát, công thức cổ điển dạng (1.46):

$$\gamma = 978{,}00\ (1 + 0{,}005310\sin^2\varphi) \qquad (1.55)$$

Vào những năm từ 1901 đến 1909 trên cơ sở 1603 phép đo tương đối trọng lực tại 9 khu vực trên Trái đất có vĩ độ khác nhau, Helmert đưa ra công thức trọng lực tương ứng với ellipsoid quay có độ dẹt $\alpha = 1/298{,}25$:

$$\gamma = 987{,}030\ (1 + 0{,}005302\sin^2\varphi - 0{,}000007\ \sin^2 2\varphi) \qquad (1.56)$$

Năm 1915, trên cơ sở lựa chọn 410 trong số 2000 giá trị trọng lực quan sát, Helmert đưa ra công thức trọng lực cho Trái đất bình thường như sau:

$$\gamma = 987{,}502[1 + 00{,}5285\sin^2\varphi - 0{,}00007\sin^2 2\varphi +$$

$$+ 0{,}0000018\cos^2\varphi\cos 2(\lambda + 17^\circ)] \qquad (1.57)$$

Công thức này tương ứng với một ellipsoid ba bán trục khác nhau có các độ dẹt $\alpha_1 = 1/295$; $\alpha_2 = 1/298$; $a_1 - a_2 = 230$m.

Năm 1930, Hội nghị Quốc tế về trắc địa tại Stockholm đã công nhận công thức Cassinis (Cát-xi-nhi, Ý) làm công thức trọng lực bình thường quốc tế:

$$\gamma = 978{,}049\ (1 + 0{,}0052884\sin^2\varphi - 0{,}0000059\sin^2 2\varphi) \qquad (1.58)$$

Công thức này xây dựng trên cơ sở khai triển công thức (1.66) của Pizetti–Somiglian (Pi–zét–ti, Xô–mi–len, Ý) thành chuỗi. Ellipsoid tương ứng có độ dẹt $\alpha = 1/297$ là ellipsoid của Hayford (Hây-pho), cũng được Hội nghi này chọn là ellipsoid quốc tế.

Các công thức trọng lực bình thường sau đó cũng đã được các tác giả khác lần lượt đưa ra:

Công thức của Zhongolovich (Giông- gô- lô- vich, Nga) 1952:

$$\gamma = 978{,}0573\ (1 + 0{,}0052837\ \sin^2\varphi - 0{,}0000059\sin^2 2\varphi) \quad (1.59)$$

với độ dẹt $\alpha = 1/296{,}6$.

Công thức của Heiskanen (Hây-xca-nen, Đức) 1957:

$$\gamma = 978{,}0497\ (1 + 0{,}0052902\sin^2\varphi + 0{,}0000059\sin^2 2\varphi) \quad (1.60)$$

và cho ellipsoid 3 bán trục:

$$\gamma = 978{,}00516\ [1 + 0{,}00529097\sin^2\varphi - 0{,}0000059\sin^2 2\varphi + $$
$$+ 0{,}0000106\cos^2\varphi\cos 2(\lambda + 6^o5)] \quad (1.61)$$

Công thức của Uotila (Uôt-ti-la, Mỹ) 1959:

$$\gamma = 978{,}04966\ (1 + 0{,}0052934\sin^2\varphi - 0{,}0000059\sin^2 2\varphi) \quad (1.62)$$

với độ dẹt $\alpha = 1/294{,}4$:

Công thức Groushinsky (Gru–sin-xki, Nga)

$$\gamma = 978{,}0531\ (1 + 0{,}0052883\sin^2\varphi - 0{,}0000059\sin^2 2\varphi) \quad (163)$$

với độ dẹt $\alpha = 1/297{,}0$

Công thức quốc tế, 1971:

$$\gamma = 978{,}0318\ (1 + 0{,}53024\sin^2\varphi - 0{,}0000059\sin^2 2\varphi) \quad (1.64)$$

Ở các nước xã hội chủ nghĩa cũ, công thức Helmert cho ellipsoid hai bán trục được sử dụng để tính di thường trọng lực. Còn ở Tây Âu, Mỹ và Nhật, v.v... công thức Cassinis được dùng rộng rãi. Dưới đây là hiệu số $\delta\gamma = \gamma_C - \gamma_H$ ứng với các vĩ độ khác nhau:

φ (độ)	0	10	20	25	30	35	40	45
δγ mgl	19,0	−18,7	−17,9	−17,3	−16,5	− 15,6	− 14,6	−13,4

φ (độ)	50	55	60	65	70	80	90
δγ mgl	−12,3	−11,1	−9,9	−8,8	−7,8	−6,3	−5,8

Ta thấy độ chênh lệch giữa hai công thức của Cassinis và Helmert đạt giá trị cực đại ở xích đạo – 19 mGal, đạt cực tiểu ở hai cực của Trái đất – 5,8 mGal.

Một số người đã cố gắng đưa ra công thức cho Trái đất dạng ellipsoid ba bán trục, nhằm chính xác hóa thêm dạng của Trái đất bình thường. Nhưng các công thức của họ đưa ra lại có kinh độ λ_o (vị trí phình) khác nhau xa, khiến người ta nghi ngờ và không sử dụng rộng rãi. Vì vậy công thức ellipsoid hai bán trục vẫn được sử dụng. Gọi ellipsoid là gần đúng, chính xác là spheroid chứ không còn là ellipsoid nữa, vì trong quá trình rút ra công thức, ta đã bỏ qua các số hạng bé bậc cao hơn bậc 1 (cỡ α). Công thức ứng với ellipsoid hai bán trục chính xác, chỉ có công thức khép kín của Pizetti- Somiglian có dạng:

$$\gamma = \frac{\gamma_e a \cos^2 \varphi + \gamma_p b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \qquad (1.65)$$

γ_e, γ_p - giá trị γ ở xích đạo và cực Trái đất. Hoặc dạng khác:

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + (\beta - \alpha - \alpha\beta)\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - (2\alpha - \alpha^2)\sin^2 \varphi}} \qquad (1.66)$$

Trọng lực vệ tinh phát triển mạnh đã góp phần chính xác hóa thêm công thức trọng lực bình thường. Công thức năm 1984 (WGS) do kết hợp trắc đạc laze độ cao geoid từ vệ tinh (altimeter) và quan sát trọng lực trên mặt đất kết hợp với trọng lực vệ tinh biểu diễn qua chuỗi hàm cầu đến bậc n = 180, có dạng tựa công thức của Pizetti - Somiglian:

$$\gamma = \frac{978032{,}67714\,(1 + 0.001931851386 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - 0.00669437999013 \sin^2 \varphi}} \qquad (1.67)$$

Độ dẹt của ellipsoid tương ứng : α = 1/298,257223563

§6. CÔNG THỨC TRỌNG LỰC BÌNH THƯỜNG DẠNG HÀM CẦU

Giải hệ phương trình (1.52), (1.53) và (1.54) ta thu được:

$$\left.\begin{aligned} G_{00} &= \gamma_e\left(1+\frac{1}{3}\beta-\frac{8}{15}\beta_1\right) \\ G_{20} &= \gamma_e\left(\frac{2}{3}\beta-\frac{8}{21}\beta_1\right) \\ G_{40} &= \gamma_e\frac{32}{35}\beta_1 \end{aligned}\right\} \quad (1.68)$$

Áp dụng (1.50) và (1.68), các công thức trọng lực bình thường cổ điển được viết lại dưới dạng hàm cầu như sau:

Công thức của Helmert (1.56) nay là:

$$\gamma = 979{,}75485 + 3{,}45440P_{20}(\sin\varphi) + 0{,}00626P_{40}(\sin\varphi) \quad (1.69)$$

Công thức của Cassinis (1.58) nay là:

$$\gamma = 979{,}77003 + 3{,}44601P_{20}(\sin\varphi) + 0{,}0052P_{40}(\sin\varphi) \quad (1.70)$$

Công thức quốc tế 1971 nay là:

$$\gamma = 979{,}75756 + 3{,}45508P_{20}(\sin\varphi) + 0{,}00528P_{40}(\sin\varphi) \quad (1.71)$$

§7. CÁC MÔ HÌNH TRỌNG TRƯỜNG TRÁI ĐẤT

Ngày nay, qua quan sát nhiều vệ tinh, người ta nhận được với độ tin cậy cao toàn bộ tham số của trường thế Trái đất, gồm: fM, R, q, ω, α, W_0 và toàn bộ hằng số Stokes C_{nm}, S_{nm} các bậc, tối đa n = 360. Với n = 18, giá trị dị thường trọng lực và độ cao geoid nhận được tương đương giá trị trung bình trên mạng ô vuông 10^0x10^0 theo kinh vĩ độ. Với n= 36 thì 5^0x5^0; n=180 thì 1^0x1^0. Với n = 360 thì trọng lực biến thiên với bước sóng cỡ 55 km dọc xích đạo.

Các tham số này cho phép xác định mọi thành phần của trọng trường Trái đất, ví dụ như thế W, trọng lực g và dị thường trọng lực Δg, độ cao geoid, gradient các loại, độ lệch dây dọi v.v... Từ đây có tên gọi cho hệ thống như vậy là "*Mô hình trọng trường Trái đất*" (Earth gravity model). Đài thiên văn

Smithsonian (SAO, Mỹ) đã lần lược công bố các mô hình trọng trường Trái đất Standard Earth : SE-II, SE-III, SE-IV. Trung tâm vũ trụ Goddard thuộc NASA (Mỹ) đã công bố các mô hình GEM-8, GEM-9, GEM-10, GEM-10B, GEM-T1, GEM-T2. Cơ quan không gian Châu Âu cũng đưa ra các mô hình GRIM-1, GRIM-2, GRIM-3, GRIM-L2.

CHƯƠNG II

DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC VÀ CÁC LOẠI HIỆU CHỈNH

§1. KHÁI NIỆM VỀ DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC

Giá trị trọng lực bình thường γ là giá trị trọng lực do một Trái đất mô hình dạng ellipsoid quay (hay spheroid), đồng chất hoặc gồm các lớp có mật độ là hằng khác nhau sinh ra. Trường bình thường thay đổi chậm, đều đặn phụ thuộc vào vĩ độ địa lý, phản ánh ảnh hưởng duy nhất của độ dẹt của Trái đất.

Trái đất thực có dạng khá phức tạp về địa hình: núi non, vực thẳm, đại dương, v.v... Bề mặt gồ ghề, phức tạp nói trên, gọi là bề mặt vật lý của Trái đất. Ngay cả cấu trúc địa chất bên trong cũng rất phức tạp, với mật độ đất đá phong phú, tuy rằng có qui luật phân bố chung. Điều đó ảnh hưởng đến giá trị trọng lực g đo được trên mặt đất, biến thiên cũng rất phức tạp theo vị trí quan sát.

Lượng biến thiên này của trọng lực phản ánh cấu trúc bề mặt lẫn cấu trúc địa chất bên trong (nông và sâu) của Trái đất. Nó có biên độ nhỏ hơn nhiều so với toàn bộ giá trị trọng lực g. Do đó, việc theo dõi toàn bộ giá trị g là không cần thiết. Ta chỉ cần theo dõi biến thiên của hiệu số $g - \gamma$ gọi là dị thường trọng lực Δg. Ảnh hưởng của độ dẹt Trái đất đã được đưa vào giá trị trọng lực bình thường nên không thể hiện trong dị thường trọng lực:

$$\Delta g_A = g_A - \gamma_A \qquad (2.1)$$

Δg_A – dị thường trọng lực, về nguyên tắc là hiệu số giữa giá trị trọng lực bình thường và giá trị trọng lực quan sát, xác định tại cùng một điểm quan sát A.

Vì giá trị g phản ánh khối lượng phân bố trên bề mặt vật lý của Trái đất lẫn trong lòng Trái đất, và cả độ cao quan sát so với bề mặt chuẩn (ellipsoid hoặc geoid) nên dị thường trọng lực như (2.1) chưa phản ánh duy nhất cấu trúc địa chất dưới mặt

quan sát, nên chưa thể đem phân tích, giải đoán địa chất nào hết, mà phải thực hiện hiệu chỉnh trước. Trước hết, người ta hiệu chỉnh sao cho g và γ phải ở cùng mức so sánh như trên, và sau là điều chỉnh sự phân bố khối lượng trên bề mặt Trái đất thực sao cho giống như mặt Trái đất bình thường ellipsoid, không có sự lồi, lõm, để cuối cùng, dị thường trọng lực chỉ phản ánh cấu trúc dưới mặt chuẩn ellipsoid. Do đó, người ta phải thêm vào vế bên phải của (2.1) một tổng đại số các loại hiệu chỉnh $\sum\delta_{gi}$. Trong đó δ_{gi} là một loại hiệu chỉnh nào đó. Số lượng hiệu chỉnh tùy thuộc vào loại dị thường ta muốn thành lập.

§2. HIỆU CHỈNH KHOẢNG KHÔNG

Muốn so sánh g với γ thì chúng phải được xác định ở cùng một độ cao tính từ một gốc 0 (không) qui ước. Trên thực tế, γ được xác định trên mặt spheroid. Còn g có thể quan sát ở trên núi hay trên máy bay, có độ cao H so mặt spheroid. Trên nguyên tắc, ta có thể quy giá trị γ lên vị trí quan sát g hoặc quy g xuống vị trí xác định γ là mặt spheroid. Tuy nhiên sự biến thiên của g ra sao dọc theo chiều cao ta không biết, tức không biết gradient địa phương theo độ cao của g là $\frac{\partial g}{\partial H}$, mà chỉ biết $\frac{\partial \gamma}{\partial H}$, là gradient của trường bình thường. Do đó, người ta đưa một hiệu chỉnh vào giá trị của γ để quy giá trị γ lên vị trí quan sát:

$$\Delta g = g - \left(\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial H} H\right) \qquad (2.2)$$

Cho rằng Trái đất gần đúng là quả cầu khối lượng M, thì trên mặt địa cầu: $\gamma = G\frac{M}{R^2}$.

Để có gradient, ta lấy đạo hàm γ (R) theo R vì dH = dR:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial R} = -2G\frac{M}{R^3} = -\frac{2\gamma}{R}$$

Vậy, hiệu chỉnh cho khoảng H giữa hai vị trí quan sát γ và g là:

$$\delta g = -\frac{2\gamma}{R}H \qquad (2.3)$$

Cho giá trị trung bình γ = 980,6 Gal, R = 6370 km ta có:

$$\delta g = -0{,}3086\ H \qquad (2.4)$$

Trong công thức này, H tính bằng mét, R bằng km, thì δg nhận được bằng mGal. Đây là hệ đơn vị hỗn tạp theo truyền thống. Vậy cứ lên cao một mét thì trọng lực giảm một lượng khoảng – 0,3 mGal. Nếu di chuyển xuống một mét, gần tâm Trái đất hơn thì δg sẽ tăng là + 0,3 mGal.

Hiệu chỉnh trên được Faye (Phai) đưa ra, nên có tên gọi là hiệu chỉnh Faye hay còn gọi là hiệu chỉnh khoảng không tự do. Thực ra, Faye sử dụng hiệu chỉnh này đi kèm với hiệu chỉnh địa hình chứ không phải như trên. Hiệu chỉnh khoảng không (chân không) cũng không chính xác như tên gọi, vì thực ra còn lớp không khí dầy đặc của khí quyển có khối lượng hấp dẫn. Dị thường sử dụng hiệu chỉnh này gọi là dị thường khoảng không.

$$\Delta g_{kk} = g - (\gamma - 0{,}3086\ h) = g - \gamma + 0{,}3086h \qquad (2.5)$$

Faye quan niệm là thực hiện hiệu chỉnh giá trị g để qui nó xuống vị trí xác định γ trên mặt spheroid tức:

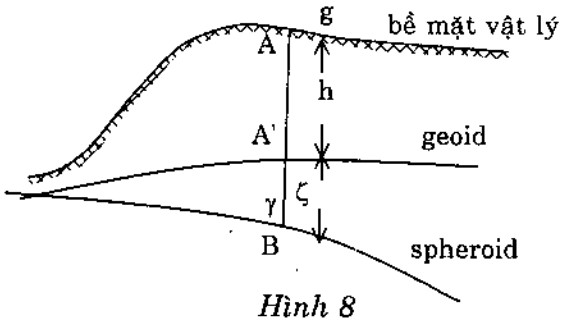
$$\Delta g_{kK} = (g + 0{,}3086\ h) - \gamma \qquad (2.6)$$

Ông xem gần đúng gradient của g là $\frac{\partial g}{\partial R} \approx -0{,}3086$. Như vậy, thay vì quy giá trị γ lên điểm quan sát, người ta quy giá trị g xuống mặt spheroid. Nhưng trên thực tế mặt spheroid khó xác định, người ta chỉ xác định được mặt biển bằng nivô, tức mặt geoid. Do đó giá trị g được qui về mặt geoid dọc theo độ cao h so với mặt này. Vậy, kết quả γ xác định trên mặt spheroid, còn g lại xác định trên mặt geoid. Giữa hai mặt này cách nhau một khoảng cách ζ gọi là độ cao geoid. Độ cao ζ thay đổi phức tạp theo vị trí quan sát và đạt tối đa hơn 100 m. Dị thường như vậy gọi là dị thường "tạp" thay vì sử dụng dị thường "sạch" là dị thường mà g và γ xác định ở cùng một độ cao. Trên thực tế,

người ta sử dụng và chấp nhận dị thường tạp. Nhưng người ta bỏ qua ζ, coi nó bằng không, có nghĩa mặt so sánh spheroid và geoid nay coi trùng chập làm một. Hay nói cách khác đó là dị thường sạch gần đúng.

Độ cao $H = \zeta + h$, gọi là độ cao trắc địa, chính là độ cao mà lẽ ra ta quy g thẳng về mặt spheroid, nhưng trên thực tế đã không được áp dụng như đã nói, mà chỉ áp dụng độ cao h so với mặt biển (geoid).

Vậy, dị thường trọng lực (tạp) tại tất cả các vị trí được thống nhất thành lập cho mặt biển (geoid) và các bản đồ trọng lực được xây dựng cho mặt chuẩn này.



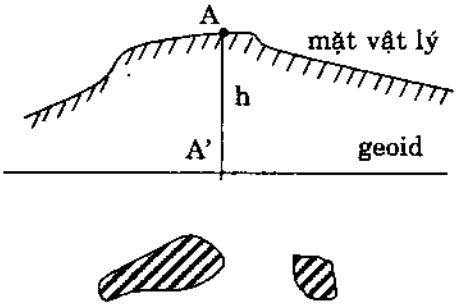
Hình 8

Hình 8 cho thấy g đo tại A, được quy về A', còn γ xác định tại B cách A' một khoảng ζ. Người ta qui g về mặt biển, thành lập dị thường trọng lực tại mặt biển và thống nhất xây dựng bản đồ trọng lực cho mặt biển.

§3. Ý NGHĨA VẬT LÝ CỦA HIỆU CHỈNH KHOẢNG KHÔNG.

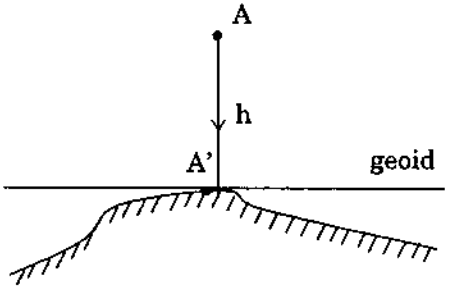
Trong quá trình thành lập dị thường khoảng không, ta không được phép tự tiện lấy đi hoặc thêm vào Trái đất khối lượng đất đá nào. Hiệu chỉnh khoảng không chỉ quy giá trị quan sát g về gần tâm Trái đất hay xa khỏi tâm Trái đất mà thôi. Một khi khối lượng đất đá xung quanh điểm quan sát (núi đồi) và các dị khối trong vỏ Trái đất không bị động chạm đến, thì chúng vẫn ở cách người quan sát như cũ sau khi di chuyển giá trị g từ điểm quan sát xuống mặt geoid. Tất cả khối lượng,

chẳng hạn núi đồi hoặc khoáng mỏ đều bị dịch chuyển tịnh tiến theo điểm quan sát khi ta thực hiện hiệu chỉnh khoảng không (hình 10).



Hình 9

Trước khi hiệu chỉnh khoảng không



Hình 10

Sau khi hiệu chỉnh khoảng không

Dị thường khoảng không phản ánh lực hấp dẫn của khối lượng vật chất nằm phía trên mặt geoid có độ cao h so với mặt geoid lẫn cấu trúc địa chất sâu. Dị thường khoảng không Δg_{kk} thay đổi phụ thuộc mạnh vào độ cao h. Trên địa hình núi đồi càng cao, dị thường khoảng không càng lớn. Sự phụ thuộc vào độ cao h của dị thường khoảng không làm cho dị thường này không có hiệu quả trong việc phân tích địa chất. Bởi vì sự phụ thuộc vào độ cao h có thể át cả sự phụ thuộc vào cấu trúc địa chất lớn. Riêng ở đồng bằng, nơi mà địa hình bằng phẳng, thì dị thường khoảng không ít chịu ảnh hưởng của độ cao điểm quan sát. Còn nói chung, dị thường khoảng không thường phụ thuộc rõ rệt vào độ cao điểm quan sát. Đường cong dị thường khoảng không có dạng lặp lại hình dáng của địa hình.

§4. HIỆU CHỈNH LỚP TRUNG GIAN VÀ HIỆU CHỈNH BOUGUER (BUGHÊ).

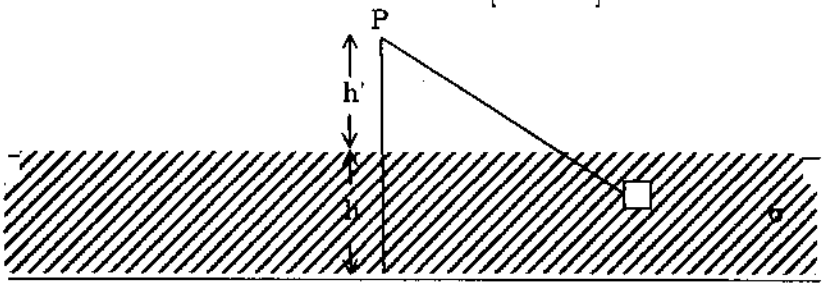
Để dị thường trọng lực phản ánh cấu tạo địa chất dưới mặt quan sát, thì nguyên tắc, điều kiện đo g trên Trái đất thực phải giống điều kiện xác định γ trên Trái đất bình thường, nghĩa là

không có khối lượng bên trên mặt geoid. Tuy nhiên, trên thực tế, trên Trái đất thật, luôn luôn có khối lượng dư vượt mặt biển, hoặc thiếu khối lượng trong biển và đại dương. Vì vậy, chỗ dư khối lượng, ta phải lấy đi và chỗ thiếu, ta phải bù đắp thêm khối lượng, sao cho mặt Trái đất thực được đều đặn như ở Trái đất bình thường. Mỗi một động tác di dời khối lượng, đều ứng với một hiệu chỉnh. Giả sử ta có khối lượng dư trên mặt geoid là một lớp đất đá có độ dầy h không đổi dài vô tận. Điểm quan sát P nằm phía trên lớp này và cách mặt lớp một khoảng h_1. Hướng trục tọa độ z thẳng đứng xuống dưới, theo phương trọng lực. Sức hấp dẫn của lớp này được tính theo tích phân:

$$\delta g(P) = G\int \frac{\zeta}{r^3}dm = G\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{h_1}^{h+h_1}\frac{\zeta d\xi d\eta d\zeta}{\left[\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.6a)$$

Trong đó σ là mật độ đất đá. Trong tọa độ trụ ta có:

$$\delta g(P) = G\sigma\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{h_1}^{h_1+h}\frac{\zeta\rho d\varphi d\rho d\zeta}{\left[\rho^2+\zeta^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.7)$$



Mặt geoid

Hình 11: Lớp trung gian có độ dày h, rộng vô tận

Sau khi lấy tích phân theo φ và sau đó theo ρ ta có :

$$\delta g(p) = -2\pi G\sigma\int_{h_1}^{h_1+h}\frac{\zeta}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}\Big|_{\zeta}^{\infty}d\zeta \qquad (2.8)$$

$$= 2\pi G\sigma[(h + h_1) - h_1] = 2\pi G\sigma\, h$$

Ta thấy thành phần lực hấp dẫn theo phương thẳng đứng z của lớp trung gian dài vô tận không phụ thuộc vào độ cao h_1 của điểm quan sát đến mặt lớp mà chỉ phụ thuộc vào bề dầy h của lớp trung gian. Thay giá trị bằng số của π, G vào ta có:

$$\delta g = 0{,}0419\ \sigma h \qquad (2.9)$$

Nếu lấy h bằng mét, σ bằng g/cm^3 thì nhận được δg bằng mGal (đơn vị truyền thống).

Khi loại bỏ lớp trung gian, dị thường trọng lực nhận được một hiệu chỉnh âm – 0,0419 σh và sẽ giảm.

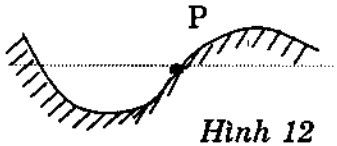
Hiệu chỉnh khoảng không cộng với hiệu chỉnh lớp trung gian gọi là hiệu chỉnh Bouguer (Bu ghê) và dị thường tương ứng có tên gọi là dị thường Bouguer:

$$\Delta g_B = g - \gamma + (0{,}3086 - 0{,}0419\ \sigma)\ h \qquad (2.10)$$

Dị thường Bouguer biến thiên phụ thuộc vào độ cao h yếu hơn dị thường khoảng không, vì ảnh hưởng của lớp trung gian (chứa h) đã bị loại khỏi dị thường. Dị thường Bouguer khu vực biến thiên đều đặn ngay cả ở vùng núi cao và dị thường Bouguer địa phương phản ánh cấu trúc địa chất, khoáng sản dưới vị trí quan sát. Dị thường Bouguer nhìn chung, có dạng đảo ngược của dị thường khoảng không và biến thiên với biên độ nhỏ hơn. Vùng cao thì dị thường Bouguer thường âm. Mật độ đất đá σ trung bình là 2,67.

§5. HIỆU CHỈNH ĐỊA HÌNH.

Như trên, ta đã giả sử lớp trung gian là một lớp bằng phẳng vô tận, chiều dầy chỗ nào cũng bằng h. Nếu như mặt lớp trung gian có địa hình gồ ghề thì trước khi thực hiện hiệu chỉnh lớp trung gian, ta phải hiệu chỉnh ảnh hưởng của địa hình gồ ghề. Như vậy tức là đưa địa hình thế trở về trường hợp bằng phẳng, sau đó mới làm hiệu chỉnh lớp trung gian. Chọn mặt phẳng ngang đi qua điểm quan sát P làm chuẩn để san bằng địa hình. Phần đất đá nhô cao hơn mặt này làm giảm giá trị trọng

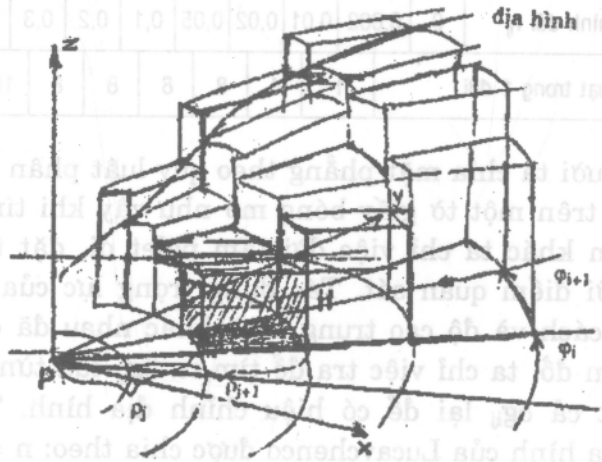


Hình 12

lực. Khi hiệu chỉnh xong, giá trị trọng lực sẽ tăng lên, nhận một hiệu chỉnh dương. Còn chỗ khuyết đất, thấp hơn mặt phẳng, khi hiệu chỉnh xong cũng sẽ làm tăng giá trị trọng lực. Vì chỗ khuyết ấy sẽ được lấp một khối lượng đất đá sao cho cao bằng điểm P. Tóm lại, nói chung cả hai trường hợp, hiệu chỉnh địa hình luôn dương và làm tăng giá trị trọng lực quan sát.

Để tính ảnh hưởng của địa hình đến giá trị trọng lực, người ta thay thế địa hình phức tạp bằng những hình khối đơn giản có thể tính tích phân được. Tổng các lực tác dụng của từng khối sẽ cho ta ảnh hưởng của toàn bộ địa hình xung quanh vị trí quan sát.

Lấy điểm quan sát P làm gốc tọa độ trụ. Các hình khối được xây dựng trên mặt phẳng đi qua điểm P, có đáy là hình quạt, có chiều cao bằng chiều cao trung bình của địa hình trong phạm vi đáy hình quạt của khối.



Hình 13: Xấp xỉ địa hình bằng tập họp các khối lăng tru

Trong tọa độ trụ ảnh hưởng về lực hấp dẫn theo phương thẳng đứng bằng:

$$\delta_{gij}(0,0,0) = G\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}\int_{r_j}^{r_{j+1}}\int_{0}^{H}\frac{\zeta r\,d\varphi\,dr\,d\zeta}{(r^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.11)$$

Lấy tích phân này theo φ, r và ζ ta có:

$$\delta_{gij}(0,0,0) = -\frac{2\pi G\sigma}{n}\left[r_{j+1} - r_j + \sqrt{r_j^2 + H^2} - \sqrt{r_{j+1}^2 + H^2}\right] \qquad (2.12)$$

Hiệu số góc $\varphi_{i+1} - \varphi_i = \frac{2\pi}{n}$ = hằng số.

n là số hình quạt trên một đới (vành khuyên). Hiệu chỉnh địa hình bằng tổng tác dụng về trọng lực của tất cả hình khối được chia ra trên mặt phẳng đi qua P.

$$\delta g = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n=1}\delta g_{ij} = \frac{2\pi G\sigma}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}\left(r_{j+1} - r_j + \sqrt{r_j^2 + H_{ij}^2} - \sqrt{r_{j+1}^2 + H_{ij}^2}\right)$$

(2.13)

Đáy của mỗi khối trụ không bằng nhau vì mặt phẳng quan sát được chia theo ρ và n theo cách như sau:

Bán kính hình đới r_{ij}	0	0,002	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0	1,5
Số hình quạt trong 1 đới	1	4	8	8	8	8	8	16	16	16	16	

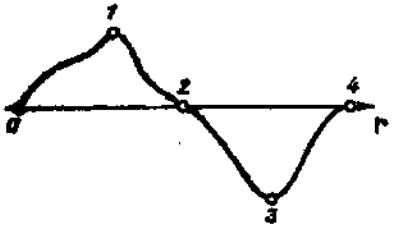
Người ta chia mặt phẳng theo quy luật phân bố của ρ và n như vật trên một tờ giấy bóng mờ như vậy khi tính hiệu chỉnh cho điểm khác ta chỉ việc dời tâm palet đi, đặt tâm của palet trùng với điểm quan sát. Tác dụng trọng lực của từng khối có khoảng cách và độ cao trung bình khác nhau đã được tính sẵn trên toán đồ, ta chỉ việc tra để tìm ra δg_{ij} của từng khối sau đó cộng tất cả δg_{ij} lại để có hiệu chỉnh địa hình. Toán đồ hiệu chỉnh địa hình của Lucavchenco được chia theo: n = 1, 4, 8, 8, 8, 8, 16, 16, 16, 16.

Hiệu chỉnh theo kiểu palet này có nhược điểm là mỗi khi dịch chuyển tâm palet đến 1 điểm quan sát mới ta phải tính lại từ đầu độ cao trung bình cho mỗi ô hình quạt, tốn nhiều thời gian.

Để công việc được nhanh chóng hơn, Nhem –xôp đã chia địa hình ra thành những khối có đáy hình vuông bằng nhau không thay đổi. Điểm quan sát được chọn chính giữa của một ô

vuông ban đầu. Xung quanh ô ban đầu có tám ô kết tất cả thành một ô mới, có kích thước (bề rộng) lớn gấp 3 ô ban đầu. Tính hiệu chỉnh địa hình là công việc đi tính hiệu độ cao giữa điểm quan sát và khối hình học trên, sau đó nhân với hệ số phụ thuộc vào khoảng cách của các khối. Phương pháp này tiện lợi cho máy tính. Tuy nhiên, việc tính độ cao trung bình cho mỗi khối tốn nhiều thì giờ, công sức.

Chung qui, công thức hiệu chỉnh địa hình bằng palet tròn chỉ chứa r và độ cao h cho nên Beriôzkin chỉ chọn vị trí có r và độ cao h đặc biệt. Ông đưa ra một phương pháp tính địa hình theo các điểm đặc trưng trên bán kính (tia) là các điểm mà độ cao của địa hình có cực trị và điểm uốn. Địa hình xấp xỉ có độ cao thay đổi theo luật hepecbôn giữa hai điểm đặc trưng kế cận chứ không phải độ cao trung bình, nhằm chính xác hoá.



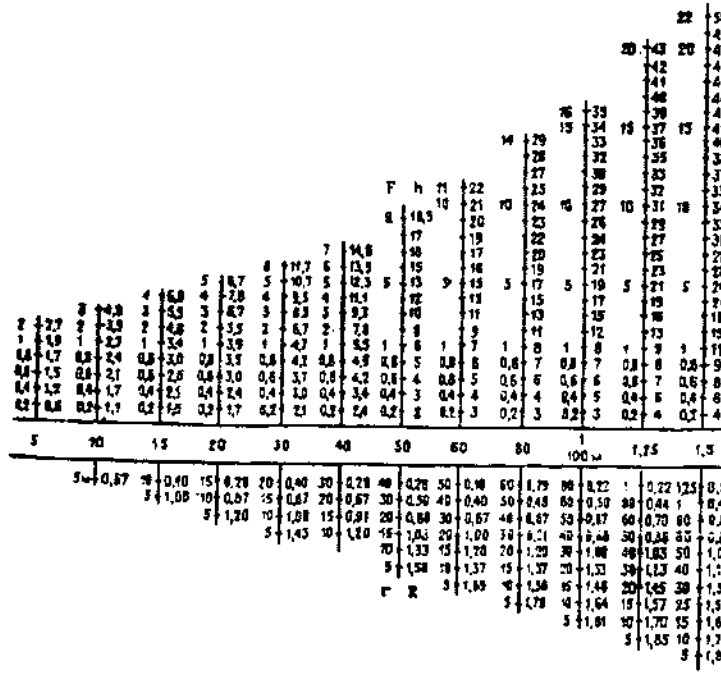
Hình 14: Các điểm đặc trưng trên địa hình theo tia r

Như vậy trong phạm vi r_i và r_{i+1} của bán kính, độ cao thay đổi từ h_j đến h_{j+1}. Bốn số liệu này đủ để xấp xỉ bằng hàm hypecbôn. Để tránh việc tính toán những hệ số phụ thuộc vào độ cao của điểm, người ta lập sẵn bảng để theo độ cao và bán kính, tra tìm các hệ số đó. Ứng với tia thứ j ta có:

$$\delta g_j = \sum_{i=1}^{M} \delta g_{ij} = F_1\left(\frac{1}{2} + R_1\right) + F_2\left(R_1 + R_2\right) + \ldots + F_M\left(R_{M-1} + R_M\right)$$

Trong đó:

$$F_i = \frac{2\pi G\sigma}{n}\frac{h_i^2}{r_i}\left(1 - \frac{h_i^2}{2r_i^2}\right);\ R_i = \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1} + r_i};\ \delta g = \sum_{j=1}^{N} \delta g_j \qquad (2.14)$$



Hình 15: Toán đồ cho F(h) (phần trên) và cho R(r) (phần dưới) của Beriozkin $\delta = 2,0\ g/cm^2$, $F = 0,001$ mGal $n = 16$, h – mét.

§6. HIỆU CHỈNH PREY (Prây):

Trong trường hợp thành lập dị thường Bouguer, ta loại ảnh hưởng của lớp trung gian nằm phía dưới máy đo (vị trí quan sát) cho tới mặt biển. Tức đưa hiệu chỉnh âm – 0,0419σh vào dị thường. Nếu phía trên điểm quan sát có lớp đất đá có độ dầy h_1 (như quan sát trong hầm lò) ta sẽ đơn giản đưa vào dị thường hiệu chỉnh lớp trung gian + $0,0419\sigma h_1$ là loại ảnh hưởng của lớp bên trên này. Vì lớp này làm giảm số đo g. Khi loại nó, thì g được phục hồi một lượng + $0,0419\sigma h_1$.

Tuy nhiên, trong trường hợp thành lập dị thường khoảng không, ta chưa được phép loại bỏ lớp trung gian (phía trên hoặc dưới vị trí quan sát). Nhưng để nguyên lớp đất đá đó ở phía trên vị trí quan sát cũng không ổn, vì dị thường khoảng không chỉ phản ánh tác dụng của lớp trung gian từ bề mặt vật lý Trái đất đến mặt geoid. Vậy thì ta phải tạm thời loại lớp trung gian phía

trên đi, bằng hiệu chỉnh $+0,0419\sigma h_1$. Sau đó, di chuyển lên một độ cao h_1, thực hiện hiệu chỉnh khoảng không $- 0,3086h_1$. Rồi phục hồi ở phía dưới người quan sát lớp trung gian bề dầy h_1. Tức thực hiện một hiệu chỉnh $+0,0419\sigma h_1$. Tổng cộng hai lần hiệu chỉnh lớp trung gian là $+ 0,0838\sigma h_1$. Sau cùng hiệu chỉnh khoảng không được thực hiện đến mặt biển. Tương tự như vậy đối với các quan sát trọng lực dưới tầu ngầm ở độ sâu p so với mặt biển. Lớp nước trên đầu người quan sát (hay máy đo) được tạm thời loại đi. Giá trị g được qui lên mặt biển bằng hiệu chỉnh khoảng không : $- 0,3086p$. Sau đó lớp nước biển có độ dày p được phục hồi lại phía dưới mặt biển.

Hiệu chỉnh khoảng không cộng hai lần hiệu chỉnh lớp trung gian gọi là hiệu chỉnh Prey. Dị thường mang tên dị thường Prey:

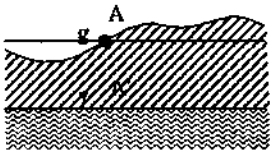
$$\Delta g_{pr} = g - \gamma - 0,3086p + 0,0838\sigma_B p = g - \gamma - 0,222P$$

σ_B – mật độ nước biển bằng 1,03 g/cm^3.

Thực hiện hiệu chỉnh Prey, thực chất người quan sát di chuyển xuyên qua khối lượng bình thường, mà không đả động tới nó (để yên). Tuy nhiên, các dị khối vẫn di chuyển tịnh tiến theo người quan sát. Người ta có thể sử dụng hiệu chỉnh Prey để qui giá trị trọng lực quan sát trên mặt đất xuống một điểm nằm trong lòng đất như trong hầm lò. Hiệu chỉnh Prey khi di chuyển xuống có dấu ngược lại.

§7. MINH HỌA Ý NGHĨA VẬT LÝ CỦA CÁC HIỆU CHỈNH

1. Trọng lực quan sát tại A trên mặt vật lý, cách mặt đẳng thế một độ cao h.



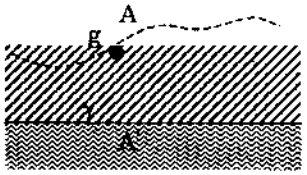
Hình 16

Mặt vật lý

Mặt chuẩn

(geoid= spheroid)

2. Sau khi hiệu chỉnh địa hình ta có lớp trung gian bề dày h.

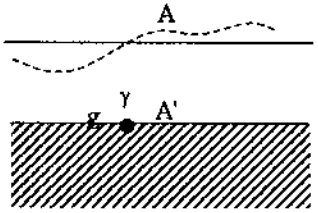


Mặt chuẩn

(geoid= spheroid)

Hình 17

3. Khi thực hiện hiệu chỉnh khoảng không, điểm quan sát A hạ xuống độ cao h tới A'. Lớp trung gian tịnh tiến theo. Giá trị g và γ cùng xác định tại A'. Có thể coi lớp trung gian bị ép mỏng vô cùng trên mặt đẳng thế.

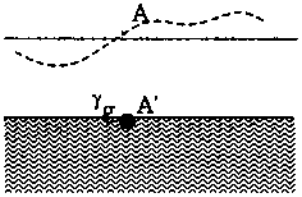


Mặt chuẩn

(geoid=spheroid)

Hình 18

4. Sau khi hiệu chỉnh lớp trung gian. Ảnh hưởng của lớp đó bị loại trừ.

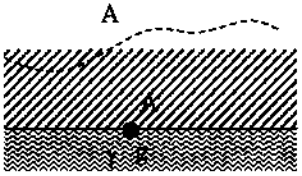


Mặt chuẩn

(geoid=spheroid)

Hình 19

5. Nếu phục hồi lớp trung gian về vị trí cũ của nó, nay là trên điểm quan sát, ta thực hiện hiệu chỉnh Prey, để có giá trị trọng lực trong lòng đất đá.



Mặt chuẩn

(geoid= spheroid)

Hình 20

Ở đây mặt geoid và spheroid được coi trùng nhau làm một mặt chuẩn.

§8. HIỆU CHỈNH TRỌNG LỰC VÀ DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC BOUGER Ở BIỂN.

Mặt biển và đại dương trùng với mặt geoid. Vì thế, nếu đo trọng lực tại mặt biển thì hiệu số của g_o đo được và γ sẽ cho ta ngay dị thường khoảng không mà khỏi cần hiệu chỉnh khoảng không và khi thành lập dị thường Bouguer, khỏi cần hiệu chỉnh lớp trung gian. Dị thường như vậy gọi là dị thường đầy đủ :

$$\Delta g = g_o - \gamma$$

Trường hợp quan sát dưới tàu ngầm ở độ sâu p thì dị thường khoảng không trở thành dị thường Prey:

$$\Delta g_{pr} = g_A - \gamma - 0{,}3086p + 0{,}0838.1{,}03p = g_A - \gamma - 0{,}222\ p \qquad (2.15)$$

Trường hợp ở biển, không có khối lượng trồi lên khỏi mặt geoid. Nhưng nước biển có mật độ là 1,03 nhỏ hơn mật độ đất đá một lượng $\sigma - 1{,}03$. Như vậy trong biển có sự thiếu hụt khối lượng. Vì thế khi thành lập dị thường Bouguer ở biển, ta phải bổ sung cho biển một khối lượng phân đều từ mặt biển đến đáy biển với mật độ là $(\sigma - 1{,}03)$. Nếu đáy biển có độ sâu là p thì hiệu chỉnh cần đưa vào là $+0{,}0419\ (\sigma - 1{,}03)\ p$:

$$\Delta g_B = g_o - \gamma + 0{,}0419\ (\sigma - 1{,}03)\ p \qquad (2.16)$$

Ngoài ra, tùy thuộc vào vị trí quan sát, mà ta còn đưa các hiệu chỉnh khác một cách bình thường như đã nêu. Nếu quan sát ở trên cao so với mặt biển là h thì phải hiệu chỉnh khoảng không. Chẳng hạn, quan sát trên boong tàu hay trực thăng ở độ cao là h so với mặt biển, thì dị thường Bouguer là:

$$\Delta g_B = g_A - \gamma + 0{,}3086\ h + 0{,}0419(\sigma - 1{,}03)\ p \qquad (2.17)$$

Nếu quan sát dưới tàu ngầm ở một độ sâu là p, thì phải đưa thêm hiệu chỉnh Prey + 0,0838.1,03 p và dị thường Bouguer là:

$$\Delta g_B = g_A - \gamma - 0{,}3086\ p + 0{,}0838.1{,}03\ p + 0{,}0419(\sigma - 1{,}03)\ p$$

$$= g_A - \gamma - 0{,}222\ p + 0{,}0419(\sigma - 1{,}03)\ p \qquad (2.18)$$

Nếu đáy biển gồ ghề phức tạp, ta phải làm cho đáy biển bằng phẳng. Nghĩa là phải hiệu chỉnh địa hình đáy biển. Mặt phẳng làm chuẩn để san bằng đáy biển được chọn là mặt đi qua hình chiếu của một điểm quan sát tại đáy biển. Địa hình cao hơn mặt này sẽ nhận hiệu chỉnh âm, thấp hơn sẽ nhận hiệu chỉnh dương.

Sau đây là bức tranh tổng kết các trường hợp quan sát ở các vị trí khác nhau và các dị thường tương ứng. Thứ tự thực hiện các hiệu chỉnh dù có khác nhau cũng sẽ cho cùng một kết quả.

I) $\Delta g_{kk} = g_A - \gamma + 0{,}3086h$

$\Delta g_B = g_A - \gamma + 0{,}3086h - 0{,}0419\ \sigma h$

II) $\Delta g_{kk} = g_A - \gamma + 0{,}3086\ (h + h_1)$

$\Delta g_B = g_A - \gamma + 0{,}3086(h + h_1) - 0{,}0419\ \sigma h$

III) $\Delta g_{kk} = g_A - \gamma$

$\Delta g_B = g_A - \gamma$

IV) $\Delta_{gkk} = g_A - \gamma$

$\Delta g_B = g_A - \gamma + 0{,}0419\ (\sigma - 1{,}03)\ p$

V) $\Delta_{gkk} = g_A - \gamma + 0{,}3086h_1$

$\Delta g_B = g_A - \gamma + 0{,}3086h_1 + 0{,}0419\ (\sigma - 103)\ p$

VI) $\Delta g_{pr} = g_A - \gamma - 0{,}3086p_1 + 0{,}0838.1{,}03\ p_1 = g_A - \gamma - 0{,}222\ p_1$

$\Delta g_B = g_A - \gamma - 0{,}222\ p_1 + 0{,}0419\ (\sigma - 103)\ p$

VII) $\Delta g_{pr} = g_A - \gamma - 0{,}222\ p$

$$\Delta g_B = g_A - \gamma - 0{,}222\ p + 0{,}0419\ (\sigma - 1{,}03)\ p$$

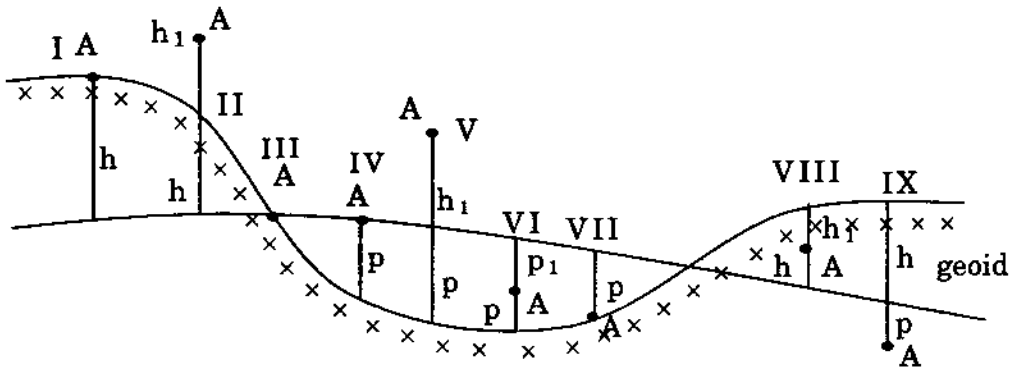
$$= g_A - \gamma + (0{,}0419\ \sigma - 0{,}265)\ p$$

VIII) $\Delta g_{pr} = g_A - \gamma + 0{,}3086\ (h - h_1) + 0{,}0838\sigma\ h_1$

$$\Delta g_B = g_A - \gamma + 0{,}3086\ (h - h_1) + 0{,}0838\sigma\ h_1 - 0{,}0419\ \sigma h$$

IX) $\Delta g_{pr} = g_A - \gamma - 0{,}3086\ p + 0{,}0838\sigma\ (h+p)$

$$\Delta g_B = g_A - \gamma - 0{,}3086\ p + 0{,}0838\sigma\ p + 0{,}0419\ \sigma h$$



Hình 21

h – độ cao toàn phần của địa hình so với mặt geoid.

p – độ sâu toàn phần của đáy biển.

h_1– độ cao (sâu) của điểm quan sát A so với bề mặt vật lý của Trái đất (mặt đất, biển).

p_1 – độ sâu của điểm quan sát A so với mặt geoid.

CHƯƠNG III

NGHIÊN CỨU CẤU TRÚC SÂU CỦA TRÁI ĐẤT BẰNG DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC

§1. CÁC GIẢ THUYẾT ĐẲNG TĨNH

Nghiên cứu cấu trúc sâu của vỏ Trái đất không những có ý nghĩa về lý thuyết mà còn có ý nghĩa thực tiễn lớn. Càng ngày, người ta càng thấy có mối liên quan rõ rệt giữa cấu trúc sâu của vỏ Trái đất với sự phân bố khoáng sản hữu ích.

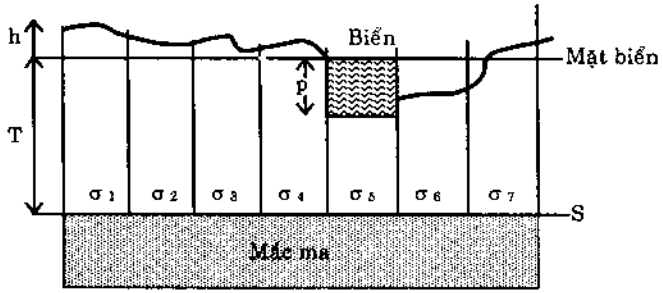
Phương pháp địa chấn đóng vai trò lớn trong nghiên cứu cấu trúc của Trái đất. Theo số liệu địa chấn, nhìn chung, Trái đất có cấu trúc được chia làm ba quyển: vỏ, bọc (manti) và nhân. Vỏ Trái đất là lớp trên cùng, được mặt Moho (Mohorovichich – người Nam Tư đã phát hiện ra) phân cách với môi trường địa chất dưới vỏ. Mặt này là nơi xảy ra sự thay đổi đột ngột giữa vận tốc truyền của sóng ngang và sóng dọc. Cũng theo số liệu địa chấn, vỏ Trái đất được chia ra làm ba lớp có vận tốc truyền sóng và mật độ tăng dần theo chiều sâu: lớp trầm tích, lớp đá granit và bazan. Mặt ranh giữa lớp granit và bazan không phải luôn luôn rõ rệt và độ sâu của nó thay đổi phụ thuộc tùy khu vực. Số liệu địa chấn cho biết, bề dầy vỏ Trái đất thay đổi từ 2 –7 km ở khu vực đại dương đến 30 – 80 km ở khu vực lục địa. Vỏ ở khu vực đại dương không có lớp granit. Với cấu trúc như trên, vỏ Trái đất được phân biệt thành 3 loại: vỏ lục địa, vỏ đại dương và vỏ chuyển tiếp. Biến thiên của trọng lực liên quan chặt chẽ với cấu trúc của Trái đất, đặc biệt cấu trúc nông của vỏ và của lớp dưới giáp vỏ có mật độ lớn hơn. Mặc dù lớp này không còn lỏng, nhưng tác dụng lâu dài, tiếp cận, áp sát vào vỏ, khiến chúng ta có thể coi nó như lỏng và áp dụng định luật của thủy tĩnh.

1.1. Mô hình đẳng tĩnh theo giả thuyết Pratt (Prat).

Pratt (nhà trắc địa người Anh) đã phát hiện rằng, độ lệch dây dọi do dãy núi Hymalaya (Hy mã lạp sơn) gây nên, đo được chỉ khoảng 5,2 giây, không lớn như dự tính là 27,9 giây. Ông phán đoán rằng dưới dãy núi có sự thiếu hụt khối lượng

và xây dựng mô hình vỏ Trái đất bằng một giả thuyết. Giả thuyết của Pratt như sau:

Vỏ Trái đất gồm các khối lăng trụ thẳng đứng, có chiều cao và mật độ trung bình khác nhau, nhưng có cùng khối lượng. Mặt đáy của các lăng trụ này nằm ở độ sâu giống nhau T so với mặt biển và các khối nằm yên trên một lớp dẻo mắc ma có mật độ lớn hơn. Mặt này gọi là mặt đẳng áp S, hay mặt bù trừ.



Hình 22: Mô hình đẳng tĩnh theo giả thuyết Pratt

Nếu thừa nhận diện tích các đáy của các khối lăng trụ như nhau, khiến áp lực lên mỗi diện tích này sẽ như nhau. Điều kiện nêu trên có thể viết như sau:

$$\sigma (T + h) = const \qquad (3.1)$$

σ: Mật độ vật chất trong lăng trụ.

h: Độ cao trung bình của lăng trụ so với mặt biển.

T: Độ sâu của mặt đẳng áp so với mặt biển.

Còn đối với vùng biển ta có:

$$\sigma (T - p) + 1{,}03\ p = const \qquad (3.2)$$

p – Độ sâu đáy biển.

1.2. Mô hình đẳng tĩnh theo giả thuyết Airy (E–ri).

Theo giả thuyết này, mật độ các khối tạo nên vỏ Trái đất là như nhau σ_0 (2,67 g/cm^3). Các khối chìm sâu khác nhau trong môi trường vật chất dưới vỏ, có mật độ σ (3,27 g/cm^3) lớn hơn σ_o gọi là mắc ma. Khối nào càng cao so với mặt biển, thì

càng lún chìm sâu trong vật chất dưới vỏ Trái đất. Mặt đẳng áp S nằm ngang cùng độ sâu với đáy của khối vỏ chìm sâu nhất. Người ta thừa nhận rằng, các khối tạo nên vỏ Trái đất tuân theo trạng thái cân bằng giữa trọng lực và lực Archimede, tức là thỏa mãn điều kiện:

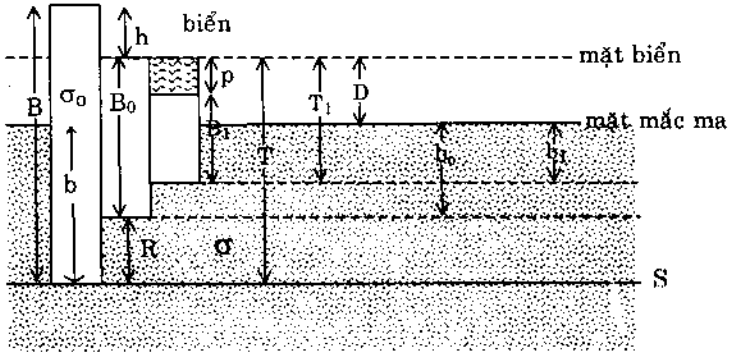
Khối (1) cao nhất: $\sigma_o B = \sigma b$ (3.3)

σ_o – Mật độ vỏ Trái đất,

σ – Mật độ măc ma.

B – Bề dầy vỏ Trái đất.

b – Độ chìm sâu trong măc ma của mỗi khối.



Hình 23: Mô hình đẳng tĩnh theo giả thuyết Airy

Khối (2) có h = 0: Tương tự $\sigma_o B_o = \sigma b_o$ (3.4)

Mặt chuẩn là mặt biển và mặt S là mặt nằm ở độ lún sâu nhất của các khối. Điều kiện đẳng áp theo quan điểm của Pratt trong mô hình của Airy có thể viết cho hai khối đầu (từ trái) như sau:

$$\sigma_o B = \sigma_o B_o + \sigma R \quad (3.5)$$

Bằng thuyết Airy, ta có thể chứng minh đẳng thức (3.5) của Pratt. Hãy chứng minh vế phải của (3.5) bằng vế trái của nó. Theo hình 23 ta có: $R = b - b_o$

Từ (3.3) và (3.4) ta có:

$$b = (\sigma_o/\sigma)\, B \text{ và } b_o = (\sigma_o/\sigma)\, B_o \qquad (3.5a)$$

Đưa 3 đẳng thức trên vào vế phải của (3.5) ta có:

$$\sigma_o B_o + \sigma (b - b_o) = \sigma_o B_o + \sigma (\sigma_o/\sigma)B - \sigma (\sigma_o/\sigma)B = \sigma_o B$$

Vậy ta đã chứng minh xong đẳng thức (3.5).

Khối (3) ở biển cũng tuân theo trạng thái cân bằng :

$$1{,}03p + \sigma_o B_1 = \sigma b_1 \qquad (3.6)$$

Còn theo Pratt, thì đối với vùng biển, (khối 3) ta có:

$$\sigma_o B = 1{,}03p + \sigma_o B_1 + \sigma (T - B_1 - p) \qquad (3.7)$$

Ta hãy chứng minh (3.7) theo quan điểm thuyết Airy. Theo điều kiện cân bằng của thuyết này, ta có:

$$1{,}03\, p + \sigma_o B_1 + (T - B_1 - p) = \sigma b_1 + (b - b_1) = \sigma b$$

Mà theo (3.3) ta có tiếp: $\sigma b = \sigma_o B$

Vậy ta đã chứng minh xong đẳng thức (3.7). Hai thuyết có sự liên hệ phù hợp nhau.

Sự thiếu sót của hai mô hình trên là xem các khối tách rời nhau. Thực tế, chúng có sự liên kết với nhau, do đó từng khối không thể tự do tuân theo trạng thái cân bằng đẳng tĩnh, mà là cả tập hợp các khối mới tuân theo. Theo Tsuboi (Nhật bản) thì kích thước của khu vực nghiên cứu phải cỡ 300 km trở lên mới có thể xét tới chuyện có ở trạng thái đẳng tĩnh hay không. Nếu nhỏ hơn 300 km thì nói đến đẳng tĩnh cũng vô nghĩa. Bởi vì khối nhỏ có thể không thỏa đẳng thức về đẳng tĩnh, nhưng trên thực tế nó lại nằm yên (tĩnh), bởi vì nó bị tập hợp các khối xung quanh liên kết chặt. Mà tập hợp các khối thì ở trạng thái cân bằng đẳng tĩnh.

Hai mô hình nói trên đều là mô hình tĩnh, không mô tả được sự thay đổi không ngừng của vỏ Trái đất. Cân bằng đẳng tĩnh là trạng thái tiến tới của vỏ Trái đất. Vỏ Trái đất đang trong quá trình tiến tới đẳng tĩnh, có vùng đã hoàn toàn đạt trạng thái đẳng tĩnh, có vùng chưa, hoặc hoàn toàn không ở trong trạng thái đẳng tĩnh.

Mô hình vỏ Trái đất của Vening–Meinesz xem vỏ Trái đất là một tấm đàn hồi phù hợp thực tế hơn. Tuy nhiên nó lại không cho phép tính toán đơn giản như hai mô hình trên.

Hiện nay khoa học đã khẳng định sự tồn tại của trạng thái đẳng tĩnh. Địa chấn học đã tìm ra một mặt có độ sâu T thay đổi như trong thuyết Airy (T lớn dần từ đại dương vào lục địa). Đó là mặt Moho (tắt tên Mohorovichich, người Nam Tư).

§2. MỐI LIÊN HỆ GIỮA BỀ DÀY VỎ TRÁI ĐẤT VỚI ĐỘ CAO ĐỊA HÌNH.

Từ mô hình Airy, gọi D – khoảng cách giữa hai mặt ranh – mặt biển và mặt mắc ma. Khối (1), theo hình 23 ta có: D = T – b hay :

$$b = T - D \quad \text{và ta còn có:} \quad B = T + h.$$

Thay b và B trong (3.3) bằng 2 đẳng thức trên ta có:

$$\sigma_o (T + h) = \sigma (T - D)$$

Rút ra:

$$T = h \frac{\sigma_0}{\sigma - \sigma_0} + D \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_0} \qquad (3.8)$$

Đối với khối có h = 0 (khối 2), ta có:

$$T_o = D \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_o} \; ; \qquad \text{Rút ra } D = T_o \frac{\sigma - \sigma_o}{\sigma} \qquad (3.8a)$$

Thay (3.8a) vào (3.8) ta có:

$$T = T_o + h \frac{\sigma_0}{\sigma - \sigma_o} \qquad (3.9)$$

T giờ đây trở thành hàm phụ thuộc vào h và là bề dầy của vỏ Trái đất. Kết quả này cho thấy h càng lớn (núi càng cao) thì T càng lớn (gốc cắm càng sâu) sao cho thỏa trạng thái cân bằng đẳng tĩnh theo Airy. Công thức (3.9) cho thấy khối lượng núi đồi $h\sigma_o$ bù trừ với khối lượng thiếu dưới vỏ trái đất:

$$(T - T_0)(\sigma - \sigma_0) - h\sigma_0 = 0.$$

Ở vùng biển, khối lượng của một khối theo (3.6) bằng:

$$1{,}03p + \sigma_o B_1 = \sigma b_1$$

Hay là: $$1{,}03p + \sigma_o (T_1 - p) = \sigma (T_1 - D) \qquad (3.10)$$

Đối với khối mà độ sâu đáy biển p = 0, h = 0 (khối 2), ta có:

$$\sigma_o T_o = \sigma (T_o - D)$$

Rút ra: $D = \dfrac{\sigma - \sigma_o}{\sigma} T_o$. Thay vào (3.10) ta có:

$$1{,}03p + \sigma_o (T_1 - p) = \sigma \left(T_1 - \frac{\sigma - \sigma_o}{\sigma} T_o \right)$$

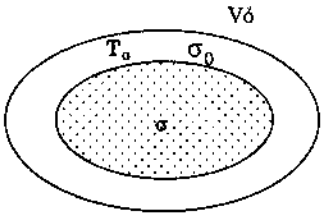
Ký hiệu lại $T_1 = T$, ta có cho vùng biển:

$$T = T_o - \frac{\sigma_o - 1{,}03}{\sigma - \sigma_o} p \qquad (3.11)$$

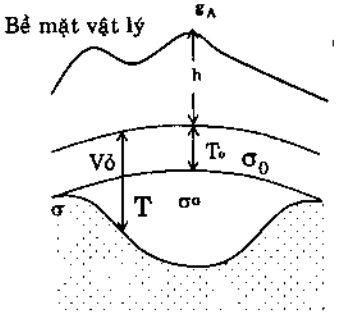
Đây là trường hợp Trái đất đã ở trạng thái cân bằng đẳng tĩnh. Nếu vỏ Trái đất không ở trạng thái cân bằng đẳng tĩnh thì (3.9) và (3.11) không áp dụng được.

§3. MỐI LIÊN HỆ GIỮA DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC VỚI BỀ DÀY VỎ TRÁI ĐẤT VÀ TRẠNG THÁI ĐẲNG TĨNH.

Trái đất bình thường phải đều đặn và không có khối lượng trồi lên khỏi mặt của nó (là mặt đẳng thế dạng ellipsoid). Ngoài ra, nay nó còn phải thỏa mãn điều kiện đẳng tĩnh là điều kiện bổ sung. Vậy ta chọn mô hình Trái đất bình thường mà vỏ có bề dày là T_o theo mô hình Airy, ở trong trạng thái đẳng tĩnh và giả sử Trái đất này sinh ra giá trị trọng lực γ xác định trên bề mặt:



Hình 24: Mô hình vỏ Trái đất bình thường



Hình 25: Mô vỏ hình vỏ Trái đất

Ta hãy xây dựng mô hình Trái đất thực và giá trị trọng lực tương ứng trên đó.

Trái đất thực có khối lượng dư ở trên mặt spheroid, có mật độ σ_0 (vỏ) làm tăng trọng lực. Còn bề dày T lớn hơn T_0 thì làm giảm giá trị trọng lực một lượng $2\pi G(\sigma-\sigma_0)(T - T_0)$. Vì khu vực sâu hơn T_0 không còn là khu vực có mật độ mắc ma như ở Trái đất bình thường nữa, do đó giá trị trọng lực g_A giả quan sát tại A có h > 0 (hình 25) là:

$$g_A = \gamma + 2\pi G\,\sigma_0 h - 0{,}3086h - 2\pi G(\sigma - \sigma_0)(T - T_0) \qquad (3.12)$$

Nếu vỏ Trái đất ở trạng thái đẳng tĩnh thì T thỏa mãn (3.9).

Thay vế phải của (3.9) vào (3.12) ta có:

$$g_A = \gamma - 0{,}3086h + 2\pi G\left[\sigma_0 h - \frac{\sigma_0 h}{\sigma - \sigma_0}(\sigma - \sigma_0)\right] = \gamma - 0{,}3086h \qquad (3.13)$$

3.1. Dị thường khoảng không.

Theo định nghĩa, dị thường khoảng không bằng :

$\Delta g_{kk} = g_A - \gamma + 0{,}3086h$; thay g_A ở (3.13), ta có:

$$\Delta g_{kk} = 0 \qquad (3.14)$$

Vậy, ta suy ra, nếu dị thường khoảng không bằng không, thì vỏ Trái đất ở trạng thái cân bằng đẳng tĩnh.

3.2. Dị thường Bouguer.

Theo định nghĩa $\Delta g_B = g_A - \gamma + 0{,}3086h - 2\pi G\sigma_0 h$

Thay g_A ở vế phải bằng (3.12), ta được:

$$\Delta g_B = 2\pi G(\sigma_0 - \sigma)(T - T_0) \qquad (3.15)$$

hay

$$T = T_0 + \frac{\Delta g_B}{2\pi G(\sigma_0 - \sigma)} \qquad (3.16)$$

Kết quả này cho thấy giá trị Δg_B càng lớn (âm), thì T càng lớn, khối càng lún sâu, nhưng chưa phải ở trạng thái cân bằng đẳng tĩnh.

Nếu vỏ Trái đất ở trạng thái cân bằng đẳng tĩnh, thay (3.9) vào (3.15) ta có:

$$\Delta g_B = -2\,\pi G \sigma_o h \qquad (3.16a)$$

Kết luận: Nếu vỏ Trái đất ở trạng thái cân bằng đẳng tĩnh thì đường cong Δg_B có dạng đảo ngược của địa hình (theo h): Tại vùng núi càng cao (h > 0) dị thường Bouguer càng âm.

Ví dụ: $h = 500m$, $\sigma_o = 2{,}67\ g/cm^3$

$$\Delta g_B = -0{,}0419 h\sigma_o = -\ 0{,}0419.2{,}67.500 = -\ 60mGal$$

3.3. Xét trường hợp ở vùng biển.

Muốn có giá trị quan sát ở mô hình biển, ta phải trừ vào giá trị bình thường γ, tác dụng của lớp có độ sâu p của đáy biển có mật độ $(\sigma_o - 1{,}03)$ và thêm vào phần dưới của vỏ Trái đất bình thường một lớp trung gian có bề dày $(T_o - T)$ có mật độ $(\sigma - \sigma_o)$ do mắc ma lấn vỏ Trái đất. Ở vùng biển, T nhỏ hơn T_0. Trọng lực quan sát là:

$$g_A = \gamma - 2\pi G\,(\sigma_o - 1{,}03)p + 2\pi G\,(\sigma - \sigma_o)(T_o - T) \qquad (3.17)$$

Sử dụng (3.17), ta có dị thường khoảng không ở vùng biển:

$$\Delta g_{KK} = g_A - \gamma = 2\pi G\,(\sigma - \sigma_o)(T_o - T) - 2\pi G\,(\sigma_o - 1{,}03)p$$

Vậy, nếu bề dày vỏ Trái đất thực ở vùng biển ít thay đổi $T \approx const$, thì dị thường khoảng không lắp lại dạng đáy biển (phụ thuộc độ sâu p).

Nếu vỏ Trái đất thực ở trạng thái đẳng tĩnh, thay (3.11) vào biểu thức trên, ta có:

$$\Delta g_{kk} = 2\pi G\left[(\sigma_o - \sigma)\left(-\frac{\sigma_o - 1{,}03}{\sigma - \sigma_o}\right)\right]p - 2\pi G\,(\sigma_o - 1{,}03)p = 0$$

Như vậy cũng như ở đất liền, dị thường khoảng không bằng 0 là dấu hiệu của trạng thái đẳng tĩnh của vỏ Trái đất ở vùng biển.

Dị thường Bouguer ở vùng biển:

Theo định nghĩa dị thường Bouguer ở biển bằng:

$$\Delta g_B = g_A - \gamma + 2\pi G(\sigma_o - 1{,}03)\, p \qquad (3.18)$$

Sử dụng (3.17) thay cho g_A, ta có :

$$\Delta g_B = 2\pi G(\sigma - \sigma_o)(T_o - T)$$

$$T = T_o + \frac{\Delta g_B}{2\pi G(\sigma_o - \sigma)}$$

T giống như ở đất liền theo (3.16), khi chưa có sự cân bằng đẳng tĩnh.

Trong trường hợp vỏ Trái đất cân bằng đẳng tĩnh, sử dụng (3.11) thay vào (3.18) ta có:

$$\Delta g_B = 2\pi G(\sigma_o - \sigma)\left(T_o - \frac{\sigma_o - 1{,}03}{\sigma - \sigma_o} p - T_o\right)$$

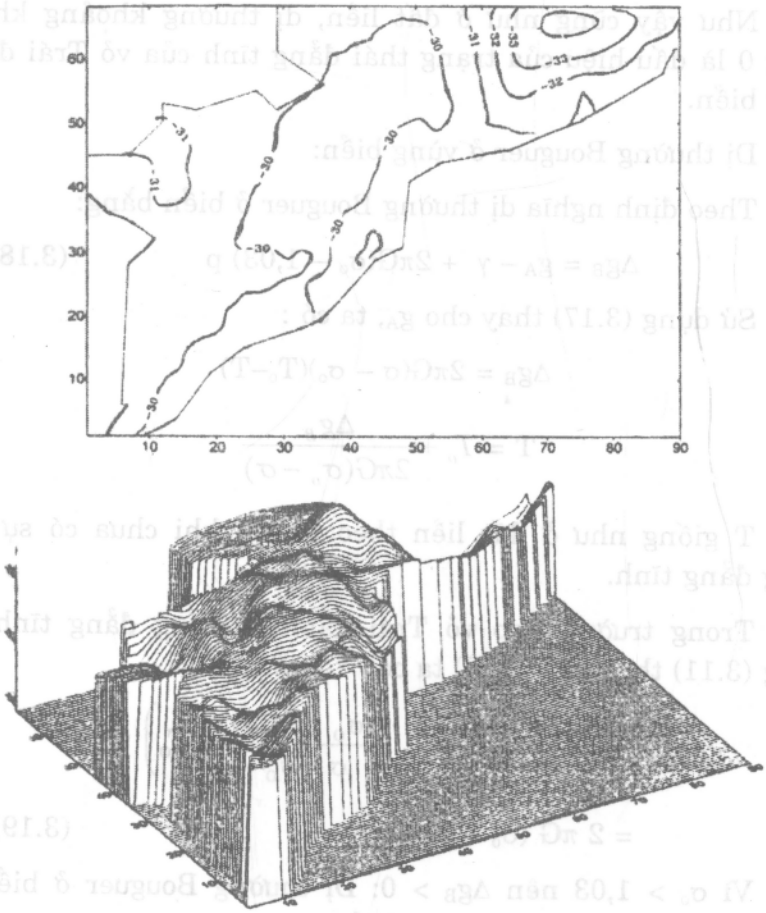
$$= 2\,\pi G\,(\sigma_o - 1{,}03)p \qquad (3.19)$$

Vì $\sigma_o > 1{,}03$ nên $\Delta g_B > 0$: Dị thường Bouguer ở biển là dương và tỷ lệ với độ sâu đáy biển.

Ví dụ: p = 2000m thì:

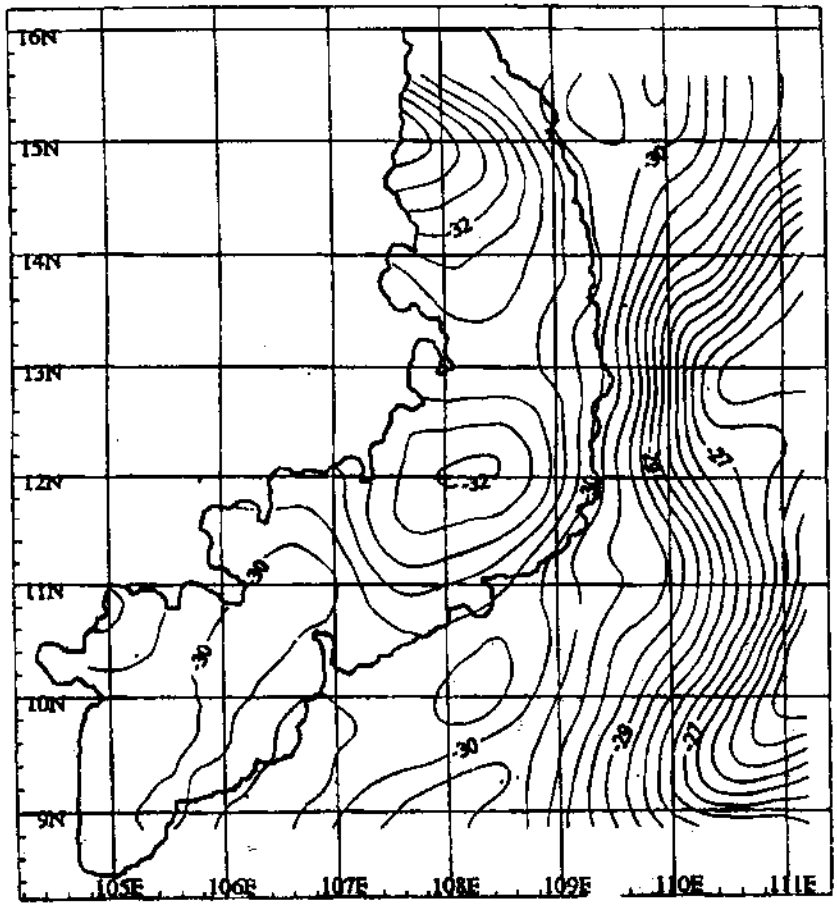
$$\Delta g_B = 0{,}0418\,(2{,}87 - 1{,}03)\,2000 = 154 \text{ mGal.}$$

Thông thường, dị thường Bouguer ở biển dương và đạt khoảng vài trăm mGal.

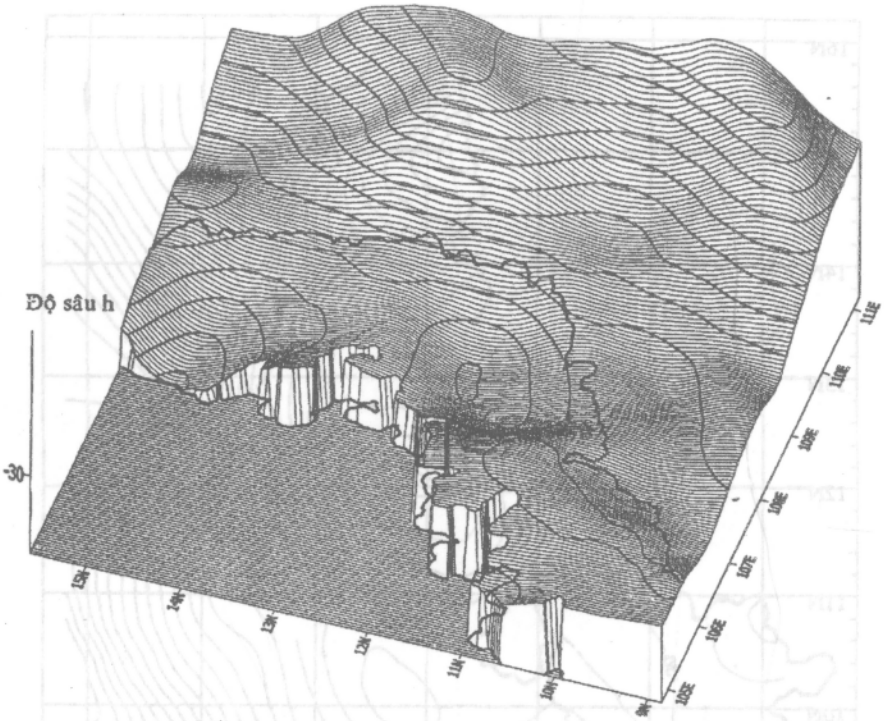


Hình 26: Bản đồ mặt Moho cho khu vực Nam Bộ do Trần Văn Nhạc và Nguyễn Thanh Vấn xây dựng theo công thức Andreev từ 2237 số liệu dị thường trọng lực Bouguer.

Tóm lại, dấu hiệu của trạng thái cân bằng đẳng tĩnh là dị thường khoảng không bằng không, còn dị thường Bouguer thì âm và lấp lại địa hình đáy biển đảo ngược. Thực tế, dị thường khoảng không thường dương, chịu ảnh hưởng lớn của khối lượng trên mặt geoid. Dị thường khoảng không trung bình trên khu vực rộng lớn bé và dương, chứ không phải đúng bằng không.



Hình 26a: Bản đồ mặt Moho cho khu vực phía nam Việt Nam và Biển Đông do Trần Văn Nhạc và Vũ Nguyên Kha xây dựng theo công thức Andreev từ 4000 số liệu dị thường trọng lực Internet.



Hình 26b: Mô hình 3D của mặt Moho cho khu vực phía nam Việt Nam và Biển Đông

Nếu coi vỏ Trái đất là hoàn toàn đẳng tĩnh ở mọi nơi, người ta xác định mật độ vỏ σ_o theo dị thường Bouguer (3.17) hoặc (3.19), từ đó xác định độ dày T của vỏ Trái đất theo dị thường Bouguer ở (3.16a) hoặc (3.19). Kết quả tính toán như trên phù hợp với số liệu địa chấn.

Phương pháp nói trên không thích hợp đối với những vùng được biết là không ở trạng thái đẳng tĩnh như vùng cung đảo hố đại dương, núi trẻ,v.v... là những khu vực có hoạt động kiến tạo mạnh.

§4. HIỆU CHỈNH ĐẲNG TĨNH, LIÊN HỆ GIỮA DỊ THƯỜNG ĐẲNG TĨNH VỚI CÁC DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC

4.1. Hiệu chỉnh đẳng tĩnh.

Do vỏ Trái đất đang ở trạng thái cân bằng đẳng tĩnh cho nên khi thực hiện các hiệu chỉnh, ta phải tôn trọng trạng thái này của nó; có nghĩa chúng ta không tự ý bớt đi khối lượng ta thấy là " *thừa* " hoặc thêm khối lượng vào nơi ta thấy " *thiếu* " trong vỏ Trái đất như khi lập dị thường Bouguer, làm phá vỡ sự cân bằng đẳng tĩnh đang có. Đối với công tác thăm dò, thì chuyện phá vỡ cân bằng đẳng tĩnh không quan trọng, cốt sao tìm ra được quặng mỏ thôi. Nhưng trong nghiên cứu địa vật lý lớn, thì điều đó không cho phép. Vì thực tế có sự cân bằng đẳng tĩnh nên sự thực, nhìn chung không có sự thừa mà cũng không sự thiếu khối lượng. Nếu như trong hiệu chỉnh Bouguer ta loại trừ khối lượng " thừa " vượt khỏi mặt geoid, thì giờ đây, khối lượng đó phải được hoàn lại cho vỏ Trái đất dưới hình thức phân đều vào vỏ Trái đất một cột khối lượng dư cao h' kể từ độ sâu T_0 trở xuống, có mật độ dư $(\sigma - \sigma_o)$. Độ cao h' rút ra từ đẳng thức:

$$\sigma_o h = (\sigma - \sigma_o)h' \quad \text{ta có} \quad h' = \sigma_o h/(\sigma - \sigma_o)$$

Ví dụ: $\sigma_o = 2{,}67\ g/cm^3$. $\sigma = 3{,}27\ g/cm^3$ ta có $h' = 4{,}45h$

Ta có thể chứng minh bằng (3.5) rằng h' chính bằng R. Lớp nằm giữa độ sâu T_0 và T, sau khi hiệu chỉnh đẳng tĩnh sẽ trở thành lớp mắc ma.

Trong quá trình thực hiện hiệu chỉnh đẳng tĩnh, ta không được sử dụng công thức lớp trung gian, mà phải sử dụng công thức tích phân như trong hiệu chỉnh địa hình để tính tác dụng hấp dẫn của từng khối (rất lớn) đối với điểm quan sát.

Tóm lại, thực hiện hiệu chỉnh đẳng tĩnh δg_{dt} là sau khi hiệu chỉnh khoảng không, ta thực hiện tiếp hai bước sau:

1. Loại trừ khối lượng ở bên trên mặt geoid (lớp trung gian).

2. Phân đều khối lượng nói trên vào vỏ Trái đất từ độ sâu T_0 cho tới T theo mô hình Airy.

Đối với vùng có biển ta thực hiện như sau:

1. Lấp biển, thực hiện hiệu chỉnh lớp trung gian có bề dầy p cho biển với mật độ (σ –1,03), như trong hiệu chỉnh Bughê.

2. Lấy đi trong mắc ma từ độ sậu T_0 trở lên tới độ sâu T_0 – p' một cột khối lượng đúng bằng khối lượng đã lấp vào biển lúc nãy. Độ cao p' của cột khối lượng lấy đi suy ra từ đẳng thức :

$$(\sigma_o - \sigma_B)p = (\sigma - \sigma_o)\,p', \quad \text{ta có } p' = \frac{\sigma_0 - \sigma_B}{\sigma - \sigma_0}p = 2{,}73p$$

Trong đó σ_B - mật độ nước biển; p _ độ sâu đáy biển; σ _ mật độ mắc ma.

Hiệu chỉnh theo mô hình Pratt là thực hiện điều chỉnh khối lượng trong phạm vi toàn độ sâu T. Mật độ σ' được phân bố vào vỏ sẽ được suy ra từ: $\sigma_o h = \sigma' T$;

Ta có: $\sigma' = \sigma_o h/T$

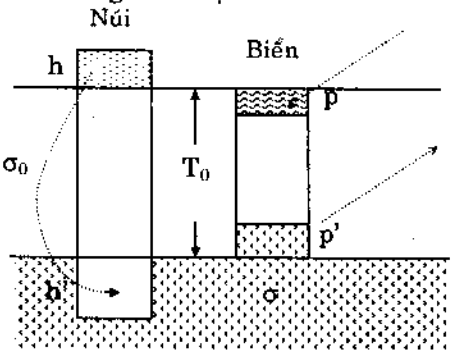
Trường hợp ở biển cũng vậy $(\sigma_o - \sigma_B)p = \sigma' T$, do đó mật độ bổ sung vào vỏ: $\sigma' = p(\sigma_o - \sigma_B)/T$.

Hay là :

$$\sigma' = 1{,}643p/T$$

Hiệu chỉnh đẳng tĩnh cho khu vực xung quanh điểm quan sát được tiến hành như hiệu chỉnh ô địa hình theo palet tròn. Mặt đất được chia ra thành những đới gọi là đới Hayford cùng các tia theo palet tròn. Heiskanen đã tính sẵn bảng hiệu chỉnh đẳng tĩnh với h = 40, 60, 80 và 100 km để tra cho các đới Hayford. Bán kính palet tròn là 166,7 km. Xa hơn người ta không còn coi là mặt phẳng nữa mà là mặt cầu vì Trái đất tròn. Nếu vỏ Trái đất ở trạng thái cân bằng đẳng tĩnh (trước khi hiệu chỉnh), thì sau khi hiệu chỉnh đẳng tĩnh, tức phân bố lại khối lượng sao cho vỏ Trái đất có dầy T_0 ở mọi nơi giống

như ở Trái đất bình thường (hình 24) thì dị thường đẳng tĩnh phải bằng không. Mọi sự khác không của dị thường đẳng tĩnh sẽ là dấu hiệu giúp ta đánh giá mức độ không cân bằng đẳng tĩnh của vỏ Trái đất ở từng khu vực.



Hình 27: Mô hình hiệu chỉnh đẳng tĩnh theo Airy

4.2. Liên hệ giữa dị thường đẳng tĩnh, dị thường khoảng không và dị thường Bouguer.

Dị thường đẳng tĩnh được định nghĩa theo công thức:

$$\Delta g_{dt} = g_A - \gamma + 0{,}3086h + \delta g_{dt} \qquad (3.20)$$

δg_{dt} – hiệu chỉnh đẳng tĩnh.

Nếu vỏ Trái đất ở trạng thái đẳng tĩnh, thì dị thường đẳng tĩnh phải bằng 0 như đã nói. Phần lớn các vùng của vỏ Trái đất đang ở trong trạng thái đẳng tĩnh, do đó thực tế dị thường đẳng tĩnh nhìn chung bằng không. Nếu dị thường đẳng tĩnh dương, có nghĩa bên trong vỏ Trái đất thừa dị khối, mắc ma xâm nhập vỏ. Nói cách khác, vỏ Trái đất chưa lún đủ độ sâu cần thiết và nó chưa ở trạng thái đẳng tĩnh – đang tiếp tục lún thêm. Nếu dị thường đẳng tĩnh âm, có nghĩa phía dưới vỏ Trái đất thiếu dị khối. Nói cách khác, vỏ bị lún quá sâu vào mắc ma, và nay đang nổi lên, để trở về trạng thái cân bằng đẳng tĩnh.

Các dị thường khoảng không và Bouguer có thể coi như là hai trường hợp giới hạn của dị thường đẳng tĩnh. Thật vậy nếu cho độ sâu phân bố khối lượng bù trừ T = 0 thì khối lượng bù trừ được coi như ép thành lớp mỏng – ta có dị thường khoảng

không (mục §7 chương 2). Nếu cho T = ∞: khối lượng bù trừ ở xa vô cùng, không gây được tác dụng – coi như bị loại bỏ hoàn toàn, ta có dị thường Bouguer.

Nếu như dị thường đẳng tĩnh bằng không đối với những khu vực đang ở trạng thái đẳng tĩnh, thì dị thường khoảng không nói chung phải dương và dị thường Bouguer phải âm. Nếu cả dị thường khoảng không và Bouguer đều âm hoặc đều dương thì khu vực đó không ở trong trạng thái cân bằng đẳng tĩnh. Đây là dấu hiệu bổ sung bên cạnh dấu hiệu bằng không của dị thường đẳng tĩnh.

Lý luận này được kiểm chứng tại nhiều nơi trên thế giới như: đảo Síp, Siberi, Ấn Độ, v.v...

CHƯƠNG IV

HÌNH THỂ TRÁI ĐẤT XÁC ĐỊNH BẰNG TRỌNG LỰC

Nếu như chúng ta xác định được độ cao của bề mặt vật lý Trái đất so với spheroid thì coi như dạng Trái đất thực hoàn toàn xác định. Độ cao nói trên gọi là độ cao trắc địa H. Nếu độ cao trắc địa được xác định tại càng nhiều vị trí trên Trái đất, thì hình dạng của nó được xác định càng chính xác. Nhưng độ cao xác định bằng phương pháp ni vô không phải độ cao so với ellipsoid mà là độ cao h so với mặt chuẩn nào đó. Mặt này trùng với mặt biển yên tĩnh và kéo dài trong lục địa gọi là geoid. Geoid được xem như là mặt trung gian giữa spheroid và mặt vật lý của Trái đất.

Như vậy việc xác định độ cao trắc địa $H = \zeta + h$ sẽ có hai bước. Đó là xác định độ cao ζ của geoid so với ellipsoid và độ cao h của mặt vật lý của Trái đất so với geoid. Ở đại dương và biển việc này thực hiện dễ dàng hơn, trong khi đó ở đất liền, vị trí của geoid so với ellipsoid xác định khó khăn hơn.

Bài toán xác định độ cao ζ của geoid so với ellipsoid bằng giá trị trọng lực đã được Stokes giải quyết năm 1949 và được gọi là bài toán Stokes.

§1. THẾ NHIỄU VÀ ĐIỀU KIỆN BIÊN.

1.1. Thế nhiễu.

Gọi W và U là thế của Trái đất thực và Trái đất bình thường:

$$W = V + Q$$

$$U = V_e + Q$$

V - Thế của lực hấp dẫn của Trái đất thực.

V_e - Thế của lực hấp dẫn của Trái đất bình thường dạng ellipsoid quay.

Q - Thế ly tâm

Hiệu số hai thế W và U tại một điểm trong không gian chính là dị thường của thế và được gọi là thế nhiễu:

$$T = W - U = V - V_e \qquad (4.1)$$

Thế nhiễu cũng có đầy đủ các tính chất của thế hấp dẫn V vì nó là hiệu số của hai thế hấp dẫn Newton xác định tại cùng một điểm.

– Tính chất:

a) Thế nhiễu T là một hàm điều hòa, tức ở không gian ngoài nó thỏa mãn phương trình Laplace:

$$\left[\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0\right] \qquad (4.2)$$

b) Thế nhiễu là một hàm chính qui ở vô cực:

$$\lim_{r \to \infty} T = 0$$

Hay $$\lim rT = \text{const} \qquad (4.3)$$

Để xác định thế nhiễu T, ngoài hai điều kiện trên cần phải có thêm điều kiện liên kết T với các dữ kiện đo được trên mặt đẳng thế, cụ thể là giá trị dị thường trọng lực đo được trên toàn mặt Trái đất. Thế nhiễu T gây ra bởi dị thường trọng lực quan sát trên toàn bộ mặt địa cầu chứ không phải của một địa phương nào đó mà thôi.

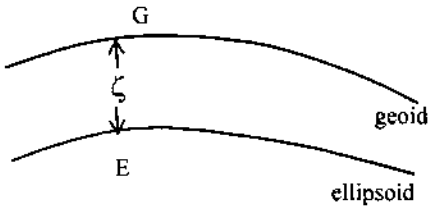
1.2. Công thức Bruns

Ta có: $g = -\dfrac{dW}{dh}$ hay $gdh = -dW$ (4.4)

Giả sử chúng ta di chuyển theo đường sức của trọng lực từ điểm E trên ellipsoid đến điểm G trên mặt geoid, theo phương vuông góc với 2 mặt này.

Tích phân 2 vế (4.4) :

$$\int_E^G gdh = -\int_E^G dW$$



Hình 28

$$\bar{g}\int_E^G dh = -\int_E^G dW$$

$$\bar{g}\ (H_G - H_E) = W_E - W_G$$

$$H_G - H_E = \frac{W_E - W_G}{\bar{g}}$$

Nếu lấy mặt spheroid làm mức zerô để tính độ cao thì $H_E = 0$ và H_G là độ cao của geoid trên ellipsoid: $H_G = \zeta$, ta có:

$$\zeta = \frac{W_E - W_G}{\bar{g}} \qquad (4.5)$$

Phương trình geoid $W_G = W_o$, và của ellipsoid $U_E = U_o$

Vậy $\quad W_G - U_E = W_o - U_o$

nên $W_G = U_E + W_o - U_o$. Thay vế phải này vào (4.5). Điều kiện đối với ellipsoid chuẩn là $U_o = W_o$, từ đây ta có:

$$\zeta = \frac{W_E - U_E}{\bar{g}} \qquad (4.5a)$$

mà $W_E - U_E = T$ nếu và g trung bình : $\bar{g} = \gamma$

Do đó $\qquad \zeta = T/\gamma \qquad (4.6)$

Công thức (4.6) là công thức mang tên Bruns.

Tuy nhiên, đối với ellipsoid chọn tuỳ ý, thì $U_o \neq W_o$, ta có:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma} \qquad (4.6a)$$

1.3. Điều kiện biên cho thế nhiễu.

Thế trọng lực xác định trên mặt geoid tại điểm G:

$$W_G = U_G + T_G$$

Nhân hai vế với –1 và lấy đạo hàm theo pháp tuyến n:

$$-\left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_G = -\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_G - \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_G$$

Hay $$g_G = \gamma_G - \frac{\partial T}{\partial n} \qquad (4.7)$$

Mà γ_G thì bằng γ_E cộng thêm hiệu chỉnh khoảng không:

$$\gamma_G = \gamma_E + \frac{\partial \gamma}{\partial n}\zeta \qquad (4.8)$$

Nếu coi Trái đất là dạng cầu, thì $\gamma = \frac{GM}{R^2}$, ta có:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = \frac{\partial \gamma}{\partial R} = -2\frac{GM}{R^3} = -2\frac{\gamma}{R} \qquad (4.9)$$

Thay (4.9) vào (4.8), (4.7), ta có :

$$g_G = \gamma_E - \frac{2\gamma}{R}\zeta - \frac{\partial T}{\partial n} \qquad (4.10)$$

Nhưng theo (4.6) : $\gamma\zeta = T$

Do đó: $$g_G = \gamma_E - \frac{2T}{R} - \frac{\partial T}{\partial n}$$

Hay $$g_G - \gamma_E = -\frac{2T}{R} - \frac{\partial T}{\partial n}$$

$$\Delta g + \frac{2T}{R} = -\frac{\partial T}{\partial n} \qquad (4.11)$$

Trong đó $\Delta g = g_G - \gamma_E$ là dị thường tạp mà ta vẫn sử dụng. Đây là điều kiện biên cho T trên mặt đẳng thế S. Theo (4.7), $-\partial T/\partial n$ chính là dị thường sạch. Còn $-2T/R$ chính là hiệu chỉnh khoảng không, là sự chênh lệch về trọng lực do độ cao ζ gây nên, còn gọi là phần tử Bruns, là độ khác biệt giữa dị thường tạp và dị thường sạch.

§2. BÀI TOÁN STOKES

Để xác định độ cao geoid ζ, ta phải giải bài toán biên để tìm thế nhiễu T. Bài toán biên xác định T như sau:

Tìm hàm T là hàm điều hòa ($\Delta T = 0$) ở không gian ngoài mặt đẳng thế S, chính qui ở vô cực và thỏa mãn điều kiện biên (4.11) trên mặt S.

Gọi V là hàm thế hấp dẫn. Mặt đẳng thế S (Stokes chọn là mặt cầu), r là khoảng cách từ một điểm quan sát A(x, y, z) đến điểm chạy B (ξ, η, ς). Gọi V_o là giá trị của thế V trên mặt cầu S xác định tại vị trí M mà bán kính ρ cắt mặt cầu. Công thức Green chung cho trường hợp A ở ngoài S và A ở trên S theo lý thuyết thế (biến đổi Môlôđenxki) như sau:

$$V(A) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - (V - V_o)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)dS \qquad (4.12)$$

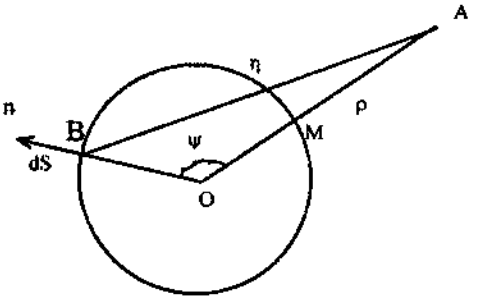
Áp dụng công thức (4.12) cho bài toán xác định T. Thay V = T, sau đó sử dụng công thức Bruns và điều kiện biên cho T:

$$T(A) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\left(\Delta g + \frac{2\gamma\zeta}{R}\right) + \gamma(\zeta - \zeta_o)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS$$

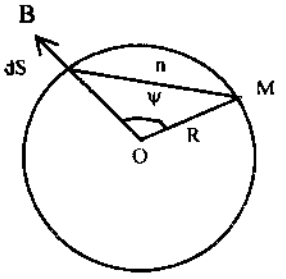
Hàm T(A) biểu diễn bằng công thức này liên tục từ không gian ngoài đến mặt S. Khi A tiến tới mặt cầu S thì tại M trên mặt S ta có tích phân Gauss $\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS = -2\pi$, nên:

$$T_o(M) = \frac{1}{2\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\left(\Delta g + \frac{2\gamma\zeta}{R}\right) + \gamma\zeta\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS$$

Với $\frac{1}{r} = \left(\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\psi\right)^{-1/2}$



Hình 29



Hình 30

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\cos(n,r)$$

Theo hình 30, ta có cos (n,r) = sin $\frac{\psi}{2} = \frac{r}{2R}$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{2rR}$$

Do đó, công thức cho T_o viết lại là:

$$T_o(M) = \gamma\zeta_o = \frac{1}{2\pi}\left[\iint_S \frac{\Delta g}{r}dS + \iint_S \left(\frac{2\gamma\zeta}{rR} - \frac{\gamma\zeta}{2rR}\right)dS\right] \quad (4.13)$$

Rút ra: $$\zeta_o = \frac{1}{2\pi\gamma}\iint_S \frac{\Delta g}{r}dS + \frac{3}{4\pi R}\iint_S \frac{\zeta}{r}dS \quad (4.14)$$

Nghiệm của phương trình tích phân (4.14) chính là công thức Stokes cho độ cao geoid.

§3. CHUỖI STOKES, CÔNG THỨC STOKES CHO ĐỘ CAO GEOID.

3.1. Chuỗi Stokes cho độ cao geoid.

Để giải phương trình trên, ta sử dụng công thức cho hàm cầu chuẩn hóa khi ρ = R trên mặt cầu S. Theo lý thuyết thế, ta có công thức hàm cầu chuẩn hoá trên một mặt cầu S bán kính R:

$$F_n^m(\theta,\lambda) = \frac{(2n+1)}{4\pi R}\iint_s \frac{F_n^m(\theta',\lambda')}{r} dS$$

(θ, λ) – tọa độ điểm quan sát.

(θ', λ') – tọa độ điểm chạy trong tích phân.

r – khoảng cách giữa hai điểm nói trên.

Mặt khác, biểu diễn Δg và ζ dưới dạng chuỗi hàm cầu:

$$\Delta g = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n \qquad (4.15)$$

$$\zeta = \sum_{n=2}^{\infty} \zeta_n \qquad (4.15a)$$

Trong đó:

$$\Delta g_n = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \qquad (4.16)$$

$$\zeta_n = \sum_{m=0}^{n} (\overline{A}_{nm} \cos m\lambda + \overline{B}_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \qquad (4.16a)$$

Với A, B, $\overline{A}, \overline{B}$ là những hệ số khai triển của dị thường trọng lực và độ cao geoid. Thay (4.15) và (4.16) vào (4.14) ta có:

$$\zeta_o = \frac{1}{2\pi\gamma}\sum_{n=2}^{\infty}\iint \frac{\Delta g_n}{r} dS + \frac{3}{4\pi R}\sum_{n-2}^{\infty}\iint \frac{\zeta_n}{r} dS \qquad (4.17)$$

Áp dụng phương trình tích phân cho hàm cầu chuẩn hoá (lý thuyết Thế) đối với Δg_n và ζ_n:

$$\iint_s \frac{\Delta g_n(\theta',\lambda')}{r} dS = \frac{4\pi R}{(2n+1)} \Delta g_n(\theta,\lambda) \qquad (4.18)$$

$$\iint_s \frac{\zeta_n(\theta',\lambda')}{r} dS = \frac{4\pi R}{(2n+1)} \zeta_n(\theta,\lambda) \qquad (4.19)$$

Thay (4.18), (4.19) vào công thức (4.17) và khai triển ζ thành chuỗi hàm cầu ta có mối liên hệ giữa các số hạng là:

$$\zeta_n = \frac{2R}{(2n+1)\gamma}\Delta g_n + \frac{3}{(2n+1)}\zeta_n = \frac{R\Delta g_n}{(n-1)\gamma}$$

$$\zeta_o = \sum_{n=2}^{\infty}\zeta_n = \frac{R}{\gamma}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta g_n}{n-1} \qquad (4.20)$$

Thay Δg_n trong (4.20) bằng chuỗi của nó (4.15a) ta có: chuỗi Stokes cho độ cao geoid so với mặt địa cầu bán kính R :

$$\zeta_o = \frac{R}{\gamma}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{A_{nm}}{n-1}\cos m\lambda + \frac{B_{nm}}{n-1}\sin m\lambda\right)P_{nm}(\cos\theta)$$

(4.21)

A_{nm}, B_{nm}: là các hệ số của dị thường trọng lực theo (4.15a).

3.2. Công thức Stokes cho độ cao geoid.

Từ (4.20), ta suy ra công thức cho thế nhiễu:

$$T = R\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta g_n}{n-1} \qquad (4.22)$$

Áp dụng (4.41) trong lý thuyết thế cho Δg, ta có:

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi}\iint_s \Delta g P_n(\cos\psi)dS \qquad (4.23)$$

S – mặt cầu có bán kính R = 1.

$ds = \sin\psi\, d\psi\, dA$

ψ, A là tọa độ cực có cực tại vị trí quan sát.

Thế (4.23) vào (4.22) ta có:

$$T = \frac{R}{4\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}\iint_s \Delta g P_n(\cos\psi)dS \qquad (4.24)$$

Hoặc $$T = \frac{R}{4\pi}\iint_s \Delta g \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)dS \qquad (4.25)$$

Đây là giá trị T trên mặt cầu S ($\rho = R$). Trong trường hợp chung ở không gian ngoài $\rho > R$, để hàm T chính qui ở vô cực, ta phải đưa tỷ số $\left(R/\rho\right)^{n+1}$ vào (4.25) :

$$T = \frac{R^2}{4\pi}\iint_s \Delta g\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}\frac{R^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\psi)\right]dS \qquad (4.26)$$

Đặt $$S(\rho, \psi) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}\frac{R^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\psi) \qquad (4.27)$$

$S(\rho, \psi)$ là hàm Stokes. Công thức (4.26) có dạng :

$$T = \frac{R^2}{4\pi}\iint_s \Delta g S(\rho, \psi)dS$$

Chia hai vế cho γ , ta có:

$$\zeta = \frac{R^2}{4\pi\gamma}\iint_s \Delta g S(\rho, \psi)dS \qquad (4.28)$$

Đây là công thức Stokes, xác định độ cao của geoid trong không gian ngoài. Trên mặt cầu thì $\rho = R$, ta có:

$$S(R, \psi) = \frac{1}{R}\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 6\sin\frac{\psi}{2} - 3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{R}S(\psi) \qquad (4.29)$$

Thay (4.29) vào (4.28) ta có:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_s \Delta g S(\psi)dS \qquad (4.30)$$

Trong đó: $dS = \sin\psi\, d\psi\, dA$.

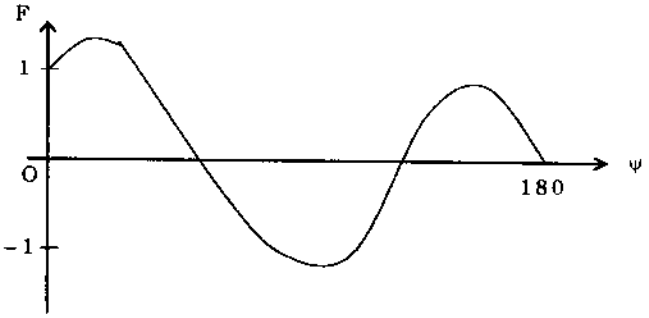
Cận của ψ trong tích phân: từ 0 đến π.

Cận của góc ở cực A : từ 0 đến 2π.

Đặt $\frac{1}{2}\sin\psi S(\psi) = F(\psi)$, ta có :

$$\zeta = \frac{R}{2\pi\gamma}\iint_s \Delta g F(\psi) d\psi dA \qquad (4.31)$$

Hàm $F(\psi)$ được tính sẵn thành bảng theo biến số ψ.



Hình 31

Tích phân toàn mặt địa cầu có thể thay bằng tổng của các tích phân trong các ô diện tích giới hạn bởi: $\psi_i - \psi_{i+1}$, và $A_j - A_{j+1}$

$$\zeta = \frac{R}{2\pi\gamma}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}}\int_{A_j}^{A_{j+1}} \Delta g_{ij} F(\psi) d\psi dA \qquad (4.32)$$

Trong đó $\psi_o = 0$, $\psi_n = \pi$; $A_o = 0$, $A_m = 2\pi$

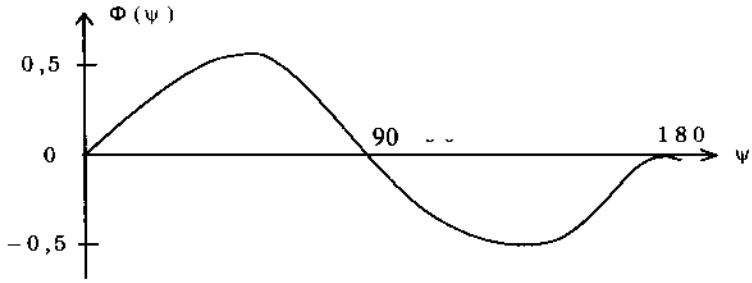
Gọi $\overline{\Delta} g_{ij}$ là giá trị trung bình trên một đới cầu thứ (i, j)

$$\zeta = \frac{R}{2\pi\gamma}\sum_{i=0}^{n}\sum_{f=0}^{m}\overline{\Delta g}_{ij}\int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}}\int_{A_j}^{A_{j+1}} F(\psi) d\psi dA$$

$$= \frac{R}{2\pi\gamma}\sum\sum\overline{\Delta g}_{ij}(A_{j+1} - A_j)\int F(\psi) d\psi$$

$$\zeta = \frac{R}{2\pi\gamma}\sum_{i=0}^{n}\sum_{f=0}^{m}\overline{\Delta g}_{ij}(A_{j+1} - A_j)\left[\Phi(\psi_{i+1}) - \Phi(\psi_i)\right] \qquad (4.33)$$

Hàm $\Phi(\psi)$ được tính sẵn trong bảng Lamberta.

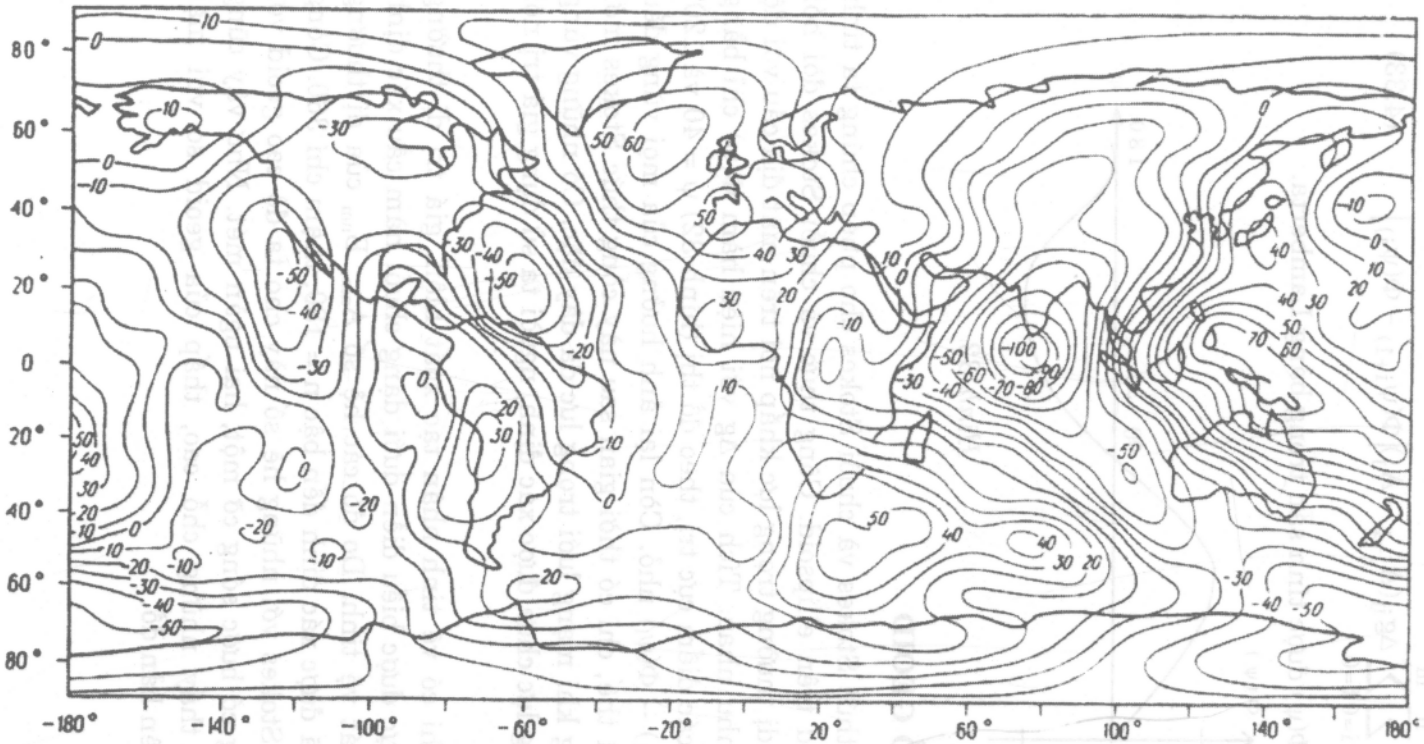


Hình 32

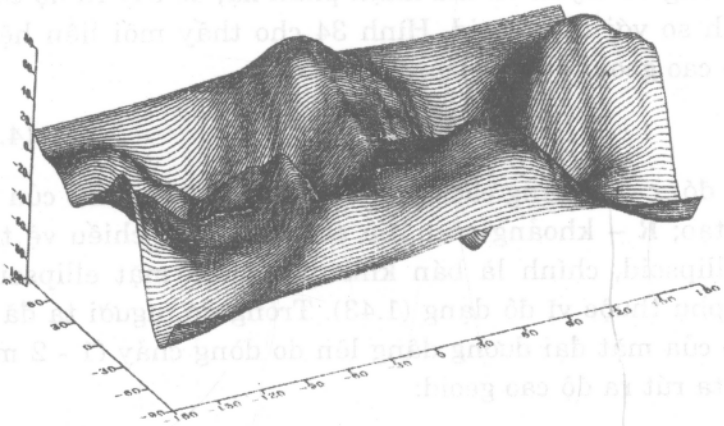
§4 BẢN ĐỒ GEOID

Công thức Stokes và chuỗi Stokes cho phép chúng ta tính độ cao geoid trên ellipsoid. Công thức và chuỗi Stokes đòi hỏi biết giá trị dị thường trọng lực khắp nơi trên mặt địa cầu với độ chính xác như nhau. Tích của Δg với hiệu hàm $\Phi(\psi)$ chỉ bằng không gần các điểm cực trị, theo đồ thị (hình 32) $\psi = 40$ và 120° ở đó: $\Phi(\psi_{i+1}) - \Phi(\psi_i)$ nhỏ. Còn lại ảnh hưởng của mọi vùng đều đáng kể. Vì thế, chỉ có thời gian sau này công thức Stokes mới có ứng dụng khi mạng lưới trọng lực đã dày đặc. Có những vùng giá trị trọng lực chưa được xác định, người ta sử dụng giá trị nội suy.

Sau khi có vệ tinh nhân tạo xuất hiện, giá trị dị thường của trọng lực được biểu diễn dưới dạng chuỗi hàm cầu xác định qua quan sát vệ tinh. Do đó các hệ số A_{nm}, B_{nm} của dị thường trọng lực đã được xác định đến bậc n = 180, thậm chí 360. Công thức chuỗi Stokes với những hệ số này cho ta độ cao geoid với những sóng có bước sóng cỡ một, hai ngàn mét. Như vậy cũng đủ cho ta thấy những chỗ cao, thấp của geoid so với mặt spheroid trên bản đồ.



Hình 33: Độ cao geoid bậc 18 so với ellipsoid có độ dẹt 1/298,256 theo mô hình Standard Earth III, 1973 của đài thiên văn Smithsonian (Mỹ).



Hình 33 a: Mô hình 3D của geiod theo mô hình GEM-T1(1989) do Trần Văn Nhạc và Nguyễn Thành Vấn xây dựng

Tuy nhiên, phương pháp vệ tinh đã giúp xác định hàm thế trọng lực W, điều mà xưa nay ngành trọng lực không đo được vì không có máy đo thế. Vì vậy, độ cao geoid được xác định trực tiếp qua thế của trọng lực chứ không qua dị thường trọng lực nữa. Cụ thể, khi xác định được hàm thế W dạng chuỗi hàm cầu, ta tìm thế nhiễu T và áp dụng công thức Bruns (4.6) để tính độ cao geoid so với ellipsoid thỏa điều kiện $U_o = W_o$ hoặc so với ellipsoid bất kỳ theo (4.6a)...

§5 PHƯƠNG PHÁP TRẮC ĐẠC ĐỘ CAO VỆ TINH VÀ TÍNH DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC TỪ ĐỘ CAO GEOID

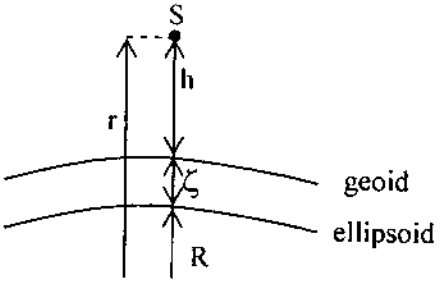
Độ cao geoid là mức chênh lệch độ cao giữa mặt đẳng thế lý thuyết ellipsoid và mặt đẳng thế của trường trọng lực hiện hữu của trái đất. Ở phương Tây người ta còn gọi độ cao geoid là dị thường geoid. Phương pháp tính độ cao geoid dưới dạng chuỗi bằng hằng số Stokes hay bằng giá trị trung bình của dị thường trọng lực quan sát trên mặt đất nhờ công thức Stokes là phương pháp gián tiếp xác định độ cao geoid. Dạng của geoid nhận được không chi tiết mà biến thiên với bước sóng lớn, ứng với cấu trúc bất đồng nhất sâu thuộc tầng manti, ở độ sâu một, hai ngàn km. Phương pháp trắc đạc độ cao vệ tinh là một phương pháp hiện đại, thực hiện đo trực tiếp mặt geoid từ vệ tinh nhân tạo

bằng sóng vô tuyến và thu nhận phản xạ, để suy ra độ cao h của vệ tinh so với mặt geoid. Hình 34 cho thấy mối liên hệ giữa h với độ cao geoid ζ như sau:

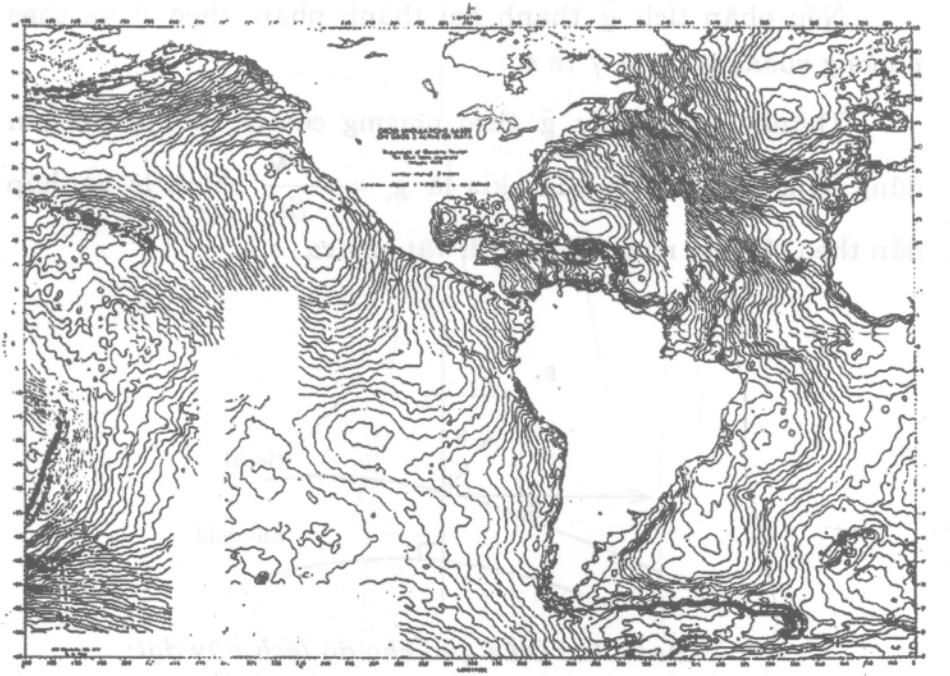
$$r = R + \zeta + h \qquad (4.34)$$

Trong đó: r – khoảng cách địa tâm (từ tâm trái đất) của vệ tinh nhân tạo; R – khoảng cách địa tâm của hình chiếu vệ tinh lên mặt ellipsoid, chính là bán kính vectơ của mặt ellipsoid, biến thiên phụ thuộc vĩ độ dạng (1.43). Trong đó, người ta đã bỏ qua độ cao của mặt đại dương dâng lên do dòng chảy (1 - 2 mét). Từ (4.33) ta rút ra độ cao geoid:

$$\zeta = r - R - h$$



Hình 34: Vệ tinh S bay phía trên mặt geoid và ellipsoid



Hình 35: Bản đồ geoid xây dựng từ số liệu trắc đạc độ cao vệ tinh cho khu vực đại dương xung quanh Châu Mỹ.

§6 ĐỘ LỆCH DÂY DỌI

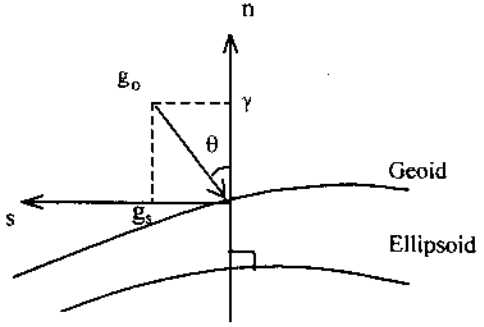
6.1. Độ lệch dây dọi xác định qua độ cao geoid.

Sự khác biệt giữa trường trọng lực bình thường và trường trọng lực của Trái đất đã được thể hiện qua các đại lượng như: dị thường trọng lực Δg, thế nhiễu T, độ cao ζ của geoid. Ngoài ra sự khác biệt này còn được thể hiện qua một đại lượng nữa, đó là: độ lệch dây dọi, được ứng dụng trong trắc địa để xác định độ cao trắc địa H.

Độ lệch dây dọi được định nghĩa là góc giữa pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt đẳng thế lý thuyết và pháp tuyến n của mặt đẳng thế của trường trọng lực thực. Trên mặt geoid, đó chính là góc giữa pháp tuyến của ellipsoid và pháp tuyến của geoid; nói cách khác, đó là góc giữa phương của vectơ $\vec{g}$ và phương của vectơ $\vec{\gamma}$.

Nếu phân tích $\vec{g}$ thành hai thành phần, theo $\vec{\gamma}$ và theo phương vuông góc với $\vec{\gamma}$ ta có:

Thành phần chiếu $\vec{g}$ theo phương của $\vec{\gamma}$ có thể coi gần đúng bằng γ và thành phần kia là $g_s = -\frac{\partial W}{\partial s}$ chính là lực hấp dẫn theo phương ngang do các dị vật gây ra.



Hình 36a: Diễn giải cho độ lệch dây dọi:

g_o - giá trị trọng lực trên mặt geoid.

γ - giá trị trọng lực bình thường.

g_s - thành phần chiếu của g theo phương s vuông góc với $\vec{\gamma}$ là phương có góc lệch lớn θ nhất;

Ta có: $$tg\theta = \frac{g_s}{\gamma} \qquad (4.35)$$

θ là góc rất nhỏ (khoảng vài chục giây), với độ chính xác đến bậc hai ta có thể viết:

$$\theta = \frac{g_s}{\gamma} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial w}{\partial s} \qquad (4.36)$$

Mặt khác W = U + T, do đó:

$$\theta = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial T}{\partial s}\right) \qquad (4.37)$$

Nhưng thành phần của $\vec{\gamma}$ theo phương vuông góc với $\vec{\gamma}$ bằng không $\frac{\partial U}{\partial s} = 0$. Vậy (4.37) chỉ còn lại.

$$\theta = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial s}$$

Ngoài ra $T = \gamma\,\zeta$, nên:

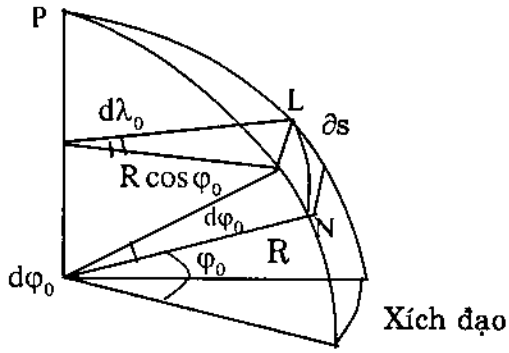
$$\theta = -\frac{\partial \zeta}{\partial s} \qquad (4.38)$$

Hay $$\partial\zeta = -\,\theta\partial s \qquad (4.39)$$

Kết quả trên chứng tỏ độ lệch dây dọi bằng đạo hàm của độ cao geoid theo phương biến thiên nhanh nhất của trọng lực g trên mặt geoid.

6.2. Hai thành phần chiếu của độ lệch dây dọi.

Chiếu mặt góc θ xuống mặt kinh tuyến và mặt thẳng đứng thứ nhất trong thiên văn học (vuông góc với mặt kinh tuyến và chứa pháp tuyến n). Ký hiệu thành phần góc chiếu là ξ và η. Lúc đó ∂s cũng được chiếu thành hai thành phần trên hai mặt này. $\partial\theta = NL$, trong đó $N(\varphi_0, \lambda_0)$ - điểm quan sát.



Hình 36b

Trong mặt kinh tuyến địa lý: $R\partial\varphi$

Trong mặt thẳng đứng thứ nhất (chứa pháp tuyến, vuông góc mặt kinh tuyến) : $R\cos\varphi\partial\lambda$

$$\xi = -\frac{1}{R}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi_0} \tag{4.40}$$

$$\eta = -\frac{1}{R\cos\varphi_o}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda_o} \tag{4.41}$$

ζ được xác định bởi công thức Stokes. Đây là những công thức cho giá trị độ lệch dây dọi trên mặt geoid. Để xác định cho mặt vật lý Trái đất ta cần thêm một hiệu chỉnh nhỏ.

6.3. Công thức Vening–Meinesz cho độ lệch dây dọi.

Thế ξ bằng công thức Stokes (4.30) trong (4.40) và (4.41):

$$\xi = -\frac{1}{4\pi\gamma}\iint\Delta g\frac{\partial S(\psi)}{\partial\varphi_o}dS \tag{4.42}$$

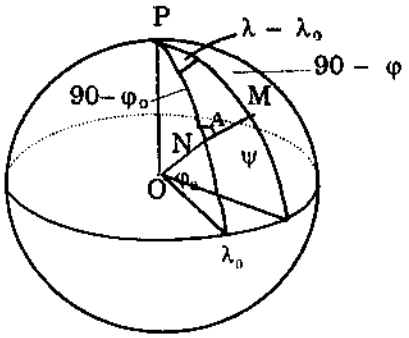
$$\eta = -\frac{1}{4\pi\gamma}\iint\Delta g\frac{\partial S(\psi)}{\partial\lambda_o}dS \tag{4.43}$$

$dS = \sin\psi dAd\psi$ - diện tích vi phân mặt cầu bán kính đơn vị.

Trong đó:

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial\varphi_0} = \frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_0}$$

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial\lambda_0} = \frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_0}$$



Hình 37

Giả sử điểm quan sát là $N(\varphi_0,\lambda_0)$, điểm chạy là $M(\varphi,\lambda)$, P là cực Trái đất. Theo lượng giác cầu (trong thiên văn học):

$$\sin\psi \sin A = \cos\varphi \sin(\lambda - \lambda_o) \qquad (a)$$

Hay $$\frac{\sin\psi}{\sin(\lambda-\lambda_0)} = \frac{\cos\varphi}{\sin A} = \frac{\sin(90^0-\varphi)}{\sin A} \quad \text{(công thức sin)} \qquad (a')$$

$$\sin\psi \cos A = \sin\varphi \cos\varphi_o - \cos\varphi \sin\varphi_o \cos(\lambda - \lambda_o) \qquad (b)$$

$$\cos\psi = \sin\psi \sin\varphi_o + \cos\varphi \cos\varphi_o \cos(\lambda - \lambda_o) \qquad (c)$$

Lấy vi phân hai vế của (c) theo φ_o, ta có:

$$-\sin\psi d\psi = \sin\varphi \cos\varphi_o d\varphi_o - \cos\varphi \sin\varphi_o \cos(\lambda - \lambda_o) d\varphi_o \qquad (c')$$

So sánh (c') với (b) ta có:

$$-d\psi = \cos A \, d\varphi_o$$

Hay $$\frac{d\psi}{d\varphi_0} = -\cos A \qquad (d)$$

Lấy vi phân (c) theo λ_o, ta có:

$$-\sin\psi \, d\psi = \cos\varphi \cos\varphi_o \sin(\lambda - \lambda_o) \, d\lambda_o \qquad (e)$$

Liên hệ với (a), ta có:

$$-d\psi = \cos\varphi_o \sin A \, d\lambda_o$$

Hay $$\frac{d\psi}{d\lambda_0} = -\cos\varphi_0 \sin A \qquad (f)$$

Dựa vào (d) và (f), ta viết lại công thức cho ξ, η:

$$\xi = \frac{1}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g\frac{\partial S}{\partial\psi}\sin\psi\cos A\, d\psi\, dA \qquad (4.44)$$

$$\eta = \frac{1}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g\frac{\partial S}{\partial\psi}\sin\psi\sin A d\psi\, dA \qquad (4.45)$$

ξ, η: tính ra radian; để đổi thành giây, ta nhân thêm hệ số $\rho'' = 206265''$, sau đó ký hiệu:

$$Q = -\frac{\rho''}{2\gamma}\frac{\partial S}{\partial\psi}\sin\psi \qquad (4.46)$$

Gọi Q là hàm Vening – Meinesz

$$\xi'' = -\frac{1}{2\pi}\iint\Delta g Q\cos A d\psi dA \qquad (4.47)$$

$$\eta'' = -\frac{1}{2\pi}\iint\Delta g Q\sin A d\psi dA \qquad (4.48)$$

Đây là công thức Vening – Meinesz

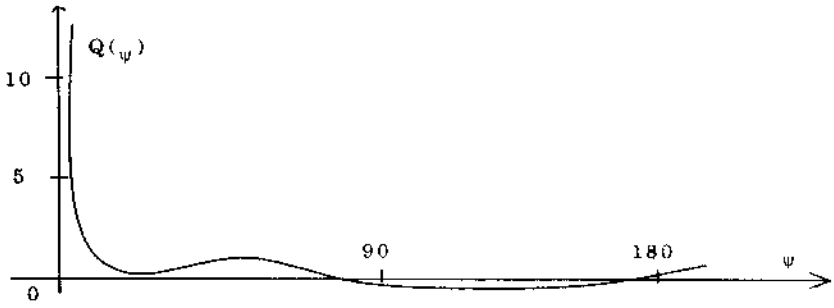
6.4. Tính chất của hàm Vening – Meinesz

Hàm Vening – Meinesz liên tục khắp vùng mà nó được xác định trừ $\psi = 0$, là điểm đặc biệt.

Lấy đạo hàm S (ψ) theo ψ ta sẽ có dạng cụ thể hàm Vening – Meinesz :

$$Q = \frac{\rho'}{2\gamma}\cos^2\frac{\psi}{2}\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} + 12\sin\frac{\psi}{2} - 32\sin^2\frac{\psi}{2} + \frac{3}{1+\sin\frac{\psi}{2}} - 12\sin^2\frac{\psi}{2}\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right] \qquad (4.49)$$

Giá trị Q được tính sẵn trong bảng theo ψ biến thiên từ 0 đến 180°.



Hình 38

Thay hàm Q bằng (4.49) vào công thức (4.47), (4.48) và tính tích phân một cách bình thường. Riêng tại $\psi = 0$ ta biến đổi như sau:

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{r}{2R}$$

Do đó : $\quad dr = R\cos\frac{\psi}{2}\,d\psi \approx Rd\psi \quad$ (khi $\psi \approx 0$)

và $\quad \operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}} = \frac{2R}{r}$

6.5. Công thức thực hành.

Ta có thể chia tích phân ra cho 3 vùng :

a) Vùng trung tâm gần điểm quan sát trong vòng bán kính r = 5 km, ở đó có thể coi trọng lực biến thiên đều theo phương ngang X, Y (gradient phương ngang không đổi).

Ở đây $$Q = Q_o = \frac{\rho''}{2\gamma}\frac{2R}{r} \qquad (4.50)$$

b) Vùng hình vành khăn: tại đây có thể bỏ qua độ cong của mặt cầu. Hàm Q được khai triển thành chuỗi $\bar{r}$ = 2000km.

Áp dụng công thức $\sin x = x - \frac{x^3}{3!}$ ta có:

$$Q = Q_1 = \frac{\rho''}{2\gamma}\left(\frac{2}{\psi} + \frac{49}{12}\psi + 3\right) \qquad (4.51)$$

c) Vùng xa, vẫn lấy Q toàn phần thay vào tích phân:

$$\xi'' = \xi''_o + \xi''_1 + \xi''_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_o^{r_0}\int_o^{2\pi}\Delta g Q_o \cos A dr dA$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\psi_o}^{\psi}\int_o^{2\pi}\Delta g Q_1 \cos A d\psi dA - \frac{1}{2\pi}\int_{\psi}^{\pi}\int_o^{2\pi}\Delta g Q \cos A d\psi dA \qquad (4.52)$$

$$\eta'' = \eta''_o + \eta''_1 + \eta''_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_o^{r_0}\int_o^{2\pi}\Delta g Q_o \sin A dr dA$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\psi_o}^{\psi}\int_o^{2\pi}\Delta g Q_1 \sin A d\psi dA - \frac{1}{2\pi}\int_{\psi}^{\pi}\int_o^{2\pi}\Delta g Q \sin A d\psi dA \qquad (4.53)$$

Tích phân trên cũng được triển khai thực hiện trên palet.

Để tránh điểm làm cho biểu thức trong tích phân trở nên vô cực (r = 0), ta có thể biến đổi bên trong hai tích phân đầu như sau:

$$\iint \frac{\Delta g}{r}\cos A dr dA = \iint \frac{\Delta g - \Delta g_o}{r}\cos A dr dA$$

Δg_0 là dị thường trọng lực tại điểm quan sát A. Khi thêm Δg_0 (hằng) vào, tích phân sẽ không thay đổi, thực vậy :

$$\iint \frac{\Delta g_0}{r}\cos A dr dA = \Delta g_o \int_o^{r}\int_o^{2\pi}\frac{dr}{r}\cos A dA = 0$$

(lấy tích phân xong, khi thay cận vào sinA sẽ cho 0)

Khi $r \to 0$ $\lim \dfrac{\Delta g - \Delta g_o}{r} = \dfrac{\partial \Delta g}{\partial y}$

Gia tốc trọng lực theo r và có thể khai triển thành gradient theo x và theo y.

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r} = \frac{\partial \Delta g}{\partial x}\cos A + \frac{\partial \Delta g}{\partial y}\sin A$$

Thay vào biểu thức độ lệch dây dọi:

$$\xi''_o = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_o^{r_o}\int_o^{2\pi}\frac{\delta\Delta g}{\delta x}\cos^2 A dr dA - \frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_o^{r_o}\int_o^{2\pi}\sin A\cos A dr dA \tag{4.54}$$

$$\eta''_o = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_o^{r_o}\int_o^{2\pi}\frac{\delta\Delta g}{\delta x}\cos A\sin A dr dA - \frac{\rho''}{2\pi\gamma}\int_o^{r_o}\int_o^{2\pi}\frac{\delta\Delta g}{\delta y}\sin^2 A dr dA \tag{4.55}$$

Đối với một phạm vi r đủ nhỏ, gradient có thể coi là hằng số và ta có thể đưa ra ngoài dấu tích phân.

$$\xi''_o = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\partial\Delta g}{\partial x}\int_o^{r_o}\int_o^{2\pi}\cos^2 A dr dA - \frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\partial\Delta g}{\partial y}\int_o^{r_o}\int_o^{2\pi}\sin A\cos A dr dA$$

$$= -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\partial\Delta g}{\partial x}\int_o^{r_o}dr\int_o^{2\pi}\cos^2 A dA \tag{4.56}$$

$$\eta''_o = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\partial\Delta g}{\partial x}\int_o^{r_o}\int_o^{2\pi}\sin A\cos A dr dA - \frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\partial\Delta g}{\partial y}\int_o^{r_o}\int_o^{2\pi}\sin^2 A dr dA$$

$$= -\frac{\rho''}{2\pi\gamma}\frac{\partial\Delta g}{\partial y}\int_o^{r_o}dr\int_o^{2\pi}\sin^2 A dr dA \tag{4.57}$$

Chú ý: $\int_o^{2\pi}\sin A\cos A dA = 0$

Thực hiện phép tính cuối cùng và thay số ta được:

$$\xi''_o = -0'',105 r_o\frac{\partial\Delta g}{\partial x} \tag{4.58}$$

$$\eta''_o = -0'',105 r_o\frac{\partial\Delta g}{\partial y} \tag{4.59}$$

CHƯƠNG V

BÀI TOÁN THUẬN CỦA THĂM DÒ TRỌNG LỰC

KHÁI NIỆM:

Bài toán thuận của thăm dò trọng lực là bài toán đi tìm các thành phần của trọng trường, căn cứ vào sự phân bố biết trước của nguồn – khối lượng hấp dẫn. Thành phần của trọng trường được hiểu là thế và đạo hàm các bậc của nó theo các tọa độ x, y, z. Một khi đã biết trước dị vật, với hình dạng, kích thước, mật độ, tọa độ, thế nằm xác định, thì ta tìm được biểu thức giải tích xác định các thành phần của trọng trường ở không gian bên ngoài dị vật và cả trong lòng dị vật. Biểu thức giải tích chứa các tham số cụ thể của mỗi dị vật.

Trường ngoài thường gặp trong thăm dò. Khi trọng lực hầm lò phát triển, người ta có dịp nghiện cứu đến trường trong (dưới mặt đất). Một khi đã có biểu thức giải tích phụ thuộc tọa độ quan sát, thì ứng với một tọa độ quan sát, ta có một giá trị duy nhất của trường. Đó là tính chất đơn trị của bài toán thuận.

Vì máy đo trọng lực luôn đặt theo phương thẳng đứng z so với mặt phẳng quan sát, là phương của trọng lực Trái đất, cho nên đạo hàm bậc nhất của thế hấp dẫn của dị vật theo z là V_z được đồng nhất với dị thường trọng lực Δg đã được lọc bỏ ảnh hưởng của các yếu tố địa chất khác xung quanh.

Thành phần ngang của lực tác dụng của dị vật, là các đạo hàm theo phương ngang x và y của thế hấp dẫn là V_x, V_y. Đạo hàm bậc cao hơn của thế hấp dẫn V_{zx},V_{zy}, V_{zz}, V_{zzz},v.v... gọi là các gradient của trọng lực, được đo bằng máy chuyên đo gradient.

Trong quá trình giải bài toán thuận cho các dị vật có dạng hình học đơn giản, ta thừa nhận các điều kiện:

– Vật thể gây trường có mật độ đồng nhất.

– Vật thể có dạng hình học đơn giản hai, ba chiều tiện lấy tích phân: hình cầu, hình hộp chữ nhật, hình trụ tiết diện tròn,

chữ nhật, thang, v.v...

– Trường hợp dị vật có hình dạng phức tạp, ta xấp xỉ nó bằng tập hợp các dị vật cơ sở, có dạng hình học đơn giản. Do tính chất chồng chất của trường, lực tác dụng của dị vật dạng phức tạp lên điểm đo bằng tổng lực tác dụng của các khối lượng cơ sở mà ta xấp xỉ hình học dị vật đó.

§1 BÀI TOÁN THUẬN ĐỐI VỚI MỘT SỐ VẬT THỂ 3 CHIỀU.

1.1. Biểu thức tổng quát cho các vật thể hình dạng bất kỳ.

Bài toán thuận, chung quy là bài toán lấy tích phân để có biểu thức giải tích cụ thể cho thế và đạo hàm của thế đối với từng dị vật cụ thể. Công thức tổng quát cho thế hấp dẫn của vật thể khối có thể tích τ và dạng bất kỳ là:

$$V = G\int_{\tau}\frac{dm}{r} \qquad (5.1)$$

G - hằng số hấp dẫn.

r - khoảng cách giữa điểm quan sát P (x, y, z) và điểm chạy M (ξ, η, ζ) trong tích phân :

$$r = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}$$

Khối lượng vi phân dm = σdτ = σ dξ dη dζ, trong đó σ là mật độ dư, thường là hằng và dτ = dξ dy dζ là thể tích vi phân.

Biểu thức (5.1) có thể viết:

$$V(x, y, z) = G\sigma\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{1/2}} \qquad (5.2)$$

$$V_z(x, y, z) = G\sigma\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{(\zeta - z)d\xi d\eta d\zeta}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{3/2}} \qquad (5.3)$$

Ký hiệu V_z là đạo hàm bậc nhất theo z của V. Đây chính là thành phần theo phương thẳng đứng z của lực hấp dẫn và được đồng nhất với dị thường trọng lực Δg do dị vật gây nên. Trục z đặt hướng xuống dưới, vuông góc với mặt phẳng quan sát (theo

phương ngang). Trục x, y nằm trong mặt phẳng quan sát này.

Đạo hàm theo x và y có dạng tương tự: Đạo hàm bậc hai của V nhận được bằng cách lấy tiếp đạo hàm của biểu thức (5.4) theo tọa độ mong muốn, ví dụ theo x:

$$V_{zx}(x, y, z) = 3G\sigma \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{(\xi - x)(\zeta - z)\, d\xi d\eta d\zeta}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{5/2}} \quad (5.4)$$

Dưới đây là bảng trình bày các biểu thức giải tích cho các loại đạo hàm của thế hấp dẫn V của dị vật.

Bảng 1: Biểu thức của thế và đạo hàm các bậc của thế

Đạo hàm của thế	Hệ tọa độ		
	Vuông góc	Cầu	Trụ
V	$G\sigma\iiint\frac{d\xi d\eta d\zeta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{1/2}}$	$G\sigma\iiint r\cos\varphi\, dr d\varphi d\psi$	$G\sigma\iiint\frac{\rho d\rho d\varphi d\zeta}{(\rho^2+\zeta^2)^{1/2}}$
V_z	$G\sigma\iiint\frac{(\zeta-z)d\xi d\eta d\zeta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{3/2}}$	$G\sigma\iint\sin\varphi\cos\varphi\, dr d\varphi d\psi$	$G\sigma\iiint\frac{\zeta\rho d\rho d\varphi d\zeta}{(\rho^2+\zeta^2)^{3/2}}$
V_{xy}	$3G\sigma\iiint\frac{(\xi-x)(\eta-y)d\xi d\eta d\zeta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{5/2}}$	$\frac{3}{2}G\sigma\iiint\frac{\cos^3\varphi\sin 2\psi dr d\varphi d\psi}{r}$	$\frac{3}{2}G\sigma\iiint\frac{\rho^3\sin 2\varphi d\rho d\varphi d\zeta}{(\rho^2+\zeta^2)^{5/2}}$
V_{xz}	$3G\sigma\iiint\frac{(\xi-x)(\zeta-z)d\xi d\eta d\zeta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{5/2}}$	$3G\sigma\iiint\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi\cos\psi dr d\varphi d\psi}{r}$	$3G\sigma\iiint\frac{\zeta\rho^2\cos\varphi d\rho d\varphi d\zeta}{(\rho^2+\zeta^2)^{5/2}}$

V_{yz}	$G\sigma \iiint \frac{(\eta - y)(\zeta - z)\, d\xi d\eta d\zeta}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{5/2}}$	$G\sigma \iiint \frac{\sin\varphi \cos^2\varphi \sin\psi d\rho d\varphi d\psi}{r}$	$3G\sigma \iiint \frac{\zeta\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\zeta}{(\rho^2 + \zeta^2)^{5/2}}$
V_{zz}	$G\sigma \iiint \frac{\left[2(\zeta - z)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2\right] d\xi d\eta d\zeta}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{5/2}}$	$G\sigma \iiint \frac{(3\sin^2\varphi - 1)\cos\varphi dr d\varphi d\psi}{r}$	$G\sigma \iiint \frac{\rho(2\zeta^2 - \rho^2) d\rho d\varphi d\zeta}{(\rho^2 + \zeta^2)^{5/2}}$
$V_\Delta = V_{yy} - V_{xx}$	$3G\sigma \iiint \frac{\left[(\eta - y)^2 - (\xi - x)^2\right] d\xi d\eta d\zeta}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{5/2}}$	$-3G\sigma \iiint \frac{\cos^3\varphi \cos 2\psi dr d\varphi d\psi}{r}$	$-3G\sigma \iiint \frac{\rho^3 \cos 2\varphi d\rho d\varphi d\zeta}{(\rho^2 + \zeta^2)^{5/2}}$
V_{zzz}	$3G\sigma \iiint \frac{(\zeta - z)\left[2(\zeta - z)^2 - 3(\xi - x)^2 - 3(\eta - y)^2\right] d\xi d\eta d\zeta}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{7/2}}$	$3G\sigma \iiint \frac{[5\sin^3\varphi - 3\sin\varphi]\cos\varphi dr d\varphi d\psi}{r^2}$	$3G\delta \iiint \frac{\rho\zeta(2\zeta^2 - 3\rho^2) d\rho d\varphi d\zeta}{(\rho^2 + \zeta^2)^{7/2}}$

§2. BÀI TOÁN THUẬN ĐỐI VỚI CÁC VẬT CÓ DẠNG HÌNH HỌC ĐƠN GIẢN 3 CHIỀU

2.1. Hình cầu đặc

Thế của quả cầu đặc, đồng chất, bán kính R bất kỳ, theo lý thuyết thế là tương đương với thế của chất điểm có cùng khối lượng M với quả cầu và được đặt tại tâm quả cầu. Thế này tỷ lệ nghịch với khoảng cách r giữa điểm quan sát và tâm quả cầu.

$$V(x,y,z) = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{1/2}} \qquad (5.5)$$

Trong đó ξ, η, ζ là tọa độ tâm quả cầu.

Để đơn giản, ta đặt quả cầu sao cho tâm của nó nằm trên trục z và ở độ sâu ζ (còn $\xi = \eta = 0$). Người quan sát trên trục x sẽ có các biểu thức:

$$V_z = \Delta g = GM\zeta / (x^2 + \zeta^2)^{3/2} \qquad (5.6)$$

$$V_{xz} = -3\,GM\,\zeta\,x / (x^2 + \zeta^2)^{5/2} \qquad (5.7)$$

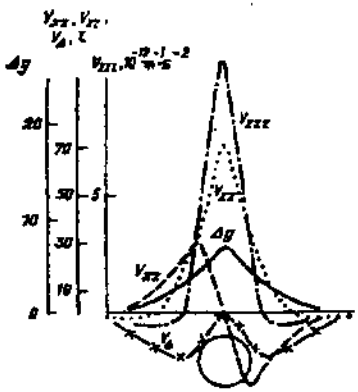
$$V_\Delta = V_{yy} - V_{xx} = -3GMx^2 / (x^2 + \zeta^2)^{5/2} \qquad (5.8)$$

$$Vzz = GM\,(2\zeta^2 - x^2) / (x^2 + \zeta^2)^{5/2} \qquad (5.9)$$

$$V_{zzz} = 3GM\zeta\,(2\zeta^2 - 3x^2) / (x^2 + \zeta^2)^{7/2} \qquad (5.10)$$

Khối lượng của quả cầu với mật độ dư σ:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma \qquad (5.11)$$



Hình 39: Hình cầu

Bảng 2: Đặc trưng tham số của các đường cong thuộc quả cầu.

Thành phần của trường	Cực trị		Các điểm cắt trục x
	Hoành độ	Trung độ	
$\Delta g = GM\dfrac{\zeta}{(x^2+\zeta^2)^{3/2}}$	$x_{max} = 0$	$\Delta g_{max} = GM/\zeta^2$	$x = \pm\infty$
$V_{xz} = -3GM\dfrac{\zeta x^2}{(x^2+\zeta^2)^{5/2}}$	$x_{max} = -\zeta/2$ $x_{min} = +\zeta/2$	$V_{xz\,max} = 0{,}858\ GM/\zeta^3$ $V_{xz\,min} = -0{,}858\ GM/\zeta^3$	$x_o = 0$ $x = \pm\infty$
$V_\Delta = -3GM\dfrac{x^2}{(x^2+\zeta^2)^{5/2}}$	$x_{max} = 0$ $x_{min} = \pm\zeta\sqrt{2/3}$	$V_{\Delta\,max} = 0$ $V_{\Delta\,min} = -0{,}558\ GM/\zeta^3$	$x = \pm\infty$
$V_{zz} = GM\dfrac{2\zeta^2 - x^2}{(x^2+\zeta^2)^{5/2}}$	$x_{max} = 0$ $x_{min} = \pm 2\zeta$	$V_{zz\,max} = 2GM/\zeta^3$ $V_{zz\,min} = -0{,}636\ GM/\zeta^3$	$x_o = \pm\zeta\sqrt{2} = \pm 1{,}414\ \zeta$ $x = \pm\infty$
$V_{zzz} = 3GM\zeta\dfrac{2\zeta^2 - 3x^2}{(x^2+\zeta^2)^{7/2}}$	$x_{max} = 0$ $x_{min} = \pm 2\zeta/\sqrt{2/3}$	$V_{zzz\,max} = 6\ GM/\zeta^4$ $V_{zzz\,min} = -0{,}309\ GM/\zeta^4$	$x_o = \pm\zeta\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \pm 0{,}817\zeta$ $x = \pm\infty$

Hoành độ điểm có trung độ bằng $\frac{1}{2}\Delta g_{max}$: $\pm\zeta\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}$.

2.2. Hình hộp chữ nhật

Giả sử ta có hình hộp chữ nhật với các mặt biên nằm song song với các mặt tọa độ xoz, xoy, zoy là và có tọa độ: ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, ζ_1 và ζ_2.

Ta có:

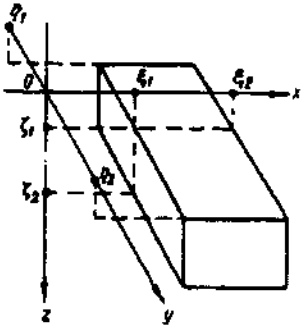
$$\Delta g = -G\sigma\Big|(\xi - x)\ln(\eta + R) + \eta\ln\big[\ (\xi - x) + R\ \big]$$

$$- \zeta\,\mathrm{arctg}\frac{(\xi - x)\eta}{\zeta R}\Bigg|_{\xi_1}^{\xi_2}\Bigg|_{\eta_1}^{\eta_2}\Bigg|_{\zeta_1}^{\zeta_2}, \qquad (5.12)$$

$$V_{xz}(0,0,0) = G\sigma\Big|\ln(\eta + R)\Bigg|_{\xi_1}^{\xi_2}\Bigg|_{\eta_1}^{\eta_2}\Bigg|_{\zeta_1}^{\zeta_2},$$

$$V_{zz}(0,0,0) = -G\sigma.\mathrm{arctg}\frac{(\xi - x)\eta}{\zeta R}\Bigg|_{\zeta_1}^{\zeta_2}\Bigg|_{\xi_1}^{\xi_2}\Bigg|_{\eta_1}^{\eta_2}$$

Trong đó: $R = \sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.



Hình 40: Hình hộp chữ nhật

Sau đây là ví dụ tính Δg cho hình hộp chữ nhật. Sử dụng công thức tổng quát (5.3) cho Δg quan sát tại gốc tọa độ:

$$\Delta g = G\sigma\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{\zeta\,d\eta\,d\zeta}{\left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (5.13)$$

Tích phân theo ζ ta tính được. Sau đó để lấy tích phân theo η, ta sử dụng công thức:

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} = \ln\left(\eta+\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right) \qquad (5.14)$$

Ký hiệu: $\ln\left(\eta+\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right) = R$, ta có kết quả:

$$.\Delta g = -G\sigma \int_{\xi_1}^{\xi_2} \ln(\eta+R)d\xi \Bigg|_{\zeta_1}^{\zeta_2}\Bigg|_{\eta_1}^{\eta_2}$$

Tiếp tục lấy tích phân theo từng phần ta có:

$$\int \ln(\eta+R)d\xi = \xi\ln(\eta+R) - \int \frac{\xi^2 d\xi}{(\eta+R)R}$$

Trong đó:

$$\int \frac{\xi^2 d\xi}{(\eta+R)R} = \int \frac{\xi^2(R-\eta)\,d\xi}{(R^2-\eta^2)R} = \int \frac{\xi^2 d\xi}{\left(\xi^2+\zeta^2\right)}$$

$$-\int \frac{\xi^2\eta\, d\xi}{\left(\xi^2+\zeta^2\right)R} = \int \frac{\xi^2 d\xi}{\left(\xi^2+\zeta^2\right)} - \int \frac{\eta d\xi}{R} + \int \frac{\eta\zeta^2 d\xi}{\left(\xi^2+\zeta^2\right)R}$$

Ở đây $\int \frac{\xi^2 d\xi}{\xi^2+\zeta^2} = \xi - \zeta\,\mathrm{arctg}\frac{\xi}{\zeta}$ và $\int \frac{\eta\zeta^2 d\xi}{\left(\xi^2+\zeta^2\right)R} = \zeta\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\xi\eta}{\zeta R}\right)$

còn $\int \frac{\eta\, d\xi}{R}$ đã biết kết quả theo (5.14).

Vậy, kết quả cuối cùng:

$$\Delta g = -G\sigma\left[\xi\ln(\eta+R) + \eta\ln(\xi+R) + \zeta\ \mathrm{arctg}\frac{\xi\eta}{\zeta R}\right]_{\zeta_1}^{\zeta_2}\Bigg|_{\eta_1}^{\eta_2}\Bigg|_{\xi_1}^{\xi_2}$$

Thành phần $\xi - \zeta\,\mathrm{arctg}\frac{\xi}{\zeta}$ không còn ở trên đây, vì đã tự triệt tiêu khi thay cận theo η.

§3. BÀI TOÁN THUẬN ĐỐI VỚI MỘT SỐ VẬT THỂ 2 CHIỀU.

Để chuyển từ bài toán 3 chiều về bài toán 2 chiều thì trong các công thức cho các vật thể 3 chiều ở trên cần cho một

biến số mà vật kéo dài theo đó chạy từ $-\infty$ đến $+\infty$. Để làm ví dụ, chúng ta xét trường hợp tính $V_z = \Delta g$. Từ công thức ba chiều (5.3), ta có:

$$\Delta g = G\sigma \int_v \frac{(\zeta - z)}{r^3} d\xi d\eta d\zeta \qquad (5.15)$$

Cho biến số η chạy từ $-\infty$ đến $+\infty$:

$$\Delta g = G\sigma \int_{\infty}^{\infty} \int_S \int \frac{(\zeta - z) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}$$

Trong biểu thức này, biến số η chạy từ $-\infty$ đến $+\infty$, còn các biến số (x,z) di chuyển trong giới hạn tiết diện ngang S của vật thể.

Nếu đặt biến số mới α như sau:

$$\eta - y = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}\ \mathrm{tg}\alpha$$

thì $$V_z(x,z) = G\sigma \iint_S \frac{(\zeta - z) d\xi d\zeta}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha d\alpha$$

từ đó $$V_z = 2G\sigma \iint_S \frac{(\zeta - z) d\zeta d\xi}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \qquad (5.16)$$

Cũng như trong trường hợp 3 chiều, nếu đặt điểm quan sát tại gốc tọa độ, tức là cho x = z = 0 thì công thức được đơn giản:

$$V_z(0,0) = 2G\sigma \iint_S \frac{\zeta}{\xi^2 + \zeta^2} d\xi d\zeta \qquad (5.17)$$

3.1. Hình trụ tròn, thanh nằm ngang

Trước tiên, ta xét trường hợp thanh dài hữu hạn nằm ngang dọc trục y từ $-\eta_1$ đến η_2, ở độ sâu ζ. Tại vị trí quan sát x bất kỳ ta có:

$$\Delta g = \frac{G\lambda\zeta}{(x^2+\zeta^2)}\left|\frac{\eta}{\sqrt{x^2+\eta^2+\zeta^2}}\right|_{-\eta_1}^{\eta_2} \qquad (5.18)$$

$$V_{xz} = \frac{G\lambda x\zeta}{(x^2+\zeta^2)^2}\left|\frac{\eta\left[3(x^2+\zeta\right]}{\sqrt{x^2+\eta^2+\zeta^2}}\right|_{\eta_1}^{\eta_2}$$

$$V_{\Delta} = \frac{G\lambda}{(x^2+\zeta^2)}\left|\frac{\eta^3}{(x^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}} - \frac{x^2}{(x^2+\zeta^2)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\eta[3(x^2+\zeta^2)+2\eta^2]}{(x^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\right|_{-\eta_1}^{\eta_2}$$

$$V_{zz} = \frac{G\lambda}{(x^2+\zeta^2)^2}\left|\frac{(2\zeta^2-x^2)\eta}{\sqrt{x^2+\eta^2+\zeta^2}} - \frac{\zeta^2\eta^3}{(x^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\right|_{-\eta_1}^{\eta_2}$$

$$V_{zzz} = \frac{3G\lambda\zeta}{(x^2+\zeta^2)^3}\left|\frac{\eta(2\zeta^2-3x^2)}{\sqrt{x^2+\eta^2+\zeta^2}} - \frac{\eta^3(7\zeta^2-3x^3)}{3(x^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\zeta^2\eta^5}{(x^2+\eta^2+\zeta^2)^{5/2}}\right|_{-\eta_1}^{\eta_2}$$

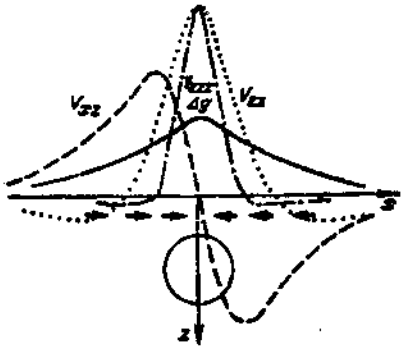
Trường hợp thanh kéo dài vô tận theo trục y, ta có:

$\Delta g = 2G\lambda\zeta / (x^2 + \zeta^2)$,

$V_{xz} = - 4G\lambda x\zeta / (x^2 + \zeta^2)^2$,

$V_{zz} = V_{\Delta} = 2G\lambda\,(\zeta^2 - x^2) / (x^2 + \zeta^2)^2$, (5.19)

$V_{zzz} = 4G\lambda\zeta\,(\zeta^2 - 3x^2) / (x^2 + \zeta^2)^3$.



Hình 41: Hình trụ tròn nằm ngang

Trường hợp hình trụ có bán kính của tiết diện là R, mật độ khối σ, ta có:

$$\Delta g = 2G\pi\sigma R^2\zeta / (x^2 + \zeta^2),$$

$$V_{xz} = -4G\pi\sigma R^2 x\zeta / (x^2 + \zeta^2)^2,$$

$$V_{zz} = V_\Delta = 2G\pi\sigma R^2 (\zeta^2 - x^2) / (x^2 + \zeta^2)^2, \qquad (5.20)$$

$$V_{zzz} = 4G\pi\sigma R^2\zeta (\zeta^2 - 3x^2) / (x^2 + \zeta^2)^3.$$

Bảng 3: Đặc trưng tham số của các đường cong thuộc hình trụ tròn.

Thành phần	Các cực trị		Điểm cắt trục hoành. Hoành độ của điểm có tung độ bằng 0
	Hoành độ	Tung độ	
Δg	$x_{max} = 0^*$	$\Delta g_{max} = 2\pi G\sigma R^2/\zeta$	$x = \pm\infty$
V_{xz}	$x_{max} = -\zeta/\sqrt{3}$ $x_{max} = -\zeta/\sqrt{3}$	$V_{xz\,max} = +(3\sqrt{3}/4)\pi G\sigma R^2/\zeta^2$ $V_{xz\,min} = -(3\sqrt{3}/4)\pi G\sigma R^2/4\zeta^2$	$x_0 = 0$ $x = \pm\infty$
$V_{zz} = V_\Delta$	$x_{max} = 0$ $x_{min} = \pm\zeta\sqrt{3}$	$V_{zz\,max} = 2\pi G\sigma R^2/\zeta^2$ $V_{zz\,min} = -\pi G\sigma R^2/4\zeta^2$	$\lvert x_0\rvert = \zeta$ $x = \pm\infty$
V_{zzz}	$x_{max} = 0$ $x_{min} = \pm\zeta$	$V_{zzz\,max} = 4\pi G\sigma R^2/\zeta^3$ $V_{zzz\,min} = -\pi G\sigma R^2/\zeta^3$	$x_0 = \pm\zeta/\sqrt{3}$ $x = \pm\infty$

3.2. Hình trụ nằm ngang tiết diện chữ nhật

Đây là trường hợp hình hộp chữ nhật mà cận của η là ± ∞ Thay cận như vậy, công thức (5.13) cho kết quả:

$$\Delta g = G\sigma\left|(\xi - x)\ln\left[(\xi - x)^2 + \zeta^2\right] + 2\zeta \operatorname{arctg}\frac{\xi - x}{\zeta}\right|_{\xi_1}^{\xi_2}\Bigg|_{\zeta_1}^{\zeta_2},$$

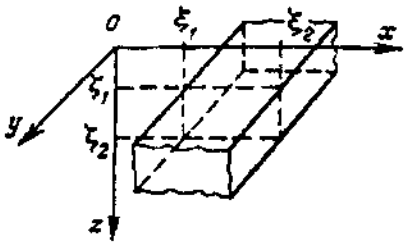
$$V_{xz} = G\sigma\ln\frac{\left[(\xi_1 - x)^2 + \zeta_2^2\right]\left[(\xi_2{}^2 - x)^2 + \zeta_1^2\right]}{\left[(\xi_1 - x)^2 + \zeta_1^2\right]\left[(\xi_2{}^2 - x)^2 + \zeta_2^2\right]} \qquad (5.21)$$

$$V_{zz} = 2G\sigma\left\{\operatorname{arctg}\frac{\zeta_1}{(\xi_1 - x)} - \operatorname{arctg}\frac{\zeta_2}{(\xi_1 - x)} - \operatorname{arctg}\frac{\zeta_1}{(\xi_2 - x)} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg}\frac{\zeta_2}{(\xi_2 - x)}\right\},$$

$$V_{zzz} = 2G\sigma\left\{\frac{(\xi_2 - x)}{\left[(\xi_2 - x)^2 + \zeta_1^2\right]} - \frac{(\xi_2 - x)}{\left[(\xi_2 - x)^2 + \zeta_2^2\right]} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\xi_1 - x)}{\left[(\xi_1 - x)^2 + \zeta_2^2\right]} - \frac{(\xi_1 - x)}{\left[(\xi_1 - x)^2 + \zeta_1^2\right]}\right\}, \qquad (5.22)$$



Hình 42: Hình trụ nằm ngang tiết diện chữ nhật dài vô tận

Sau đây là ví dụ tính Δg cho trường hợp này. Hình trụ có chiều dài vô tận theo y. Ta bắt đầu từ công thức (5.13), kết quả tích phân là (5.14) có thể viết sau:

$$\ln(\eta + R)\Big|_{-\infty}^{+\infty_2} = \lim_{\eta\to\infty}\frac{R+\eta}{R-\eta} = \lim_{\eta\to\infty}\ln\left(\frac{\eta+R}{\xi^2+\zeta^2}\right)^2$$

$$= \lim_{\eta\to\infty} 2\ln\eta\left(1+\sqrt{1+\frac{\xi^2+\zeta^2}{\eta}}\right) - \ln\left(\xi^2+\zeta^2\right)$$

Bỏ qua đại lượng $\frac{\xi^2+\zeta^2}{\eta^2}$ bé, so với 1, ta có kết quả:

$$\ln(\eta + R)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\ln 2\eta - \ln\left(\xi^2+\zeta^2\right)$$

Tiếp đó thay cận theo ξ hoặc ζ, thì 2ln2η sẽ triệt tiêu. Còn

$$V_z(00) = G\sigma\int_{\xi_1}^{\xi_2}\ln\frac{\xi^2+\zeta_2^2}{\xi^2+\zeta_1^2}d\xi$$

$$= G\sigma\xi\ln\left(\xi^2+\zeta^2\right)\Big|_{\xi_1}^{\xi_2}\Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} - G\sigma\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{2\xi^2}{\xi^2+\zeta_1^2}\Big|_{\xi_1}^{\xi_2}d\xi$$

$$= G\sigma\left[\xi\ln\left(\xi^2+\zeta^2\right)+2\xi arctg\frac{\xi}{\zeta}\right]\Big|_{\xi_1}^{\xi_2}\Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2}$$

Thành phần 2ξ tự triệt tiêu khi thay cận theo ζ. Kết quả:

$$Ag = G\sigma\left[\xi\ln\left(\xi^2+\zeta^2\right)+2\zeta\mathrm{arctg}\frac{\xi}{\zeta}\right]\Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2}\Big|_{\xi_1}^{\xi_2} \qquad (5.22a)$$

3.3. Thanh thẳng đứng, hình trụ thẳng đứng hữu hạn

Trường hợp thanh hữu hạn cắm thẳng đứng theo trục z, có chiều dài từ ζ_1 đến ζ_2, quan sát dọc theo trục x, ta có các công thức:

$$\Delta g = G\lambda\left[1/\sqrt{x^2+\zeta_1^2} - 1/\sqrt{x^2+\zeta_2^2}\right],$$

$$V_{xz} = G\lambda x\left[1/\left(x^2+\zeta_2^2\right)^{3/2} - 1/\left(x^2+\zeta_1^2\right)^{3/2}\right] \qquad (5.23)$$

$$V_{zz} = G\lambda\left[\zeta_1 / \left(x^2 + \zeta_1^2\right)^{3/2} - \zeta_2 / \left(x^2 + \zeta_2^2\right)^{3/2}\right]$$

$$V_{zzz} = G\lambda\left[\left(x^2 - 2\xi_2^2\right)\left(x^2 + \zeta_2^2\right)^{5/2} - \left(x^2 - 2\zeta_1^2\right) \circ / \left(x^2 + \zeta_1^2\right)^{5/2}\right].$$

3.4. Dải mỏng nằm ngang

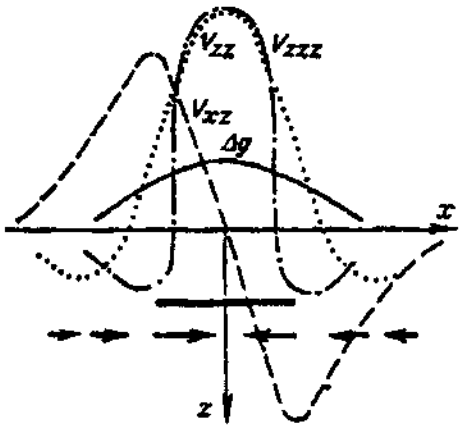
Xét trường hợp dải mỏng (không có bề dầy, phẳng) nằm ngang, có bề rộng hữu hạn l, kéo dài vô cực theo trục y (trục đối xứng của dải là trục y), ta có:

$$\Delta g = 2G\mu\left[\operatorname{arctg}\frac{l - x}{\zeta} + \operatorname{arctg}\frac{l + x}{\zeta}\right],$$

$$V_{xz} = -2G\mu\zeta\left[\frac{1}{(l - x)^2 + \zeta^2} - \frac{1}{(l + x)^2 + \zeta^2}\right]$$

$$V_{zz} = V_{\Delta} = 2G\mu\left[\frac{x + l}{(x + l)^2 + \zeta^2} - \frac{x - l}{(x - l)^2 + \zeta^2}\right],$$

$$V_{zzz} = 4G\mu\zeta\left[\frac{x + l}{\left[(x + l)^2 + \zeta^2\right]^2} - \frac{x - l}{\left[(x - l)^2 + \zeta^2\right]^2}\right], \qquad (5.24)$$



Hình 43: Dải mỏng nằm ngang.

3.5 Nửa mặt phẳng nằm ngang

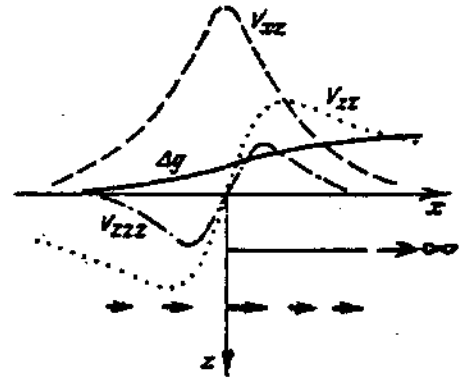
Đối với nửa mặt phẳng nằm ngang ở độ sâu ζ, ta có:

$$\Delta g = 2G\mu\,[\pi/2 + \mathrm{arctg}\,(x/\zeta)],$$

$$V_{xz} = 2G\mu\zeta\,(x^2 + \zeta^2)$$

$$V_{zz} = 2G\mu\zeta x\,/\,(x^2 + \zeta^2)$$

$$V_{zzz} = 4G\mu\zeta x\,/\,(x^2 + \zeta^2)^2 \qquad (5.25)$$



Hình 44: Nửa mặt phẳng nằm ngang

Bảng 4: Đặc trưng tham số của các đường cong thuộc nửa mặt phẳng nằm ngang.

Thành phần	Các cực trị		Hoành độ của điểm có tung độ = ½ Δg_{max}	Điểm cắt trục hoành
	Hoành độ	Tung độ		
Δg	$x = +\infty$	$\Delta g_{max} = 2G\pi\mu$	$x_{1/2} = 0$	–
V_{xz}	$x_{max} = 0$	$V_{xz\,max} = G\mu / \zeta$	$\lvert x_{1/2} \rvert = \zeta$	–
$V_{zz} = V_{\Delta}$	$x_{max} = +\zeta$ $x_{min} = -\zeta$	$V_{zz\,max} = G\mu / \zeta$ $V_{zz\,min} = -G\mu / \zeta$	– –	$x_0 = 0$
V_{zzz}	$x_{max} = +\zeta / \sqrt{3}$ $x_{min} = -\zeta / \sqrt{3}$	$V_{zzz\,max} = +1{,}30\,G\mu / \zeta^2$ $V_{zzz\,min} = -1{,}30\,G\mu / \zeta^2$	– –	$x_0 = 0$

3.6. Dải thẳng đứng cao hữu hạn

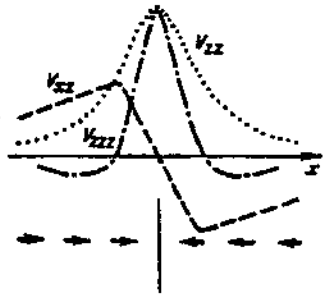
Trường hợp dải mỏng phẳng, thẳng đứng có chiều cao hữu hạn ζ_2 -ζ_1 , chiều kia kéo dài vô tận theo trục y ta có:

$$\Delta g = G\mu \ln\left[\left(x^2+\zeta_2^2\right)/\left(x^2+\zeta_1^2\right)\right]$$

$$V_{xz} = 2G\mu x\left[1/\left(x^2+\zeta_2^2\right)-1/\left(x^2+\zeta_1^2\right)\right] \qquad (5.26)$$

$$V_{zz} = V_{\Delta} = -2G\mu\left[\zeta_2/\left(x^2+\zeta_2^2\right)-\zeta_1/\left(x^2+\zeta_1^2\right)\right]$$

$$V_{zzz} = 2G\mu\left[\left(x^2-\zeta_2^2\right)/\left(x^2+\zeta_2^2\right)^2-\left(x^2-\zeta_1^2\right)/\left(x^2+\zeta_1^2\right)^2\right]$$



Hình 45. Dải thẳng đứng cao hữu hạn

3.7. Vỉa thẳng đứng cắm xuống vô cực

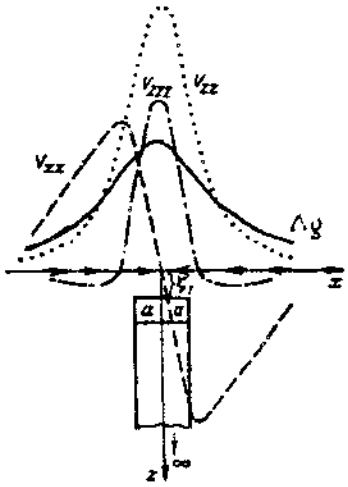
Vỉa có bề dầy $\xi_2 - \xi_1$ và kéo dài vô tận theo trục y. Xét trường hợp cắm xuống vô cực là trường hợp mà hình trụ chữ nhật có hạn $\zeta_2 = \infty$. Áp dụng các công thức đầu ở mục 3.2 với việc thay $\zeta_2 = \infty$ vào đó, ta có:

$$\Delta g = G\sigma\left[\xi_2 \ln(\xi_2^2+\zeta_2^2)-\xi_1 \ln(\xi_1^2+\zeta_2^2)-\xi_2 \ln(\xi_2^2+\zeta_1^2)+\xi_1 \ln(\xi_1^2+\zeta_1^2)\right.$$

$$\left.+2\zeta_2 \operatorname{arctg}\frac{\xi_2}{\zeta_2}-2\zeta_2 \operatorname{arctg}\frac{\xi_1}{\zeta_2}+2\zeta_1\left(\operatorname{arctg}\frac{\xi_1}{\zeta_1}-\operatorname{arctg}\frac{\xi_2}{\zeta_1}\right)\right]$$

$$= G\sigma\left[\xi_2\infty-\xi_1\infty-\xi_2 \ln(\xi_2^2+\zeta_1^2)+\xi_1 \ln(\xi_1^2+\zeta_1^2)+\infty.0-\infty.0\right.$$

$$\left.+2\zeta_1\left(\operatorname{arctg}\frac{\xi_2}{\zeta_1}-\operatorname{arctg}\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)\right] \qquad \text{với } x>0 \qquad (5.27)$$



Hình 46. Vỉa thẳng đứng cắm xuống vô cực

Về mặt toán học ta có kết quả $\Delta g = \infty$. Tuy nhiên, trên thực tế và về vật lý, lực hấp dẫn của vật dài vô tận không phải bằng vô cực. Để khắc phục các vô cực, trong (5.27) ta khai triển lnx thành chuỗi và giới hạn hai số hạng đầu:

$$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \ldots + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}}\right]$$

Áp dụng công thức chuỗi trên ta có:

khi $\zeta_2 \to \infty$

$$\ln(\xi_2^2 + \zeta_2^2) = 2\left[\frac{(\xi_2^2 + \zeta_2^2 - 1)}{(\xi_2^2 + \zeta_2^2 + 1)} + \frac{(\xi_2^2 + \zeta_2^2 - 1)^3}{3(\xi_2^2 + \zeta_2^2 + 1)^3}\right] = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Ngoài ra $\operatorname{arctg}\frac{\xi_2}{\zeta_2} = \frac{\xi_2}{\zeta_2}$ khi $\zeta_2 \to \infty$

Vậy $\zeta_2 \operatorname{arctg}\frac{\xi_2}{\zeta_2} = \xi_2$; Tương tự $\zeta_2 \operatorname{arctg}\frac{\xi_1}{\zeta_2} = \xi_1$

Kết quả ta có:

$$\Delta g = G\sigma\left[\frac{14}{3}(\xi_2 - \xi_1) + \xi_1 \ln(\xi_1^2 + \zeta_1^2) - \xi_2 \ln(\xi_2^2 + \zeta_1^2)\right.$$

$$\left. + 2\xi_1\left(\operatorname{arctg}\frac{\xi_1}{\zeta_1} - \operatorname{arctg}\frac{\xi_2}{\zeta_1}\right)\right] \qquad (5.28)$$

$$V_{xz} = G\sigma \ln\frac{(\xi_2 - x)^2 + \zeta_1^2}{(\xi_1 - x)^2 + \zeta_1^2},$$

$$V_{zz} = 2G\sigma\left[\operatorname{arctg}\frac{\zeta_1}{\xi_1 - x} - \operatorname{arctg}\frac{\zeta_1}{\xi_2 - x}\right],$$

$$V_{zzz} = 2G\sigma\left[\frac{(\xi_2 - x)}{(\xi_2 - x)^2 + \zeta_1^2} - \frac{(\xi_1 - x)}{(\xi_1 - x)^2 + \zeta_1^2}\right].$$

Nếu bề dầy của vỉa là 2a và gốc tọa độ đặt chính giữa vỉa ở phía trên thì công thức đạo hàm có dạng:

$$V_{xz} = G\sigma \ln\frac{(a - x)^2 + \zeta_1^2}{(a + x)^2 + \zeta_1^2},$$

$$V_{zz} = -2G\sigma\left[\operatorname{arctg}\frac{\zeta_1}{a + x} + \operatorname{arctg}\frac{\zeta_1}{a - x}\right] =$$

$$= 2G\sigma \operatorname{arctg}\frac{2a\zeta_1}{x^2 - a^2 + \zeta_1^2}, \qquad (5.29)$$

$$V_{zzz} = 2G\sigma\left[\frac{a - x}{(a - x)^2 + \zeta_1^2} + \frac{a + x)}{(a + x)^2 + \zeta_1^2}\right].$$

Bảng 5: Các đặc trưng tham số của các đường cong thuộc vỉa thẳng đứng cắm xuống vô cực

	Các cực trị		Hoành độ của điểm có tung độ bằng ½ Δg_{max}	Điểm cắt trục hoành. Điểm có tung độ bằng 0
	Hoành độ	Tung độ		
V_{xz}	$x_{max} = -\sqrt{\zeta_1^2 + a^2}$ $x_{min} = \sqrt{\zeta_1^2 + a^2}$	$V_{xz\,max}\ G\sigma \ln \dfrac{\sqrt{a^2 + \zeta_1^2} + a}{\sqrt{a^2 + \zeta_1^2} - a}$	$X_{1/2} = -[\lvert x_m \rvert + h] \pm$ $\pm \sqrt{\dfrac{\lvert x_m \rvert + h}{\lvert x_m \rvert - h} - x_m^2}$	$x_0 = 0$
V_{zz}	$x_{max} = 0$	$V_{zz\,max}\ 2\ G\sigma\ \mathrm{arctg}\ \dfrac{2\zeta_1 a}{\zeta_1^2 - a^2}$	$x_{1/2} = \pm\sqrt{\zeta_1^2 + a^2}$	–
V_{zzz} với $\dfrac{a}{\xi_1} < 1{,}5$	$x_{max} = 0$ $x_{min} = \pm\sqrt{(a^2 + \zeta_1^2) \pm 2\zeta_1\sqrt{a^2 + \zeta_1^2}}$	$V_{zzz\,max} = 4G\sigma\ \dfrac{a}{a^2 + \zeta_1^2}$	–	$x_0 = \pm\sqrt{a^2 + \zeta_1^2}$

3.8. Bậc thẳng đứng.

Trường hợp bậc thẳng đứng thường được áp dụng trong nghiên cứu các đứt gãy kiến tạo. Ta có:

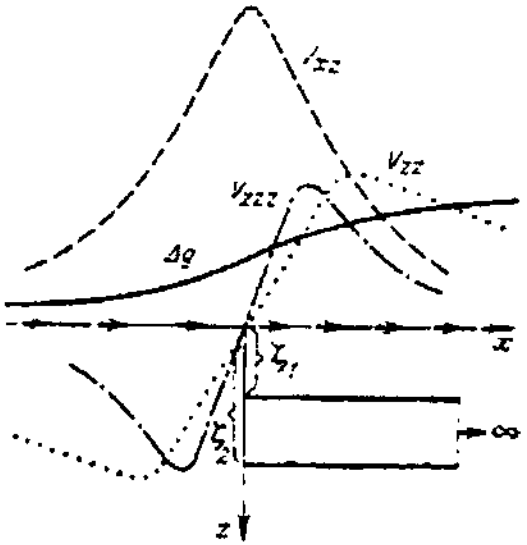
$$\Delta g = G\sigma\left[-(\xi - x)\ln\frac{(\xi - x)^2 + \zeta_2^2}{(\xi - x)^2 + \zeta_1^2} + 2\zeta_2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\xi - x}{\zeta_2}\right)\right.$$

$$\left. - 2\xi_1\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\xi - x}{\zeta_1}\right)\right]$$

$$V_{xz} = G\sigma\ln\frac{\left[(\xi - x)^2 + \xi_2^2\right]}{\left[(\xi - x)^2 + \xi_1^2\right]} \qquad (5.30)$$

$$V_{zz} = V_{\Delta} = 2G\sigma\left(\operatorname{arctg}\frac{\zeta_1}{\xi - x} - \operatorname{arctg}\frac{\zeta_2}{\xi - x}\right)$$

$$V_{zzz} = 2G\sigma\left\{\frac{(\xi - x)}{\left[(\xi - x)^2 + \xi_2^2\right]} - \frac{(\xi - x)}{\left[(\xi - x)^2 + \zeta_1^2\right]}\right\}$$

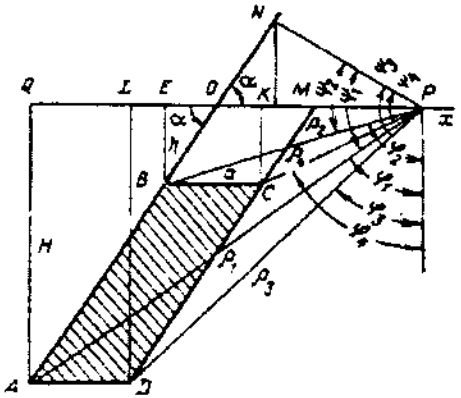


Hình 47. Bậc thẳng đứng

Bảng 6: Các đặc trưng tham số của các đường cong thuộc bậc thẳng đứng

	Các cực trị		Hoành độ của điểm có tung độ bằng $\frac{1}{2}\Delta g_{max}$	Điểm cắt trục hoành. Hoành độ của điểm có tung độ bằng 0
	Hoành độ	Tung độ		
Δg	$x_{max} = \infty$	$\Delta g_{max} = 2G\pi\sigma\,(\zeta_2 - \zeta_1)$	$x_{1/2} = 0$	$x = -\infty$
V_{xz}	$x_{max} = 0$	$V_{xz\,max} = 2G\sigma \ln \frac{\zeta_2}{\zeta_1}$	$x_{1/2} = \pm\sqrt{\zeta_1\zeta_2}$	$x = \pm\infty$
V_{zz}	$x_{max} = +\sqrt{\zeta_1\zeta_2}$ $x_{min} = -\sqrt{\zeta_1\zeta_2}$	$V_{zz\,max} = 2G\sigma\left(\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\zeta_2}{\zeta_1}} - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_2}}\right)$ $V_{zz\,min} = 2G\sigma\left(\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\zeta_2}{\zeta_1}} - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_2}}\right)$	–	$x = \pm\infty$
V_{zzz}	$x_{max} = +\sqrt{\frac{\sqrt{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)+12\zeta_1^2\zeta_2^2}-(\zeta_1^2+\zeta_2^2)}{6}}$ $x_{min} = -\sqrt{\frac{\sqrt{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)+12\zeta_1^2\zeta_2^2}-(\zeta_1^2+\zeta_2^2)}{6}}$	– –	– –	$x_0 = 0$ $x = \pm\infty$

3.9. Vỉa nằm nghiêng



Hình 48: Vỉa nằm nghiêng

Đối với vỉa nghiêng hữu hạn, công thức trong tọa độ Descartes rất phức tạp, do đó ta sử dụng tọa độ cực :

$$\Delta g = 2G\sigma h\left[\zeta(\varphi_1 - \varphi_2) - (\varphi_2 - \varphi_4) + \xi \sin^2\alpha \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}(\xi - \eta)\sin^2\alpha \times\right.$$

$$\left.\times \ln\frac{\rho_3}{\rho_4} - \xi \sin\alpha\cos\alpha(\varphi_2 - \varphi_1) + (\xi - \eta)\sin\alpha\cos\alpha(\varphi_4 - \varphi_3)\right]$$

(5.31)

Trong đó, ký hiệu $\zeta = H/h$, $\eta = a/h$, $\xi = x/h$ (xem hình 48). Xét hai trường hợp. Vỉa dài hữu hạn :

$$V_{xz} = G\sigma\left|\sin^2\alpha \ln\frac{(\zeta + x\sin\alpha\cos\alpha)^2 + x^2\sin^4\alpha}{[\zeta + (x-\alpha)\sin\alpha\cos\alpha]^2 + (x-\alpha)^2\sin^4\alpha} - \right.$$

$$\left.-\sin 2\alpha\left[\operatorname{arctg}\frac{\zeta + x\sin\alpha\cos\alpha}{x\sin^2\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{\zeta + (x-\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}{(x-\alpha)\sin^2\alpha}\right]\right\}\Bigg|_{\zeta_1}^{\zeta_2}$$

(5.32)

$$V_{zz} = V_{\Delta} = G\sigma\left|\left\{\sin\alpha\cos\alpha\ln\frac{(\zeta + x\sin\alpha\cos\alpha)^2 + x^2\sin^4\alpha}{[\zeta + (x-\alpha)\sin\alpha\cos\alpha]^2 + (x-\alpha)^2\sin^4\alpha} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +2\sin^2\alpha\left[\operatorname{arctg}\frac{\zeta + x\sin\alpha\cos\alpha}{x\sin^2\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{\zeta + (x-\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}{(x-\alpha)\sin^2\alpha}\right]\right\}\right|_{\zeta_1}^{\zeta_2}$$

(5.33)

Trong tọa độ cực:

$$V_{xz} = G\sigma\left[\sin^2\alpha\frac{\rho_1^2\rho_4^2}{\rho_2^2\rho_3^2} - \sin 2\alpha(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_4)\right] \quad (5.34)$$

$$V_{xz} = V_{\Delta} = G\sigma\left[\sin 2\alpha\ln\frac{\rho_1\rho_4}{\rho_2\rho_3} + 2\sin^2\alpha(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_4)\right]$$

(5.35)

Trường hợp vỉa dài vô hạn :

$$V_{xz} = G\sigma\left\{\sin^2\alpha\ln\frac{[\zeta_1 + (x-\alpha)\sin\alpha\cos\alpha]^2 + (x-\alpha)^2\sin^4\alpha}{[(\zeta_1 + x\sin\alpha\cos\alpha)]^2 + x^2\sin^4\alpha} - \right.$$

$$\left. - \sin 2\alpha\left[\operatorname{arctg}\frac{\zeta_1 + (x-\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}{(x-\alpha)\sin^2\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{\zeta_1 + x\sin\alpha\cos\alpha}{x\sin^2\alpha}\right]\right\}$$

(5.36)

$$V_{xz} = V_{\Delta} = G\sigma\left\{\sin\alpha\ln\frac{[\zeta_1 + (x-\alpha)\sin\alpha\cos\alpha]^2 + (x-\alpha)^2\sin^4\alpha}{[(\zeta_1 + x\sin\alpha\cos\alpha)]^2 + x^2\sin^4\alpha} - \right.$$

$$\left. + \sin^2\alpha\left[\operatorname{arctg}\frac{\zeta_1 + (x-\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}{(x-\alpha)\sin^2\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{\zeta_1 + x\sin\alpha\cos\alpha}{x\sin^2\alpha}\right]\right\}$$

(5.37)

Trong tọa độ cực :

$$V_{xz} = G\sigma\left[2\sin^2\alpha\ln\frac{\rho_4}{\rho_2} - \sin 2\alpha(\varphi_2 - \varphi_4)\right] \quad (5.38)$$

$$V_{xz} = V_\Delta = G\sigma\left[\sin\alpha\cos\alpha\ln\frac{\rho_4}{\rho_2} + 2\sin^2\alpha(\varphi_2 - \varphi_4)\right] \qquad (5.39)$$

Tọa độ các cực trị :

$$x_{max} = \frac{1}{2}\left(\alpha - 4\zeta_1 ctg\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\zeta_1^2 \operatorname{cosec}\alpha}\right)$$

$$x_{mix} = \frac{1}{2}\left(\alpha - 4\zeta_1 ctg\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4_1^2 \operatorname{cosec}\alpha}\right)$$

$$|x_{min}| - |x_{min}| = \sqrt{\alpha^2 + 4_1^2 \operatorname{cosec}\alpha}$$

$$|V_{xz}|_{min}| - V_{xz}|_{min} = -G\sigma\sin 2\alpha\, arctg\frac{4\alpha\zeta}{4\zeta^2 - \alpha^2}$$

§4. BÀI TOÁN THUẬN ĐỐI VỚI VẬT CÓ DẠNG BẤT KỲ

Dưới đây ta lần lượt xét trường hợp 2 và 3 chiều:

4.1. Palet Young (Palet cực)

Cho vật hai chiều x, z có dạng bất kỳ nằm dài theo phương y vô tận:

Áp dụng công thức (5.17):

$$V_z(0,0) = 2G\iint_S \frac{\sigma\zeta d\xi d\zeta}{\xi^2 + \zeta^2}$$

Dùng hệ tọa độ cực $\begin{cases}\xi = r\cos\varphi \\ \zeta = r\sin\varphi\end{cases} \Rightarrow ds = d\xi d\zeta = rdrd\varphi$

$$V_{xz}(0,0) = 2G\iint_S \frac{\sigma(r,\varphi)\sin 2\varphi}{r} drd\varphi \qquad (5.31)$$

$$V_{zz}(0,0) = -2G\iint_S \sigma(r,\varphi)\frac{\cos 2\varphi}{r} drd\varphi \qquad (5.32)$$

$$V_{zzz} = -4G\iint_S \sigma(r,\varphi)\sin\frac{3\varphi}{r^2} drd\varphi \qquad (5.33)$$

$$V_x(0,0) = 2G\iint_S r(r,\varphi)\cos\varphi dr d\varphi \qquad (5.34)$$

Xét trường hợp cho V_z trong đó mật độ là hằng số, theo (5.32):

$$V_z(0.0) == 2G\sigma\iint_S \sin\varphi.d\varphi dr \qquad (5.35)$$

Chia nửa mặt phẳng dưới tuyến quan sát thành các diện tích cơ bản bị giới hạn bởi các vòng tròn đồng tâm r_j và r_{j+1} và các tia xuyên tâm làm với đường nằm ngang những góc φ_i và φ_{i+1}.

$$\delta U(0,0) = kG\sigma\int_{r_i}^{r_{i+1}}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} R(r)\phi(\varphi)drd\varphi \qquad (5.36)$$

Đây là tác dụng của một ô cơ bản. Công thức thực hành là:

$$\delta U(0,0) = kG\sigma\overline{R}(r_{j+1}, r_j)\phi(\varphi_{i+1}, \varphi_i)$$

Bảng 7. Các thành phần thuộc palet Young.

Đạo hàm	Hệ số k	Hàm trọng theo φ, Φ $(\varphi_{i+1}, \varphi_i)$	Hàm trọng theo bán kính $\overline{R}$ (r_{j+1}, r_j)
V_z	2	$\cos\varphi_i - \cos\varphi_{i+1}$	$r_{j+1} - r_j$
V_x	2	$\sin\varphi_{i+1} - \sin\varphi_I$	$r_{j+1} - r_j$
V_{xz}	2	$\frac{1}{2}(\cos 2\varphi_i - \cos 2\varphi_{i+1})$	$\ln\frac{r_{j+1}}{r_j}$
V_{zz}	−2	$\frac{1}{2}\left[\sin 2\varphi_{i+1} - \sin 2_{\varphi}i\right]$	$\ln\frac{r_{j+1}}{r_j}$
V_{zzz}	−4	$\frac{1}{3}(\cos 3\varphi_i - \cos\varphi_{i+1})$	$\frac{1}{rj} - \frac{1}{r_{j+1}}$

Nếu gán cho $\overline{R}(r_{j+1}, r_j)$, $\Phi(\varphi_{i+1}, \varphi_i)$ bằng hằng thì rất tiện lợi: $\overline{R}(r_{j+1}, r_j) = \text{const} = a$

$$\phi(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \text{const} = \frac{1}{n}$$

Trường hợp V_z:

Nếu i = 0 , $1 - \cos\varphi_1 = \frac{1}{n}$, do đó $\cos\varphi_1 = 1 - \frac{1}{n}$

$1 - \frac{1}{n} - \cos\varphi_2 = \frac{1}{n}$ vậy $\cos\varphi_2 = 1 - \frac{2}{n}$

Tổng quát hóa: $\cos\varphi_i = 1 - \frac{i}{n}$; rút ra $\varphi_i = \arccos\left(1 - \frac{i}{n}\right)$

Trường hợp V_x: $\sin\varphi_i = \frac{i}{n}$; do đó $\varphi_i = \arcsin\frac{i}{n}$

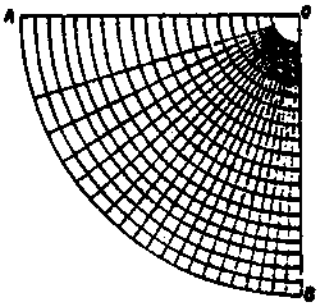
Chọn n = 8 - số góc chẵn.

Đạo hàm		1	2	3	4	5	6	7	8
V_z	φ_i	29,0	41,4	51,3	60,0	68,0	75,5	82,8	90,0
V_x	φ_i	7,2	14,5	22,0	30,0	38,7	48,6	61,0	90,0

Còn $r_{j+1} - r_j = a$ suy ra: $r_j = a\,j$

$$|\delta V_z| = |\delta V_x| = 2G\sigma\frac{a}{n}$$

Ví dụ: $\sigma = 0{,}2 g/cm^3$, a = 300m, n = 8 $\Rightarrow V_z = V_x = 1$mGal



Hình 49: Palet Young

4.2. Palet Hamburgsev

Dùng hệ tọa độ trụ phẳng cũng rất đơn giản, trong đó ta thay $\sin\varphi\, dr = dz$

$$V_z(0,0) = 2G\sigma \iint_S dz d\varphi \qquad (5.37)$$

Xấp xỉ bằng tập hợp các ô mà mỗi ô có tác lực.

$$\delta V_z(0,0) = 2G\sigma \int_{z_j}^{z_{j+1}} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} dz d\varphi = 2G\sigma(\varphi_{i+1} - \varphi_i)(z_{i+1} - z_i)$$

Đặt $\varphi_{i+1} - \varphi_i = \dfrac{\pi}{2n}$, n: số nguyên bằng số góc trong góc $\dfrac{\pi}{2}$

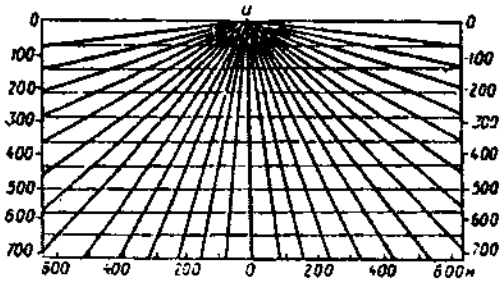
$$z_{j+1} - z_j = \Delta z = \text{const}$$

Kết quả: $\delta V_z(0,0) = G\sigma\Delta z \dfrac{\pi}{n} = \text{const} \qquad (5.38)$

$n = 8$, $\Delta z = 500m$ $\qquad \sigma = 0{,}4\ g/cm^3 \Rightarrow \delta V_z = 0{,}525mGal$

Palet được sử dụng khi không có máy tính điện tử.

Đối với bài toán lớn thì đây là công việc thủ công nặng nhọc mất nhiều thời gian mà không chính xác.



Hình 50: Palet Hamburgsev

4.3. Phương pháp xấp xỉ vật thể bằng tập hợp các vật cơ bản có dạng hình học đơn giản.

Với sự phát triển của máy tính người ta áp dụng phương pháp xấp xỉ vật thể bất kỳ bằng tập hợp các vật thể cơ bản, đơn giản để giải bài toán thuận thay cho phương pháp palet. Để có cơ sở xấp xỉ ta xét bài toán sau đây. Giả sử ta có hai dị vật có mật độ, độ sâu như nhau và diện tích thiết diên bằng nhau. Môt

có tiết diện là hình vuông có cạnh là a, một là hình tròn có bán kính r.

Diện tích tiết diện hình vuông = a^2

Diện tích tiết diện hình trụ tròn = πr^2

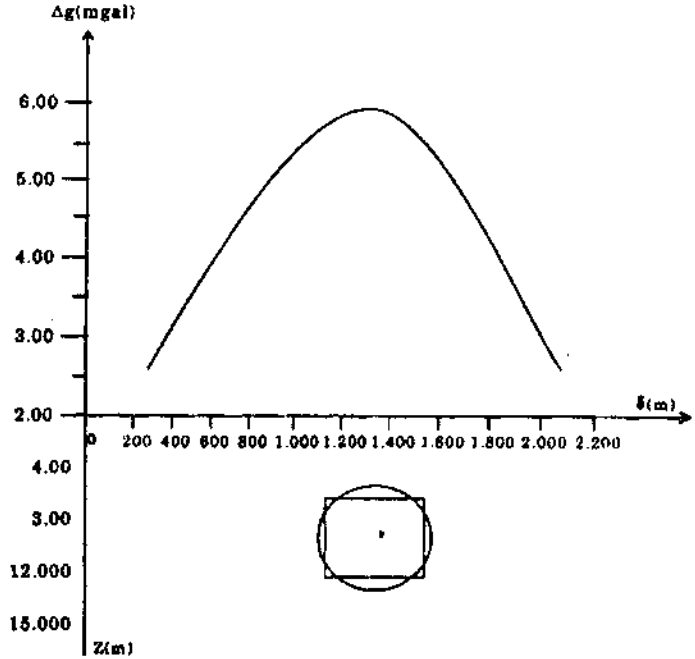
Cho 2 diện tích bằng nhau $a^2 = \pi r^2$, ta rút ra $r = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$

Ví dụ:

a = 200 m => r =112,8 m

Biểu diễn V_z của hai hình trên cùng một đồ thị, ta thấy chúng trùng nhau. Từ đó, ta có cơ sở để xấp xỉ những hình có chu tuyến trơn bằng tập hợp của các hình có chu tuyến chứa góc vuông mà không sợ phân dư ở các góc ảnh hưởng đến việc tương đồng hoá.

Dựa vào tính chất trên người ta xấp xỉ dị vật có tiết diện phức tạp bằng các hình lăng trụ có tiết diện đơn giản có góc vuông mà giá trị V_z tổng cộng có thể thực hiện trên vi tính.



Hình 51: Hình trụ có tiết diện vuông và tròn cùng diện tích cho các đường cong Δg trùng nhau

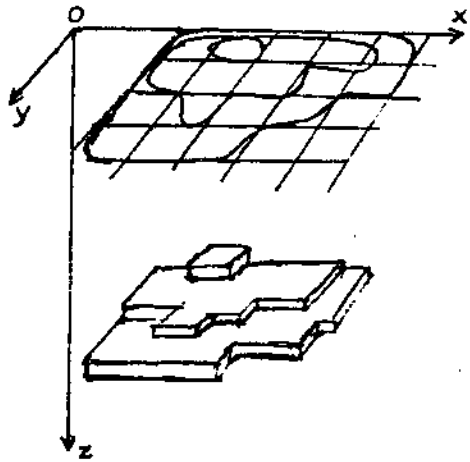
Trường hợp ba chiều, ta cũng xấp xỉ vật 3 chiều bằng tập hợp các vật đơn giản, ví dụ như hình chữ nhật. Tác dụng của một vật cơ bản thứ i và j theo (5.12):

$$(\delta V_z)_{ij} = -G\left[x\ln(y+R) + y\ln(x+R) - z\,\mathrm{arctg}\,\frac{xy}{zR}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}\Bigg|_{y_j}^{y_{j+1}}\Bigg|_{z_1}^{z_2}$$

$$= F(x_{i+1}, x_i, y_{j+1}, y_j, z_1) - F(x_{i+1}, x_i, y_{j+1}, y_j, z_2)$$

F – hàm số nào đó. Tác dụng tổng cộng của các vật cơ bản đối với một điểm quan sát:

$$V_z(0,0,0) = \sum_i \sum_j (\delta V_z)_{ij} \qquad (5.40)$$



Hình 52. Xấp xỉ hình học vật thể 3 chiều

CHƯƠNG VI

BÀI TOÁN NGƯỢC CỦA TRỌNG LỰC THĂM DÒ

KHÁI NIỆM:

Bài toán ngược của trọng lực thăm dò là bài toán tìm sự phân bố của di khối dưới đất căn cứ vào sự biết trước về trường hấp dẫn của nó là các đạo hàm thế hấp dẫn của dị khối V_z,V_x, V_y, V_{zx}, V_{xx}, V_{zz}, V_{zzz},v.v... trong đó V_z được đồng nhất với dị thường trọng lực.

– Không gian mà các thành phần của trọng trường cho trước được xác định gọi là "tập điểm" – "tập đơn trị". Nói chính xác hơn, là không gian mà các thành phần của trường đã được xác định đơn trị tại từng điểm trong đó. Đó có thể là mặt phẳng, hoặc không gian ba chiều, bên trong hoặc bên ngoài Trái đất. Nếu không gian mà ở đó, các thành phần trường cho trước là không gian ngoài (trên, ngoài mặt đất) thì ta có bài toán ngược ngoài. Ngược lại, là bài toán trong. Trong thăm dò, người ta giải bài toán ngược là chủ yếu. Bài toán thuận được sử dụng để phụ trợ cho bài toán ngược.

– Nguyên tắc của bài toán ngược là trường được đem phân tích, giải đoán địa chất phải đúng là trường của chính dị vật đang quan tâm gây ra. Do đó, người ta cố gắng tối đa để loại trừ ảnh hưởng của trường do các dị vật khác ở lân cận gây ra, tức tách lấy riêng trường quan tâm ra. Tuy nhiên, việc này không bao giờ đạt được một cách tuyệt đối, mà vẫn còn sự lẫn lộn, hoặc " mất mát " phần nào trường trong quá trình tách trường.

– Bài toán ngược được tạm chia ra làm ba loại:

a/ Loại khoáng vật, có mật độ là hằng hoặc thay đổi.

b/ Loại cấu trúc – Sự phân thành lớp, địa tầng (các lớp trầm tích, móng kết tinh) có mật độ khác nhau, là hằng hoặc thay đổi.

c/ Loại phân bố phức tạp của khối lượng: vừa khoáng vật, vừa cấu trúc.

§1 PHÂN TÍCH ĐỊNH TÍNH VÀ ĐỊNH LƯỢNG

Bước đầu, việc phân tích được căn cứ vào hình thái của trường qua bản đồ, đồ thị. Hình dạng của các đường đẳng trị, giá trị của cực trị, hướng chạy của các đường đẳng trị kết hợp thông tin địa chất giúp cho việc đưa ra giả thuyết về cấu trúc địa chất, xác định mối quan hệ giữa dị thường với dị vật, giúp cho việc phán đoán độ sâu, kích thước, thế nằm.

Người phân tích định tính cần nắm những kiến thức cơ bản sau đây:

a/ Nói chung tâm cực trị của dị thường ở ngay trên tâm của dị vật dưới đất.

b/ Phương chạy của các đường đẳng trị song song là phương nằm của dị vật có kích thước kéo dài (dị vật 2 chiều).

c/ Bề rộng của dị thường trọng lực bằng từ 2 đến 6 lần độ sâu mặt trên của dị vật. Vật thể càng ở sâu, bề rộng của cực trị dị thường càng lớn.

d/ Độ lớn của cực trị tỷ lệ với mật độ dư của dị vật.

e/ Dị thường trọng lực dương ứng với trường hợp mật độ dị vật lớn hơn mật độ môi trường đất đá xung quanh và ngược lại. Ví dụ mỏ muối thường cho dị thường âm. Dị thường dương còn do chỗ nâng lên của nền móng kết tinh, mật độ dư dương. Dị thường âm có thể là dấu hiệu của sự lún sâu của nền móng.

Do những nét khái quát của dị vật thể hiện trực quan trên bản đồ trọng lực, và đo đạc nhanh, ít tốn kém, nên phương pháp trọng lực được sử dụng để khoanh vùng, rồi sau đó là các phương pháp xác định chi tiết, định lượng của trọng lực và địa vật lý khác sẽ được áp dụng tiếp theo.

Phân tích định lượng là xác định trị số chiều sâu, khối lượng, kích thước và thế nằm, hình dạng của dị vật. Như đã nói, khi nắm thông tin địa chất, tính đa trị được hạn chế và tính đơn trị tăng lên. Dưới đây, căn cứ thông tin địa chất, ta coi hình dạng gần đúng của dị vật là thuộc dạng hình học đơn giản như hình cầu, hình hộp, v.v... thì độ sâu, khối lượng được xác định

đơn trị. Nếu biết thêm mật độ dư thì xác định được thêm thể tích, kích thước. Đương nhiên, trong thực tế không có hình cầu lý tưởng, mà có sự méo dạng. Lúc đó phải có biện pháp hiệu chỉnh sự sai khác.

§2. BÀI TOÁN NGƯỢC CHO DỊ VẬT CÓ DẠNG ĐƠN GIẢN.

2.1. Hình cầu đặc

Ta sử dụng các công thức ở chương V cho từng dị vật.

Chọn hệ tọa độ x, y, z với trục z hướng xuống, trục x, y trong mặt quan sát. Giả sử ta có hình cầu đặc mà tâm có tọa độ $(0, 0, z_0)$. Tại điểm quan sát với tọa độ x, y, 0 ta coi :

$$\Delta g = V_Z(x, y, 0) \tag{6.1}$$

$$V_z = \frac{GMz_0}{(\rho^2 + z_o^2)^{3/2}} \tag{6.2}$$

z_o – độ sâu quả cầu.

M – Khối lượng quả cầu (khối lượng dư).

$$\rho^2 = x^2 + y^2 .$$

Tại điểm quan sát là gốc tọa độ O, ta có giá trị cực đại E theo (6.2):

$$E = \frac{GM}{z_o^2} \tag{6.3}$$

Khi $V_Z = \frac{E}{2}$ ta có thể xác định $\rho_{1/2}$ từ đây:

$$\frac{E}{2} = \frac{GMz_o}{(\rho_{1/2}^2 + z_o^2)^{3/2}} \tag{6.4}$$

Ta có hai phương trình (6.2), (6.3) và hai ẩn số là M và z_0, ta giải ra :

$$z_o = \frac{\rho_{1/2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1}} = 1{,}305\rho_{1/2}$$

$\rho_{1/2}$ là toạ độ tại đó V_z có giá trị bằng $\frac{E}{2}$.

$M = 2{,}55\ 10^8 E\rho^2_{1/2}$

$R = 3{,}95.10^2 \sqrt[3]{\frac{E\rho^2_{1/2}}{\sigma}}$

Đối với các đạo hàm, ta cũng giải tương tự. Có thể chọn những điểm mà tại đó $V_z = \frac{E}{n}$, không nhất thiết n = 2 như ví dụ trên.

2.2. Hình trụ nằm ngang dài vô tận.

$$\Delta g = V_z(x, 0) = 2G\lambda \frac{z_o}{x^2 + z_0^2} \qquad (6.5)$$

z_o – độ sâu hình trụ.

Tại x = 0 $\Delta g_{max} = \frac{2G\lambda}{z_o}$ (6.6)

$$\frac{\Delta g_{max}}{2} = \frac{G\lambda}{z_o} = 2G\lambda \frac{z_o}{x^2_{1/2} + z^2_o} \qquad (6.7)$$

Giải ra ta có: $z_o = x_{1/2}$

Từ (6.6) ta có mật độ dài: $\lambda = \frac{\Delta g_{max}}{2G} x_{1/2}$

Nếu hình trụ dài hữu hạn là y, ta có khối lượng $M = \lambda y$.

2.3. Nửa mặt phẳng nằm ngang.

Tại x = 0, $\Delta g(0) = G\mu\pi$

Rút ra mật độ mặt: $\mu = \frac{\Delta g(0)}{G\pi}$

Ký hiệu $x_{1/2}$ là tọa độ mà tại đó :

$$\Delta g(x_{1/2}) = \frac{1}{2}\Delta g(0)$$

Theo chương V : $\Delta g(x_{1/2}) = 2G\mu\left[\frac{\pi}{2} + \text{arctg}\frac{x_{1/2}}{h}\right] = G\frac{\mu\pi}{2}$ (6.8)

Vậy $\text{arctg}\frac{x_{1/2}}{h} = \frac{\pi}{4}$

Tìm được độ sâu : $h = x_{1/2}$

2.4. Bậc thẳng đứng.

Chọn gốc tọa độ tại đầu bậc thẳng đứng ($\xi = 0$).

$$\Delta g = G\sigma\left[\pi(\zeta_2 - \zeta_1) + 2\zeta_2\text{arctg}\frac{x}{\zeta_2} - 2\zeta_1\text{arctg}\frac{x}{\zeta_1} + x\ln\frac{x^2+\zeta_2^2}{x^2+\zeta_1^2}\right]$$

$$V_{xz} = G\sigma\ln\frac{x^2+\zeta_2^2}{x^2+\zeta_1^2} \qquad (6.9)$$

$$V_{zz} = 2G\sigma\left(\text{arctg}\frac{\zeta_2}{x} - \text{arctg}\frac{\zeta_1}{x}\right)$$

Với $x = -\infty$ $\Delta g = 0$

$x = 0$ $\Delta g(0) = G\sigma\pi\,(z_2 - z_1)$

$x = \infty$ $\Delta g(\infty) = 2G\sigma\pi\,(z_2 - z_1)$

Từ đây có thể biết độ dày $(z_2 - z_1)$ cùng với z_1 và z_2.

§3. BÀI TOÁN NGƯỢC CHO DỊ VẬT CÓ DẠNG TÙY Ý

3.1. Xác định khối lượng và tọa độ khối tâm.

Đây là bài toán ngược không đòi hỏi phải biết trước hình dạng, mật độ của dị vật và là bài toán đơn trị. Công thức Gauss (2.32) trong lý thuyết thế cho ta tích phân theo mặt S và theo thể tích V:

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial n} ds = -4\pi G \int_v \sigma dv = -4\pi GM \qquad (6.10)$$

Tích phân đầu lấy theo mặt S, bao trùm dị khối M. Nhưng đạo hàm $\partial U/\partial n$ lại được cho trước trên mặt phẳng nằm ngang (mặt đất). Do đó, để cho phù hợp ta có thủ thuật như sau. Bao bọc lấy dị khối bằng một hình trụ tròn dựng đứng, có mặt trên trùng với mặt đất, còn đáy nằm sâu hơn dị khối. Bán kính của hình trụ đủ lớn sao cho hình trụ bao trùm hết dị vật. Như vậy tích phân theo mặt S giờ đây phân thành một tích phân theo thành bên của hình trụ và hai tích phân theo hai đáy tròn như nhau. Cho bán kính R tăng lên vô hạn thì tích phân theo thành bên sẽ thành không vì tính chất chính qui ở vô cực của hàm thế U. Còn hai tích phân theo mặt tròn bằng nhau. Nghĩa là:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_z(\xi, d, 0) d\xi d\eta = 2\pi GM.$$

Hay là: $$M = \frac{1}{2\pi G} \int_{+\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_z(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta. \qquad (6.11)$$

Lấy tích phân theo từng phần, ta có công thức cho khối lượng và tọa độ khối tâm thông qua các đạo hàm của thế U:

$$M = \frac{1}{2\pi G} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\xi U_z(\xi, \eta, 0) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \xi U_{xz}(\xi, \eta, 0) d\xi \right] d\eta$$

và vì khi $\xi \to 0$ thì $\xi U_z \to 0$, cho nên:

$$M = -\frac{1}{2\pi G} \int_{+\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi U_{xz} d\xi d\eta. \qquad (6.12)$$

Tương tự: $$M = -\frac{1}{2\pi G} \int_{+\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta U_{yz} d\xi d\eta.$$

Đối với bài toán hai chiều, vật nằm dài vô tận theo y.

Ta có:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} U_z(\xi,0)\,d\xi = 2\pi G\lambda\\&\int_{-\infty}^{+\infty} \xi U_{xz}(\xi,0)\,d\xi = -2\pi G\lambda\end{aligned}\right\} \qquad (6.12a)$$

Để tính tọa độ khối tâm, thay V= ξ vào công thức Green (2.13) trong sách lý thuyết thế (Trần Văn Nhạc & Nguyễn Thành Vấn):

$$\iint_S \left[U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right]ds = \iiint_\tau [U\Delta V - V\Delta U]d\tau$$

ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U_z(\xi,\eta,0)\xi\,d\xi d\eta = 2\pi G\int_\tau \xi dm = 2\pi GMx_o$$

G – hằng số hấp dẫn, τ – thể tích trong mặt S.

Và sau đó, thay V= η, ta có tương tự:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U_z(\xi,\eta,0)\eta\,d\xi d\eta = 2\pi G\int_\tau \eta dm = 2\pi GMy_o$$

Từ đó rút ra:

$$x_0 = \frac{1}{M}\int \xi dm\,; \qquad y_0 = \frac{1}{M}\int \eta dm \qquad (6.12b)$$

Tọa độ z_0 xác định khó hơn và lần đầu tiên đã được Hambourgsev tìm ra bằng cách cho V = ζ trong công thức Green ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(U(\xi,\eta,0) - \frac{GM}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right)d\xi d\eta = -2\pi GMz_0 \qquad (6.13)$$

Áp dụng tích phân theo từng phần công thức này, ta có các loại đạo hàm bậc khác nhau xuất hiện sau dấu tích phân:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U(\xi,\eta,0)+2\xi^2U_{zz}(\xi,\eta,0)\right]d\xi d\eta=\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U(\xi,\eta,0)+2\eta^2U_{zz}(\xi,\eta,0)\right]d\xi d\eta=6\pi GMz_0\\
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\xi U_x(\xi,\eta,0)-\xi^2U_{zz}(\xi,\eta,0)\right]d\xi d\eta=\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\eta Uy(\xi,\eta,0)-\eta^2U_{zz}(\xi,\eta,0)\right]d\xi d\eta=-2\pi GMz_0
\end{aligned}\right\}\quad(6.14)$$

Các công thức trên đây chứng tỏ rằng, để xác định z_0, ta cần biết thế và đạo hàm các bậc của nó. Tuy nhiên, không có máy đo trực tiếp các đại lượng này, do đó ta phải tìm cách biểu diễn chúng qua dị thường trọng lực quan sát trên mặt đất (xem chương 7).

Mặc dù theo các công thức trên, tích phân được lấy trên miền rộng vô hạn, nhưng trên thực tế dị thường trọng lực và đạo hàm chỉ xác định trên miền hữu hạn. Do đó, ta phải tính hiệu chỉnh bổ sung cho vùng xa. Đối với bán kính r_n nào đó trở đi, vùng này được coi là vùng xa thì dị vật có thể coi gần đúng bậc một là dị vật dạng cầu và ta áp dụng công thức dị thường do quả cầu gây ra:

$$U_z(r_n)=GM\frac{h}{\left(r_n^2+h^2\right)^{3/2}}$$

$$U_z(r)=U_z(r_n)\left(\frac{r_n^2+h^2}{r^2+h^2}\right)^{3/2}\approx U_z(r_n)\frac{r_n^3}{r^3}$$

vì h << r. Vậy:

$$M=\frac{1}{2\pi G}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_n}U_z(r,\alpha)rdrd\alpha+\frac{U_z(r_n)r_n^3}{2\pi G}\int_0^{2\pi}\int_{r_n}^{\infty}\frac{drd\alpha}{r^2}$$

Tích phân thứ nhất tính theo phương pháp gần đúng, còn tích phân thứ hai có thể tính chính xác. Kết quả:

$$M = \frac{1}{2\pi G}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{r_n} U_z(r,\alpha) r dr d\alpha + 2\pi U_z(r_n) r_n^2\right] \qquad (6.15)$$

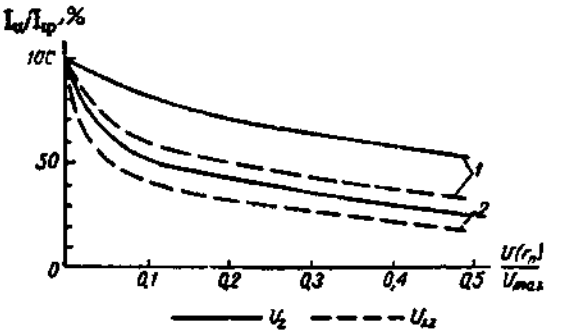
Trong trường hợp 2 chiều, có thể coi từ ξ_n trở đi dị thường là của hình trụ tròn. Vậy:

$$U_z(\xi) = U_z(\xi_n)\frac{\xi_n^2}{\xi^2}$$

Mật độ dài : $$\lambda = \frac{1}{2\pi G}\left[\int_{-\xi_n}^{+\xi_n} U_z(\xi)d\xi + 2U_z(\xi_n)\xi_n^2 \int_{+\xi_n}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi G}\left[\int_{-\xi}^{+\xi} U_z(\xi)d\xi + 2U_z(\xi_n)\xi_n\right]$$

Trị số của tích phân khúc đuôi bỏ đi có thể lớn. Từ đồ thị, ta thấy trường hợp quả cầu, tích phân tính được U_z chỉ bằng 55% trường toàn phần khi trường giảm còn 0,1 giá trị cực đại. Dựa vào đồ thị, ta có thể rút ra hiệu chỉnh đưa vào giá trị của M.



Hình 53: Đồ thị của tỉ số tích phân tính toán và tích phân toàn phần 1. hình trụ; 2 hình cầu.

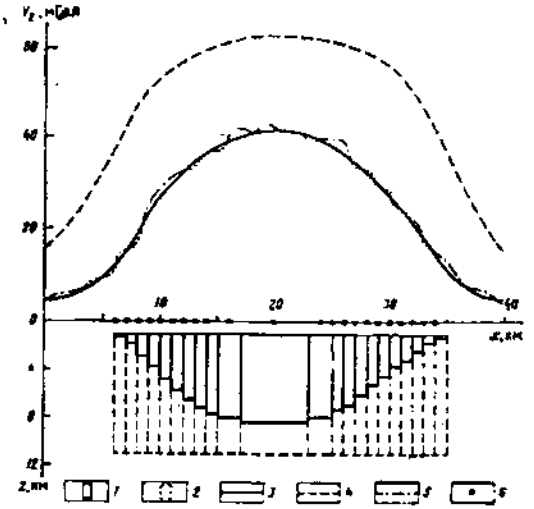
3.2. Phương pháp lựa chọn đối với dị vật phức tạp

Khi giải bài toán ngược dùng phương pháp lựa chọn, là so sánh trường tính toán với trường quan sát. Khi nào hai trường này trùng nhau thì mô hình lựa chọn là chấp nhận được.

a. Căn cứ vào các thông tin địa chất xây dựng một mô hình cấu trúc địa chất gồm một hoặc tập hợp nhiều vật có hình dạng đơn giản.

b. Tính tác dụng trọng lực của mô hình ấy (sử dụng bài toán thuận).

c. Nếu đường cong tính toán không trùng với đường cong quan sát thì tiến hành điều chỉnh lại dạng của mô hình, để tiến dần tới một mô hình cho ta đường cong biểu diễn trường tính toán lý thuyết trùng với đường cong quan sát (hiệu số của chúng đạt tối thiểu).



Hình 54

1. Hình chữ nhật xấp xỉ.
2. Hình xấp xỉ ban đầu.
3. Đường cong xấp xỉ đúng.
4. Đường cong xấp xỉ ban đầu.
5. Đường cong quan sát.
6. Điểm quan sát trường ban đầu.

Ngày nay phương pháp này được máy tính điện tử giúp cho lựa chọn nhanh chóng. Việc chỉnh hình được máy tính điện tử tiến hành sao cho hai đường cong trùng nhau (cực tiểu hoá

phiếm hàm). Bulakh và Markova đã thực hiện cực tiểu hoá phiếm hàm F thỏa điều kiện sau:

$$F = \Sigma \left[\Delta g_{qs}(x_i, y_i) - \Delta g_{lt}(x_i, y_i)\right]^2 = \min \qquad (6.16)$$

Nếu dị vật được coi là hình hộp chữ nhật thì tham số gồm có: mật độ dư $\Delta\sigma$, độ sâu mặt trên và dưới, chiều dài theo y và x, tọa độ của các cạnh. Bài toán thực hiện theo hai chiều hoặc ba chiều.

Do tính đa trị, ta có vô số mô hình cho bài toán ngược (tính đa trị). Do đó, độ chính xác, tin cậy của phương pháp phụ thuộc rất nhiều vào các thông tin địa chất. Ngoài ra, để hạn chế tính đa trị, nâng cao độ tin cậy, ta phải kết hợp các thông tin địa vật lý: Các kết quả nhận được bằng phương pháp địa chấn, từ, địa điện, kết hợp với nhau.

§4. TRƯỜNG HỢP MẶT PHÂN CÁCH HAI MÔI TRƯỜNG ĐỊA CHẤT CÓ MẬT ĐỘ KHÁC NHAU.

Đây là bài toán 2 chiều thuộc loại cấu trúc. Hình dạng của mặt phân cách là đối tượng được quan tâm, cần phải xác định dựa vào trường dị thường trọng lực quan sát trên mặt đất dọc theo tuyến đo.

4.1. Đánh giá độ sâu giới hạn theo phương pháp Fisher.

Trước hết ta cần đánh giá sơ bộ độ sâu tối thiểu của mặt phân cách. Hai mật độ σ_1 và σ_2. Coi lớp trên có bề dầy (độ sâu mặt phân cách) gây nên giá trị lực hấp dẫn xác định theo công thức lớp trung gian:

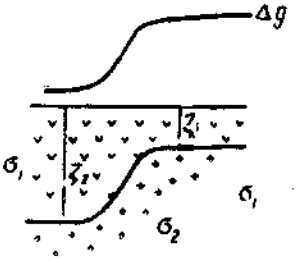
$$V_z = 2\pi G\sigma T$$

Trong đó mật độ dư : $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$

Giả sử chỗ lớp mỏng nhất ứng với ζ_1 và dầy nhất ζ_2, ta có:

$$V_z = 2\pi G\sigma\,(\zeta_2 - \zeta_1) = 2\pi G\sigma T$$

$T = (\zeta_2 - \zeta_1)$ - hiệu độ sâu là bề dày tối đa của bậc.



Hình 55: Bậc gần thẳng đứng

Áp dụng công thức V_{xz} cho bậc thẳng đứng:

$$V_{xz}(0,0) = -G\sigma \ln\left(\xi^2+\zeta^2\right)\Big|_{\zeta_1,\xi}^{\zeta_2,\infty} = G\sigma \ln\frac{\xi_1^2+\zeta_2^2}{\xi_1^2+\zeta_1^2} \qquad (6.17)$$

V_{xz} đạt cực đại tại ξ_1 và nếu cho $\xi_1 = 0$ (gốc tọa độ), thì tại gốc tọa độ ta có cực đại:

$$(V_{xz})_{max} = 2G\sigma \ln\frac{\zeta_2}{\zeta_1}$$

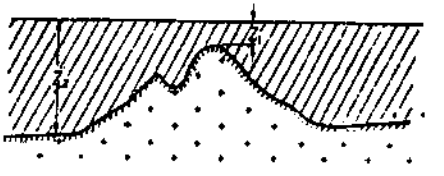
Hay $$\zeta_2 = \zeta_1 e^{\frac{(V_{xz})max}{2G\sigma}}$$

mà $\zeta_2 = \zeta_1 + T$, do đó:

$$\zeta_1 = \frac{T}{e^{\frac{(V_{xz})max}{2G\sigma}} - 1} \qquad (6.18)$$

Khi bậc phức tạp không hoàn toàn thẳng đứng, ta có:

$$\zeta_1 \le \frac{T}{e^{\frac{(V_{xz})max}{2G\sigma}} - 1} \qquad (6.19)$$



Hình 56: Đánh giá độ sâu giới hạn

4.2. Xác định độ sâu của mặt phân cách hai mật độ.

Khi hai môi trường địa chất có mật độ khác nhau thì dị thường trọng lực phụ thuộc mật độ dư ($\sigma_1 - \sigma_2$) và biến thiên theo chiều dầy của lớp trên ζ, (đồng thời là độ sâu mặt phân cách hai lớp). Áp dụng công thức lớp trung gian ta có:

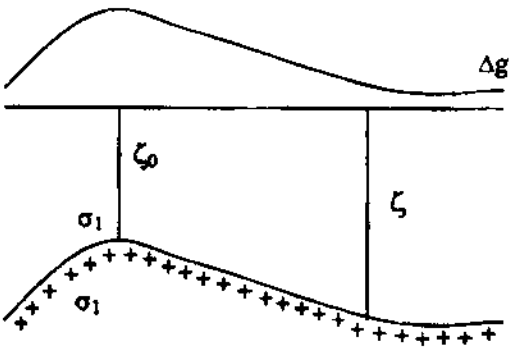
$$\Delta g = 2\pi G\,(\sigma_1 - \sigma_2)\zeta$$

Vậy tại hai điểm với độ sâu ζ và ζ_o, tương ứng, ta có:

$$\Delta g - \Delta g_o = 2\pi G\,(\sigma_1 - \sigma_2)\,(\zeta - \zeta_o)$$

Ta có độ sâu chưa biết ζ tính qua các đại lượng đã biết:

$$\zeta = \zeta_o + \frac{\Delta g - \Delta g_o}{2\pi G\,(\sigma_2 - \sigma_1)} \qquad (6.20)$$



Hình 57: Độ sâu ζ xác định mặt phân cách 2 môi trường

Ta xem là lớp trung gian vô hạn thực ra chỉ là gần đúng. Song sai số không đáng kể và công thức trên hoàn toàn áp dụng tốt. Nếu muốn chính xác hơn ta có:

$$\Delta g = 2\pi G\,(\sigma_1 - \sigma_2)\zeta_o + u$$

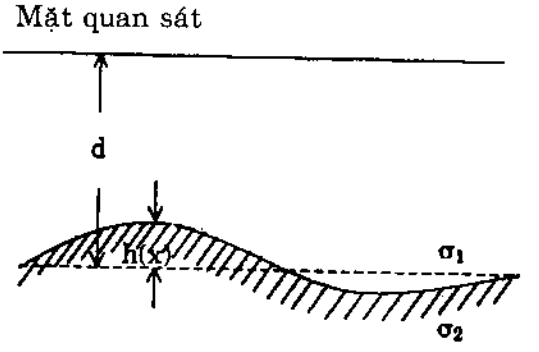
Thành phần u là tác dụng của khối lượng vượt trội so với mức ζ_o (tối thiểu).

$$u = G\sigma \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{\zeta_o}^{\zeta} \frac{\zeta\, d\alpha\, dr\, d\zeta}{(r^2 + \zeta^2)^{3/2}} \qquad (6.21)$$

Trên thực tiễn bài toán được giải bằng phương pháp gần đúng liên tiếp, trong đó người ta giả sử rằng sự biến thiên của dị thường chỉ do mặt phân cách gây ra, hoặc có các nguyên nhân khác chỉ gây ra biến thiên tuyến tính của dị thường trọng lực.

4.3. Phương pháp Tsuboi, Tomoda và Aki xác định độ sâu mặt phân cách hai mật độ.

Giả sử d là độ sâu trung bình của mặt phân cách biết trước. Sự lệch khỏi giá trị d, ký hiệu h(x), là cần phải xác định. Phần khối lượng có hiệu mật độ là $\Delta\sigma$ nằm trong ranh h(x), đã gây ra biến thiên dị thường Δg theo x.



Hình 58: Mặt phân cách dao động quanh độ sâu trung bình d.

Cũng có thể quan niệm di khối là một mặt phẳng ở độ sâu d có mật độ thay đổi do dị khối bị nén trên mặt phẳng đó và có mật độ mặt tỷ lệ với h(x):

$$\sigma(x) = \Delta\sigma h(x)$$

Nếu đường cong Δg có thể biểu diễn bằng chuỗi

$$\Delta g(x) = \sum B_m \cos mx \qquad (6.22)$$

thì ở độ sâu trung bình d và $\sigma(x)$ quan hệ tuân theo qui luật:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi G} \sum B_m \cos mx e^{md}$$

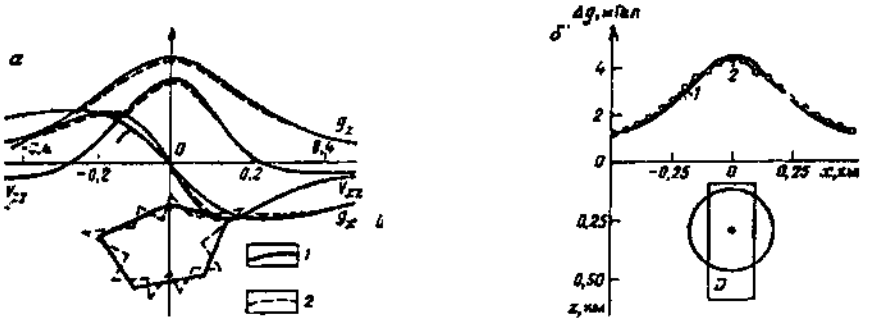
Vậy ta có: $$h(x) = \frac{\sigma(x)}{\Delta\sigma} = \frac{1}{2\pi G\Delta\sigma} \sum B_m \cos mx e^{md} \qquad (6.22a)$$

Công thức (6.22a) có thể sử dụng để xác định sự biến thiên độ sâu của dị khối theo dị thường trọng lực, hiệu mật độ và độ sâu trung bình.

§5 TÍNH TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ ĐA TRỊ CỦA NGHIỆM

Bên cạnh khó khăn trong việc tách trường trước khi giải bài toán ngược, còn có khó khăn sau đây. Sau khi tách lấy được trường do dị vật địa phương quan tâm gây ra, thì trường này vừa có thể là do dị vật này, vừa có thể do dị vật khác gây ra. Nghĩa là ta có thể tìm được nhiều phân bố của dị khối từ một trường cho trước. Ngay khi trường là quả cầu, ta có vô số hình cầu cùng khối lượng, nhưng bán kính, mật độ khác nhau gây ra cùng một trường hấp dẫn.

Ta cũng khó có thể phân biệt trường quan sát của một hình lăng trụ tròn và chữ nhật (hình 59), mặc dù trường của hai vật có công thức khác nhau. Sự trùng lặp, sai khác nhau vô cùng bé gọi là tính tương đương ε (ép xi lon).



Hình 59: Tính tương đương giữa hình sao và đa giác (trái) hình lăng trụ tròn và chữ nhật (phải).

Kết quả, nếu như bài toán thuận có nghiệm duy nhất, thì bài toán ngược nói chung là đa trị. Bài toán ngược cũng có tính đơn trị, nhưng chỉ trong phạm vi hẹp của lớp bài toán, khi ta có nhiều thông tin địa chất giới hạn tính đa trị. Nghĩa là càng có nhiều thông tin địa chất chính xác, thì nghiệm của bài toán ngược càng gần tính đơn trị hơn, tính đa trị sẽ bị thu hẹp lại.

Tính đa trị sẽ được căn bản khắc phục khi sử dụng các phương pháp địa vật lý khác nhau để so sánh kết quả. Nói chung, thường người ta sử dụng tổ hợp phương pháp địa vật lý để đánh giá kết luận về một đối tượng địa chất nghiên cứu.

Tính cục bộ của tính đa trị: Tính đa trị và tính tương đương chỉ tồn tại trong một phạm vi hẹp, cục bộ của không gian. Ví dụ, tại một khu vực khảo sát diện tích nhỏ, thì trường của hai dị vật khác nhau đo được là trùng nhau. Nhưng nếu tiếp tục mở rộng diện tích khảo sát, thì hai trường quan sát của hai dị vật sẽ không trùng nhau nữa. Vì nói chung, hai trường này có công thức, qui luật khác nhau thì chúng không thể trùng nhau tại toàn miền xác định. Tính đa trị sẽ được khắc phục. Tuy nhiên, trên thực tế, đo rộng như vậy rất tốn kinh phí, không khả thi trên thực tế.

Có một số đại lượng được xác định một cách đơn trị, không cần biết trước dạng hay mật độ dị vật. Đó là tổng khối lượng, tọa độ khối tâm, các mômen quán tính, cũng giúp cho ta hạn chế tính đa trị. Bên cạnh phân tích dị thường, cần phải phân tích thành phần khác như đạo hàm, để hạn chế tính đa trị. Vì đạo hàm của các dị vật có thể khác nhau.

Tính ổn định: Ngay trường hợp tính đơn trị của bài toán ngược, nếu tồn tại, thì nó mang tính không ổn định. Nghĩa là một thay đổi nhỏ của trường ngoại, sẽ ứng với một thay đổi lớn của sự phân bố khối lượng. Hậu quả, cả sai số đo đạc trường quan sát sẽ dẫn đến việc giải đoán sai về phân bố khối lượng đang tìm.

§6. TÍNH KHÔNG CHỈNH CỦA BÀI TOÁN NGƯỢC

Bài toán ngược của trọng lực thăm dò thuộc loại bài toán cổ điển của phương pháp toán lý. J. Hadamard đã phân chúng ra làm hai loại: Loại được đặt chỉnh và loại được đặt không chỉnh.

Ta hãy làm quen với những ký hiệu sau: Gọi z là một phân bố khối lượng (dị vật) A là một hàm (toán tử), cụ thể là một tích phân. Trường của z là u liên hệ với z bởi phương trình:

$$u = A(z) \qquad (6.23)$$

Đối với một dị vật bất kỳ cho trước z dưới mặt đất, ta luôn luôn có một trường u tương ứng, xác định duy nhất bởi (6.23) trong toàn không gian ngoài. Đó là bài toán thuận. Nó có tính đơn trị. Một thay đổi nhỏ của z, sẽ ứng với một thay đổi nhỏ của u, đó là tính ổn định. Bài toán gọi là đặt chỉnh theo Hadamard là nếu thỏa 3 điều kiện: a) Nghiệm tồn tại; b) đơn trị và c) ổn định.

Trong bài toán ngược, người ta phải giải phương trình (6.23) để tìm z là nghiệm của bài toán ngược, căn cứ vào trường u bất kỳ cho trước. Nghiệm z cần tìm nằm trong toán tử – tích phân chập. Phương trình (6.23) thường là phương trình tích phân Fredholm loại I. Ký hiệu Y là không gian (tập) chứa z. X là không gian (tuyến hoặc mặt phẳng) chứa u – giá trị của hàm A.

Theo ngôn ngữ của giải tích phiếm hàm, nếu hàm (toán tử) A(z) ánh xạ Y vào X một cách đơn trị hỗ tương, thì hàm (toán tử) A sẽ có toán tử ngược $A^{-1} = T$ sao cho:

$$z = T(u)$$

Toán tử ngược T ánh xạ X vào Y. Thường, toán tử ngược T không thể hiện tường minh. Ta phải xây dựng, tính toán. Bài toán của phương pháp toán lý được đặt là chỉnh trong cặp không gian metric (X,Y) theo ngôn ngữ của giải tích phiếm hàm là nếu:

1) Phần tử z ($z \in Y$) – nghiệm của bài toán, là giá trị của hàm T(u) – toán tử tác dụng từ X vào Y:

2) Miền xác định của hàm (toán tử) T(u) là toàn không gian X.

3) Hàm (toán tử) T(u) liên tục trong toàn không gian X.

– Bài toán gọi là *đặt không chỉnh* trong cặp không gian metric (X,Y) nếu một trong ba điều kiện 1), 2), 3) không được thỏa.

– Nếu điều kiện 2) và 3) không được thỏa thì bài toán gọi là *không ổn định*.

Trong thực tế, chúng ta gặp bài toán ngược không chỉnh trong trường hợp giải phương trình:

$$u=A(z)$$

$u \in R(A) \subset X$, $z \in D(A) \subset Y$; $A: Y \to X$ (A ánh xạ Y vào X).

D(A) – miền xác định của toán tử A trong Y.

R(A) – miền xác định giá trị của A (là u) trong X.

Trong lựa chọn tương ứng X và Y, miền xác định của A có thể là toàn Y: D(A) = Y, nhưng miền xác định của giá trị u của hàm A không trùng với toàn X: $R(A) \neq X$, nghĩa là miền xác định của toán tử ngược T(u) trong thực tế lại không phải toàn không gian X.

Trường u là dữ kiện thường không đo được ở toàn không gian X. Tức toán tử ngược T không xác định trong toàn không gian X. Vậy điều kiện chỉnh theo Hadamard không được thỏa. Toán tử ngược T không thể xây dựng được trong thực tế. Kết quả, bài toán ngược trong thực tế có thể không có nghiệm. Hoặc nếu có nghiệm, thì nghiệm không đơn trị. Nếu nghiệm là đơn trị, thì nó có thể không ổn định.

Mối liên quan giữa nguồn và trường được mô ta bởi (6.23). Sự lựa chọn Y là lựa chọn lớp mô hình các loại nguồn (dị vật). Còn lựa chọn X phụ thuộc vào tính chất của các dữ kiện thực nghiệm. Sự tồn tại nhiễu trong dữ kiện khiến ta phải lựa chọn X rộng hơn R.

§7. TÍNH CHỈNH CÓ ĐIỀU KIỆN THEO TIKHONOV.

Trong vòng nhiều năm, người ta cho rằng không thể giải được bài toán không chỉnh. Cơ sở cho việc xây dựng phương pháp giải bài toán không chỉnh là nguyên tắc điều chỉnh đã được Tikhonov (Chi–khôn–nốp) đặt ra, cho rằng, trong việc giải bài toán không chỉnh, cần phải sử dụng phương pháp đặc biệt, dựa trên thông tin tiên nghiệm về tính chất của nghiệm đang tìm kiếm và nhiễu trong dữ liệu ở đầu vào. Tầm quan trọng của

việc nắm thông tin tiên nghiệm đã được thể hiện trong định lý của Tikhonov như sau:

Giả sử có một tập compăc M của không gian metric Y, được ánh xạ bởi hàm A(z) vào tập N của không gian metric X. Nếu hàm A(z) ánh xạ M vào N một cách đơn trị hỗ tương và liên tục (tức một thay đổi nhỏ của z trong M ứng với thay đổi nhỏ của u trong N), thì sự ánh xạ ngược N vào M cũng liên tục (tức một thay đổi nhỏ của u trong N ứng với thay đổi nhỏ của z trong M).

Tính compắc của tập $M \subset Y$ không phải luôn luôn cần thiết. Tikhonov gọi tập $M \subset Y$ là lớp chỉnh. Từ tính liên tục và đơn trị hỗ tương của ánh xạ bởi A(z) vào N, dẫn đến tính liên tục của ánh xạ ngược bởi T(u) vào M. Bài toán trở nên chỉnh theo điều kiện của Tikhonov.

Ý nghĩa thực tiễn của định lý Tikhonov là như sau: Nếu thông tin tiên nghiệm về nghiệm z là thuộc lớp chỉnh M, thì để nhận được nghiệm gần đúng của bài toán, căn cứ vào thông tin thực nghiệm $u_\delta \in X$, người ta tìm phần tử gần đúng của $u = T(z) \in N$, là phần tử $u_\varepsilon \in N$ với độ chính xác tới ε. Khác với tính chỉnh theo định nghĩa của Hadamard, Tikhonov không yêu cầu nghiệm z phải tồn tại trong toàn không gian Y, không yêu cầu toán tử ngược T phải liên tục trong toàn không gian X. Đó là tính chỉnh có điều kiện theo Tikhonov.

Để giải bài toán đặt không chỉnh, cần phải sử dụng các phương pháp giải đặc biệt – thuật toán điều chỉnh. Thuật toán này chuyên dùng cho việc giải bài toán ngược trong lớp mô hình phân bố khối lượng, trong đó nghiệm là đơn trị, có tính đến thông tin về tính chất của nhiễu ở dữ liệu vào và thông tin về nghiệm cần tìm. Vận dụng các thông tin như vậy sẽ cho phép khắc phục tính tương đương một cách có hiệu quả.

Nói cách khác, theo Tikhonov, là khi ta nắm được hầu hết thông tin tiên nghiệm, thì tính đa trị của nghiệm sẽ bị thu hẹp lại, và bài toán trở nên đơn trị. Giải bằng phương pháp gần đúng, ta có nghiệm gần đúng. Vấn đề này ta sẽ xét ở mục §8

§8. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN KHÔNG CHỈNH

8.1. Phương pháp lựa chọn dựa trên cơ sở thuật toán điều chỉnh

Phương pháp lựa chon được ứng dụng rộng rãi trong phân tích định lượng, có tính chất tổng quát, được sử dụng cho các trường hợp phân lớp thẳng đứng (khoáng vật) và phân lớp ngang (cấu trúc), đặc biệt là trong việc giải bài toán với các mô hình cho trước. Tính đơn trị của nghiệm bài toán loại này được Strakhov nghiên cứu đầy đủ.

Trong một lát cắt địa chất, dị vật được xấp xỉ bằng tập hợp các mô hình chọn trước. Trong trường hợp bài toán 2 chiều, tác dụng trọng lực tính toán lý thuyết đối với điểm quan sát là:

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \varphi_{ij}\left(x_i, z_i, \xi_{1j}, \ldots, \xi_{nj}, \zeta_{1j} \ldots, \zeta_{kj}\right) = V_{zlt}\left(x_i, z_i\right) \qquad (6.24)$$

$$i = \overline{1, M} \quad \text{(từ 1 đến M).}$$

Trong đó N – số dị vật nguyên tố.

σ_j – mật độ dư của dị vật thứ j.

$\xi_{1j}, \ldots, \xi_{nj}, \zeta_{1j}, \ldots, \zeta_{kj}$ ....tham số của dị vật thứ j.

φ_{ij} – tác dụng hấp dẫn của dị vật thứ j đối với điểm quan sát thứ i.

M – tổng số điểm quan sát.

Khi xây dựng mô hình ban đầu, một phần các tham số của nó đã được biết trước dựa vào dữ liệu địa chất, địa vật lý với độ tin cậy cao. Các giá trị của các tham số nói trên coi như được cố định. Các tham số biến thiên được xác định theo trường quan sát. Điều kiện lựa chọn tham số tối ưu là trường tính toán lý thuyết theo mô hình trùng với trường quan sát.

$$V_{zlt}(x_i, z_i) = V_{zqs}(x_i, z_i)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\varphi_{ij}\left(x_i,z_i,\xi_{1j},\ldots,\xi_{nj},\zeta_{1j},\ldots,\zeta_{kj}\right)=V_{zqs}(x_i,z_i),\ i=\overline{1,M}. \qquad (6.25)$$

Như vậy, nghiệm bài toán ngược của trọng lực thăm dò trong lớp mô hình cho trước được qui về giải hệ phương trình tuyến tính (6.25). Hệ này tuyến tính hay phi tuyến là phụ thuộc vào tham số nào phải tìm. Nếu như dạng của dị vật là cố định thì ẩn số là mật độ hoặc gradient mật độ (khi mật độ thay đổi theo dạng đa thức bài toán có dạng (6.24) thì hệ là tuyến tính, còn lại là phi tuyến).

Để tiện lợi, người ta biểu diễn hệ (6.25) bằng phương trình toán tử loại 1:

$$Fx = b \qquad (6.26)$$

$x \in H_1$, trong đó x – thành phần cần tìm.

$b \in H_2$ – đại lượng cho trước (trường V_{zqs}).

H_1 và H_2 – không gian Hilbert hữu hạn nào đó.

F – toán tử phi tuyến theo Fresh, ánh xạ H_1 thẳng vào H_2.

Nếu mô hình chọn là thực tế, thì nghiệm của (6.26) tồn tại, nếu b được cho trước chính xác: $b = \bar{b}$ là giá trị chính xác của trường.

Tuy nhiên, trong thực tế, do sai số đo, nhiễu ta chỉ có đại lượng gần đúng b thỏa điều kiện: $\left\|b-\bar{b}\right\|_{H_2} \le \delta$.

Do đó, hệ phương trình (6.26) giải được không phải đối với mọi $b \in H$, cho nên thay vì giải (6.26), người ta đặt ra bài toán nghiệm gần đúng bình phương cho b, tức thỏa:

$$f(x)=\left\|Fx-b\right\|_{H_2}^2 \qquad (6.27)$$

Bài toán được đặt không chỉnh, do đó phải sử dụng phương pháp đặc biệt. Phương pháp cơ bản tổng quát để tìm nghiệm gần đúng là phương pháp (thuật toán) điều chỉnh.

8.2. Khái niệm về thuật toán điều chỉnh.

Nếu trong phương trình (6.23) phần tử bất kỳ $u \in R(A)$ được cho trước chính xác, ẩn số cần tìm là z, thì phương trình (6.23) có nghiệm đơn trị, tức ứng với một u ta có một z. Lúc đó tồn tại một toán tử ngược sao cho $z = T(u)$. Tuy nhiện, trong thực tế, phần tử u chỉ được cho trước một cách gần đúng là $u_\delta = u + \delta u$, mà $\delta u \in R(A)$. Metric $\rho_x(u, u_\delta) \leq \delta$, vậy thì u_δ không thuộc R(A).

Nhiệm vụ là căn cứ vào đại lượng gần đúng u_δ, tìm đại lượng gần đúng z_δ của z.

Nếu biết trước trị số của δ và một số thông tin về nghiệm cần tìm, thì trên thực tiễn, ta có thể sử dụng một algorit (thuật toán) điều chỉnh mà thực chất của nó như sau:

Thay cho hàm T (hàm ngược của A), người ta đưa ra một họ R_δ, phụ thuộc vào δ như tham số thỏa điều kiện sau đây:

a/ Với $0 < \delta < \delta_0$ ta có R_δ, xác định trong toàn X, vậy:

$$z_\delta = R_\delta(u_\delta) \tag{6.28}$$

b/ Với bất kỳ $\delta > 0$, và $\delta < \delta_0$ có R_δ liên tục trong X;

c/ Đối với bất kỳ $u \in R(A)$ cố định, tồn tại sự hội tụ:

$$\rho_y(z, z_\delta) \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{6.29}$$

Một hàm với tính chất như thế, có vô số. Để có nghiệm hữu hiệu, cần chọn R_δ dựa vào thông tin tiên nghiệm về nghiệm z cần tìm. Tuy nhiên, điều kiện (6.25) đối với R_δ không cho ta khả năng đánh giá sai số và tốc độ hội tụ của $\rho_y(z, z_\delta)$. Sự hội tụ này có thể xảy ra rất chậm. Để đánh giá sai số của các nghiệm gần đúng, cần biết sự phụ thuộc của z vào tập chỉnh $M \subset Y$.

Hàm số R_δ có thể được xác định một cách tường minh, hoặc cho trước không tường minh. Ví dụ, thường người ta thay thế (6.23) bằng một phương trình gần đúng:

$$u = A_\alpha(z) \tag{6.30}$$

mà trong đó $\alpha > 0$ – tham số, mà với mọi giá trị của nó, nghiệm của (6.26) đều tồn tại, đơn trị và ổn định trong X. Phương trình (6.26) được xác định bởi algorit điều chỉnh, nếu đối với hàm T_δ – hàm ngược của A_δ ta có khả năng chỉ ra sự phụ thuộc $\alpha = \alpha(\delta)$, mà $\alpha(\delta) \to 0$ khi $\delta \to 0$, sao cho đối với $u \in R(A)$ bất kỳ, tồn tại sự hội tụ.

$$\rho_y [z, T_{\alpha\delta}(u_\delta)] \underset{\delta \to 0}{\to} 0 \qquad (6.31)$$

Cách thay thế (6.23) bằng (6.26) phụ thuộc vào thông tin về nghiệm cần tìm.

Các phương pháp biến phân áp dụng để giải bài toán không ổn định có nhiều ý nghĩa thực tiễn nhất là:

a/ Phương pháp cực tiểu hóa phiếm hàm của Fillips.

b/ Phương pháp phiếm hàm điều chỉnh của Tikhonov.

c/ Phương pháp giả nghiệm của Ivanov.

8.3. Phương pháp cực tiểu hóa phiếm hàm.

Phương pháp cực tiểu hóa phiếm hàm (còn gọi là phương pháp giảm dư) và phiếm hàm điều chỉnh dựa trên việc sử dụng thông tin tiên nghiệm về nghiệm cần tìm z dưới dạng phụ thuộc của z vào miền xác định D của phiếm hàm ổn định Ω, thỏa điều kiện sau:

a/ Đối với tất cả $z \in D(\Omega)$, $\Omega > 0$;

b/ Từ điều kiện $\Omega > 0$ dẫn đến $z = \theta$ – phần tử trong Y;

c/ Các tập mức của phiếm hàm, tức tập dạng $\Omega(z) < C$ (hằng tuỳ ý $C < +\infty$) – thực chất là các tập compắc trong Y.

Phương pháp cực tiểu hóa phiếm hàm dựa trên việc tìm kiếm giả nghiệm z_δ như nghiệm của bài toán cực trị có điều kiện.

$$\Omega(z) = \min_{z \in D(\Omega)} \qquad (6.32)$$

$$\rho_x[u_\delta, A(z)] \le \delta$$

Điều kiện: $\rho_x[u_\delta, A(z)] = \delta$ thường được áp dụng.

8.4. Phương pháp phiếm hàm điều chỉnh.

Phương pháp này (còn gọi là phương pháp biến phân) không lựa chọn nghiệm theo điều kiện cực tiểu hoá phiếm hàm kiểu (6.27) có dạng bình phương:

$$f(x) = \|Fx - b\|^2_{H_2} = \min$$

Nội dung của phương pháp phiếm hàm điều chỉnh do Tikhonov đưa ra là tìm kiếm nghiệm gần đúng z_δ như nghiệm của bài toán cực trị vô điều kiện:

$$\alpha\Omega(z) + \rho_x[u_\delta, A(z)] = \min_{z \in D(\Omega)} \qquad (6.33)$$

Vậy phương pháp phiếm hàm điều chỉnh đã trình bày ở trên, điều kiện cực tiểu hoá là (6.33), với tham số $\alpha > 0$ tối ưu, luôn tồn tại nghiệm z_α đơn trị, thỏa (6.34) với δ cho trước.

Ở đây phát sinh bài toán bổ sung để lựa chọn tham số điều chỉnh α (xem mục §9). Lựa chọn phổ biến nhất là theo nguyên tắc cực tiểu hóa phiếm hàm, tức theo điều kiện:

$$\rho_x[u_\delta, A(z)] = \delta \qquad (6.34)$$

Một phương pháp khác để lựa chọn nghiệm tối ưu với δ biết trước là dựa vào tiêu chuẩn giả tối ưu của Tikhonov–Glasko. Theo đó, nghiệm tối ưu $z_{\alpha k}$ được chọn từ trong dãy là nghiệm ứng với điều kiện:

$$\min_\alpha \left\| \alpha \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right\|_C \qquad (6.35)$$

Trong trường hợp không gian X và Y tuyến tính, hàm A liên tục, và phiếm hàm Ω lồi chặt chẽ, thì sự tồn tại và đơn trị của nghiệm điều chỉnh trong các phương cực tiểu hoá phiếm hàm phân và phiếm hàm điều chỉnh được thiết lập trong lớp bài toán rộng rãi.

Trên thực tế, các không gian Y và X, trong đó ta giải bài toán được lựa chọn là không gian Banac (không gian tuyến tính

chuẩn hoá), phổ biến nhất là không gian Hiltbert. Trong trường hợp này, phương pháp cực tiểu hoá phiếm hàm và phương pháp phiếm hàm điều chỉnh có thể được sử dụng trong cả trường hợp giải bài toán với nghiệm không ổn định và không đơn trị. Nếu không có sự đơn trị, thì phải có điều kiện bổ sung cho phiếm hàm điều chỉnh: phiếm hàm điều chỉnh Ω cần phải là lồi chặt chẽ. Như vậy, đảm bảo luôn cả tính đơn trị của nghiệm điều chỉnh. Những nghiệm như thế gọi là Ω – chuẩn (normal) hoặc chuẩn theo phiếm hàm Ω.

Việc lựa chọn phiếm hàm điều chỉnh được thực hiện trên cơ sở hiểu biết trước về độ trơn của nghiệm cần tìm. Ví dụ, khi giải bài toán ngược trong lớp các vật sao, phiếm hàm Ω được lựa chọn sao cho đảm bảo min của diện tích bề mặt của vật sao. Tương tự, Ω được lựa chọn trong việc giải bài toán ngược cho mặt phân cách gồm độ sâu của mặt phẳng tiệm cận và độ chênh $\Delta z(x,y)$ của mặt nằm phía trên mặt phẳng đó.

$$\Omega(z) = \iint_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial \Delta z(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta z(x,y)}{\partial y}\right)^2\right]dxdy + g(H - H_0)^2 \qquad 6.36)$$

Trong đó H là độ sâu cần tìm, H_0 là độ sâu cho trước.

Việc sử dụng phương pháp phiếm hàm điều chỉnh đòi hỏi cho trước đại lượng δ với độ chính xác khá cao (sai số tỉ đối cỡ 10% hoặc bé hơn), mà trên thực tiễn, không phải luôn luôn hiện thực. Trong những điều kiện như vậy, phương pháp xây dựng các nghiệm gần đúng nhờ thuật toán điều chỉnh được tiến hành như sau: sử dụng thông tin bổ sung về tính chất của nghiệm cần tìm kiếm z (nhiều hơn so với thông tin được sử dụng khi lựa chọn phiếm hàm ổn định Ω) và nhiễu δu ($u_\delta = u + \delta u$, u – tín hiệu hữu ích). Thông tin này cho phép coi giá trị δ như tham số chưa biết, cần phải xác định cùng với nghiệm cần tìm.

8.5. Phương pháp giả nghiệm

Phương pháp giả nghiệm (hay chuẩn nghiệm) của Ivanov có thể được sử dụng trong trường hợp nghiệm cần tìm được cho

biết trước là thuộc về tập compắc $M \subset Y$. Nghiệm z_δ được tìm theo điều kiện:

$$\rho_x(u_\delta, A(z)) = \min_{z \in M} \tag{6.37}$$

Đối với lớp bài toán rộng của không gian metric Y và X nghiệm của (6.32) là đơn trị. Trong thực tế khi sử dụng phương pháp giả nghiệm, thường xuất hiện khó khăn trong việc cho trước compắc M. Đặc biệt, có thể với M đã chọn, thì ta có:

$$\rho_x[u_\delta, A(z)] >> \delta \tag{6.38}$$

Do đó, cần thiết tiến hành như sau: Cho trước một dãy compắc mở rộng $M_1, M_2, M_3, \ldots\ldots M_i, \ldots\ldots, M_i \quad M_{i+1}$; $i = 1,2,\ldots$ Đối với mỗi compắc, giải bài toán tìm $z_\delta^{(i)}$ từ điều kiện:

$$\rho_x[u_\delta, A(z)] = \min_{z \in D(\Omega)} \tag{6.39}$$

Nghiệm tối ưu được chọn là nghiệm thỏa điều kiện:

$$\rho_x[u_\delta, A(z)] \leq \delta \tag{6.40}$$

Điều kiện trên đây dường như bắt chước phương pháp cực tiểu hoá phiếm hàm và phiếm hàm điều chỉnh. Phiếm hàm ổn định được xác định bởi một họ các tập compắc đơn tham số, trong đó nghiệm thuộc về một trong số các tập đó, được xác định bởi δ.

Phương pháp giả nghiệm thường được sử dụng trong trọng lực thăm dò để giải bài toán ngược trong lớp nguồn có tham số của trường. Thực chất vấn đề là ở chỗ, nếu như lớp mô hình được xác định bởi vectơ tham số $\vec{p}$, thì tập compắc thường (không phải luôn luôn) được cho trước bởi điều kiện giới hạn của các thành phần của vectơ $\vec{p}$ trong không gian Y phân bố khối lượng.

§9 BÀI TOÁN LỰA CHỌN THAM SỐ ĐIỀU CHỈNH α

9.1. Lựa chọn α theo phương pháp cực tiểu hoá phiếm hàm

Theo phương pháp cực tiểu hoá phiếm hàm, với giá trị δ cho trước, người ta giải một dãy các bài toán (6.29) với các giá trị $\alpha = \alpha_k$, mà $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \ldots, \alpha_k$, trong đó giá trị đầu tiên α_1 được lựa chọn sao cho $\rho_X(A\tilde{z}_\alpha, u_\delta) >> \delta$; và nghiệm sau cùng được lựa chọn phải thỏa:

$$|\rho_X(Az_k, u_\delta) - \delta| = \min.$$

Nguyên tắc của cực tiểu hóa phiếm hàm cho kết quả hữu hiệu nếu δ biết trước với độ chính xác cao (1– 5%). Song, trong thực tế không đạt được như vậy. Thường, người ta có giới hạn thô của δ: $\delta_- \le \delta \le \delta_+$

Trong trường hợp này, phương pháp xây dựng nghiệm tối ưu nhờ algorit điều chỉnh được thực hiện như sau: Sử dụng thông tin tiên nghiệm khác về tính chất của "*tín hiệu hữu ích*" u và nhiễu δu để coi δ là tham số chưa biết, phải xác định cùng với nghiệm cần tìm.

Dựa trên cơ sở của thông tin tiên nghiệm, người ta chọn phiếm hàm D trong không gian X có những tính chất sau đây:

1/ Đối với tất cả u_δ: $D(u_\delta) \ge 0$;

2/ Đối với ồn δu: $D(u_\delta) = 0$;

3/ Đối với tín hiệu hữu ích: $D(u) \ge C$. Trong đó C – hằng đủ lớn.

Người ta cho trước trong khoảng $[\delta_-, \delta_+]$ một dãy các đại lượng: $\delta_+ = \delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots > \delta_n = \delta_-$ và đối với mỗi δ_k theo nguyên tắc cực tiểu hóa phiếm hàm, $\delta = \delta_k$, người ta tìm nghiệm gần đúng $z_{\delta k}$. Các nghiệm tìm được cấu thành một tập nghiệm khả dĩ chấp nhận được, ứng với giảm dư của dữ liệu đầu vào:

$$v_{\delta k} = u_\delta - Az_{\delta k}. \qquad (6.41)$$

Ta thấy rõ $v_{\delta k}$ là giá trị gần đúng của nhiễu ở dữ liệu đầu vào. Sau khi tìm được δ_k từ điều kiện:

$$D(u_\delta - Az_{\delta k}) = \min_k \tag{6.42}$$

nghiệm gần đúng $u_{\delta k}$ sẽ được coi là nghiệm tối ưu.

9.2. Lựa chọn α theo phương pháp biến phân.

Phương pháp lý thuyết này nhằm lựa chọn thành phần $z_{\delta k}$ làm nghiệm gần đúng $z_{\delta k}$ của bài toán (6.27):

$$f(x) = \|Fx - b\|^2_{H_S}$$

đảm bảo sự cực tiểu hóa phiếm hàm có tham số của Tikhonov sau đây:

$$f^\alpha(x) = \|Fx - b\|^2_{H_2} + \alpha\|x - x_0\|^2_{H_1} \tag{6.43}$$

Tham số $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ được lựa chọn sao cho thỏa điều kiện:

$$\|Fx - b\|_{H_2} = \delta \tag{6.44}$$

trong đó $x_o \in H_1$ – một không gian cố định nào đó, dựa theo thông tin tiên nghiệm về nghiệm cần tìm (mô hình mật độ ban đầu). Sự lựa chọn α được thực hiện bằng dãy cấp số:

$$\alpha_{p+1} = \mu\alpha_p \qquad p = 0, 1. 2..... \text{ với } \mu < 1$$

Với giá trị bất kỳ của $\delta \le \delta_o$, bài toán tìm min của hàm $f^\alpha(x)$ tồn tại nghiệm đơn trị. Ngoài ra, nếu toán tử F liên tục và với $b = \bar{b}$, đối với (6.27), tập G là kín và lồi, thì đối với bất kỳ x_0 và $\varepsilon > 0$ sẽ tồn tại $\alpha^* = \alpha(\delta)$ sao cho $\|x^{\alpha^*} - x^*\|_{H_1} \le \varepsilon$, nếu $\|b - \bar{b}\|_{H_2} \le \delta(\varepsilon)$, trong đó x^* – nghiệm chính (chuẩn) của bài toán (6.27), được xác định bởi điều kiện:

$$\|x^* - x_o\|_{H_1} = \inf_p \|x - x_o\|_{H_1} \tag{6.44}$$

Như vậy để cực tiểu hoá phiếm hàm (6.42) với điều kiện (6.43), thành phần $x^{\alpha(\delta)}$ được lựa chọn làm nghiệm gần đúng của nghiệm chính x^*– bài toán là chỉnh. Từ đây dẫn đến sự đơn trị của nghiệm, khi $\delta \to 0$ các thành phần của dãy cực tiểu hóa phiếm hàm sẽ hội tụ về nghiệm không phụ thuộc vào sự lựa chọn x_0, bởi vì trong trường hợp này, x^* luôn trùng với nghiệm của bài toán. Nếu bài toán (6.27) không có nghiệm duy nhất, thì nghiệm sẽ được xác định bởi sự lựa chọn x_0.

CHƯƠNG VII
CÁC PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TRƯỜNG TRỌNG LỰC

KHÁI NIỆM:

Dị thường trọng lực quan sát sau khi đã được hiệu chỉnh thành dị thường Bouguer phản ánh ảnh hưởng của vô số đối tượng địa chất trong vỏ Trái đất cho đến nhân của nó. Trên nguyên tắc, muốn nghiên cứu đối tượng địa chất nào, thì phải phân tích dị thường do chính đối tượng đó gây ra. Như vậy chúng ta buộc phải tách ra từ dị thường tổng hợp quan sát, một thành phần dị thường quan tâm, liên quan đến dị vật nghiên cứu. Người ta phải bước đầu, thực hiện biến đổi trường quan sát ban đầu thành trường khu vực hoặc trường địa phương, là tách trường. Trường địa phương hay khu vực chỉ là tạm qui ước. Trường khu vực phản ánh ảnh hưởng của dị vật lớn ở dưới sâu, biến thiên chậm đều đặn nhưng với biên độ lớn. Còn trường địa phương phản ánh ảnh hưởng của dị vật nhỏ, ở nông, biến thiên nhanh, nhưng với biên độ bé. Do sự khác biệt trên, mà hai loại trường này dễ tách ra. Tuy nhiên, không phải luôn luôn tách được chúng ra hoàn toàn, mà thực tế vẫn còn sót phần nào, hoặc mất mát dị thường trong quá trình tách trường. Nếu hai dị vật cùng loại với nhau, thì trường của chúng càng khó tách ra. Công việc đòi hỏi nhiều thông tin địa chất về khu vực nghiên cứu. Các phương pháp tách trường gồm các phương pháp chính như sau:

– Biến đổi trường (tiếp tục giải tích hàm điều hoà) lên cao hoặc trung bình hóa trường đều nhằm loại trường địa phương, làm nổi bật trường khu vực.

– Biến đổi trường xuống dưới hoặc biến đổi trường sang đạo hàm bậc cao hơn đều nhằm làm nổi bật trường địa phương.

– Ngoài ra đem trường quan sát nguyên thủy, trừ đi trường khu vực cũng là một phương pháp để nhận được trường địa phương.

Công việc đòi hỏi rất nhiều kinh nghiệm ở nhà phân tích, bởi vì có rất nhiều trường khu vực và nhiều trường địa phương khác nhau. Ngoài ra, đối với tỷ lệ bản đồ này thì trường kia là khu vực, nhưng tỷ lệ bản đồ khác, nó lại là địa phương. Tính khác biệt tương đối giữa các trường là yếu tố làm cho chúng có thể được tách ra khỏi nhau. Trường dị thường Bouguer quan sát, sau khi biến đổi, mang tên dị thường Bouguer khu vực hoặc Bouguer địa phương.

Trường quan sát trên mặt quan sát u(ξ, η, 0) được biến đổi thành trường U(x, y, z) tại tọa độ x, y, z bằng tích phân sau:

$$U(x, y, z) = \iint_{S} K(x-\xi, y-\eta, z)\, u(\xi,\eta,0)\, d\xi d\eta \qquad (7.1)$$

Trong bài toán 2 chiều:

$$U(x, z) = \int_{L} K(x-\xi, z)\, u(\xi,0)\, d\xi \qquad (7.2)$$

K(x – ξ, y – η, z) hay K(x – ξ, z) được gọi là nhân biến đổi. Tích phân dạng trên gọi là tích phân chập, hoặc tích chập.

Dạng của nhân phụ thuộc vào từng loại biến đổi. Nhân đặc trưng cho từng phép biến đổi, làm nhiệm vụ biến đổi trường ban đầu thành trường mong muốn.

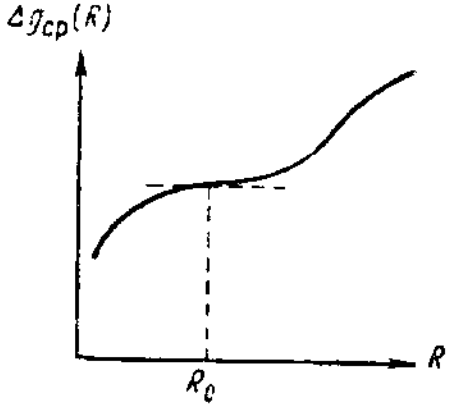
§1. PHƯƠNG PHÁP TRUNG BÌNH HÓA

Giá trị trung bình của trường quan sát xung quanh điểm quan sát trong phạm vi bán kính R, được xác định bằng công thức trung bình tích phân:

$$\overline{U}(0,0,0) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} u(r,\alpha,0)\, r dr d\alpha \qquad (7.3)$$

Ở đây có thể coi nhân là hằng $1/\pi R^2$. Triển khai công thức (7.3) thành công thức thực hành. Diện tích tròn có bán kính R của palet được chọn đủ lớn sao cho nó bao trùm kích thước vài dị vật địa phương và nhỏ hơn dị vật khu vực. Palet tròn gồm các đường tròn đồng tâm và các tia bán kính. Mỗi đường tròn của palet có giá trị U(r) trung bình riêng, bằng trung bình của tất cả các giá trị tại các nút (giao điểm của tia với đường tròn) trên đường tròn đó. Bán kính tối ưu R của palet được chọn như sau: Tăng dần bán kính R cho đến khi trường trung bình hóa tại

tâm palet có giá trị không tăng nữa (tiệm cận ngang) thì ngừng lại. Trên đồ thị, ta tìm thấy bán kính tối ưu. Tuy nhiên nếu tiếp tục tăng R mà trường trung bình hóa tăng dốc lên rồi tiệm cận ngang, thì lấy giá trị R ứng với hoành độ điểm uốn làm bán kính tối ưu của palet.



Hình 60: Bán kính tối ưu là R

Nhược điểm của palet tròn là mang nặng tính chất thủ công. Các giá trị trường cho trước trên mạng lưới ô vuông phải nội suy về các nút trên đường tròn và không sử dụng được nhiều lần. Do đó, để tiện cho máy tính điện tử người ta sử dụng palet vuông. Công thức trong tọa độ Descartes (Đề – các) được áp dụng:

$$U(x,y,0) = \frac{1}{(2a)^2}\int_{x-a}^{x+a}\int_{y-a}^{y+a} u(\xi,\eta,0)d\xi d\eta \qquad (7.4)$$

Trong đó 2a là chiều dài cạnh của palet vuông, sao cho chứa từ 4 – 6 bước của mạng lưới ô vuông phân bố trường ban đầu.

Trường hợp 2 chiều:

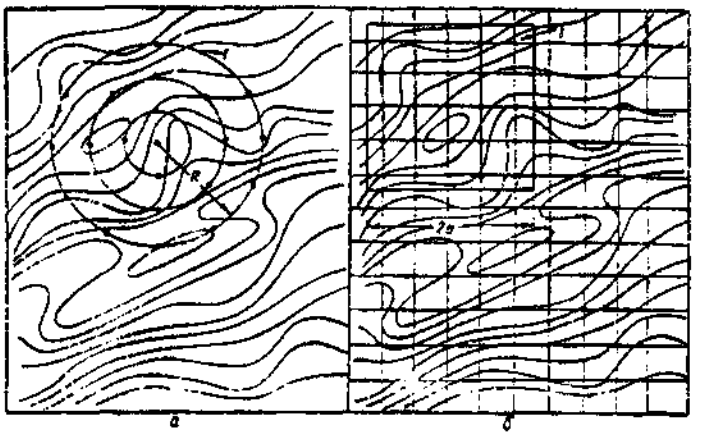
$$U(x,0) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} u(\xi,0)d\xi \qquad (7.4a)$$

Có khi, trung bình hóa được thực hiện bằng trung bình số học. Giá trị trọng lực tại một điểm nghiên cứu được coi là trung

bình số học của tất cả các giá trị trọng lực xung quanh nằm trên các nút của palet (tròn hoặc vuông). Theo Griffin:

$$U(0) = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N} \qquad (7.5)$$

N – số nút.



Hình 61: Palet tròn (trái) và palet vuông (phải)

Phương pháp trung bình hóa còn có thể được thực hiện bằng cách xấp xỉ trường quan sát bằng đa thức (hàm mũ, lượng giác) đặc trưng cho trường khu vực mà các hệ số của nó được xác định bằng phương pháp tối thiểu bình phương. Vấn đề là phải chọn bậc của đa thức sao cho phù hợp với hình thái (tần số) của trường khu vực cần xây dựng.

§2. BIẾN ĐỔI TRƯỜNG TRÊN CƠ SỞ NGHIỆM BÀI TOÁN BIÊN DIRICHLET.

2.1. Tích phân Poisson.

Mặt biên ở đây, chúng ta giới hạn trong 2 loại, mặt cầu và phẳng. Về 3 loại bài toán biên, lý thuyết thế đã trình bày. Bài toán biên thứ I – bài toán Dirichlet (Đi–rich–lê) ngoài:

Tìm hàm điều hoà U (x, y, z) (thỏa phương trình Laplace) tại mọi điểm của không gian ngoài mặt S cho trước, chính qui ở

vô cực và có giá trị trên mặt này bằng đúng tập hợp liên tục các giá trị u(s) cho trước.

Nghiệm bài toán biên Dirichlet là tích phân Poisson (Puat xông):

$$U(x,y,z) = \pm \frac{\rho^2 - R^2}{4\pi R} \iint_S \frac{u(\xi,\eta,0)\,ds}{r^3} \qquad (7.6)$$

Công thức trên áp dụng cho mặt cầu S, bán kính R.

Dấu: + bài toán cho không gian ngoài ($\rho > R$).

– bài toán cho không gian trong ($\rho < R$).

U(x, y, z) – hàm cần tìm tại điểm quan sát P(x, y, z).

$u(\xi, \eta, 0)$ – hàm cho trước trên mặt S.

ρ – khoảng cách từ tâm quả cầu O đến P (điểm quan sát).

r – khoảng cách giữa điểm chạy và điểm quan sát P:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$$

Gọi z là khoảng cách theo phương ρ đến mặt cầu ta có: $\rho = R + z$ thế vào công thức (7.6) ta có:

$$U(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_S \frac{u(s)\,ds}{r^3} + \frac{z^2}{4\pi R} \iint_S \frac{u(s)\,ds}{r^3} \qquad (7.7)$$

Cho $R \to \infty$ ta có bài toán cho mặt phẳng:

$$U(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_S \frac{u(s)ds}{r^3} \qquad (7.8)$$

S – là mặt phẳng vô tận trùng với mặt xoy. Trục z hướng lên.

$u(s) = u(\xi, \eta, 0)$ – hàm cho trước trên mặt phẳng s: xoy.

Trong tọa độ vuông góc Descartes tích phân Poisson:

$$U(x, y, z) = \frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}} \qquad (7.9)$$

Chọn trục y nằm dọc chiều dài của vật, x cắt ngang, z hướng lên trong bài toán chuyên trường, khác trong thăm dò.

Trong tọa độ trụ ρ, φ, z, chọn gốc tọa độ là hình chiếu của P:

$$U(0, 0, z) = \frac{z}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{u(\rho,\varphi,0)\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{\left[z^2+\rho^2\right]^{3/2}} \qquad (7.10)$$

Ở đây ta qui ước không gian ngoài phía trên mặt phẳng không chứa khối lượng. Không gian trong, dưới mặt xoy có chứa khối lượng. Tìm U ở không gian ngoài gọi là bài toán biên ngoài. Còn dưới mặt xoy – bài toán biên trong.

Sau khi lấy tích phân (7.9) theo η, ta có tích phân Poisson – nghiệm của bài toán Dirichlet 2 chiều:

$$U(x, z) = \frac{z}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,0)}{(x-\xi)^2+z^2}\,d\xi \qquad (7.11)$$

(không gian ngoài ứng với z > 0)

2.2. Tiếp tục giải tích trường lên cao.

Áp dụng công thức (7.10), ta có công thức thực hành:

$$U(0,0,z) = \frac{z}{2\pi}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\bar{u}_{ik}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}d\varphi\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} \qquad (7.12)$$

$\bar{u}_{ik}$ – giá trị trung bình trong một diện tích ô hình quạt. Lấy tích phân ta có:

$$U(0,0,z) = \frac{z}{2\pi}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}u_{ik}(\varphi_{i+1}-\varphi_i)\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_k^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho_{k+i}^2+z^2}}\right)$$

Đặt : $\varphi_{i+1} - \varphi_i = \frac{2\pi}{n}$;

cho z = h – độ cao chuyển trường lên.

n – số góc trong palet tròn.

Đặt :
$$\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_k^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_{k+1}^2 + h^2}}\right) = \frac{1}{m} \qquad (7.13)$$

m – hằng số. Kết quả ta có:

$$U(0,0,h) = \frac{h}{nm}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\bar{u}_{ik} \qquad (7.14)$$

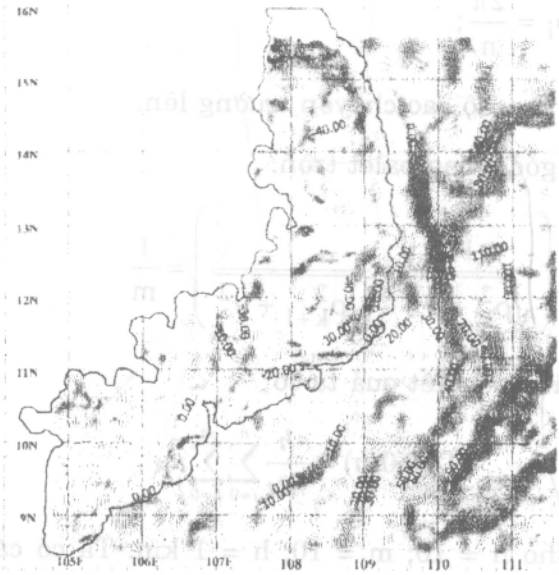
Ví dụ: Cho n = 10; m = 10; h = 1 km. Ta có các bán kính được tính theo (7.13) như sau: 0.48, 0.75, 1.02, 1.33, 1.73, 2.28, 3.17, 4.91, 9.80 (km). Đó là palet Malkin có tất cả có 100 ô, trong mỗi ô quạt ta xác định trị số trung bình $\bar{u}_{ik}$. Nếu ta chọn bán kính tuỳ ý, thì vế phải của (7.13) sẽ không phải hằng nữa, ta sẽ có bộ hệ số K_{ik} thay vì hằng 1/m. Malovichko đã chọn bán kính ρ sao cho hiệu của chúng Δρ là hằng h, như sau:

$$\rho_0 = 0,\ \rho_1 - \rho_0 = \rho_2 - \rho_1 = \rho_3 - \rho_2 = \rho_4 - \rho_3 \ldots = h.$$

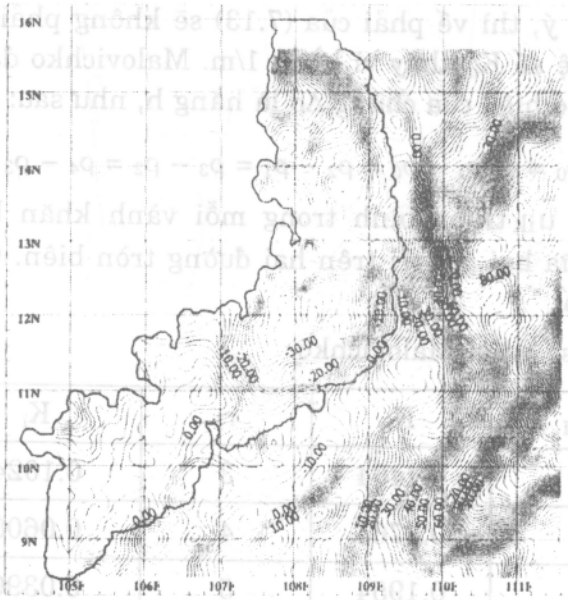
Giá trị $\bar{u}_{ik}$ trung bình trong mỗi vành khăn bằng trung bình cộng giữa hai giá trị trên hai đường tròn biên. Ông đã lập được bộ hệ số.

Bảng 8: Hệ số palet Malovichko.

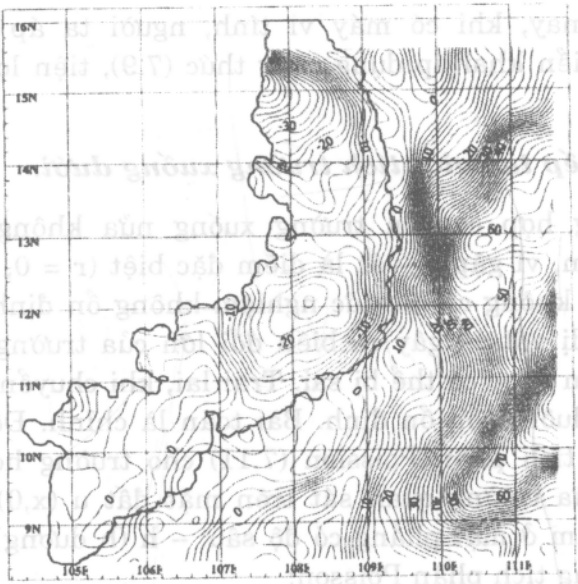
R_I	K_i	r_I	K_i
0	0.1464	3	0.1024
1	0.2764	4	0.0600
2	0.1954	5	0.0390



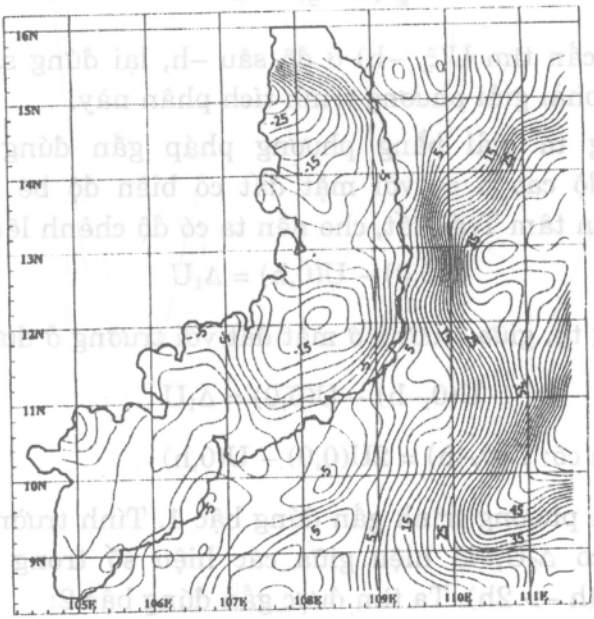
Hình 61a: Bản đồ dị thường trọng lực ứng với độ cao 5 km (các đường đẳng trị cách nhau 2 mgal)



Hình 61b: Bản đồ dị thường trọng lực ứng với độ cao 10 km (các đường đẳng trị cách nhau 2 mgal)



Hình 61c: Bản đồ dị thường trọng lực ứng với độ cao 20 km (các đường đẳng trị cách nhau 2 mgal)



Hình 61d: Bản đồ dị thường trọng lực ứng với độ cao 30 km (các đường đẳng trị cách nhau 2 mgal)

Ngày nay, khi có máy vi tính, người ta áp dụng palet vuông và triển khai áp dụng công thức (7.9), tiện lợi hơn palet tròn.

2.3. Tiếp tục giải tích trường xuống dưới.

Trường hợp chuyển trường xuống nửa không gian dưới phức tạp hơn, vì gặp dị vật là điểm đặc biệt (r = 0, U= ∞). Bài toán này là không chỉnh, tức nghiệm không ổn định (một biến đổi bé của dị vật sẽ gây ra biến đổi lớn của trường). Kết quả, nghiệm nhận được có thể bị sai. Trái lại, khi chuyển trường lên thì nghiệm luôn luôn ổn định. Bài toán là chỉnh. Để đơn giản, ta áp dụng tích phân Poission (7.11) cho trường hợp 2 chiều. Quan hệ giữa trường quan sát trên mặt đất u (x,0) và trường U(x,z) cần tìm ở mặt phẳng có độ sâu: – h (h dương) cũng được thể hiện bằng tích phân Poisson:

$$u(x, 0) = \frac{h}{\pi}\int_{\infty}^{\infty}\frac{U(\xi,-h)}{(x-\xi)^2+h^2}d\xi \qquad (7.15)$$

Hàm cần tìm U(ξ, –h) ở độ sâu –h, lại đứng sau dấu tích phân, nên phải giải phương trình tích phân này.

Chúng ta giải bằng phương pháp gần đúng liên tiếp. Trường ở độ cao h so với mặt đất có biên độ bé hơn so với trường ở gần tâm Trái đất, cho nên ta có độ chênh lệch:

$$U(0,0) - U(0,h) = \Delta_1 U$$

Tương tự, giữa trường ở mặt đất với trường ở dưới sâu (-h):

$$U(0,-h) - U(0,0) = \Delta_1 U$$

Vậy ta có: $U(0,-h) = 2U(0,0) - U(0,h)$ (7.16)

Đây là phương trình gần đúng bậc 1. Tính trường ở độ cao 2h, ta sẽ có $\Delta_2 U$, là hiệu giữa các hiệu số trong 2 khoảng: (0 –> h) và (h –> 2h). Ta tìm được gần đúng bậc 2:

$$U(0,-h) = U(0,0) + \Delta_1 U + \Delta_2 U$$

Hay là $U(0, -h) = 3U(0,0) - 3U(0,h) + U(0, 2h)$ (7.17)

Tiếp tục quá trình này cho đến bậc n. Nhưng chúng ta có thể dừng lại ở bậc n= 3, là đủ, có dạng như sau:

$$U(0,-h) = 4U(0,0) - 6U(0, h) + 4U(0,2h) - U(0,3h)$$

Hoặc: $$U(0,-h) = 4U(0,0) - \Sigma U \qquad (7.18)$$

Trong đó: $\Sigma U = 6U(0,h) - 4U(0,2h) + U(0,3h)$

Sử dụng tích phân Poisson cho U, ta có:

$$\Sigma U = \frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,0)\left(\frac{6}{\xi^2+h^2} - \frac{8}{\xi^2+4h^2} + \frac{3}{\xi^2+9h^2}\right)d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi_h,0)K(\xi_h)d\xi_h \qquad (7.19)$$

Với $K(\xi_h) = \frac{1}{h}\left(\frac{6}{1+\xi_h^2} - \frac{8}{4+\xi_h^2} + \frac{3}{9+\xi_h^2}\right)$, trong đó ký hiệu:

$$\xi_h = \frac{\xi}{h}.$$

Tích phân (7.19) được phân ra thành các tích phân trong từng khoảng ngắn. Mỗi khoảng được tính theo công thức Gauss. Bỏ qua miền xa (∞), ta có:

$$\Sigma U = \frac{1}{\pi}\left[\sum_{i=-n}^{+n} A_i K(\xi_{hi})u(\xi_{hi},0)\Delta\xi_{hi}\right] \qquad (7.20)$$

$$= \sum_{i=-n}^{+n} C_i u(\xi_i,0)$$

Với A_i – hệ số công thức Gauss

$\Delta\xi_{hi}$ – khoảng tích phân

ξ_{hi} – nút của khoảng tích phân.

Bảng 9 : Các hệ số của palet Strakhov.

i	ξ_i	C_i	$m_i = 1/C_i$	i	ξ_i	C_i	$m_i = 1/C_i$
0	0	1.5680	0.637	4	4.366	0.0279	35.8
1	1.077	0.4030	2.480	5	6.057	0.0209	47.8
2	1.812	0.0824	12.800	6	8.943	0.0102	98.4
3	2.634	0.1020	9.840	7	12.113	0.0115	87.2
				8	17.887	0.0044	225.0

Giá trị C_i và ξ_{hi} được Strakhốp tính sẵn trong bảng sau cho palet: Palet là một hệ các đường thẳng đứng có thang chia đều. Hệ số nhân của các thang đo được xác định bởi $m_i = 1/C_i$. Các đường thẳng đứng xuất phát từ các nút của công thức Gauss. Người ta đặt tâm palet trùng với điểm quan sát cần tính trường U(0, –h) là các nút ξ_{hi}. Tổng các tung độ (giao điểm đường cong của trường ban đầu với các đường thẳng đứng của palet) sẽ là Σ U và được đưa vào công thức (8.18) để tính U(0,–h). Chuyển trường xuống còn thực hiện bằng khai triển trường thành chuỗi Taylor hoặc chuỗi Mac Laurin.

Trường hợp 3 chiều cũng tương tự, ta có:

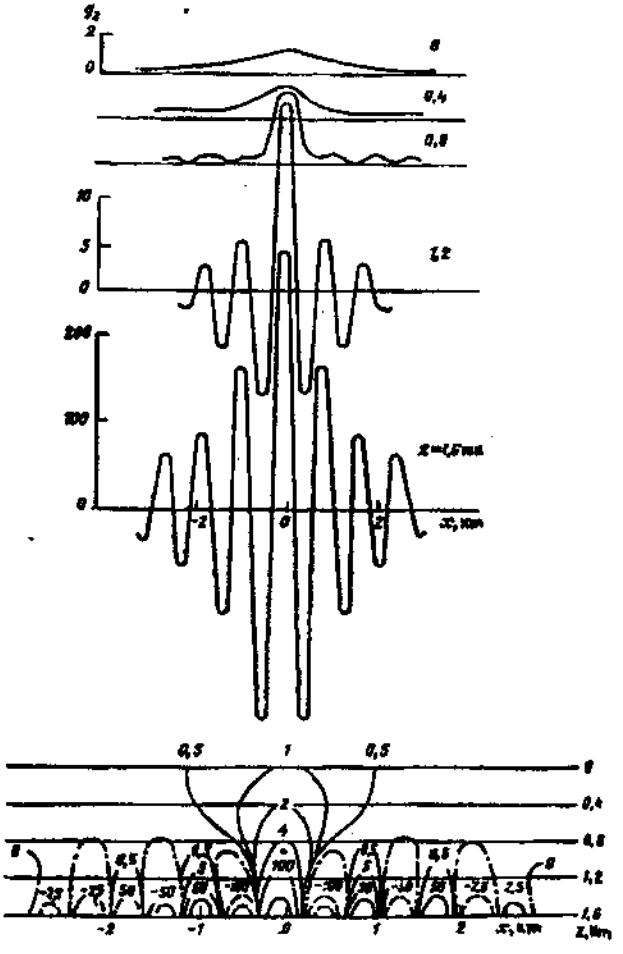
$$U(0,0,h) = (n+1)U(0,0,0) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1}\int_0^\infty \frac{kh\bar{u}(r)rdr}{(r^2+k^2h^2)^{3/2}}$$

Hoặc $$U(0,0,h) = (n+1)\,U(0,0,0) + \sum_{i=1}^{\infty}\bar{u}(r)_i K_i$$

Với: $$K_i = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1}\left[\frac{kh}{(r_i^2+k^2h^2)^{1/2}}\right]$$

Biến đổi trường xuống nửa không gian dưới được thực hiện từng bước xuống tới độ sâu gần dị vật. Càng gần dị vật trường càng "dao động" mạnh, thể hiện ở các đường đẳng trị của trường. Và nếu thực hiện chuyển trường tới độ sâu có dị vật, thì sẽ xảy ra hiện tượng "phân rã trường". Các đường đẳng trị sẽ bung đứt. Người ta có thể căn cứ dấu hiệu này để nhận biết vị trí có dị vật trong mặt cắt thẳng đứng dọc tuyến đo (hình 62).

Biến đổi trường xuống nửa không nửa gian còn có thể thực hiện theo định lý Gauss (lý thuyết thế) về giá trị trung bình của trường tại tâm hình cầu. Theo định lý giá trị này bằng trung bình tích phân trên toàn mặt cầu. Chọn tâm quả cầu nằm trên mặt phẳng quan sát. Giá trị ở tâm quả cầu theo công thức thực hành, sẽ bằng trung bình cộng của sáu giá trị xung quanh nằm trên mặt cầu. Từ đó có thể rút ra giá trị của trường tại điểm thấp nhất, ở độ sâu h = R – bán kính quả cầu.



Hình 62: Trường chuyển xuống tới 1,6km bị "phân rã" do gặp dị vật (điểm đặc biệt)

§3. ĐƯỜNG ĐẶC TRƯNG ĐỘ SÂU KLUSHIN.

Khi thực hiện trung bình hóa hay chuyển trường lên cao, ta nhận được trường khu vực, biến thiên đều đặn, chậm hơn, với biên độ bé hơn trường ban đầu. Thế nhưng, trường chuyển lên, ví dụ 30 km và 35 km, 40km đều là trường khu vực, với mức độ đều đặn khác nhau. Hay là khi trung bình hóa trường với bán kính R = 20 hay 25km, 35km v.v... ta có vô số trường khu vực khác nhau, với mức độ trung bình hóa khác nhau. Mỗi một trường khu vực đó ứng với môi trường địa chất nghiên cứu từ bao nhiêu km trở xuống? Nếu không trả lời được câu hỏi này thì sẽ không biết chọn sử dụng trường nào khu vực nào. Nếu chọn trường một cách tùy tiện, không phân biệt, sẽ phạm sai số.

Klushin đã thiết lập mối quan hệ này cho 3 phương pháp: trung bình hóa, tiếp tục giải tích và chuyển sang đạo hàm. Ta xét trường hợp trung bình hoá và chuyển trường lên. Trường đã biến đổi trong 2 trường hợp nêu trên đều có biên độ giảm so với trường ban đầu.

Gọi N là độ giảm biên độ của trường biến đổi, là tỷ số giữa trường đã được biến đổi U, với trường nguyên thủy u_0 tại một vị trí quan sát tại mặt đất, ở bên trên khối tâm dị vật.

$$N = U/u_0 \qquad (N < 1) \qquad (7.21)$$

Trên thực hành, người ta sử dụng mô hình quả cầu làm dị vật. Đặt quả cầu khối lượng M ở độ sâu h cho trước. Biểu thức giải tích trường của nó được dùng làm trường u_0 giả quan sát trên mặt đất (z = 0) và trường U(z) của nó ở độ cao z (trong trường hợp chuyển trường).

3.1. Trường hợp trung bình hóa.

a) Bằng mô hình: Trường lực hấp dẫn của quả cầu có khối lượng M nằm ở độ sâu h, được coi là dị thường trọng lực quan sát và chọn gốc toạ độ là hình chiếu tâm cầu lên mặt quan sát ta có công thức:

$$V_z(r,\alpha,0) = GM\frac{h}{(r^2+h^2)^{3/2}}$$

Tại gốc tọa độ ta có :

$$\Delta g = V_z(0,00) = \frac{GM}{r^2}$$

M – khối lượng.

G – hằng số vạn vật hấp dẫn.

Trung bình hóa theo (7.3) ta có:

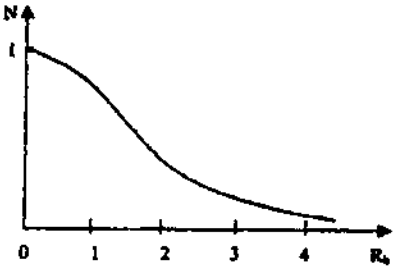
$$\overline{V}_z(0,0,0) = \frac{GMh^2}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\frac{rd\alpha}{(r^2+h^2)^{3/2}} = \frac{2GM}{R^2}\left(1-\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

$$N = \frac{\overline{V}_z(0,0,0)}{V_z(0,0,0)} == \frac{2h^2}{R^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}}\right)$$

Ký hiệu $R_h = \frac{R}{h}$, ta có :

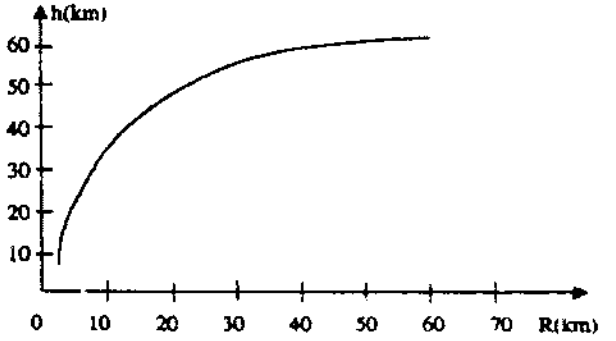
$$N = \frac{2}{R_h^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+R_h^2}}\right) \qquad (7.22)$$

Biểu diễn quan hệ giữa N và R_h bằng đồ thị (hình 63).



Hình 63: Mối quan hệ giữa N và R_h

b) Bằng thực nghiệm : Áp dụng trung bình hóa tại một số vị trí quan sát tuỳ ý trên bản đồ trọng lực, ta có mối quan hệ giữa N trung bình với R. Lập bảng *số quan hệ này. Kết hợp 2 mối tương quan ta tìm được mối* tương quan giữa R với R_h. Hay giữa R với độ sâu nghiên cứu h vì biết h = R/R_h:



Hình 64: Đường đặc trưng độ sâu biểu diễn mối quan hệ giữa độ sâu h và R

3.2. Trường hợp chuyển trường lên cao.

a) Bằng mô hình: Giả sử ta có trường dị vật là quả cầu như cũ, dị thường trọng lực quan sát tại độ cao z phía trên tâm cầu:

$$V_z = \frac{GM}{(h+z)^2}$$

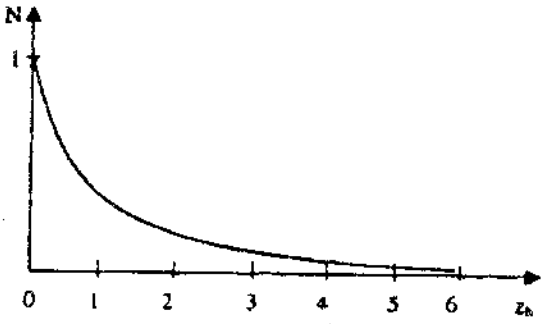
Tại mặt quan sát z = 0, ta có trường V_{ZO}. Lập tỷ số hai trường:

$$N = \frac{V_z}{V_{zo}} = \frac{h^2}{(h+z)^2}$$

Đặt $\frac{z}{h} = z_h$, ta có:

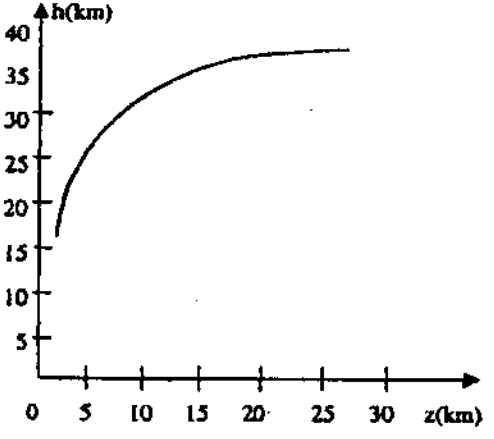
$$N = \frac{1}{(1+z_h)^2} \qquad (7.23)$$

Dưới đây biểu diễn quan hệ N, Z_h bằng đồ thị.



Hình 65: Mối quan hệ giữa N và z_h

b) Áp dụng chuyển trường lên với z khác nhau bằng công thức thực hành nào đó và palet tại một số điểm trên bản đồ trọng lực, ta có N trung bình phụ thuộc vào độ cao chuyển trường z. Lập bảng số quan hệ này. Kết hợp hai mối tương quan ta thiết lập mối tương quan giữa z và z_h, hay giữa z và h, vì biết $h = z/z_h$.



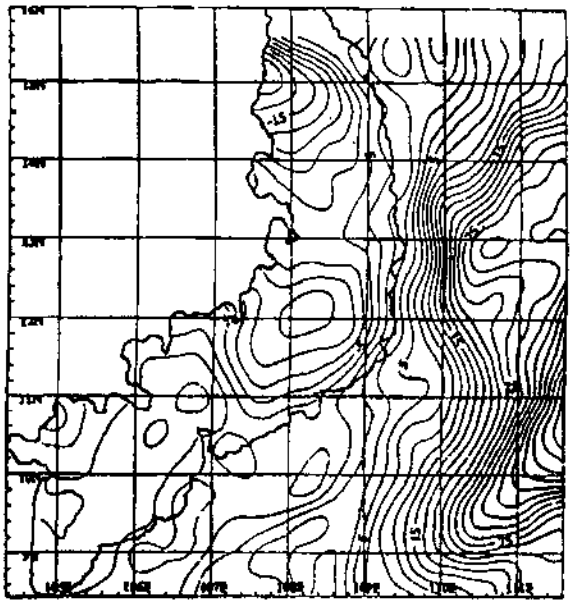
Hình 66: Đường đặc trưng độ sâu biểu diễn mối quan hệ giữa độ sâu h và độ cao chuyển trường z.

Cả hai loại biến đổi đều đem lại trường khu vực ứng với dị vật có kích thước lớn, ở độ sâu lớn. Hai phương pháp trên đều làm cho biên độ trường của dị vật nhỏ, ở nông bị giảm nhanh. Song phương pháp chuyển trường lên vẫn có hiệu quả đối với trường của dị vật ở sâu. Trường của nó giảm khi z tăng. Với z

chỉ bằng 1/8 – 1/10h, thì N = 0,8. Còn phương pháp trung bình hóa chỉ có hiệu quả đối với trường của dị vật ở nông. Đối với dị vật ở độ sâu lớn, phương pháp tỏ ra không có hiệu quả gì mấy. Ví dụ với những dị vật có độ sâu h bằng 3, 4 lần R, thì sau khi trung bình hoá N vẫn còn xấp xỉ 1, tức trơ với dị vật ở sâu.

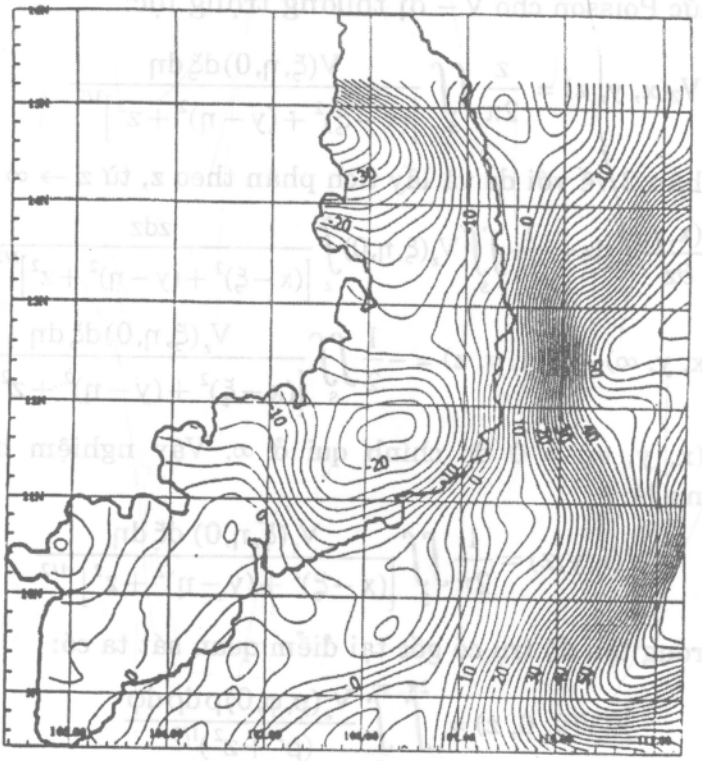
Phương pháp trung bình hóa và chuyển trường lên đã loại bỏ trường của các dị vật nằm từ mặt đất đến độ sâu h, làm nổi bật trường của các dị vật nằm từ độ sâu h trở xuống.

Ta còn có thể làm nổi bật trường nằm trong một lớp hữu hạn từ độ sâu h_1 đến h_2. Saksov – Nigaard đã thực hiện điều này bằng cách lấy trường khu vực với bán kính trung bình hoá R_1 trừ đi trường khu vực với bán kính trung bình hoá R_2. Cũng có thể lấy trường khu vực với độ cao chuyển trường z_1, trừ đi trường khu vực với độ cao chuyển trường z_2, trong đó $z_1 < z_2$. Bằng phương pháp Klushin, ta biết các độ sâu nghiên cứu h_1, h_2 tương ứng, biết lớp nghiên cứu Δh.



Hình 67: Bản đồ dị thường trọng lực ứng với độ cao 50 km, do Trần Văn Nhạc và Vũ Nguyên Kha xây dựng. Các đường đẳng trị cách nhau 2mGal (palet tròn)

Khi áp dụng phương pháp Klushin, cần sử dụng palet vuông trong việc chuyển trường lên. Bởi vì khi sử dụng palet tròn, trường không chỉ giảm do độ cao tăng, mà còn giảm khi trung bình hóa trường trên các đường tròn của palet (N không đơn biên), khiến trường giảm rất nhanh, làm cho việc xác định độ cao chuyển trường theo phương pháp Klushin dẫn đến z xác định sai. Cần phải nghiên cứu sự giảm của trường (N) phụ thuộc thuần túy độ cao.



Hình 68: Bản đồ dị thường trọng lực ứng với độ cao 50 km, do Trần Văn Nhạc và Vũ Nguyên Kha xây dựng. Các đường đẳng trị cách nhau 2mGal (palet vuông)

So sánh bản đồ chuyển trường lên theo palet tròn (hình 67) với bản đồ chuyển trường lên bằng palet vuông (hình 68) độ cao 50 km, ta thấy ở bản đồ bằng palet tròn, trường giảm nhiều hơn, trơn tru hơn. Thực chất, trường này ứng với độ cao 60km trở lên chứ không phải 50km.

§4. BIẾN ĐỔI TRƯỜNG THÀNH ĐẠO HÀM CÁC BẬC CỦA THẾ TRỌNG LỰC DỰA TRÊN CƠ SỞ NGHIỆM BÀI TOÁN BIÊN NEUMANN.

Bài toán biên Neumann (Noi--man) áp dụng cho thế hấp dẫn W của dị vật là: Biết đạo hàm V của thế hấp dẫn V trên mặt phẳng, tìm thế V trong không gian ngoài thỏa phương trình Laplace điều kiện biên nói trên và chính qui ở vô cực. Áp dụng công thức Poisson cho V – dị thường trọng lực:

$$V_z(x, y, z) = \frac{z}{2\pi}\iint_S \frac{V(\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}} \qquad (7.24)$$

Nhân 2 vế với dz và lấy tích phân theo z, từ $z \to \infty$

$$\int_z^{\infty}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}dz = \frac{1}{2\pi}\iint_S V_z(\xi,\eta,0)\int_z^{\infty}\frac{zdz}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}d\xi\,d\eta$$

$$V(x, y, \infty) - V(x, y, z) = -\frac{1}{2}\iint_S \frac{V_z(\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{1/2}}$$

$V(x, y, \infty) = 0$ do chính qui ở ∞. Vậy nghiệm bài toán Neumann là:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{V_z(\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{1/2}} \qquad (7.25)$$

Trong tọa độ trụ có gốc tại điểm quan sát ta có:

$$V(0, 0, z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_z(\rho,\varphi,0)\rho\,d\rho\,d\varphi}{(\rho^2+z^2)^{1/2}} \qquad (7.26)$$

Đặt biến $t = y-\eta$ và lấy tích phân (7.25) theo t từ $-\infty$ đến $+\infty$ ta có nghiệm bài toán Neumann 2 chiều là:

$$V(x, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V_z(\xi,0)\ln\sqrt{(x-\xi)^2+z^2}\,d\xi \qquad (7.27)$$

Bây giờ ta tìm cách đưa (7.25) và (7.27) về dạng có nhân. Hãy trở lại nghiệm bài toán Neumann cho mặt phẳng.

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{V_z(\xi,\eta,0)}{r}\,d\xi\,d\eta \qquad (7.27a)$$

Lấy đạo hàm hai vế (7.27a) theo x, y, z, các bậc m, n, l:

$$\frac{\partial^{m+n+l}V(x,y,z)}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l} = \frac{1}{2\pi}\iint_S V_z(\xi,\eta,0)\frac{\partial^{m+n+l}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta$$

Hay là :

$$\left[\frac{\partial^{m+n+l}V(x,y,z)}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{1}{2\pi}\int_x^x \int_x^x V_z(\xi,\eta,0)\ x$$

$$x\left[\frac{\partial^{m+n+l}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}\right)\right]d\xi\,d\eta \qquad (7.28)$$

$$K[(x-\xi),(y-\eta),z] = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^{m+n+l}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}\right) \qquad (7.29)$$

Bảng 10: Bảng của nhân K cho các loại đạo hàm (3 chiều).

Đạo hàm	**K[(x–ξ), (y–η), z]**
V_x	$\frac{1}{2\pi}\frac{(\xi-x)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}$
V_y	$\frac{1}{2\pi}\frac{\eta-y}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}$
V_z	$\frac{1}{2\pi}\frac{(z-\zeta)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}$
V_{zx}	$\frac{1}{2\pi}\frac{.3(z-\zeta)(x-\xi)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{5/2}}$
V_{zy}	$\frac{1}{2\pi}\frac{3(z-\zeta)(y-\eta)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{5/2}}$
V_{zz}	$\frac{1}{2\pi}\frac{\left[2(\zeta-z)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2\right]}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{5/2}}$
V_{zzz}	$\frac{1}{2\pi}\frac{3(\zeta-x)\left[2(\zeta-x)^2-3(\xi-x)^2-3(\eta-y)^2\right]}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{7/2}}$

Trường hợp 2 chiều, lấy đạo hàm 2 vế (7.27), ta có :

$$\frac{\partial^{m+l} V(x,z)}{\partial x^n \partial z^l} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V_Z(\xi,0)\frac{\partial^{m+l}}{\partial x^m \partial z^l}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+z^2}\,d\xi$$

Suy ra nhân biến đổi K trong trường hợp hai chiều:

$$K[(x-\xi),(y-\eta),z] = \frac{1}{\pi}\frac{\partial^{m+l}}{\partial x^m \partial z^l}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+z^2} \qquad (7.30)$$

Bảng 11: Bảng của nhân K cho các loại đạo hàm (hai chiều) :

Đạo hàm	**K[(x–ξ),z]**
V_x	$\frac{1}{\pi}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+z^2}$
V_z	$\frac{1}{\pi}\frac{z}{(x-\xi)^2+z^2}$
V_{zz}	$\frac{1}{\pi}\frac{(x-\xi)^2-z^2}{\left[z^2+(x-\xi)\right]^2}$
V_{zzz}	$\frac{1}{\pi}\frac{2z(x-\xi)^2-7z^2}{\left[(x-\xi)^2+z^2\right]^3}$
V_{zx}	$-\frac{1}{\pi}\frac{2z(x-\xi)}{\left[z^2+(x-\xi)^2\right]^2}$
V_{xx}	$\frac{1}{\pi}\frac{z^2-(x-\xi)^2}{\left[z^2+(x-\xi)^2\right]^2}$

Tích phân Poisson trong trường hợp tiếp tục giải tích trường cũng có thể biểu diễn dưới dạng có nhân K.

§5. PHƯƠNG PHÁP GRAĐIENT CHUẨN HÓA.

Phương pháp này còn có tên gọi là phương pháp gradient toàn phần mà hai thành phần là V_{zx} – thành phần ngang và V_{zz} – thành phần thẳng đứng. Hai thành phần này tạo thành vectơ gradient toàn phần trong mặt thẳng đứng mà chúng ta chỉ quan tâm môđun và trường môđun của nó.

5.1. Giới thiệu phương pháp:

Trong bài toán hai chiều, dữ liệu xuất phát được sử dụng để tính trường gradient chuẩn hóa trong một mặt cắt địa chất dọc theo tuyến đo là số liệu dị thường trọng lực Bouguer quan sát theo tuyến x. Phương pháp có ưu điểm là không bị cản trở bởi điểm đặc biệt khi tính trường xuống.

Các số liệu rời rạc của dị thường trọng lực quan sát được xấp xỉ bởi chuỗi Fourier, phụ thuộc vào tọa độ quan sát x dọc tuyến đo và độ sâu z của tuyến này: Thay vì chuỗi với bậc điều hòa N = ∞, ta có chuỗi với bậc N hữu hạn :

$$\Delta g(x,z) = \sum_{n=0}^{N}[A_n \cos(\pi nx/L) + B_n \sin(\pi nx/L)]e^{(\pi n/L)z} \tag{7.31}$$

Trong đó, Δx là bước đo trên một tuyến có chiều dài L, gồm M + 1 điểm đo (kể cả điểm 0 tại gốc tuyến đo x). Gọi x là tọa độ điểm đo bất kỳ thì x = j.Δx (j = 1, 2, 3....M). Vậy L = M. Δx và Δx = L/M. Các hệ số A_n và B_n có công thức:

$$A_n = 2/M\sum_{j=0}^{M}\Delta g(j\Delta x)\sin(\pi nj/M) \tag{7.32}$$

$$B_n = 2/M\sum_{j=0}^{M}\Delta g(j\Delta x)\sin(\pi nj/M) \tag{7.33}$$

Các hệ số A_n và B_n còn có thể nhận được bằng phương pháp tối thiểu bình phương. Về nguyên tắc, không nhất thiết chuỗi phải bao gồm cả hai loại hàm cos và sin.

Chuỗi biểu diễn dị thường trọng lực quan sát Δg nói trên được đồng nhất với V_z là đạo hàm bậc nhất của thế hấp dẫn do dị vật gây ra. Lấy đạo hàm lần lượt theo biến số x và z ta có gradient trọng lực theo phương x và z: V_{zx} và V_{zz}.

$$V_{zx} = \pi / L \sum_{n=0}^{N} [nB_n \cos(\pi nx / L) - nA_n \sin(\pi nx / L)] Q_m e^{(\pi n / L)z} \quad (7.34)$$

$$V_{zz} = \pi / L \sum_{n=0}^{N} [nA_n \cos(\pi nx / L) - nB_n \sin(\pi nx / L)] Q_m e^{(\pi n / L)z} \quad (7.35)$$

Ở đây, hệ số làm trơn Q_m được đưa bổ sung vào theo công thức:

$$Q_m = \left(\frac{\sin \pi n / N}{\pi n / N} \right)^m \quad (7.36)$$

N – bậc cao nhất của điều hòa trong chuỗi Fourier, còn m = 1, 2, 3... (thường m = 2).

Gradient tổng hợp là G (x, z) được xác định theo công thức:

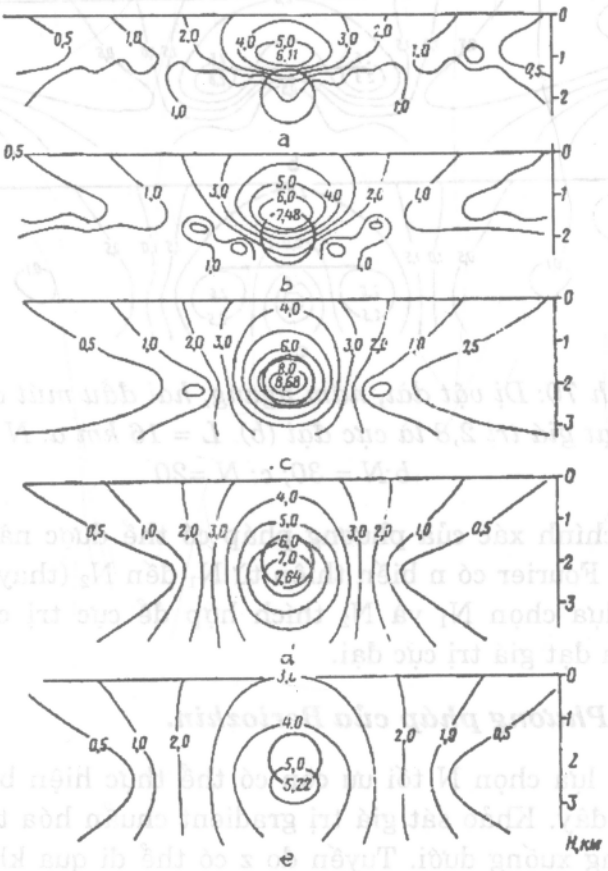
$$G(x, z) = \sqrt{(V_{zx}^2 + V_{zz}^2)^v} \quad (7.37)$$

Trong đó v là số nguyên 2, 3, 4, nhằm tăng cường độ phân giải. Áp dụng công thức này cho từng tuyến đo với độ sâu z tương ứng. Đối với mỗi độ sâu z nào đó, ta tính giá trị trung bình $\overline{G}$ (x, z) của tất cả các giá trị G(x, z) trên tuyến đo ở độ sâu z đó, rồi đem chia từng giá trị G(x, z) ở độ sâu này cho $\overline{G}$ (x, z) trung bình, ta có các giá trị của gradient chuẩn hóa G_n(x, z) trên một tuyến ứng với độ sâu này. Tiếp tục tính cho tất cả các độ sâu khác, ta có gradient chuẩn hóa mà giá trị của nó phân bố trong mặt cắt thẳng đứng dọc tuyến đo.

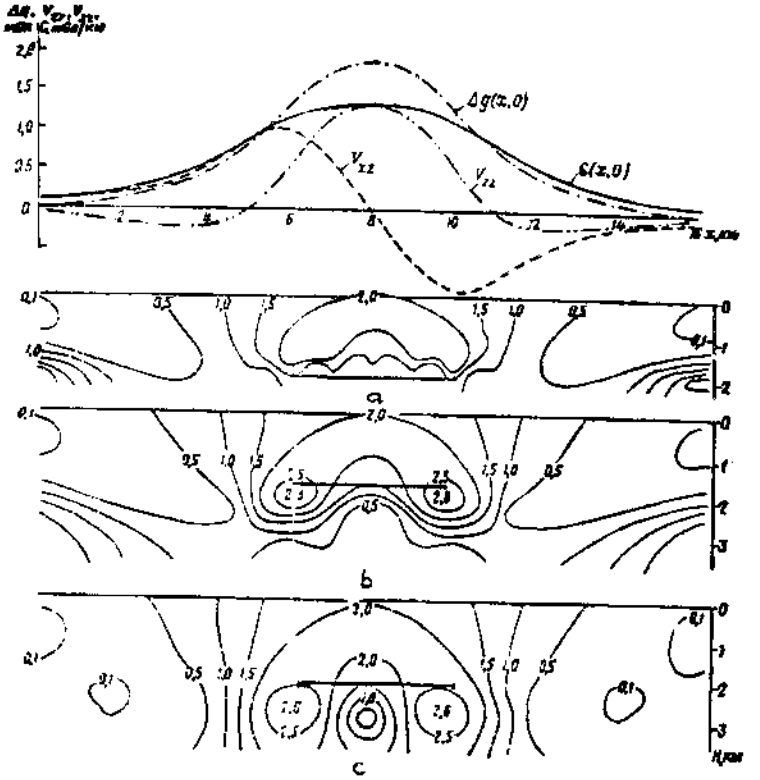
Vậy gradient chuẩn hóa G_n(x, z) là đại lượng không thứ nguyên và có thể lớn hơn hoặc nhỏ hơn 1 và được biểu diễn dưới dạng thập phân. Theo quy ước, đường đẳng trị 1 là ranh giữa khu vực gọi là dương (lớn hơn 1) và âm (nhỏ hơn 1) trong mặt cắt phân bố gradient chuẩn hóa dưới mặt đất hoặc biển.

5.2. Xây dựng mặt cắt phân bố gradient chuẩn hóa và phân tích.

Sự phân bố gradient chuẩn hóa theo các tuyến trong mặt cắt giúp ta xây dựng bản đồ đẳng trị trong mặt này. Tâm của cực trị xác định vị trí của mỏ đang tìm. Nếu dị vật có dạng kéo dài, thì ở hai đầu sẽ có hai cực đại. Vị trí chính xác được điều chỉnh bằng cách lựa chọn N tối ưu. Với con số N khác nhau thì vị trí của cực trị sẽ di chuyển, thay đổi vị trí. Với N thích hợp thì giá trị của cực trị sẽ đạt cực đại. Lúc đó ta dừng lại và đo đạc tọa độ của vị trí đó, là vị trí cần tìm của mỏ.



Hình 69: L = 20 km a) N = 60; b) N = 50; c) N = 40; d) N = 30; e) N=20 (G_{nmx} đạt giá trị cực đại 8,68 là dấu hiệu có dị vật tại độ sâu 2 km)



Hình 70: Dị vật dài, nằm ngang, hai đầu mút có G_{nmax} đạt giá trị 2,8 là cực đại (b). L = 16 km a: N = 40; b:N = 30; c: N =20.

Độ chính xác của phương pháp có thể được nâng cao hơn, nếu chuỗi Fourier có n biến thiên từ N_1 đến N_2 (thay vì từ 0 đến N). Cần lựa chọn N_1 và N_2 thích hợp để cực trị của gradient chuẩn hóa đạt giá trị cực đại.

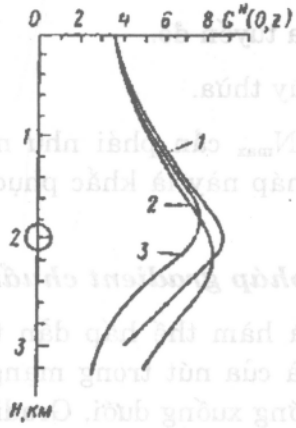
5.3. Phương pháp của Beriozkin.

Việc lựa chọn N tối ưu còn có thể thực hiện bằng phương pháp sau đây. Khảo sát giá trị gradient chuẩn hóa theo tuyến z thẳng đứng xuống dưới. Tuyến đo z có thể đi qua khối tâm hay lân cận khối tâm của dị vật (x = const). Trục vuông góc với z là trục biểu diễn G_n. Trên cùng hệ trục này ta biểu diễn nhiều đường cong G_n ứng với các N khác nhau. Đường cong nào có cực trị đạt giá trị max là đường cong thử nghiệm ứng với N tối ưu

và đỉnh của max của đường cong sẽ có độ sâu bằng độ sâu của dị vật (xem hình 67 xây dựng cho hình trụ tròn). Để tránh phải tốn công xây dựng nhiều đường cong như trên, Beroizkin đã đề nghị xây dựng một đường cong duy nhất. Đối với mỗi tọa độ z ta cộng tất cả các giá trị G_n có N khác nhau rồi chia cho N lớn nhất:

$$G_{n,\Sigma} = \frac{1}{N_{max}} \sum_{1}^{N_{max}} \gamma_N G_n(N) \qquad (7.38)$$

trong đó, γ_N là trọng và N = 1, 2, 3... N_{max}



Hình 71: Với L = 20 km. G_{nmax} đạt cực đại ngay tại độ sâu có hình trụ tròn 2 km.

1. Δx = 40 m ; N = 40

2. Δx = 200 m; N = 35

3. Δx = 400 m, N = 3inh2

5.4. Phương pháp chuẩn hóa theo diện.

Phương pháp này cũng giống như phương pháp theo tuyến đã trình bày, nhưng giá trị trung bình được sử dụng để chuẩn hóa là giá trị trung bình của toàn mặt cắt, chứ không phải của từng tuyến với một độ sâu z nào đó. Nghĩa là giá trị trung bình sử dụng trong việc chuẩn hóa là giá trị trung bình của tất cả các tuyến đo với các độ sâu khác nhau.

$$G_n = \frac{\sqrt{\left[U_x^2(i,j) + U_z^2(i,j)\right]^v}}{\frac{1}{MK}\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{K}\sqrt{\left[U_x^2(i,j) + U_z^2(i,j)\right]^v}} \qquad (7.39)$$

Trong đó:

U là hàm tổng quát (ví dụ V_z) được lấy đạo hàm theo x và z.

M – số điểm quan sát trên tuyến.

K – số tuyến quan sát trong mặt cắt.

j – số thứ tự của điểm quan sát.

i – số thứ tự của tuyến đo.

v – chỉ số bậc lũy thừa.

Số điều hoà N_{max} cần phải như nhau cho các tuyến. Ưu điểm của phương pháp này là khắc phục được dạng ô van đẳng trị của cực trị.

5.5. Phương pháp gradient chuẩn hóa ba chiều.

Gọi V(x,y,0) là hàm thế hấp dẫn trên mặt nằm ngang S với tọa độ x và y là của nút trong mạng lưới ô vuông, là điểm quan sát. Truc z hướng xuống dưới. Gradient chuẩn hóa ba chiều của thế V có dạng sau:

$$G_S = \frac{\sqrt{\left[V_{xx}^2 + V_{yy}^2 + V_{zz}^2 + 2(V_{xy}^2 + V_{xz}^2 + V_{yz}^2\right]^v}}{\frac{1}{AB}\sum_{i=1}^{A}\sum_{j=1}^{B}\sqrt{\left[V_{xx}^2 + V_{yy}^2 + V_{zz}^2 + 2(V_{xy}^2 + V_{xz}^2 + V_{yz}^2\right]^v}} \qquad (7.40)$$

Ký hiệu đạo hàm bậc nhất theo z của thế V là:

$V_z = U(x,y,0)$ – hàm cho trước trên mặt quan sát $z = 0$.

Mặt quan sát có thể là một hình vuông hoặc hình chữ nhật với các cạnh L dọc theo x và R dọc theo y.

Hàm U(x,y,z) có thể biểu diễn bằng chuỗi hai lớp Fourier:

$$U(x,y,z)=\sum_{o}^{N}\sum_{o}^{M}C_{n,m}\cos\frac{\pi nx}{L}\cos\frac{\pi my}{H}\exp\left\{z\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}\right\}Q_{n,m} \tag{7.41}$$

Trong đó hệ số có công thức:

$$C_{n,m}=\frac{4\lambda}{LH}\int_{o}^{L}\int_{o}^{H}U(x,y,o)\cos\frac{\pi nx}{L}\cos\frac{\pi my}{H}dxdy \tag{7.42}$$

Hệ số này cũng có thể biểu diễn bằng công thức tổng, gần đúng. Hệ số làm trơn có dạng:

$$Q_{n,m}=\left(\frac{\sin\frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}}\right)^{\mu}\left(\frac{\sin\frac{\pi m}{M}}{\frac{\pi m}{M}}\right)^{\mu} \tag{7.43}$$

Lấy tích phân U (x,y,z) ở (7.41) theo z, ta có thế V:

$$V(x,y,z)=\sum_{o}^{N}\sum_{o}^{M}\frac{C_{n,m}}{\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}}\cos\frac{\pi nx}{L}\cos\frac{\pi my}{H}$$

$$.\exp\left\{z\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}\right\}Q_{n,m}$$

Từ đó lấy đạo hàm các bậc khác nhau, ta có các thành phần:

$$V_{zz}(x,y,z)=\sum_{o}^{N}\sum_{o}^{M}C_{n,m}\left[\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}\cos\frac{\pi nx}{L}.\cos\frac{\pi my}{H}$$

$$.\exp\left\{z\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}\right\}Q_{n,m}$$

$$V_{xx}(x,y,z)=-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\sum_{o}^{N}\sum_{o}^{M}n^2\frac{C_{n,m}}{\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}}\cos\frac{\pi nx}{L}.\cos\frac{\pi my}{H}$$

$$.\exp\left\{z\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}\right\}Q_{n,m}$$

$$V_{yy}(x,y,z) = -\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \sum_{o}^{N}\sum_{o}^{M} m^2 \frac{C_{n,m}}{\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}} \cos\frac{\pi n x}{L} . \cos\frac{\pi m y}{H}$$

$$.\exp\left\{z\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}\right\} Q_{n,m}$$

$$V_{xy}(x,y,z) = \frac{\pi^2}{LH} \sum_{o}^{N}\sum_{o}^{M} nm \frac{C_{n,m}}{\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}} \sin\frac{\pi n x}{L} . \sin\frac{\pi m y}{H}$$

$$.\exp\left\{z\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}\right\} Q_{n,m}$$

$$V_{xz}(x,y,z) = -\frac{\pi}{L} \sum_{o}^{N}\sum_{o}^{M} n.C_{n,m} . \sin\frac{\pi n x}{L} . \cos\frac{\pi m y}{H}$$

$$.\exp\left\{z\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}\right\} Q_{n,m}$$

$$V_{yz}(x,y,z) = -\frac{\pi}{L} \sum_{o}^{N}\sum_{o}^{M} m.C_{n,m} . \cos\frac{\pi n x}{L} . \sin\frac{\pi m y}{H}$$

$$.\exp\left\{z\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right]^{1/2}\right\} Q_{n,m}$$

Các biểu thức cho đạo hàm các bậc của V trên đây giúp tính gradient chuẩn hoá G_s trong nửa không gian trên hoặc dưới.

Gradient chuẩn hóa 3 chiều chưa được ứng dụng rộng rãi trong thực tế, tuy nhiên nó cho phép rút ra một số kết luận. Ta thấy rằng phương pháp này khắc phục được hiện tượng phân bố đường đẳng trị méo (ôvan) giá trị G_s. Phương pháp cộng rời rạc cho kết quả ổn định trong việc giải tích vào nửa không gian nghiên cứu. Việc lựa chọn hệ số C_{mn} như trường hợp chung đã thực hiện trong trường hợp 2 chiều.

Vị trí của các điểm cực trị với độ dày điểm quan sát thích hợp được xác định với độ chính xác tương đương trong trường hợp 2 chiều. Việc giải thích địa chất cũng tiến hành giống như trong trường hợp 2 chiều, cần chú ý một ứng dụng của gradient chuẩn hóa 2 chiều nữa. Như ta thấy từ biểu thức (7.41), hàm ban đầu U(x,y,z) được xấp xỉ bằng chuỗi cosin 2 lớp, trong đó thành phần tuyến tính không được khử đi như trong trường hợp 2 chiều. Điều này có thể làm xuất hiện hiệu ứng ở biên. Đó là sự xuất hiện tại đầu và cuối của tuyến đo của các dị thường G_s giả tạo và các điểm đặc biệt giả tạo. Có thể khắc phục hiệu ứng này bằng cách bố trí đầu và cuối của khu vực nghiên cứu nằm đúng ở vùng trường biến thiên đều đặn.

CHƯƠNG VIII

BIẾN ĐỔI TRƯỜNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHỔ

§1. TỪ CHUỖI FOURIER ĐẾN TÍCH PHÂN FOURIER.

Hàm bất kỳ f(x) thỏa điều kiện Dirichlet trên miền $(-\ell, \ell)$ có thể khai triển thành chuỗi của hàm lượng giác Fourier :

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{\ell} + b_m \sin\frac{m\pi x}{\ell}\right) \qquad (8.1)$$

Hệ số Fourier :

$$a_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\cos\frac{m\pi\xi}{\ell}d\xi \qquad (m = 0, 1, 2, ...) \qquad (8.2)$$

$$b_m = \frac{2}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\sin\frac{m\pi\xi}{\ell}d\xi \qquad (m = 1, 2,...) \qquad (8.3)$$

Điều kiện Dirichlet về triển khai thành chuỗi Fourier :

Để triển khai thành chuỗi Fourier, hàm f(x) với chu kỳ 2π trên miền $(-\pi, \pi)$ cần có số cực trị hữu hạn và liên tục, trơn, ngoại trừ một số điểm gián đoạn (đứt) loại một.

Ký hiệu $\omega_m = \frac{m\pi}{\ell}$. Cho ℓ tiến tới ∞. Khi đó, chuỗi Fourier biến thành tích phân Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega(\xi - x)d\xi \qquad (8.4)$$

Biết rằng :

$\cos\omega(x - \xi) = \cos\omega x \cos\omega\xi + \sin\omega x \sin\omega\xi$, ta có :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega x\, d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi d\xi + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega x\, dx \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\omega\xi\, d\xi$$

Ký hiệu : $$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi\, d\xi \qquad (8.5)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\omega\xi\, d\xi \qquad (8.6)$$

Vậy, một hàm liên tục bất kỳ f(x), có chu kỳ hay không chu kỳ, có thể được biểu diễn dưới dạng tích phân Fourier sau :

$$f(x) = \int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]dx \qquad (8.7)$$

§2. TÍCH PHÂN FOURIER DẠNG PHỨC.

Công thức Euler (Ơ le) cho ta :

$$\cos\omega x = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}$$

$$\sin\omega x = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}$$

Sử dụng công thức Euler này trong tích phân (8.7) ta có :

$$f(x) = \int_0^{\infty}\left[A(\omega)\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} + B(\omega)\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left\{[A(\omega) - iB(\omega)]e^{i\omega x} + [A(\omega) + iB(\omega)]e^{-i\omega x}\right\}d\omega \qquad (8.8)$$

Ký hiệu: $s(\omega) = [A(\omega) - iB(\omega)]$

$s'(\omega) = [A(\omega) + iB(\omega)]$

Thế A(ω) và B(ω) bằng biểu thức của nó (8.5) và (8.6) ta có :

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)(\cos\omega\xi - i\sin\omega\xi)d\xi \qquad (8.9)$$

$$s'(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)(\cos\omega\xi+i\sin\omega\xi)d\xi \qquad (8.9a)$$

Thay ω bằng – ω vào (8.9) thì ta có công thức không khác gì công thức (8.9a) :

$$s(-\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)(\cos\omega\xi+i\sin\omega\xi)d\xi \qquad (8.10)$$

Tức s' (ω) = s(– ω) nên kết quả, (9.8) có dạng :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left[s(\omega)e^{i\omega x}+\int_{0}^{\infty}s(-\omega)e^{-i\omega x}\right]d\omega$$

Vừa đảo hạn tích phân thứ hai, vừa thay ω bằng –ω, ta có :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{0}^{\infty}s(\omega)e^{i\omega x}d\omega+\int_{-\infty}^{0}s(\omega)e^{i\omega x}d\omega\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

Tóm lại tích phân Fourier dạng phức :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad (8.11)$$

và trong (8.9) thay $(\cos\omega\xi-i\sin\omega\xi)=e^{-i\omega\xi}$ ta có :

$$s(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi \qquad (8.12)$$

Điều kiện Dirichlet để tồn tại biến đổi Fourier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,0)|^2dx<+\infty \qquad (8.12a)$$

Hay nói cách khác f(x) → 0, khi x → ± ∞.

Hàm s(ω) là biến đổi Fourier của hàm f(x), còn gọi là phổ phức của biến đổi Fourier hoặc đặc trưng phổ của f(x), là một đại lượng phức. Còn hàm f(x) là biến đổi ngược Fourier của hàm s(ω). Môđun |s(ω)| –đặc trưng tần số của phổ.

Ý nghĩa của (8.11) là một hàm f(x) phi tuần hoàn có thể được biểu diễn bằng tổng vô số thành phần phức kiểu $e^{i\omega x}$ có chu kỳ vô cùng nhỏ, tần số vô cùng gần nhau trong miền (– ω, + ω) và có biên độ là $|s(\omega)|$. Ký hiệu biên độ phụ thuộc tần số ω, là ψ :

$$\psi = |s(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 s(\omega) + \mathrm{Im}^2 s(\omega)} = \sqrt{A(\omega)^2 + B(\omega)^2}$$

Re sω) là phần thực của s(ω) : A(ω)

Im s(ω) là phần ảo của s (ω) : B (ω)

$s(\omega) = A(\omega) + iB(\omega) = |s(\omega)| e^{i\varphi}$

$\varphi(\omega) = arctg \dfrac{\mathrm{Im}\, s(\omega)}{\mathrm{Re}\, s(\omega)}$: đặc trưng pha của phổ.

§3. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ PHỔ.

3.1. Định lý chồng chất.

Phổ của hàm F(x), mà F(x) là tổng các hàm $f_i(x)$, bằng tổng các phổ của từng hàm $f_i(x)$ tương ứng.

Chứng minh:

Giả sử hàm F(x) là tổng của nhiều hàm cho trước f_i (x) :

$$F(x) = \sum f_i(x)$$

Biến đổi Fourier của hàm tổng F(x) theo (9.12) :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum f_i(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi = \sum \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi$$

Suy ra : $$S(\omega) = \sum s_i(\omega) \qquad (8.13)$$

Nghĩa là phổ của tổng các hàm $f_i(x)$, bằng tổng các phổ của từng hàm $f_i(x)$ tương ứng. Từ kết quả này suy ra rằng biến đổi Fourier là biến đổi tuyến tính.

3.2. Định lý về phổ của đạo hàm.

Phổ $S_n(\omega)$ của đạo hàm bậc n của hàm f(x), bằng phổ $s(\omega)$ của hàm này nhân với $(i\omega)^n$.

Chứng minh:

Gọi f(x) là hàm cho trước và $f'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}$ là đạo hàm của f(x) thì phổ của đạo hàm f '(x) là :

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi$$

Lấy tích phân theo từng phần, ta có :

$$S_x(\omega) = f(\xi)e^{-i\omega\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} + i\omega\int_{\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega\xi}\, d\xi \qquad (8.14)$$

Theo điều kiện Dirichlet (9.12), hàm $f(\xi)$ phải tiến đến 0 khi $\xi \to \pm\infty$, do đó số hạng đầu của vế phải sẽ bằng 0 và kết quả ta có:

$$S_x(\omega) = i\omega s(\omega) \qquad (8.15)$$

Tương tự cho đạo hàm bậc n của f(x) theo x, ta có :

$$S_{xn}(\omega) = (i\omega)^n s(\omega) \qquad (8.16)$$

Với điều kiện là tất cả các đạo hàm từ bậc 1 đến (n–1) của hàm f(x) phải tiến đến 0 khi $x \to \pm\infty$.

3.3. Định lý về phổ của đạo hàm theo tham số.

Phổ $S_z(\omega)$ của đạo hàm theo tham số z của hàm f(x) bằng đạo hàm của phổ $s(\omega)$ của hàm này theo tham số đó : $\partial s(\omega)/\partial z$.

Chứng minh :

Gọi $f'_z(x,z)=\frac{\partial}{\partial z}f(x,z)$ là đạo hàm của f(x,z) theo tham số z, thì biến đổi Fourier của đạo hàm $f'_z(x,z)$ này là:

$$S_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} f(\xi, z) e^{-j\omega\xi}\, d\xi$$

hay $$= \frac{\partial}{\partial z} \int_{\infty}^{\infty} f(\xi, z) e^{-j\omega\xi}\, d\xi \qquad (8.17)$$

Tức : $$S_z(\omega) = \frac{\partial}{\partial z} s(\omega) \qquad (8.17a)$$

Nghĩa là phổ của đạo hàm theo tham số của một hàm số f(x) bằng đạo hàm của phổ biên độ hàm này theo tham số đó.

3.4. Định lý năng lượng (định lý Parseval).

Năng lượng của hàm f(x) bằng tích phân bình phương của hàm đó, hoặc bằng tích phân bình phương môđun của phổ hàm đó.

Chứng minh :

Nhân các phần bên trái và bên phải của tích phân Fourier (8.11) với f(x)dx và lấy tích phân theo các cận vô cực ta được năng lượng của f(x) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) d\omega . \int_{\infty}^{\infty} f(x) e^{+i\omega x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) .\, s(-\omega) d\omega \qquad (8.18)$$

trong đó s(ω) và s(– ω) là các đại lượng liên hợp phức, chỉ khác nhau bởi dấu của phần ảo, vì vậy:

$$s(\omega).s(-\omega) = s(\omega).s(\omega)^* = s(\omega)^2 = \psi^2(\omega)$$

Kết quả : $$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(\omega) d\omega \qquad (8.19)$$

Nghĩa là năng lượng của hàm f(x) bằng tích phân bình phương của hàm đó, hoặc bằng tích phân bình phương môđun của phổ hàm đó.

3.5. Định lý về phổ của hàm dịch chuyển.

Phổ $S_\xi(\omega)$ của hàm $f(x-\xi)$ dịch chuyển một khoảng ξ so với hàm này ban đầu $f(x)$, bằng phổ $s(\omega)$ của hàm $f(x)$ nhân với $e^{-i\omega\xi}$

Chứng minh :

Phổ của hàm dịch chuyển một khoảng ξ bằng :

$$S_\xi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)e^{-i\omega x}dx$$

Đặt biến số mới t = x–ξ , ta có :

$$S_\xi(\omega)=e^{-i\omega\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Tức : $$S_\xi(\omega)= e^{-i\omega\xi}s(\omega) \qquad (8.20)$$

3.6. Định lý tích chập.

Phổ $S(\omega)$ của hàm $F(x)$, là tích chập của hàm $f(x)$ và hàm $K(x-\xi)$ dịch chuyển một khoảng ξ so với hàm $f(x)$, bằng tích của phổ của hai hàm đó và ngược lại.

Chứng minh :

Khái niệm về biến đổi Fourier còn được dùng trong bài toán lọc tần số dựa trên định lý tích hợp. Giả sử có hàm f(x) và hàm dịch chuyển một khoảng ξ là hàm K(x–ξ). Nhân hai hàm này với nhau và lấy tích phân theo các cận vô cực. Tích phân định nghĩa như vậy gọi là tích chập mà ta đã gặp ở (7.2) ở chương VII :

$$F(x)=\int_{\infty}^{\infty} K(x-\xi)f(\xi)d\xi \qquad (8.21)$$

Hàm F(x) gọi là tích chập của hàm f(x) và K(x–ξ).

Ta hãy tìm phổ Fourier của F(x), tương tự (8.12) :

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-i\omega x}dx \qquad (8.22)$$

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi\right]K(x-\xi)e^{-i\omega x}dx$$

Đặt biến số mới t = x – ξ cho tích phân theo x, ta được :

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi.\int_{-\infty}^{\infty}K(t)e^{-i\omega t}dt$$

Suy ra : $S(\omega) = s(\omega)\,\Phi(\omega)$ (8.23)

Trong đó, Φ (ω) là phổ của hàm K(x–ξ) :

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}K(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (8.24)$$

và biến đổi ngược của nó :

$$K(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

Theo (8.23) chúng ta đã chứng minh rằng biến đổi Fourier S(ω) của tích chập của hai hàm f(x) và K(x–ξ), bằng tích của các biến đổi Fourier của hai hàm đó.

Hàm K(x–ξ) gọi là đặc trưng chuyển tiếp của phép biến đổi, đặc trưng cho một phép biến đổi nào đó. Hàm ΦK(ω), phổ nó, gọi là đặc trưng tần số của phép biến đổi.

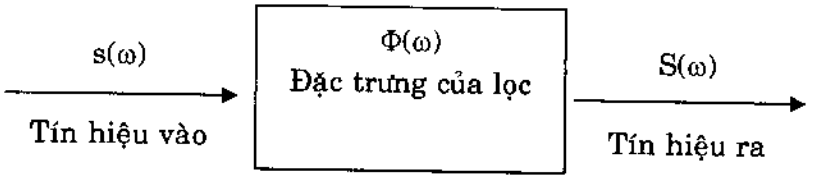
§4. ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ TÍCH CHẬP ĐỂ BIẾN ĐỔI TRƯỜNG NHƯ PHÉP LỌC TẦN SỐ.

Công thức tích chập (8.21) gợi cho ta ý niệm về phép biến đổi trường hai chiều theo công thức (7.2) ở chương VII (trong,

mục tiếp tục giải tích trường), mà ở đây F(x) là hàm đã được biến đổi từ hàm ban đầu f(x) bởi nhân biến đổi K(x-ξ) trong tích chập. Do đó, định lý này có ứng dụng quan trọng đối với phép biến đổi trường.

Nguyên tắc chung: Tùy theo nhiệm vụ của bài toán chuyển trường mà đặc trưng biến đổi K(x–ξ) được biết trước trong tích chập, ta tìm toán tử Φ(ω) của bộ phận lọc theo (8.24), sau đó tính tín hiệu ra S (ω) theo (8.23).

Như vậy biến đổi trường là bài toán lọc tần, để tìm lấy phổ của miền tần số mà ta quan tâm, nhờ đặc trưng tần số lọc Φ(ω), làm nổi mạnh tín hiệu hữu ích, loại bỏ hoặc làm yếu các nhiễu. Áp dụng định lý tích chập vào bài toán lọc tần, ta có sơ đồ lọc sau :



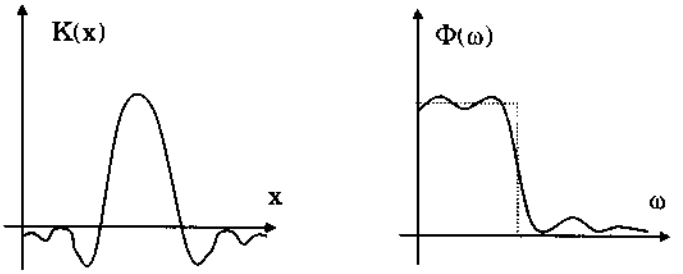
Một khi biết S(ω), ta tìm F(x) bằng biến đổi ngược Fourier:

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{-i\omega x}d\omega \qquad (8.25)$$

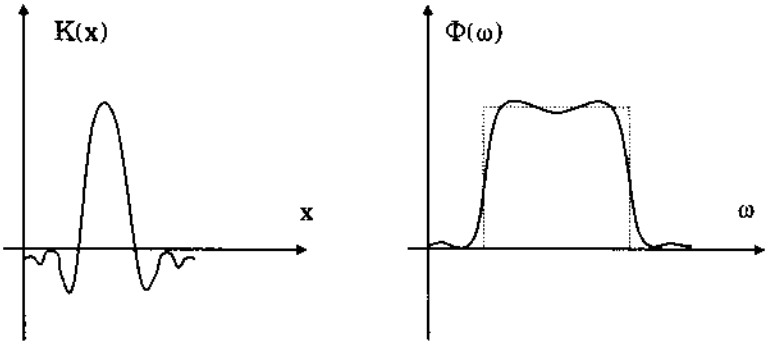
Hoặc thay S(ω) = s(ω) Φ(ω) vào (8.25) ta có :

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\,s(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega \qquad (8.26)$$

Đây là tích chập trong biến đổi trường dưới dạng phổ, có dạng tương đồng với (7.2) trong chương VII. Dữ kiện đưa vào là tín hiệu s(ω), là hàm của tần số, được lọc bởi toán tử lọc Φ(ω), còn gọi là cửa sổ. Do đó, mấu chốt là phải xây dựng đặc trưng tần số Φ(ω) thích hợp cho từng biến đổi.



Hình 72: Đặc trưng chuyển tiếp K(x) và phổ tương ứng của lọc thấp tần Φ(ω)



Hình 73: Đặc trưng chuyển tiếp K(x) và phổ tương ứng của lọc trung và cao tần Φ(ω).

Một phép tính khác được sử dụng phổ biến trong địa chấn là tích chập ngược. Tích chập ngược nhằm xác định đặc trưng K(ξ) sao cho tín hiệu ra có dạng xung.

Phân tích phổ thường được dùng trong địa vật lý mỗi khi muốn biết hình thái và ý nghĩa các số liệu quan sát trong thăm dò địa chấn, thăm dò điện hay trọng lực và từ.

§5. ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ VỀ PHỔ CỦA ĐẠO HÀM THEO THAM SỐ CHO DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC.

Nói chung, với một hàm ban đầu cho trước f(x), chúng ta có phổ của nó s(ω). Với s(ω), ta có thể tìm phổ S(ω) của hàm biến đổi để thực hiện một biến đổi nào đó. Trong trường hợp biến đổi thể hiện bằng tích chập, ta áp dụng định lý tích chập, xây dựng toán tử lọc tần số Φ(ω) như đã trình bày. Tuy nhiên, trường hợp

biến đổi sang đạo hàm, ta có thể sử dụng định lý về phổ của đạo hàm theo tham số để tìm trực tiếp $S(\omega)$ mà không cần có $\Phi(\omega)$, rồi sử dụng (8.25) để có hàm biến đổi $F(x)$.

5.1. Ví dụ : Dị vật 2 chiều dạng bất kỳ.

Sau đây chúng ta hãy xem cách tìm $S(\omega)$ của đạo hàm của dị thường trọng lực gây ra bởi dị vật 2 chiều dạng có thiết diện s, vận dụng định lý về đạo hàm theo tham số z ở mục 3.3.

Dị thường trọng lực được đồng nhất với V_z – đạo hàm của thế hấp dẫn V theo phương z, là thành phần lực chiếu theo phương thẳng đứng z. Khác với bài toán chuyển trường, trong thăm dò trọng lực, trục z hướng xuống dưới. Nhiệm vụ là đi tìm phổ của đạo hàm bậc n theo tham số z của $\Delta g(x,z) = V_z$. Ta ký hiệu phổ này là $S_{zn}(\omega)$.

Giả sử ta có vật hai chiều, mật độ σ, có thế nằm kéo dài vô hạn theo trục y. Dị thường trọng lực quan sát tại điểm P(x,z) trong không gian trên ($z \le 0$) cho bởi tích phân:

$$\Delta g(x,z) = 2G\sigma \iint_S \frac{(\zeta - z)\,d\zeta d\xi}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2} \qquad (8.27)$$

trong đó s là thiết diện bất kỳ của vật thể trong mặt cắt thẳng đứng (xoz), còn (ζ, ξ) là tọa độ điểm chạy, nơi có diện tích nguyên tố $ds = d\zeta d\xi$ trong thiết diện s.

Phổ của $\Delta g(x,z)$ là:

$$s(\omega) = 2G\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \iint_s \left[\frac{(\zeta - z)\,d\zeta d\xi}{(x-\xi)^2 (z-\zeta)^2}\right] e^{-i\omega x} dx \qquad (8.28)$$

Thay đổi thứ tự tích phân:

$$s(\omega) = 2G\sigma \iint_S \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\zeta - z)e^{-i\omega x}}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2} dx\right] d\zeta d\xi \qquad (8.29)$$

Thay đổi biến số tích phân, đặt $u = \dfrac{x-\xi}{z-\zeta}$, ta được:

$$s(\omega) = 2G\sigma \iint_S e^{-i\omega\xi}\left[e^{-i\omega(\zeta-z)u}\frac{du}{1+u^2}\right]d\zeta d\xi$$

Tích phân đầu tính được là :

$$I(\omega) = \int\left[e^{-i\omega(\zeta-z)u}\frac{du}{1+u^2}\right] = \pi e^{-|\omega(\xi-z)|}$$

Để đơn giản cách viết, chúng ta bỏ qua dấu tuyệt đối ở (ξ – z). Sau cùng phổ của dị thường trọng lực trong trường hợp vật thể hai chiều là:

$$s(\omega) = 2G\sigma \iint_S e^{-\omega(\zeta-z)}e^{-i\omega\xi}d\zeta d\xi \qquad (8.30)$$

Tại điểm P quan sát z=0, biểu thức ở trên trở thành:

$$s(\omega) = 2\pi G\sigma \iint_S e^{-\omega\zeta}e^{-i\omega\xi}d\zeta d\xi \qquad (8.31)$$

Áp dụng định lý (8.17) về phổ của đạo hàm theo tham số, nghĩa là khi lấy đạo hàm vế phải của phương trình (8.30) theo z, ta sẽ có phổ của đạo hàm lực hấp dẫn F(x) theo phương đứng oz:

$$S_z(\omega) = 2\pi G\sigma\omega \iint_S e^{-\omega(\zeta-z)}e^{-i\omega\xi}d\zeta d\xi \qquad (8.32)$$

Tại điểm quan sát ở mặt đất z = 0, vì vậy:

$$S_z(\omega) = 2\pi G\omega \iint_S e^{-\omega\zeta}e^{-i\omega\xi}d\zeta d\xi \qquad (8.33)$$

So sánh phương trình (8.32) với (8.30) hoặc phương trình (8.33) với (8.31), ta thấy rằng phổ của đạo hàm ∂F/∂z là:

$$S_z(\omega) = \omega s(\omega) \qquad (8.34)$$

Tiếp tục áp dụng định lý về phổ đạo hàm theo tham số, ta sẽ được biểu thức cho phổ của đạo hàm bậc hai của lực F theo z :

$$S_{zz}(\omega) = \omega^2 s(\omega) \qquad (8.35)$$

và một cách khái quát hơn, phổ của đạo hàm bậc n theo tham số z sẽ cho bởi hệ quả :

$$S_{zn}(\omega) = \omega^n s(\omega) \tag{8.36}$$

Qua ba công thức (8.34), (8.35), (8.36), ta suy từ (8.23) ra đặc trưng tần số $\Phi(\omega)$ trong trường hợp này bằng ω^n (n=1, 2,...) tại mặt quan sát. Đặc trưng tần số cho thấy tần số nào được gạt bỏ, tần số nào được tăng cường sau phép lọc. Rõ ràng phổ của đạo hàm có tần số cao hơn phổ của hàm ban đầu và tăng tỷ lệ với lũy thừa n của tần số ω. Việc sử dụng các định lý về đạo hàm đã cho phép tìm trực tiếp phổ $S(\omega)$, không qua $\Phi(\omega)$.

Qua nghiên cứu các phép biến đổi khác nhau bằng phương pháp phổ và so sánh, chúng ta cũng có thể rút ra tính chất riêng, cơ bản của mỗi phép biến đổi. Đối với các phép biến đổi khác nhau, người ta được các hàm đặc trưng tần số $\Phi(\omega)$ và phổ $S(\omega)$ khác nhau phụ thuộc vào phép biến đổi đó. Riêng phổ $S(\omega)$ còn phụ thuộc vào phổ ban đầu $s(\omega)$ theo (8.23).

5.2. Ví dụ : Hình trụ tròn nằm ngang vô hạn.

Dị thường trọng lực do hình trụ ngang dài vô hạn theo phương y, gây ra tại điểm P tọa độ (x, 0), ở mặt z = 0 có biểu thức:

$$\Delta g(x) = 2G\lambda \frac{h}{x^2 + h^2} \tag{8.37}$$

trong đó h là độ sâu của tâm hình trụ và λ là mật độ dài (khối lượng trên đơn vị chiều dài).

Biến đổi Fourier của $\Delta g(x)$ là:

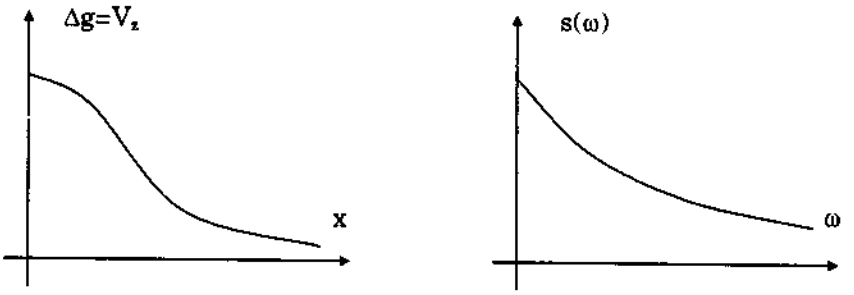
$$s(\omega) = 2G\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{he^{-i\omega x}}{x^2 + h^2} dx \tag{8.38}$$

Thay biến số tích phân mới t = x/h, ta có phổ của dị thường trọng lực $\Delta g(x)$:

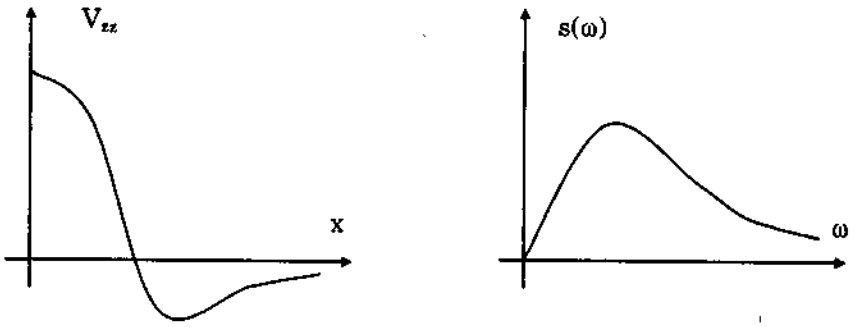
$$s(\omega) = 2\pi G\lambda\, e^{-\omega h} \tag{8.39}$$

Áp dụng kết quả của ví dụ trước, ta được phổ của đạo hàm bậc nhất và bậc hai theo tham số z bằng cách nhân phổ ban đầu $s(\omega)$ lần lượt với ω và ω^2.

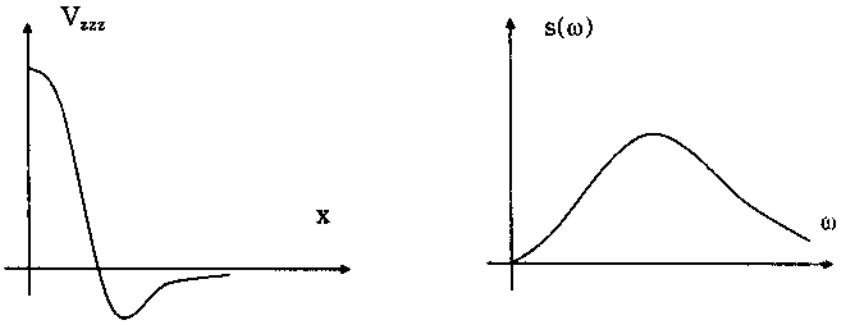
Hình 74, 75, 76 minh họa đường biểu diễn của các dị thường Δg, đạo hàm $\partial\Delta g/\partial z$, $\partial^2\Delta g/\partial z^2$ của hình trụ ngang và phổ $s(\omega)$ tương ứng. Qua các đường biểu diễn này, chúng ta thấy rõ điều đã được lý thuyết chứng minh, đó là bậc đạo hàm càng cao thì đỉnh phổ tương ứng càng dịch chuyển về phía tần số cao.



Hình 74



Hình 75



Hình 76

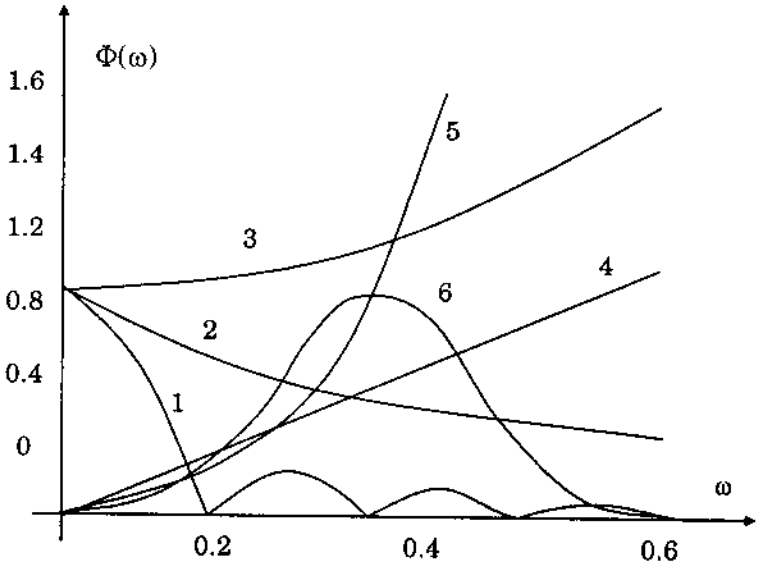
Đường biểu diễn của phổ của vật thể có dạng cầu tương tự như trong trường hợp vật thể có dạng hình trụ ngang vô hạn, nghĩa là phổ tần số của đạo hàm dịch chuyển về phía những tần số cao so với phổ của dị thường trọng lực. Bậc của đạo hàm càng cao thì độ dịch chuyển của phổ càng lớn.

Bảng dưới đây trình bày đặc trưng tần số của vài phép biến đổi trường trọng lực phổ biến cho trường hợp 2 chiều.

Bảng 12: Đặc trưng tần số $\Phi(\omega)$ của các phép biến đổi trường.

Phép biến đổi	ĐTTS $\Phi(\omega)$	Chỉnh
Trung bình hoá :	$\sin\omega r/\omega r$	Có
Chuyển trường :		
– Lên trên :	$e^{-\omega h}$	Có
– Xuống dưới :	$e^{\omega h}$	Không
Đạo hàm theo z bậc n của dị thường:		
– Ở mặt quan sát :	ω^n	Không
– Ở mặt phẳng độ cao h :	$\omega^n e^{-\omega h}$	Có
Đạo hàm theo x bậc n của dị thường:		
– Ở mặt quan sát :	$(i\omega)^n$	Không
– Ở mặt phẳng độ cao h :	$(i\omega)^n e^{-\omega h}$	Có
Đạo hàm các bậc n,m theo x, z tương ứng trên mặt z = const	$(i\omega)^n(-\lvert\omega\rvert)^m e^{-\lvert\omega\rvert z}$	Có
Tính nguyên hàm theo z trên mặt z = const	$(-e^{-\lvert\omega\rvert z})/\lvert\omega\rvert$	Không

Hình 77 minh họa đường biểu diễn của đặc trưng tần số $\Phi(\omega)$ theo tần số của các phép biến đổi khác nhau. Đường biểu diễn hàm đặc trưng tần số $\Phi(\omega)$ của mỗi phép biến đổi sẽ cho thấy tần số nào được tăng cường và tần số nào bị giảm đi trong từng biến đổi khác nhau. Hình này cho thấy trong phép chuyển trường xuống nữa không gian dưới và các phép tính đạo hàm phương thẳng đứng, những dị thường trọng lực tần số thấp bị giảm. Ngược lại trong phép chuyển trường lên nữa không gian trên, những thành phần dị thường đó được tăng cường và các thành phần dị thường có tần số cao bị làm yếu đi.



Hình 77 – Đường biểu diễn đặc trưng tần số $\Phi(\omega)$ của các phép biến đổi do Gladky tính sẵn.

1 – Trung bình hoá; 2 – Tiếp tục giải tích trường lên cao; 3 – Tiếp tục giải tích trường xuống dưới; 4 – Đạo hàm $\partial\Delta g/\partial z$; 5 – Đạo hàm $\partial^2\Delta g/\partial z^2$; 6 – Đạo hàm $\partial\Delta g/\partial z$ trên cao.

§6. BIẾN ĐỔI FOURIER CHO TRƯỜNG HỢP 3 CHIỀU.

Điều kiện Dirichlet cho biến đổi Fourier :

Giả sử u(x,y,0) là trường ngoại ban đầu, cho trước trên mặt phẳng z = 0 (thường u = Δg). Nếu thỏa điều kiện Dirichlet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x,y,0)|^2\,dxdy < +\infty \qquad (8.40)$$

thì biến đổi Fourier (phổ) của hàm u(x, y, 0) trên mặt phẳng xOy đã cho, được xác định bởi biểu thức :

$$s(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y,0)\,e^{-i(ux+vy)}\,dxdy \qquad (8.41)$$

Biến đổi ngược của nó có dạng :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}s(u,v)\,e^{i(ux+vy)}\,dudv \qquad (8.42)$$

Đối với trường được biến đổi ta có tương tự (8.26) :

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}s(u,v)\,\Phi(u,v)e^{i(ux+vy)}\,dudv \qquad (8.43)$$

$$S(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}U(x,y,0)\,e^{-i(ux+vy)}\,dxdy \qquad (8.44)$$

$$S(u,v) = s(u,v)\,\Phi(u,v) \qquad (8.45)$$

Trong đó :

u,v – tần số theo x, y tương ứng.

S(u,v) – phổ Fourier của trường đã được biến đổi.

Φ(u,v) – đặc trưng tần số lọc, là biến đổi Fourier của nhân $K(x-\xi, y-\eta, z)$.

Đặt :

$p = x - \xi$ và $q = y - \eta$, ta có : $K(x-\xi, y-\eta, z) = K(p,q)$ (8.46)

ta có đặc trưng tần số lọc :

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}K(p,q)\,e^{-i(up+vq)}\,dpdq \qquad (8.47)$$

§7. PHỔ CỦA ĐẠO HÀM DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC THEO THAM SỐ (3 CHIỀU).

Ứng dụng công thức (8.36), chúng ta đi tìm phổ của đạo hàm dị thường trọng lực trực tiếp, không qua K(ω). Xét trường hợp 3 chiều. Đối với những vật thể ba chiều dạng bất kỳ, dị thường trọng lực Δg do nó gây ra tại một điểm quan sát P(x,y,z) có biểu thức :

$$\Delta g(x, y, z) = G\sigma \iiint_V \frac{(\zeta - z)d\zeta d\eta d\xi}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right]^{3/2}} \quad (8.48)$$

và phổ của hàm Δg(x,yz) là:

$$s(u,v) = \frac{G\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V \frac{(\zeta - z)d\zeta d\eta d\xi}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right]^{3/2}} e^{-j(uxtvy)} \quad (8.49)$$

Thay đổi thứ tự tích phân, ta sẽ được:

$$s(u,v) = \frac{G\sigma}{2\pi} \iiint_V d\zeta d\eta d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\zeta - z)e^{-i(uxtvy)}}{\left[(x-\xi)^2 + \ldots\right]^{3/2}} dxdy \quad (8.50)$$

Riêng tích phân kép sẽ bằng:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\zeta - z)e^{-i(ux+vy)}}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} dxdy = 2\pi e^{-i(u\xi+v\eta)} e^{-(\xi-z)\sqrt{u^2+v^2}}$$

(8.51)

Do đó phổ của dị thường trọng lực do vật thể ba chiều gây ra tại điểm P(x,y,z) là:

$$s(u,v) = G\pi \iiint_V e^{-(\xi-z)\sqrt{u^2+v^2}} e^{-i(u\xi+vn)} \, d\zeta \, d\eta \, d\xi \quad (8.52)$$

và tại điểm P ở mặt quan sát, z = 0, phổ trở thành:

$$s(u,v) = G\sigma \iiint_V e^{-\xi\sqrt{u^2+v^2}} e^{-i(u\xi+v\eta)} \, d\zeta \, d\eta \, d\xi \quad (8.53)$$

Áp dụng định lý về phổ của đạo hàm theo tham số, ta có phổ của đạo hàm $\partial\Delta g/\partial z$ của dị thường Δg theo tham số z:

$$S_z(u,v) = \sqrt{u^2 + u^2}\, s(u,v) \tag{8.54}$$

và phổ của đạo hàm bậc hai $\partial^2\Delta g/\partial z^2$:

$$S_{zz}(u,v) = (u^2 + v^2)\, s(u,v) \tag{8.55}$$

Ký hiệu $\Omega = \sqrt{u^2 + u^2}$ tần số trong trường hợp 3 chiều. Vận dụng định lý đạo hàm, chúng ta có phổ của đạo hàm bằng phổ của dị thường ban đầu nhân với Ω, vì vậy phổ được làm mạnh ở các tần số cao so với phổ của hàm ban đầu. Phổ của đạo hàm bậc 2 : nhân s(u,v) với Ω^2. Do đó có sự khuếch đại càng lớn hơn.

Tính chất trên có nghĩa là phép đạo hàm làm tăng cường ảnh hưởng của những dị thường có tần số cao, so với những dị thường khác, và vì vậy bản đồ đạo hàm $\partial\Delta g/\partial z$ hay $\partial^2\Delta g/\partial z^2$ cho ta độ phân giải cao hơn là bản đồ dị thường trọng lực Bouguer ban đầu, nhiều chi tiết hơn.

Dưới đây chúng ta hãy áp dụng các kết quả trên để tìm biểu thức phổ của dị thường trọng lực của $\partial^2\Delta g/\partial z^2$ trong trường hợp vật thể có dạng quả cầu. Với các dị vật cụ thể khác nhau thì phổ s(u,v) ban đầu và phổ đạo hàm $S_z(u,v)$ sau đó sẽ khác nhau.

7.1 Ví dụ : Quả cầu.

Dị thường trọng lực Δg do quả cầu khối lượng M nằm ở độ sâu h gây ra tại điểm quan sát P(x, y, 0) trên mặt z = 0 có biểu thức:

$$\Delta g(x,y,o) = GM\frac{h}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \tag{8.56}$$

Phổ tần số $s(\omega)$ của $\Delta g(x, y, 0)$ trong trường hợp này :

$$s(u,v) = \frac{GM}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{he^{-i(ux+vy)}}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}dxdy \tag{8.57}$$

Thay đổi biến số tích phân, sau cùng ta được phổ ban đầu :

$$s(u,v) = GMe^{-h\sqrt{u^2+v^2}} \qquad (8.58)$$

Áp dụng kết quả về định lý phổ của đạo hàm theo z đối với vật thể ba chiều, ta sẽ thu được phổ $S_z(u,v)$, $S_{zz}(u,v)$ của dị thường $\partial\Delta g/\partial z$ và $\partial^2\Delta g/\partial z^2$ cho quả cầu bằng cách nhân phổ ban đầu s(u,v) của dị thường trọng lực lần lượt với $\sqrt{u^2+v^2}$ và (u^2+v^2) tương ứng.

Trên đây chúng ta vừa xem xét đạo hàm thẳng đứng của dị thường trọng lực dưới dạng biểu diễn phổ. Qua đó chúng ta đã rút ra một tính chất cơ bản là đạo hàm làm nổi chi tiết cấu trúc địa chất hơn dị trường trọng lực.

Bảng 13: Đặc trưng tần số cho các phép biến đổi ba chiều

Phép biến đổi	ĐTTS $\Phi(u, v)$	Tính chỉnh
Biến đổi trường lên độ cao z = constant	$e^{-z\sqrt{u^2+v^2}}$	Lên cao : z > 0 – chỉnh Xuống : z < 0 –không chỉnh
Tính đạo hàm các bậc n, m, l theo x, y, z tương ứng	$(iu)^n\,(iv)^m$ $\sqrt{u^2+v^2})^l e^{-z\sqrt{u^2+v^2}}$	Không chỉnh
Tính nguyên hàm theo z trên mặt z = const	$(-e^{-z\sqrt{u^2+v^2}})/\sqrt{u^2+v^2}$	Không chỉnh
Trung bình hoá trong cửa sổ trượt D với hàm trọng bất kỳ $\omega(\xi,\eta) > 0$ $\iint\omega(\xi,\eta)d\xi d\eta = 1$	$\iint\omega(\xi,\eta)e^{i(u\xi+v\eta)}d\xi d\eta$	Chỉnh

§8. PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC.

Tín hiệu vào, trên thực tế đo đạc không ở dạng biểu thức giải tích liên tục. Tín hiệu rời rạc, theo định nghĩa, có thể được

biểu diễn bằng một dãy các giá trị (thực hoặc phức) với số thứ tự n (nguyên) được ký hiệu là x(n). Ta có :

$$x = \{x(n)\} \qquad -\infty < x < \infty \tag{8.59}$$

x(n) được gọi là mẫu thứ n của tín hiệu rời rạc của tín hiệu x. Nó không phải lúc nào cũng được tạo ra bằng cách lấy mẫu liên tục theo thời gian, mà cách quãng đều nhau T_s gọi là chu kỳ lấy mẫu. Dãy tín hiệu rời rạc x(n) bất kỳ cũng có thể được biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính các hàm trực giao. Ta có biến đổi Fourier :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-iwn} \tag{8.60}$$

Và phép biến đổi Fourier ngược :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega).e^{i\omega n}d\omega \tag{8.61}$$

Cặp công thức biến đổi trên còn có thể biểu diễn bằng tần số f gọi là tần số vòng :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-iwfn} \tag{8.62}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{i\pi fn}df \tag{8.63}$$

($f = 2\pi\omega$, chu kỳ tuần hoàn bằng 1)

Điều kiện tồn tại của biến đổi Fourier cũng tương tư (8.43):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \tag{8.64}$$

Nếu y(n) là tín hiệu ra liên hệ với tín hiệu vào bằng tổng chập :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).h(k-n) \tag{8.65}$$

thì ta có phổ của nó liên hệ với phổ của x(n) tương tự (8.23) :

$$Y(f) = X(f)H(f) \tag{8.66}$$

Trong đó H(f) là phổ của tín hiệu h(n–k).

Tần số f được rời rạc hoá theo từng bước Δf như sau : $f = k.\Delta f$ với biến nguyên k chạy từ 0 đến N–1 nguyên.

Bước được tính : $\Delta f = T/N = 1/N$, do đó $f = k/N$, tích phân (9.64) có thể được biến thành tổng khi cho $df = \Delta f = 1/N$:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X(k) e^{2\pi kni/N} \qquad (8.67)$$

Với n từ $-\infty$ đến $+\infty$. Ký hiệu k = <N> là k = 1, 2, 3,... (N – 1).

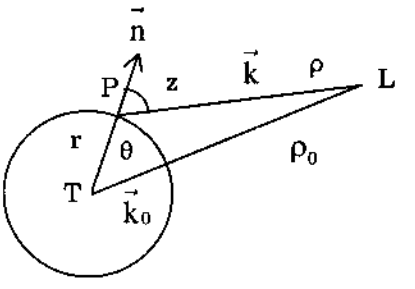
CHƯƠNG IX

BIẾN THIÊN TRỌNG LỰC VÀ ĐỊA TRIỀU

§1. THẾ TẠO TRIỀU

Thế của trọng lực Trái đất được xem là hàm của tọa độ quan sát, không phụ thuộc thời gian nếu như độ chính xác yêu cầu của phép đo trọng lực cỡ 0,2 – 0,3 mGal. Với độ chính xác cao hơn thì người ta phải tính đến ảnh hưởng của lực hấp dẫn của Mặt trăng, Mặt trời và của các hành tinh khác. Thì lúc đó, thế trọng lực được bổ sung phần phụ thuộc thời gian, gọi là nhiễu (theo thời gian).

Giả sử Mặt trăng ở vị trí L. Người quan sát tại P có khoảng cách thiên đỉnh (trong thiên văn) của Mặt trăng đo được là góc z. Chúng ta có hình vẽ.



Hình 78: T – Trái đất; L – Mặt trăng; P – Người quan sát

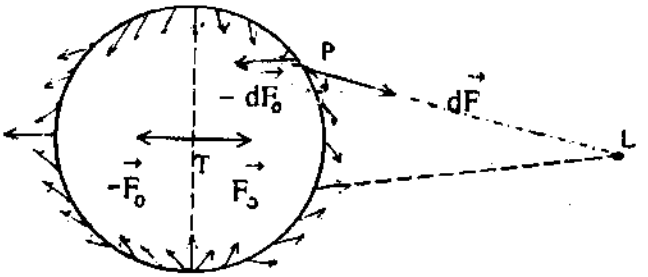
Gọi m là khối lượng Mặt trăng, ta có lực hấp dẫn của Mặt trăng tác dụng vào khối lượng M của Trái đất tại P. Lực hấp dẫn tương tác gần đúng khi áp dụng công thức Newton cho 2 quả cầu :

$$F_o = \frac{mM}{\rho_o^2} \qquad (9.1)$$

$$dF_o = G\frac{m}{\rho_o^2}dM \qquad (9.2)$$

G – hằng số hấp dẫn.

dM – khối lượng nguyên tố tại tâm Trái đất. Hướng của vectơ $d\vec{F}$ và $d\vec{F_0}$. Xét hiệu $d\vec{F} - d\vec{F_0}$ hay $d\vec{F} + (-d\vec{F_0})$. Phép trừ đi $d\vec{F_0}$ là phép cộng với vectơ đối của $d\vec{F_0}$ như hình 79.



Hình 79: Lực tạo triều do mặt trăng gây ra trên trái đất

Để đơn giản ta cho khối lượng nguyên tố dM = 1

$$\Delta g_o = Gm\left[\frac{1}{\rho_o^2}\vec{k}_o - \frac{1}{\rho^2}\vec{k}\right] \qquad (9.3)$$

Trong đó $\vec{k_0}$, $\vec{k}$ vectơ đơn vị hướng về Mặt trăng đặt tại T và P. Chiếu xuống phương của vectơ $\vec{n}$ ta có :

$$\left[\frac{Gm}{\rho^2}\right]_n = \frac{GM}{\rho^2}\cos z \qquad (9.4)$$

$$\left[\frac{Gm}{\rho_o^2}\right]_n = \frac{GM}{\rho_o^2}\cos\theta \qquad (9.5)$$

Từ hình 78 ta có :

$$\rho_o\cos\theta - \rho\cos z = r$$

Hay $$\cos z = \frac{\rho_o\cos\theta - r}{\rho^2} \qquad (9.6)$$

Do đó, có thể viết lại công thức (9.4):

$$\Delta g_o = Gm\left\{\frac{1}{\rho_o^2}\cos\theta - \frac{1}{\rho^3}(\rho_o\cos\theta - r)\right\} \qquad (9.7)$$

Thế giống như thế năng, bằng công của lực Δg_0 nhưng ngược dấu:

$$\delta W_o + C = Gm\left[\int_o^r \frac{1}{\rho^3}(\rho_o\cos\theta - r)dr - \frac{1}{\rho_o^2}\int_o^r \cos\theta dr\right] \qquad (9.8)$$

$$\rho^2 = r^2 + \rho_o{}^2 - 2\rho_o r\cos\theta \qquad (9.9)$$

Vậy:

$$\delta W_o + C = Gm\int_o^r \frac{\rho_o\cos - r}{(r^2 - 2\rho_o r\cos\theta + \rho_o^2)^{3/2}} - \frac{1}{\rho_o^2}\cos\theta\Big]dr$$

Vi phân 2 vế của (9.9) ta có:

$$(\rho_o\cos\theta - r)dr = -\frac{1}{2}d\rho^2 = -\rho d\rho \qquad (9.10)$$

$$\delta W_o + C = -Gm\int_0^\rho \rho\frac{d\rho}{\rho^3} - Gm\frac{r}{\rho_o^2}\cos\theta = \frac{Gm}{\rho} - Gm\frac{r}{\rho_o^2}\cos\theta \qquad (9.11)$$

Để xác định hằng số C ta coi tại tâm Trái đất (r=0) thế tạo triều bằng 0 :

$$[\delta W_o + C]_{r\to 0} = C = \frac{Gm}{\rho_o} \qquad (9.12)$$

$$\delta W_o = Gm\left[\frac{1}{\rho} - \left(\frac{1}{\rho_o} + \frac{r}{\rho_o^2}\cos\theta\right)\right] \qquad (9.13)$$

Đại lượng $\frac{1}{\rho}$ có thể khai triển thành chuỗi đa thức Legendre (Lơgiăng):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_o}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho_o}\right)^n P_n(\cos\theta) \qquad (9.14)$$

$P_o(\cos\theta) = 1$, $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ do đó

$$\delta W_o = \frac{Gm}{\rho_o}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho_o}\right)^n P_n(\cos\theta) = \sum_{n=2}^{\infty}\delta W_{on} \qquad (9.15)$$

δW_{on} triều bậc n. Lấy gần đúng chủ yếu bậc n = 2

$$\delta W_o = G\frac{r^2 m}{2\rho_o^3}(3\cos^2\theta - 1) \qquad (9.16)$$

§2. CÁC HẰNG SỐ LOVE.

Vì thế tạo triều thay đổi theo thời gian cho nên thế toàn phần cũng thay đổi:

$$W' = W_o + \delta W_o \qquad (9.17)$$

Mặt đẳng thế $W_o + \delta W_o = C$ sẽ biến dạng. Tức mặt đẳng thế thay đổi vị trí so với mặt cũ cố định có phương trình $W_o = C$. Độ chênh giữa 2 mặt có thể xác định bởi công thức Bruns.

$$\zeta_0 = \sum_{n=2}^{\infty}\zeta_{0n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\delta W_n}{g} \qquad (9.18)$$

Dao động của mặt đẳng thế trên đây là so với mặt rắn cố định của Trái đất. Tuy nhiên, trên thực tế mặt Trái đất dẻo, không cố định mà cũng dâng lên theo, do đó độ chênh giữa mặt đẳng thế với mặt cũ qui ước là cố định giảm và độ chênh giữa 2 mặt bây giờ nhận hệ số h_n.

$$\zeta = \sum_{n=2}^{\infty} h_n\zeta_{on} \qquad (9.19)$$

h_n – gọi là hệ số Love thứ 1. Giữa ζ và ζ_o có sự tỷ lệ gần đúng:

$$\zeta = h\zeta_o \tag{9.20}$$

Bởi vì điều hòa bậc 2 là chủ yếu, nên ta giữ lại một điều hòa này. Ta có hệ thức tỷ lệ cho thế. Love đã chỉ ra sự tỷ lệ.

$$\delta W^*_n = k_n \delta W_{on}. \tag{9.21}$$

δW_{on} – điều hòa của thế trong trường hợp quả đất rắn tuyệt đối. k_n gọi là hằng số Love thứ 2. Gọi δW_n^* là thế phát sinh do khối lượng đất đá dịch chuyển khi Trái đất là dẻo. Vậy kết quả là Trái đất thực có thế tạo triều là :

$$\delta W_n = \delta W_{on} + \delta W_n^* = (1 + k_n)\, \delta W_{on} \tag{9.22}$$

$$\delta W = \sum_{n=2}^{\infty} (1 + k_n)\, \delta W_{on} \tag{9.23}$$

Lý thuyết gần đúng cho rằng δW tỷ lệ với δW_o như sau:

$$\delta W = (1 + k)\, \delta W_o \tag{9.24}$$

Các hằng số h và k có thể xác định qua quan sát trọng lực theo thời gian và dao động của mặt đất.

Biến thiên trọng lực của Trái đất thực (dẻo) đo được và trọng lực tính toán lý thuyết của Trái đất rắn cho ta tỷ số :

$$\delta = \frac{\Delta g}{\Delta g_o} \tag{9.25}$$

$\delta \neq 1$ và liên quan đến h và k.

Độ lệch dây dọi đo được và tính toán lý thuyết cũng có tỷ số:

$$\gamma = \frac{i}{i_o} \tag{9.26}$$

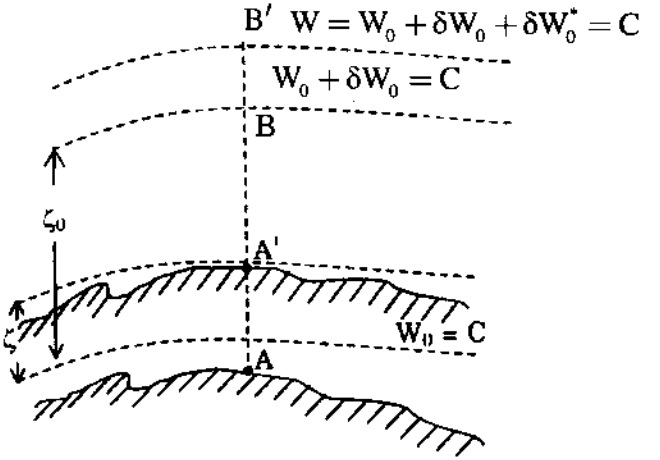
và nếu biết sự phụ thuộc của δ và γ vào h và k thì có thể xác định được h và k bằng tiến hành quan sát đồng thời biến thiên trọng lực và dao động nghiêng của mặt đất.

§3. THIẾT LẬP MỐI LIÊN HỆ GIỮA CÁC HẰNG SỐ δ, γ VỚI h VÀ k.

Giả sử mặt đẳng thế $W_o = C$ đi qua điểm A trên mặt đất. Còn khi có thêm thế tạo triều thì mặt đẳng thế $W_o + \delta W_o = C$ đi qua điểm mới B cách A một khoảng ζ_o. Sau đó vì Trái đất dẻo nên khối lượng di chuyển làm thế thay đổi một lượng δW^* như đã nói :

$$W = W_o + \delta W_o + \delta W_o^* = C \qquad (9.27)$$

giờ đây mặt đẳng thế biểu diễn bởi phương trình trên đi qua điểm mới B'.



Hình 80: Mặt đất dâng lên (vị trí A'), phát sinh thế tạo triều bổ sung δW_o^*

Nhiệm vụ của chúng ta là xác định biến thiên trọng lực quan sát tại điểm A' trên mặt đất đã dâng lên.

Trọng lực tại A' có thể xác định như sau:

$$g(A') = -\frac{\partial W(A')}{\partial n} \qquad (9.28)$$

n – pháp tuyến của mặt đẳng thế.

Còn giá trị trọng lực không có thế nhiễu bằng:

$$g_0(A) = -\frac{\partial W_0(A)}{\partial n} \tag{9.29}$$

Biến thiên trọng lực do triều là:

$$\Delta g = g(A') - g_o(A) = \left(\frac{\partial W_0}{\partial n}\right)_A - \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{A'} \tag{9.30}$$

Khai triển thành chuỗi Taylor ta có :

$$\Delta g = \left(\frac{\partial W_0}{\partial n}\right)_A - \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_A - \zeta\left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2}\right)_A \tag{9.31}$$

Thay $W = W_o + \delta W^* + \delta W_o$ vào biểu thức này ta có :

$$-\Delta g = \left[\frac{\partial(\delta W_0)}{\partial n} + \frac{\partial(\delta W_0^*)}{\partial n} + \zeta\left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2}\right)\right]_A \tag{9.32}$$

Đạo hàm theo pháp tuyến n coi gần đúng bằng đạo hàm theo r:

$$-\Delta g = \zeta\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial(\delta W_0)}{\partial r} + \frac{\partial(\delta W^*)}{\partial r} \tag{9.33}$$

Ngoài ra biết rằng : $\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \approx 2\frac{GM}{r^3} \approx 2\frac{g_o}{r}$ (9.34)

Ta có :

$$-\Delta g = \zeta\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial(\delta W_o)}{\partial r} + \frac{\partial(\delta W^*)}{\partial z} \tag{9.35}$$

Nếu triển khai thành chuỗi hàm cầu Δg, δW_o, ζ thì

$$-\Delta g_n = \zeta\frac{2g_o}{r} + \frac{\partial(\delta W_{on})}{\partial r} + \frac{\partial(\delta W_n^*)}{\partial r} \tag{9.36}$$

Sử dụng $\zeta_n = h_n\xi_{on}$, và công thức Bruns :

$\zeta_{on} = \frac{\delta W_{on}}{g} \approx \frac{\delta W_{on}}{g_o}$, thay vào biểu thức (9.36) ta có:

$$-\Delta g_n = h_n\ 2\frac{\delta W_{on}}{r} + \frac{\partial}{\partial r}(\delta W_{on}) + \frac{\partial(\delta W_n^*)}{\partial r} \qquad (9.37)$$

Đạo hàm của δW_{on} ta sử dụng (9.17) để tính :

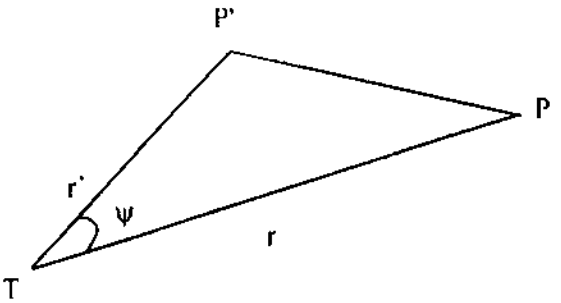
$$\frac{\partial(\delta W_{on})}{\partial r} = G\frac{nmr^{n-1}}{\rho_o^{n+1}}P_n(\cos\theta) \qquad (9.38)$$

$$= \frac{n}{r}\left[G\frac{mr^n}{\rho_o^{n+1}}P_n(\cos\theta)\right] = \frac{n}{r}\delta W_{on} \qquad (9.39)$$

Đạo hàm của δW^* sẽ căn cứ vào biểu thức của thế khối kết hợp chuỗi tựa (9.15) quan sát tại P, trong đó P' là điểm chạy tại vị trí dm'.

$$\delta W_n^* = G\int_V \frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\psi)dm' \qquad (9.40)$$

r là tham số đối với tích phân trên.



Hình 81: Diễn giải cho công thức (9.41)

$$\frac{\partial(\delta W_n^*)}{\partial r} = -(n+1)G\int_V \frac{r'^n}{r^{n+2}}P_n(\cos\psi)dm' \qquad (9.41)$$

$$= -\frac{n+1}{r}G\int_V \frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\psi)dm' = -\frac{n+1}{r}\delta W_n^*$$

$$= -\frac{n+1}{2}k_n\delta W_{on} \qquad (9.42)$$

Thế (9.39), (9.42) vào (9.36), ta có:

$$-\Delta g_n = h_n \frac{\delta W_{on}}{r} + \frac{n}{r}\delta W_{on} - \frac{n+1}{r} k_n \delta W_{on}$$

$$= 2\frac{\delta W_{on}}{r}\left(h_n + \frac{n}{2} - \frac{n+1}{2} k_n\right) \qquad (9.43)$$

Khi trái đất rắn $k_n = h_n = 0$, ta có :

$$-\Delta g_{on} = \frac{2\delta W_{on}}{r} \cdot \frac{n}{2} \qquad (9.44)$$

Lập tỷ số :

$$\delta_n = \frac{\Delta g_n}{\Delta g_{on}} = 1 + \frac{2}{n} h_n - \frac{n+1}{n} k_n \qquad (9.45)$$

Ví dụ :

$n = 2$: $\delta_2 = 1 + h_2 - \frac{3}{2} k_2$

$n = 3$: $\delta_3 = 1 + \frac{2}{3} h_3 - \frac{4}{3} k_3$

$n = 4$: $\delta_4 = 1 + \frac{1}{2} h_4 - \frac{5}{4} k_4$

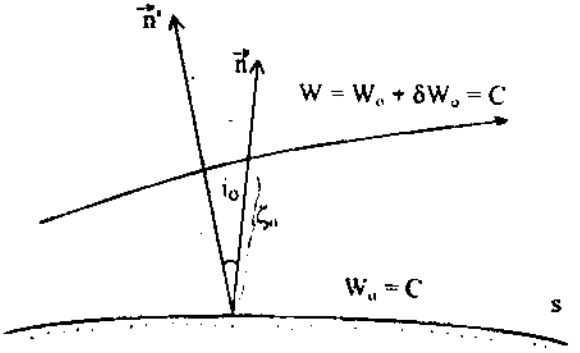
Chủ yếu là công thức với $n = 2$:

$$\delta = 1 + h - \frac{3}{2} k \qquad (9.46)$$

Bây giờ ta thiết lập mối liên hệ giữa γ với h và k. Để làm việc này ta quan sát biến thiên của độ lệch dây dọi theo thời gian do địa triều gây nên. Phương của dây dọi là phương vuông góc với mặt đẳng thế. Nhưng mặt đẳng thế do địa triều luôn dao động làm cho phương pháp tuyến (là phương dây dọi) cũng dao động.

Giả sử trong trường hợp không có địa triều ta có mặt đẳng thế $W_o = C$. Khi có địa triều thì ta có $W + \delta W_o = C$. Trên hình vẽ ta thấy 2 mặt hợp nhau một góc i_0 (tức θ ở chương IV).

$$i_0 = -\frac{\partial \zeta_o}{\partial s} \qquad (9.47)$$



Hình 82: Độ nghiêng i_o của mặt đất do địa triều.

Theo công thức Bruns $\zeta_o \approx \dfrac{\partial W_o}{g}$, thế vào (9.47), ta có:

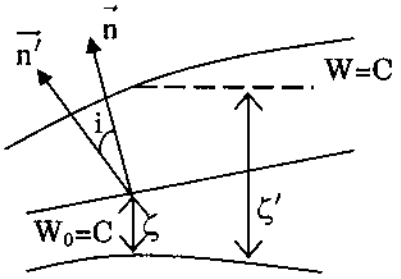
$$i_0 = -\frac{1}{g}\frac{\partial(\delta W_o)}{\partial s} \qquad (9.48)$$

Công thức này phù hợp với trường hợp Trái đất rắn tuyệt đối. Trong thực tế Trái đất dẻo, mặt đất di chuyển, dâng lên khoảng ζ là địa triều. Điều đó làm phát sinh ra thế bổ sung δW^* làm cho mặt đẳng thế có vị trí ζ'. Vậy độ lệch giữa mặt đẳng thế sau cùng so với mặt đất là độ lệch quan sát được xác định là:

$$i = -\frac{\partial}{\partial s}(\zeta' - \zeta) \qquad (9.49)$$

Theo công thưc Bruns : $\zeta' = \dfrac{W - W_o}{g} = \dfrac{1}{g}(\delta W_0 + \delta W^*)$

Trong đó: $W = W_o + \delta W_o + \delta W^*$



Hình 83: Trường hợp Trái đất dẻo, mặt đất dâng lên.

Sử dụng chuỗi hàm cầu : $\delta W^* = \sum k_n \delta W_{on}$

và $$\zeta = \sum h_n \zeta_{on} = \frac{1}{g}\sum h_n \delta W_{on} \qquad (9.50)$$

Thế vào công thức của i ta có.

$$i = -\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\delta W_o}{g} + \frac{\delta W^*}{g} - \zeta\right] = -\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial s}\sum(\delta W_{on} + k_n \delta W_{on} - h_n \delta W_{on})$$

(9.51)

Góc i ta cũng khai triển thành chuỗi hàm cầu $i = \sum i_n$ sau khi bỏ $\sum$ ở hai vế ta có:

$$i_n = -\frac{1}{g}\frac{\partial \delta W_{on}}{\partial s}(1 + k_n - h_n) = i_{on}(1 + k_n - h_n) \qquad (9.52)$$

Vậy ta có : $$\frac{i_n}{i_{no}} = \gamma_n = 1 + k_n - h_n$$

Hay $$\gamma = 1 + k - h \qquad (9.53)$$

§4. CÁC LOẠI SÓNG TRIỀU.

Do mặt trăng và mặt trời luôn thay đổi vị trí tuần hoàn theo thời gian đối với người quan sát trên trái đất cho nên kết quả biến dạng của đất cũng xảy ra như các dao động điều hòa có nhiều điều hòa khác nhau. Đó là địa triều. Chúng ta hãy xét một số điều hòa chính.

Sóng triều có thể chia ra làm 3 loại : chu kỳ dài, chu kỳ ngày đêm, nhật triều, và chu kỳ bán nhật triều. Hãy xét hai loại triều cuối, là cơ bản.

Thế tạo triều chủ yếu được biểu diễn bởi (9.16):

$$\delta W_o = G\frac{r^2 m}{2\rho_o^3}(3\cos^2\theta - 1) \qquad (9.54)$$

Dễ dàng thấy cosθ không khác cos z nhiều, cho nên ta có thể viết :

$$\delta W_o = G\frac{r^2 m}{2\rho_o^3}(3\cos^2 z - 1) \qquad (9.55)$$

Trọng lượng giác cầu (thiên văn học) ta có công thức:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

Trong đó: φ – vĩ độ địa lý.

δ – xích vĩ của thiên thể.

t – góc giờ của thiên thể trên xích đạo trời.

Thay vào ta có:

$$\delta W_o = G\frac{r^2 m}{2\rho_o^3}(3\sin^2\varphi\sin^2\delta + 3\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos^2 t +$$

$$6\sin\varphi\cos\varphi\sin\delta\cos\delta\cos t - 1) = G\frac{r^2 m}{2\rho_o^3}[3(1-\cos^2\varphi)(1-\cos^2\delta)$$

$$+\frac{3}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta(1+\cos 2t) + \frac{3}{2}\sin 2\varphi\sin 2\delta\cos t - 1] \qquad (9.56)$$

$$= G\frac{r^2 m}{2\rho_o^3}[2 + \frac{9}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta) - 3(\cos^2\delta + \cos^2\varphi)$$

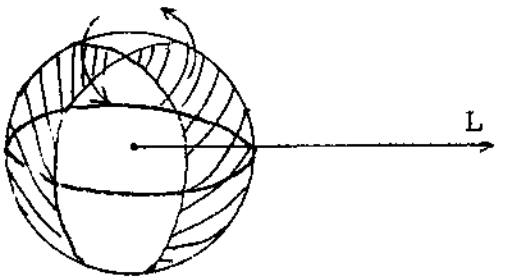
$$+\frac{3}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2\varphi\sin\delta\cos t] \qquad (9.57)$$

Hai số hạng cuối cùng chứa tham số biến thiên nhanh đó là góc giờ t của thiên thể, thay đổi theo giờ của chúng ta đang

sử dụng. Một ngày đêm, t = 24 giờ. Chu kỳ bán nhật triều 12 giờ là thành phần:

$$\frac{3}{4}G\frac{r^2m}{2\rho_o^3}\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2t$$

Tại vĩ độ $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ thành phần này triệt tiêu và triệt tiêu tức thời lúc $t = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$. Nếu giữa các vị trí sóng triều triệt tiêu là các vị trí sóng triều có giá trị âm và dương thì hình 84 cho ta thấy rõ sự phân vùng trên địa cầu theo múi.



Hình 84: Sóng bán nhật triều

Đối với các sao ở xa thì chu kỳ của nó vòng quanh Trái đất là $t = 2\pi$. Nhưng mặt trăng có chuyển động riêng ngoài tham gia chuyển động ngày đêm (nhật động) do Trái đất quay, cho nên chu kỳ là 12,4 giờ đối với sóng bán nhật triều. Sóng này là sóng lớn chính, có tên gọi là bán nhật triều chính của Mặt trăng, ký hiệu là M_2.

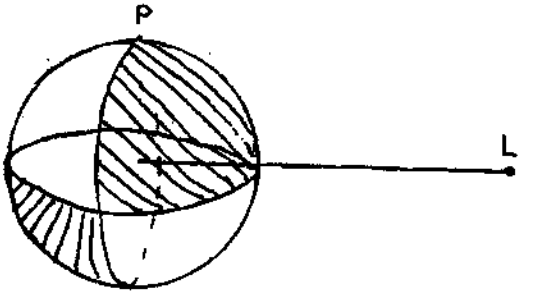
Bán nhật triều của Mặt trời ký hiệu là S_2, có chu kỳ chính xác là 12 giờ, có biên độ bé hơn hai lần triều M_2 của Mặt trăng.

Quĩ đạo của Mặt trăng quanh Trái đất có dạng elip chứ không phải tròn, cũng ảnh hưởng đến triều và sinh ra triều N_2 bé hơn M_2 năm lần.

Vì bán nhật triều đối xứng qua xích đạo như hình cho nên nó không ảnh hưởng đến mômen quán tính của Trái đất đối với trục quay, và hướng của trục.

Trong thuyết về triều người ta phát hiện có 30 loại sóng bán nhật triều.

Sóng nhật triều mang hình thái khác. Đó là thành phần $\frac{3}{4}Gr^2\frac{m}{\rho_o^3}\sin 2\varphi \sin 2\delta \cos t$ sóng này triệt tiêu khi $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ và $\varphi = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$. Chúng ta có bức tranh phân vùng âm và dương so le (hình 85).



Hình 85: Sóng nhật triều

Như vậy nhật triều phân bố không đối xứng qua xích đạo. Vậy nó tác động vào trục quay của Trái đất, làm cho trục quay thay đổi vị trí trong Trái đất. Do đó nhật triều có ý nghĩa đến việc nghiên cứu cấu tạo bên trong của Trái đất. Sóng triều này là nhật triều chính của mặt trăng và có tên là O_1.

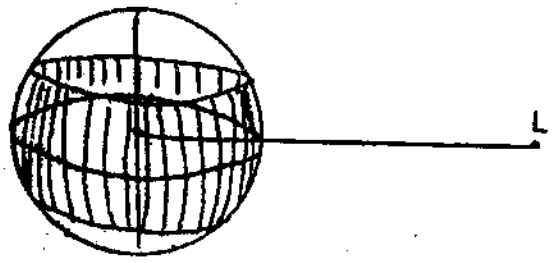
Triều đáng kể tiếp theo là triều chính của Mặt trăng, Mặt trời K_1, nhật triều chính của Mặt trăng O_1, và nhật triều chính của Mặt trời P_1.

Nhóm đầu tiên trong (9.57) không chứa góc giờ t do đó cũng không phụ thuộc vào gốc tính góc giờ t là vị trí có kinh độ λ của người quan sát.

Vậy nhóm này thay đổi rất chậm, gọi là thành phần chu kỳ dài và được xác định bởi phương trình:

$$2 + \frac{9}{2}\cos^2\varphi \cos^2\delta = 3(\cos^2\delta + \cos^2\varphi)$$

Từ đây ta tìm ra vị trí ranh (cố định) âm và dương của triều $\varphi = \pm 35°16'$.



Hình 86: Sóng chu kỳ dài

Sóng này không phụ thuộc góc giờ t của Mặt trăng cho nên nó không chạy ngược chiều quay của Trái đất như các sóng đã nêu trên. Sóng này làm thay đổi độ dẹt (độ phình ra ở xích đạo) của Trái đất, tức làm cho Trái đất co bóp. Mômen quán tính của Trái đất vì thế có thay đổi nhưng không ảnh hưởng đến hướng của trục quay.

Trong đó còn có thành phần triều nữa tháng của mặt trăng là M_f (moon forthnighlty). Thực vậy xích vĩ δ của Mặt trăng thay đổi với chu kỳ một tháng. Như vậy thành phần $\cos^2\delta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\delta)$ sẽ có chu kỳ nửa tháng, tức hai tuần. Khoảng cách ρ_o đến Mặt trăng luôn thay đổi do quĩ đạo elíp, với chu kỳ 1 tháng. Do đó có triều chu kỳ dài một tháng M_m (moon monthly). Cả 2 loại sóng M_f và M_m đều có ý nghĩa thực tiễn trong thủy triều.

Triều chu kỳ dài không chỉ có hai loại này mà có rất nhiều với chu kỳ từ một tuần lễ đến 18,6 năm. Dưới đây, là bảng liệt kê các loại sóng triều.

Tên sóng	Chu kỳ	Nguyên nhân tạo triều
M_2	Bán nhật triều	Mặt trăng
S_2	Bán nhật triều	Mặt trời
N_2	Bán nhật triều	Quĩ đạo elíp của Mặt trăng
K_1	Nhật triều	Mặt trăng và Mặt trời
Q_1	Nhật triều	Mặt trăng và Mặt trời
P_1	Nhật triều	Mặt trời
O_1	Nhật triều	Mặt trăng
M_f	Bán nguyệt triều	Mặt trăng
M_m	Nguyệt triều	Mặt trăng

Địa triều là một chồng chất các sóng, là hàm phức tạp theo thời gian. Khi ghi được địa triều người ta có phương pháp tách từng thành phần sóng ra gọi là phân tích điều hòa.

Có ba phương pháp chính được ứng dụng trên thế giới là phương pháp của Dudson (Đất xân), Lekolaze (Lê cô la de) và Persev. (Pe rơ xép) Trình bày chi tiết từng phương pháp vượt quá khuôn khổ của sách này. Do đó, ở đây chỉ nêu nguyên tắc chính của các phương pháp trên. Giả sử ta có tổng hai sóng có biên độ, tần số khác nhau và để cho đơn giản coi pha a_2 ban đầu của chúng như nhau :

$$y(x) = a_1 \sin 2\pi \frac{x}{2} + a_2 \sin 2\pi \frac{x}{3}$$

Nhiệm vụ của chúng ta là tách được từ y ra hai sóng này khi đo được y(x) và xác định được a_1 và a_2. Giả sử ta tìm đượcx_1, x_2, x_3 sao cho trong tổng $y_1(x_1) + y_2(x_2) + y_3x_3)$ sóng thứ nhì a_2 sẽ bị loại.

Chẳng hạn: $x_1 = 3\frac{1}{12}, x_2 = 3\frac{5}{12}, x_3 = 3\frac{9}{12}$, ta nhận được:

$$y(x_1) = a_1 \sin 45^\circ + a_2 \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 + \frac{1}{2} a_2$$

$$y(x_2) = a_1 \sin 225^\circ + a_2 \sin 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} a_1 + \frac{1}{2} a_2$$

$$y(x_3) = a_1\sin 45^0 + a_2\sin 270^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}a_1 - a_2$$

Tổng $y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_1$. Ta tìm được a_1:

$$a_1 = \sqrt{2}\left[y\left(\frac{1}{4}\right) + y\left(\frac{15}{12}\right) + y\left(\frac{9}{4}\right)\right]$$

Tương tự như vậy ta cũng tìm được a_2 :

$$a_2 = 0{,}754\left[y\left(\frac{1}{6}\right) + y\left(\frac{5}{6}\right) + y\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

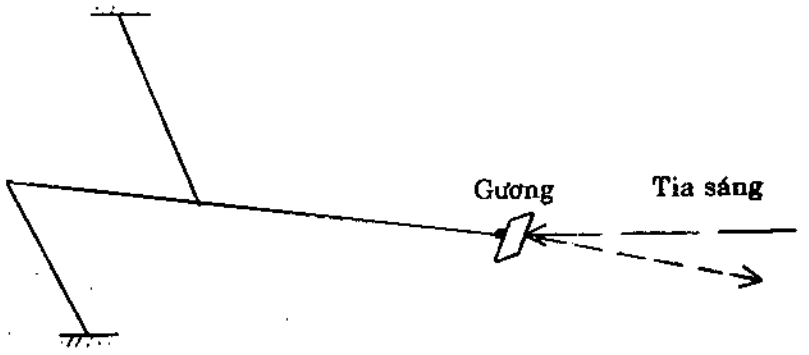
Ví dụ đơn giản trên đây chỉ là khái niệm gần đúng của phương pháp phân tích điều hòa. Thực tế phương pháp cho phép ta không những xác định biên độ mà còn pha, tần số của các sóng. Đã có nỗ lực áp dụng chuỗi Fourier và xác định mật độ phổ liên tục của năng lượng, có sử dụng các hàm tự tương quan.

Tuy nhiên ba phương pháp đã nêu là cơ bản và có hiệu quả như nhau, độ chính xác ngang nhau. Biên độ các sóng địa triều đạt trên dưới 5 cm. Đó cũng chính là biên độ dao động của mặt đất.

§5. PHƯƠNG PHÁP QUAN SÁT ĐỊA TRIỀU

Địa triều có ảnh hưởng đến giá trị trọng lực quan sát tại một nơi, làm cho giá trị này biến thiên theo thời gian trong ngày. Thường, người ta xây dựng trạm quan sát địa triều trong đó có đặt máy trọng lực cực nhạy. Độ chính xác của nó đạt tới 0,001 mGal. Đó là máy của Đức (Tây Đức cũ) nhãn hiệu Askania – GS các loại, còn gọi là trọng lực kế của Graf trước kia. Máy có khối lượng lớn. Không kể giá đỡ là 20,5kg. Riêng giá đỡ là 7,3kg. Tổng khối lượng máy lẫn hộp đựng máy là 43 kg, cho nên được sử dụng đo tại một trạm đo địa triều - trọng lực.

Độ nghiêng của mặt đất biến thiên ngày đêm do địa triều được quan sát bằng độ nghiêng kế. Cấu tạo nguyên tắc gồm con lắc có cần nằm ngang, như hình 87.



Hình 87: Con lắc có cần nằm ngang, dao động phương ngang

Đó là một thanh kim loại có gắn gương ở một đầu được treo bằng hai sợi dây kim loại cực mảnh tại một đầu kia và tại điểm gần giữa thanh. Con lắc ngang được chiếu một tia sáng vào gương và phản xạ như điện kế khung quay. Bất cứ một độ nghiêng nhỏ nào của mặt đất sẽ làm cho con lắc dao động theo phương ngang. Vệt sáng sẽ thay đổi vị trí trên thang đo và được ghi trên phim.

Ngày nay việc đo đạc ngày đêm được tự động hóa. Tín hiệu, độ lệch cơ học được biến thành sự biến thiên của điện thế, và máy ghi lại số đo và lưu lại trong máy. Thời gian đo liên tục kéo dài 6 tháng đến 1 năm.

Kết quả đo biến thiên của trọng lực cho ta:

$$\delta = 1 + h - \frac{3}{2}k$$

và đo độ nghiêng : $\gamma = 1 - h + k$

Từ đây, ta nhận được các hằng số Love:

$$h = 3 - 1{,}2\delta - 1{,}8\,\gamma$$

$$k = 2 - 1{,}2\delta - 0{,}8\,\gamma$$

Thường người ta đo độ nghiêng của mặt đất, song song với đo trọng lực để nhận được h và k đồng thời. Máy đo độ nghiêng vốn cấu tạo giống máy địa chấn về nguyên tắc (con lắc ngang),

nên rất nhạy cảm đối với chấn động mạnh, do đó máy được đặt sâu 100 – 200m dưới mặt đất, trong hầm sâu hoặc giếng, hang động. Nhiệt độ trong điều kiện đo như vậy cũng ít thay đổi. Để người không chạm vào máy, người ta quan sát từ xa, điều khiển bằng hệ thống truyền tín hiệu. Xung quanh khu vực quan sát không nên có đường giao thông, hoặc xưởng ồn ào.

Trọng lực kế cũng được đặt trong hầm sâu dưới đất. Phải có máy ổn nhiệt cho buồng đo. Ngoài ra, để tránh hiện tượng thủy triều ảnh hưởng, ta cần xây dựng trạm đo trọng lực lẫn độ nghiêng xa bờ biển. Nước biển dâng lên, gây áp lực vào đất liền là một sự nhiễu loạn đối với địa triều.

Số liệu đo δ, ở một số nơi trên thế giới :

Pulkovo	$\delta = 1,20$
Moskva	$\delta = 1,17$
Trung Á	$\delta = 1,14$
Simferopol	$\delta = 1,18$

Thường, người ta đo độ nghiêng bằng hai máy đặt theo phương vuông góc nhau để đo được độ nghiêng toàn phần và hướng dao động chính của độ nghiêng. Ví dụ kết quả đo γ ở một số nơi :

	Hướng Bắc - Nam	Hướng Đông -Tây
Kiev	: 0,82	0,69
Donbas	: 0,60	0,27
Herson (Crưm)	: 0,57	0,69

CHƯƠNG X

PHƯƠNG PHÁP ĐO VÀ MÁY ĐO TRỌNG LỰC

KHÁI NIỆM:

Giá trị trọng lực g tại một điểm có thể xác định được bằng cách thực hiện đo tuyệt đối hoặc đo tương đối, với hai phương pháp: Phương pháp động và phương pháp tĩnh.

Đo tuyệt đối là đo giá trị toàn phần g tại vị trí quan sát. Còn đo tương đối là đo số gia trọng lực khi di chuyển từ một điểm biết trước giá trị g_0, gọi là điểm gốc hay tựa, đến điểm cần quan sát. Trong phương pháp động, người ta quan sát chuyển động của một trọng vật dưới tác dụng của trọng lực và đo thời gian mà vật ấy dịch chuyển từ vị trí này đến vị trí khác, để tính ra g.

Ngày nay, việc đo tương đối giá trị trọng lực chủ yếu được thực hiện bằng trọng lực kế, là phương pháp tĩnh. Có nhiều loại trọng lực kế. Thời kỳ đầu, các trọng lực kế chủ yếu là trọng lực kế sử dụng chất khí, hoặc chất lỏng. Hai loại trọng lực kế này có nhược điểm là bị ảnh hưởng mạnh bởi các yếu tố dãn nở do nhiệt độ của chất lưu. Sau 1930, nhờ sự phát triển kỹ thuật luyện kim, người ta chế tạo loại trọng lực kế lò xo, bằng hợp kim invar hoặc thach anh, có độ chính xác rất cao 0,01mGal. Nói chung, các loại trọng lực kế đều hoạt động theo phương pháp tĩnh, trong đó người ta quan sát sự thay đổi vị trí cân bằng của bộ phận cơ động, phụ thuộc sự thay đổi của giá trị trọng lực, khi di chuyển từ vị trí quan sát này đến vị trí quan sát khác.

Trong đo tương đối, người ta chỉ cần biết giá trị tuyệt đối g_0 tại một vị trí nào đó, để làm giá trị gốc cho việc đo tương đối, rồi triển khai kết quả nghiên cứu trọng lực vào một vùng rộng lớn hơn, tạo thành một mạng lưới các giá trị trọng lực điểm tựa đồng nhất, trong phạm vi một quốc gia hoặc liên quốc gia. Sự nhanh gọn của phương pháp đo tương đối đã tạo khả năng triển

khai công tác xác định giá trị trọng lực khắp nơi, làm cho mặt Trái đất được phủ kín bởi mạng lưới giá trị trọng lực.

§1. PHƯƠNG PHÁP ĐO TRỌNG LỰC TUYỆT ĐỐI.

1.1. Con lắc toán học

Từ phương trình chuyển động quay cơ học, ta có :

$$I\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \qquad (10.1)$$

Trong đó I là mômen quán tính của hệ thống gồm quả cầu nhỏ khối lượng m và dây treo có chiều dài *l*. Trong trường hợp góc dao động θ thật nhỏ, có thể coi sin θ ≈ θ, khi đó phương trình (10.l) trở thành :

$$I\,\theta'' + mgl\,\theta = 0 \qquad (10.1a)$$

mà nghiệm là :

$$\theta = \theta_o \cos\left(\sqrt{\frac{mg\ell}{I}}\,t + \psi\right) \qquad (10.2)$$

$\theta_o = \theta_{max}$ – biên độ dao động; Ψ- pha ban đầu.

Nếu khối lượng của dây treo xem như không đáng kể và m là khối lượng chất điểm thì $I = ml^2$ – mômen quán tính của chất điểm. Khi đó chu kỳ dao động là chu kỳ của con lắc toán học:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2} + ...\right) \qquad (10.3)$$

Khi biên độ góc α bé ta có gần đúng :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (10.4)$$

Rút ra $\quad g = 4\pi^2\dfrac{\ell}{T^2} \qquad (10.5)$

Trong thực tế người ta không thể thực hiện được con lắc đơn với dây treo không khối lượng, nên con lắc toán học chỉ là một khái niệm lý tưởng và thực tế ta có con lắc vật lý.

1.2. Con lắc vật lý.

Con lắc vật lý, được Kater nghiên cứu triển khai năm 1818.

Đó là một vật rắn dạng bất kỳ, khối lượng M, dao động quanh lưỡi dao là trục quay (hình 84). Phương trình chuyển động của con lắc vật lý giống như phương trình con lắc đơn:

$$I\,\theta + Mga \sin\theta = 0 \qquad (10.6)$$

trong đó a – khoảng cách từ lưỡi dao O_1 đến trọng tâm G của vật.

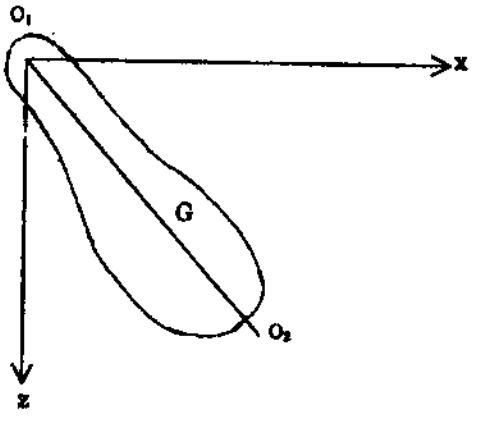
I – mômen quán tính của vật rắn đối với trục dao động.

Đối với những biên độ thật nhỏ, chu kỳ con lắc vật lý là :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mag}} \qquad (10.7)$$

Có thể xem đây là chu kỳ của một con lắc toán học có chiều dài l, dao động cùng chu kỳ với con lắc vật lý (con lắc toán học tương đương). Chiều dài l của con lắc toán học tương đương bằng:

$$l = \frac{I}{Ma} \qquad (10.8)$$



Hình 88: Con lắc vật lý

1.3. Con lắc thuận nghịch.

Cho đến những năm 1940 phương pháp duy nhất được sử dụng rộng rãi để đo tuyệt đối trọng lực là phương pháp con lắc thuận nghịch. Nó cho phép xác định g với độ chính xác không đạt tới 1 mGal.

Hiện nay người ta đã có khả năng đo với độ chính xác 1/10 mGal bằng con lắc thuận nghịch hoàn hảo hơn.

Đó là một con lắc vật lý nêu trên dao động lần lượt quanh hai lưỡi dao 0_1 và 0_2 gắn chặt song song nhau trên con lắc. Khi dao động lần lượt tại lưỡi dao 0_1 và 0_2 thì chu kỳ T_1 và T_2 không bằng nhau. Nó vẫn là con lắc vật lý. Nếu vị trí của 0_1 và 0_2 được điều chỉnh sao cho chu kỳ T_1 và T_2 bằng nhau khi con lắc dao động lần lượt quanh chúng thì lúc đó ta có con lắc thuận nghịch (hình 88). Theo (10.8), chiều dài của con lắc toán học tương đương với con lắc thuận nghịch lúc đó là :

$$\ell = \frac{I_1}{Ma_1} = \frac{I_2}{Ma_2} \qquad (10.9)$$

Trong đó $a_1 = G0_1$, $a_2 = G0_2$

tức là : $$\ell = \frac{I_1 - I_2}{M(a_1 - a_2)} \qquad (10.10)$$

mà theo định lý Huyghens – Steiner trong cơ học về mômen quán tính ta có :

$$I_1 = I_G + Ma_1^2 \qquad (10.11)$$

$$I_2 = I_G + Ma_2^2$$

Trong đó I_G là mômen quán tính đối với trục đi qua G.

Vậy ta có : $l = a_1 + a_2$ (10.12)

Tức là chiều dài l của con lắc toán học tương đương, bằng khoảng cách giữa hai trục quay song song đi qua 0_1 và 0_2 của con lắc thuận nghịch. Kết quả này có nghĩa là nếu con lắc thuận nghịch lần lượt được treo ở hai trục song song và dao động đạt

cùng chu kỳ thì chu kỳ đó chính là chu kỳ của con lắc toán học tương đương có chiều dài bằng khoảng cách giữa hai trục quay (đo được), khối lượng của con lắc thuận nghịch cũng chính là khối lượng của con lắc toán học tương đương.

Như vậy bằng cách đo chu kỳ dao động của con lắc thuận nghịch, người ta xác định được giá trị tuyệt đối của trọng lực g bằng công thức của con lắc toán học :

$$g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2} = 4\pi^2 \frac{a_1 + a_2}{T^2} \qquad (10.13)$$

Dựa trên nguyên tắc trên, người ta đã cho chế tạo nhiều kiểu con lắc thuận nghịch, con lắc Gulf, con lắc Desforges,... để đo tuyết đối g qua công thức (10.13). Độ chính xác đạt được rất khiêm tốn, khoảng 2 – 3 mGal, bị hạn chế chủ yếu do sai số trong việc xác định chiều dài $l = a_1 + a_2$.

1.4. Vật rơi tự do

Bắt đầu từ năm 1950, nhờ sự phát triển của kỹ thuật, phép đo những khoảng thời gian ngắn đã đạt độ chính xác 10^{-8} – 10^{-9} giây, người ta có khả năng đo tuyệt đối trong lực với độ chính xác cao hơn phương pháp dùng con lắc, bằng cách quan sát một vật thể rơi tự do. Volet đã lần đầu tiên đo g bằng phương pháp này tại Viện quốc tế đo lường Sevres (Pháp) vào năm 1946. Một cây thước kim loại (invar hoặc thau) có vạch chia được thả rơi trong chân không (áp suất 1–5 mmHg) được chụp ảnh sau những khoảng thời gian đều nhau. Quan sát các tấm ảnh, người ta xác định được vị trí cây thước so với các điểm chuẩn ở những thời điểm kế tiếp. Quãng đường mà vật rơi trong thời gian t được tính bằng công thức:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_o t \qquad (10.14)$$

Nếu xác định được khoảng cách h và thời gian t, g được tính bằng công thức:

$$g = \frac{2h - 2v_o t}{t^2} \qquad (10.15)$$

trong đó v_o là vận tốc ban đầu của vật.

Để loại trừ vận tốc trong việc xác định giá trị của g, ta thấy rằng cần phải xác định ít nhất là hai cặp giá trị (h_2, t_1) và (h_1, t_2). Khi đó ta được:

$$g = \frac{2(h_2t_1 - h_1t_2)}{t_1t_2(t_2 - t_1)} \qquad (10.16)$$

Độ chính xác đạt được lúc bấy giờ vào khoảng vài mGal.

Với phương pháp trên, nhiều thiết bị hoàn hảo hơn được thực hiện ở nhiều nước. Với thiết bị của Sakuma (1970), vật rơi tự do là một tứ diện phản xạ ánh sáng đặt trong một giao thoa kế Michelson (Mai-ken-xơn). Bằng cách chụp ảnh những vân giao thoa xảy ra mội tứ diện đi ngang qua (lúc lên và xuống) hai mực ngang, người ta xác định được khoảng cách h với độ chính xác 10^{-9} m. Các tín hiệu thời gian phát ra với chu kỳ 10 MHz, được xác định với độ chính xác 10^{-9} giây.

Hiện nay, những thiết bị đo tuyệt đối g bằng phương pháp rơi tự do cho phép xác định giá trị với độ chính xác rất cao, 0,01 mGal. Tuy nhiên, công việc đòi hỏi phải nhiều ngày quan sát. Nhờ có độ chính xác cao như vậy nên đã được sử dụng song song với phương pháp con lắc trong việc kiểm tra hoặc xác định giá trị tuyệt đối của trọng lực tại một số nơi trên thế giới, đặc biệt là tại các điểm chuẩn của hệ thống trọng lực quốc tế (Potsdam, Paris, Teddington, Leningrad...). Nhờ sự tiến bộ về kỹ thuật trong việc đo tuyệt đối mà người ta đã phát hiện kết quả đo cũ tại Potsdam năm 1906 sai 14 mGal, và đã thực hiện hiệu chỉnh lại.

§2. PHƯƠNG PHÁP ĐO TRỌNG LỰC TƯƠNG ĐỐI

2.1. Phương pháp động – con lắc

Người ta có thể biết được giá trị tuyệt đối của trọng lực g tại một điểm quan sát bằng cách đo biến thiên Δg giữa điểm quan sát và một điểm gốc xuất phát mà ở đó biết giá trị g_0 :

$$g = g_o + \Delta g \qquad (10.17)$$

Trong trắc địa, chẳng hạn khi thiết lập hệ thống Potsdam, người ta đã dùng phương pháp đo tương đối bằng con lắc hay trọng lực kế, để xác định các giá trị của g tại các điểm tựa của mạng lưới từ giá trị của g_0 của Potsdam. Giá trị trọng lực được xác định như vậy gọi là "giá trị chuyển từ Potsdam" hay "giá trị thuộc hệ thống Potsdam".

Trong thăm dò địa lý vật lý, như đã trình bày, người ta chỉ quan tâm đến giá trị tương đối của trọng lực, giữa điểm đo này và điểm đo khác, vì vậy con lắc thuận nghịch đã được sử dụng trong thời gian dài trong lĩnh vực thăm dò để đo tương đối trọng lực, trước khi các loại trọng lực kế xuất hiện.

Nguyên tắc đo tương đối trọng lực bằng con lắc là xác định số biến thiên chu kỳ dao động ΔT giữa hai điểm đo. Trong đó, chiều dài của con lắc được giữ không đổi. Các biến thiên của chu kỳ được xác định rất chính xác bằng phương pháp trùng hợp trên một số rất lớn các dao động với một thì kế, hoặc dùng một con lắc cố định tại điểm gốc và một con lắc tương tự tại điểm quan sát. Trong trường hợp này việc báo thời gian giữa hai điểm được thực hiện bằng vô tuyến.

Thật vậy, nếu chiều dài con lắc không thay đổi khi di chuyển từ điểm O, chọn làm điểm gốc, đến điểm quan sát S, ta có thể xác định được trọng lực tại S so với trọng lực tại O, tỉ số trọng lực ở hai điểm suy ra từ (10.13):

$$\frac{g_s}{g_o} = \frac{(T_o)^2}{(T_s)^2} \qquad (10.18)$$

Tức là, ứng với một biến thiên ΔT của chu kỳ quan sát ở hai điểm, ta sẽ có biến thiên Δg của trọng lực hai điểm đó:

$$g_s - g_0 = \Delta g = 2g_0 \frac{\Delta T}{T_S} \qquad (10.19)$$

Hệ thức (10.19) cho phép xác định tương đối trọng lực chính xác hơn là đo tuyệt đối, vì độ chính xác của Δg chỉ phụ thuộc chủ yếu vào độ chính xác của việc xác định ΔT.

Trước đây, con lắc được dùng chủ yếu trong công tác trắc địa. Bouguer đã so sánh chu kỳ con lắc tại nhiều nơi khác nhau, ở Nam Mỹ (Peru), Lapland và Paris vào những năm 1975 và tính được độ dẹt của Trái đất. Năm 1949, cùng bằng cách đo chu kỳ con lắc, cơ quan US Coast and Geodetic Survey đã so sánh giá trị trọng lực tại 1185 điểm trên lãnh thổ nước Mỹ với trọng lực tại ba điểm gốc trong tiểu bang Washington. Người ta để con lắc dao động trong 6 giờ để có giá trị chu kỳ chính xác đến một phần triệu. Khi tiến hành đo đạc ở biển, người ta sử dụng một hệ thống gồm hai con lắc giống nhau bằng thạch anh được đặt trên cùng một giá treo, dao động ngược pha 180^0 nhằm khử ảnh hưởng dao động nhiễu của tàu. Chu kỳ của hai con lắc này được so sánh với chu kỳ của một con lắc tương đương, được cho dao động ở điểm gốc. Bằng cách sử dụng một cặp con lắc như vậy, người ta đã xác định tương đối trọng lực ở biển với độ chính xác 0,23mGal (1969).

Chúng ta sẽ thấy ở phần sau rằng, với trọng lực kế người ta có thể xác định tương đối g với độ chính xác cao hơn và thời gian đo ngắn hơn nhiều. Tuy nhiên, con lắc chiều dài không đổi (con lắc không đổi) đến nay vẫn giữ được lợi thế là có thể sử dụng ở bất cứ nơi nào ở mặt đất mà không đòi hỏi gì khác hơn xác định chu kỳ tại điểm đo, so sánh chu kỳ này với chu kỳ tại điểm gốc. Ngược lại, trọng lực kế đòi hỏi nhiều điểm gốc để kiểm tra, lấy mẫu chúng và có tầm sử dụng (dải đo) giới hạn, càng hẹp nếu độ nhạy càng lớn. Vì thế mà con lắc vẫn được dùng, trong trắc địa cũng như trong thăm dò, nhằm xác định trọng lực tại các điểm tựa quốc gia cấp 1 hoặc cấp 2. Dựa trên cơ sở giá trị trọng lực tại các điểm này, người ta thiết lập mạng lưới tựa cấp 3 bằng trọng lực kế.

2.2. Phương pháp tĩnh – trọng lực kế.

Công tác đo trọng lực ngoài thực địa thường được thực hiện bằng trọng lực kế chuyên dùng cho từng trường hợp quan sát : trên đất liền, ngoài biển khơi, dưới đáy biển, trong hầm lò và trên không. Trọng lực kế hoạt động theo phương pháp tĩnh, là phương pháp được sử dụng rộng rãi, nhất là trong địa vật lý

thăm dò, trong đó người ta chỉ quan tâm đến gia số trọng lực giữa các điểm đo ở mặt đất. Nguyên tắc của trọng lực kế là một trọng vật được treo trên một lò xo kim loại hoặc thạch anh và quan sát vị trí của nó ở trạng thái cân bằng, không dao động. Khi di chuyển đến nơi có giá trị trọng lực khác vị trí cân bằng sẽ có vị trí mới. Độ dãn dài của lò xo là số đo sự gia tăng của giá trị trọng lực. Quá trình đo đơn giản nhanh hơn phương pháp động. Do đó máy trọng lực thực hiện đo tương đối giá trị trọng lực. Có nhiều loại trọng lực kế khác nhau về nguyên tắc cấu tạo: trọng lực kế khí, lỏng, điện từ và trọng lực kế lò xo. Vì độ dãn dài của lò xo chỉ có giới hạn, nói chung, trong các loại trọng lực kế, người ta dùng một ngoại lực để bù trừ sự thay đổi trọng lực, nhằm đưa trọng vật trở về vị trí cân bằng (xuất phát) gọi là phương pháp điểm không. Sự thay đổi trọng lực được đo bằng cường độ của lực bù trừ đó.

Trong loại trọng lực kế lò xo, lực bù trừ sử dụng là lực đàn hồi của một lò xo phụ và đại lượng được đo trực tiếp là độ dịch chuyển của bộ phận linh động – trọng vật. Hiện nay, người ta chỉ dùng các trọng lực kế loại này vì chúng gọn nhẹ và nhờ có độ chính xác cao và năng suất lớn so với các trọng lực kế khí và lỏng đã lỗi thời. Vì vậy mà trong phần này chúng ta chỉ xét các trọng lực kế lò xo.

– Nguyên tắc của các trọng lực kế hiên đại :

Nếu như bằng phương pháp con lắc người ta có khả năng đo tương đối trọng lực với độ chính xác 1/10 mGal trong vòng vài chục phút thì trong thăm dò, thời gian đo này vẫn còn quá lâu. Trọng lực kế cho phép đo nhanh và đơn giản hơn, vả lại các trọng lực kế hiện đại có độ chính xác cao hơn nhiều, do đó hoàn toàn chiếm ưu thế trong lĩnh vực thăm dò địa vật lý từ năm 1940.

Thành phần chính của trọng lực là một khối lượng m treo ở đầu một lò xo dài x_o. Dưới tác dụng của trọng lực, lò xo dãn ra một độ dài x và cân bằng với trọng lực :

$$mg = kx$$

với k là hệ số đàn hồi của lò xo.

Một gia tăng Δg của trọng lực sẽ gây ra một độ dãn Δx tương ứng của lò xo và tỷ lệ nhau theo định luật Hooke (Húc) :

$$\Delta g = \frac{k}{m}\Delta x = A.\Delta x \qquad (10.20)$$

Hằng số A = k/m đặc trưng và liên quan đến độ nhạy của máy. Độ nhạy được xác định bằng cách để máy lần lượt hoạt động ở hai địa điểm khác nhau, mà gia số trọng lực Δg giữa hai điểm này đã được biết trước bằng con lắc.

Như vậy, nguyên tắc này cho phép xác định tương đối giá trị trọng lực bất cứ ở đâu căn cứ vào độ dãn thêm của lò xo. Ứng với một Δg nhất định, ta có độ dãn Δx càng rõ rệt, nếu tỉ số k/m = A càng nhỏ. Mặt khác, chu kỳ dao động của hệ thống trên là:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Kết hợp với (10.20) ta được:

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{T^2}\Delta x \qquad (10.21)$$

tức là độ nhạy $\Delta x/\Delta g$ của máy liên hệ với chu kỳ dao động qua biểu thức:

$$\frac{\Delta x}{\Delta g} = \frac{T^2}{4\pi^2} \qquad (10.22)$$

Qua biểu thức này, ta thấy muốn có độ nhạy cao thì chu kỳ dao động của máy phải lớn (chu kỳ dài). Đây là một đặc điểm cần ghi nhớ của các trọng lực kế lò xo hiện đại – là trọng lực kế bất ổn định hoá – sẽ gặp ở phần sau.

– Áp dụng số:

Nếu x vào khoảng 1m, g khoảng 981.000 mGal, theo (10.20) thì một biến thiên Δg = 100 mGal sẽ được biểu hiện bằng một biến thiên Δx = 0,1mm. Nếu ta muốn xác định g chính

xác 1/10 mGal, đạo hàm của (10.20) cho thấy một độ chính xác tương đối:

$$\frac{d(\Delta g)}{\Delta g} = \frac{1/10mGal}{100mGal} = 10^{-3}$$

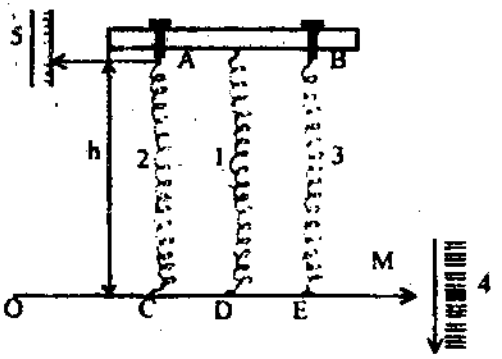
Giá trị do Δg đòi hỏi một độ chính xác tương đối y hệt đối với giá trị đo Δx, tức là sai số d(Δx) không quá con số sau đây:

$$d(\Delta g) = \Delta x \frac{d(\Delta g)}{\Delta g} = 0{,}1mm \times 10^{-3} = 10^{-4}\text{mm}$$

Một độ chính xác cao như vậy chỉ có được bằng cách gắn thêm một trang bị đặc biệt để có biến thiên Δx thật bé của lò xo.

Tuy nguyên tắc, rất đơn giản, nhưng trọng lực kế đầu tiên, trọng lực kế Thyssen, chỉ được thực hiện vào những năm 1935, sau đó được cải tiến, hoàn thiện hơn nhờ những tiến bộ của ngành luyện kim và kỹ thuật chế tạo. Lò xo được làm từ thạch anh nóng chảy hoặc bằng hợp kim thép đặc biệt (invar).

Các trọng lực kế hiện đại dùng trong thăm dò rất gọn, nhẹ (2 – 10kg) có độ chính xác vào khoảng 1/100mgal, dải đo 50–100 mGal (trọng lực kế North America, Worden,) Việc đo thực hiện rất nhanh. Một lần đo chỉ cần vài phút.Số lượng lần đo có thể đạt 30–40 trong 24 giờ. Chính nhờ các ưu điểm trên, mà trong vòng 50 năm nay, trọng lực kế lò xo chiếm lợi thế so với các loại máy đo trọng lực khác trong thăm dò và gần như là loại máy duy nhất được sử dụng trong thăm dò, tìm kiếm khoáng sản hữu ích.



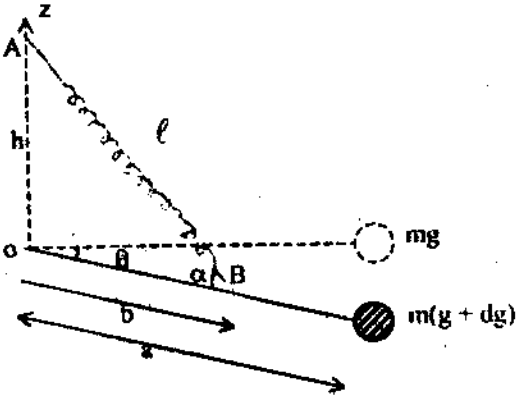
Hình 89: Nguyên tắc cấu tạo của trọng lực kế.

Gần như tất cả các loại trọng lực kế hiện đại đều hoạt động theo nguyên tắc sau :

Bộ phận linh động gồm tay đòn với khối lượng M quay quanh trục O, được giữ ở vị trí cân bằng theo thang 4 bởi lò xo chính 1 (hình 89). Khi mang máy từ điểm đo này đến điểm đo khác, trọng lực thay đổi một lượng Δg và đòn bẩy dịch chuyển khỏi vị trí xuất phát (vị trí cân bằng) một góc φ. Thông thường nhất, việc đo tiến hành bằng cách đưa bộ phận linh động về vị trí điểm không xuất phát (phương pháp điểm không), bằng cách vặn ốc gắn liền A với lò xo 2 (lò xo đo). Số vòng vặn của ốc này được xác định bằng thước 5. Đại lượng này chính là số đo sự thay đổi trọng lực giữa hai địa điểm khác nhau: Người ta có được một độ nhạy cao của trọng lực kế bằng cách thực hiện thiết kế theo nguyên lý trên, sao cho một biến thiên Δg rất bé sẽ gây nên một độ dịch chuyển đáng kể của bộ phận linh động. Điều này đòi hỏi máy hoạt động gần vị trí cân bằng phiếm định, tức là bộ phận linh động phải có chu kỳ dao động rất dài. Trong điều kiện đó trọng lực kế được gọi là không ổn định. Các loại trọng lực kế hiện đại thường được thiết kế với đòn bẩy có vị trí xuất phát nằm trong mặt phẳng ngang, và chúng mang tên gọi chung là trọng lực kế có tay đòn nằm ngang. Lò xo 3 là lò xo đổi dải đo gắn liền với ốc B.

Chú thích: Các địa chấn kế điện từ sử dụng trong thăm dò địa chấn chẳng qua là những lực kế lò xo: khối lượng m là một ống dây linh động trong khoảng giữa một nam châm vĩnh cửu.

Các trọng lực kế hiện đại được thiết kế theo nguyên tắc của địa chấn kế Galitzine, có con lắc chu kỳ dài, đó là trường hợp trọng lực kế LaCoste – Romberg, Worden, North America, Askania, Frost,... Con lắc lò xo trong địa chấn kế này được thiết kế theo nguyên tắc con lắc có cần nằm ngang dao động dọc phương thẳng đứng như hình 90 gọi là địa chấn kế Galitzine.



Hình 90: Trọng lực kế bất ổn định hoá.

– Tạo điều kiện bất ổn định hoá:

Trong các loại trọng lực hiện đại (trọng lực kế có tay đòn nằm ngang), khối lượng m dao động quanh 0 nằm ngang dưới tác dụng của trọng lực mg mà mômen đối với trục 0 là:

$$M_1 = mga\sin\theta \qquad (10.23)$$

Lực đối kháng độc lập với trọng lực, tạo bởi sức căng của lò xo bằng kim loại hay thạch anh. Mômen M_2 của lực đối kháng này là một hàm của góc θ.

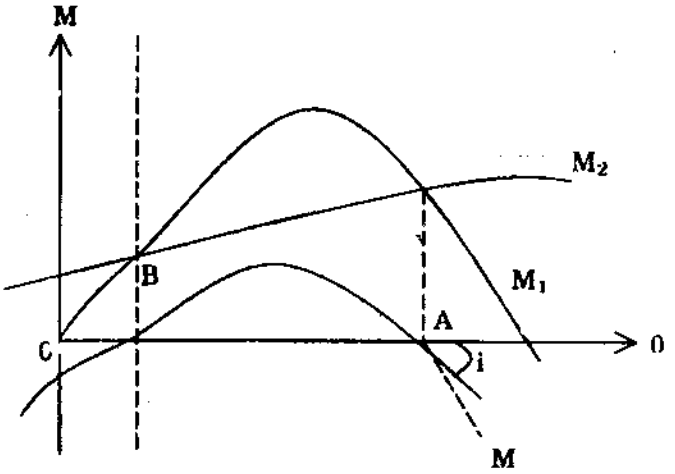
Đòn bẩy sẽ ở vị trí cân bằng khi mômen tổng hợp của các mômen M_1 và M_2 triệt tiêu :

$$M = M_1 + M_2 = 0$$

Trên hình 91 ta có hai vị trí cân bằng của tay đòn, tại điểm A và điểm B, ứng với góc θ_A, θ_B.

Điểm A ứng với cân bằng bền, vì khi góc θ tăng từ θ_A thì mômen tổng hợp M dãn và ngược lại: M biến thiên ngược chiều

với θ nghĩa là tay đòn có khuynh hướng trở về vị trí cân bằng : $\frac{\partial M}{\partial \theta} < 0$. Cân bằng bền càng bền hơn nếu $\frac{\partial M}{\partial \theta}$ càng nhỏ.



Hình 91 : Đường cong biểu diễn các mômen lực.

– Điểm B ứng với cân bằng không bền, vì nếu θ tăng hay giảm từ giá trị θ_B, mômen tổng hợp M biến thiên cùng chiều với θ: $\frac{\partial M}{\partial \theta} > 0$ đòn bẩy có khuynh hướng tách khỏi vị trí cân bằng này.

Đại lượng $\frac{\partial M}{\partial \theta}$ = tgi (độ dốc của đường biểu diễn M(θ) theo tại điểm tiêu biểu độ nhạy của trọng lực kế : độ nhạy $\frac{d\theta}{dg}$ của máy càng lớn nếu $\frac{\partial M}{\partial \theta}$ càng nhỏ. Thật vậy, khi trọng lực gia tăng từ g đến g + dg, mômen M_1 tăng từ M_1 = mgasinθ đến giá trị: $M_1 + dM = m(g + dg)a\sin\theta$ và mômen tổng hợp M gia tăng từ M đến : M + dM = M + mdgasinθ (mômen M_2 độc lập với trọng lực).

Lúc đó điểm A di chuyển đến điểm A', ứng với góc $\theta_{A'} = \theta_A + d\theta$. Ta có :

$$dM = \frac{\partial M_1}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial M_2}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial M_1}{\partial g} dg \qquad (10.24)$$

Khi đòn bẩy ở vị trí cân bằng, hợp mômen M = 0, hay dM = 0. Suy ra :

$$\frac{d\theta}{dg} = \frac{\partial M_1}{\partial g} / \left(\frac{\partial M_1}{\partial \theta} + \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) \qquad (10.25)$$

hay :

$$\frac{d\theta}{dg} = \frac{\frac{\partial M_1}{\partial g}}{\frac{\partial M}{\partial \theta}} = \frac{ma\sin\theta}{\frac{\partial M}{\partial \theta}} \qquad (10.26)$$

Mà ta biết rằng chu kỳ dao động của tay đòn cho bởi biểu thức:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\frac{\partial M}{\partial \theta}}} \qquad (10.27)$$

tức là:

$$\frac{1}{\frac{\partial M}{\partial \theta}} = \frac{T^2}{4\pi^2 I} \qquad (10.28)$$

Vì vậy biểu thức (10.26) có thể viết dưới dạng:

$$\frac{d\theta}{dg} = \frac{\frac{\partial M_1}{\partial g}}{4\pi^2 I} T^2 \qquad (10.29)$$

Ngoài ra ta biết :

$$\frac{\partial M_1}{\partial g} = ma\sin\theta \qquad (10.30)$$

và mômen quán tính $I = ma^2$, do đó thay vào (10.29) ta có :

$$\frac{d\theta}{dg} - \frac{T^2 \sin\theta}{4\pi^2 a} \qquad (10.31)$$

Như vậy là độ nhạy của trọng lực kế tỉ lệ với bình phương của chu kỳ dao động và với sin của góc θ hợp bởi tay đòn ở vị trí xuất phát với trục thẳng đứng oz. Muốn có độ nhạy lớn, trọng lực kế phải được thiết kế sao cho chu kỳ T vô cùng lớn và $\theta = \frac{\pi}{2}$ (tay đòn nằm ngang). Trong điều kiện đó người ta nói rằng trọng lực kế bất ổn định hoàn toàn. Trên đồ thị (hình 91), là đường biểu diễn của mômen tổng hợp M = M (θ) tiếp tuyến với trục θ tại điểm A.

Với $\theta_A = \frac{\pi}{2}$ độ dốc xác định bởi tgi = $\frac{\partial M}{\partial \theta}$ trở nên vô cùng nhỏ.

Tỷ số $\frac{d\theta}{dg}/g$ gọi là hệ số bất ổn định của trọng lực kế. Đối với trọng lực kế North American hệ số này khoảng 600 – 700.

Qua biểu thức (10.31) ta thấy ích lợi cần phải bất ổn định hoá (làm cho máy có chu kỳ dài và thiết kế các loại trọng lực kế hiện đại, có độ nhạy cao với tay đòn gần như nằm ngang $\theta = \frac{\pi}{2}$). Dựa trên chu kỳ dao động, người ta phân biệt các trọng lực kế thành hai nhóm:

- Trọng lực kế ổn định: chu kỳ ngắn.
- Trọng lực kế bất ổn định: chu kỳ dài.

– Áp dụng số : Nếu $\theta = \frac{\pi}{2}$, biểu thức (10.31) trở thành:

$$\frac{d\theta}{dg} = \frac{T^2}{4\pi^2 a}$$

hay
$$\frac{ad\theta}{dg} = \frac{ds}{dg} = \frac{T^2}{4\pi^2} \qquad (10.32)$$

Cho T = 20s, ta được $\frac{ds}{dg} = 10$, nghĩa là ứng với một độ biến thiên $dg = \frac{1}{100} mGal = 10^{-5}$ Gal, đầu tay đòn dịch chuyển một đoạn ds bằng 10^{-4}cm, tức là 1μ.

– Thay đổi dải đo.

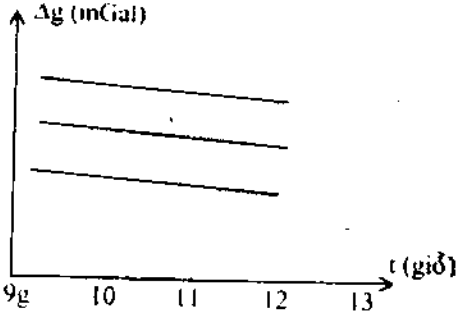
Lò xo bù trừ trọng lực kế hiện đại dùng trong thăm dò vào khoảng 100mGal. Khi các biến thiên của g không còn đo được nữa, ta cần phải thay đổi dải đo bằng cách sử dụng một lò xo mới, lò xo đổi dải đo. Lò xo này có dải rộng có thể tới 5000 mGal. Trong các điều kiện đo dài ngày, việc đo g không đơn thuần chỉ đo gia tốc trọng trường, mà còn là vấn đề ổn định giá tựa. Đó cũng là một bài toán về hiệu chỉnh, bởi vì cần phải biết vận tốc tức thời của tàu với độ chính xác 1 phút và hướng đi tàu với độ chính xác 1 độ để có thể ước lượng gia tốc Coriolis với độ chính xác bằng 1mGal, do chuyển động của bản thân con tàu. Các yếu tố cần thiết cho việc tính toán các hiệu chỉnh do chuyển động của tàu cũng được ghi một cách liên tục.

– Sự dịch chuyển hay độ trôi của điểm 0.

Cũng như những máy đo thật nhạy khác, một trọng lực kế không trung thực, là hai vạch đọc thực hiện tại cùng một địa điểm nhưng vào hai thời điểm khác nhau sẽ không bao giờ y hệt nhau: người ta nói rằng trọng lực kế có một độ trôi (dịch chuyển) điểm không do "*sự mỏi*" của lò xo và do những chấn động chuyên chở...

Mặt khác giá trị của g không phải là không đổi tại một địa điểm mà thay đổi theo thời gian do sức hấp dẫn của Mặt trời và Mặt trăng được biểu hiện dưới hiện tượng triều. Tác dụng của Mặt trời – Mặt trăng tối đa là vài $\frac{1}{10}$ mGal và tác dụng của địa triều không quá 5/100 mGal, cả hai tác dụng này tại một điểm nhất định biến thiên theo thời gian và cộng thêm vào độ trôi điểm không của bản thân trọng lực kế. Thường người ta bao gồm cả hai hiện tượng bản chất khác nhau đó dưới từ độ trôi điểm không và thừa nhận rằng đại lượng này biến thiên chậm

và đều, do đó có thể xem như theo đường thẳng trong một khoảng thời gian khá nhỏ (tối đa 2 giờ). Biểu hiện rõ ràng của sự trôi là khi quan sát tại một điểm trong nhiều ngày hoặc ngay cả sau vài giờ, chúng ta được những giá trị trọng lực trong lần đọc không giống nhau mà thay đổi theo thời gian. Hình 92 cho thấy đường biểu diễn độ trôi điểm không của trọng lực kế trong ba ngày khác nhau, có được bằng cách nối liền các giá trị trọng lực quan sát ở cùng một điểm đo và trong cùng một ngày.



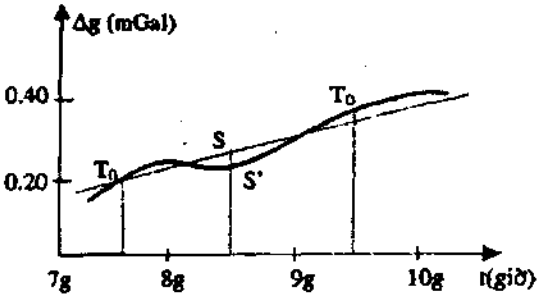
Hình 92: Độ dịch chuyển điểm không quan sát cách nhau ba ngày.

Trong thực tế, đường biểu diễn độ trôi điểm không theo thời gian được thiết lập bằng cách đọc giá trị của vạch chia nhiều lần tại một điểm đo đặc biệt (điểm tựa) trong vùng khảo sát, vào nhiều giờ khác nhau trong cùng một ngày công tác. Tại mỗi điểm đo người ta luôn luôn quan sát các vạch chia và đưa hệ thống linh động của trọng lực kế về một vị trí cố định của lò xo reset – spring mà tác dụng có thể so sánh với một thay đổi giá trị của khối m của đòn bẩy. Cũng bằng cách này, người ta có thể thực hiện việc đo trọng lực nối liền cực đến xích đạo (Δg = 5000 mGal).

– Hiệu chỉnh độ dịch chuyển điểm không.

Các giá trị đọc ngoài thực địa cần phải được hiệu chỉnh về độ dịch chuyển điểm không của trọng lực kế. Tất cả những giá trị trọng lực quan sát trong quá trình đo đạc đều phải được biểu diễn theo thời gian. Một đường biểu diễn độ dịch chuyển được thiết lập tại một điểm tựa để cho thấy độ biến thiên của giá trị

đọc theo thời gian. Cứ mỗi hai giờ, người ta đo lại ít nhất một lần tại điểm tựa T_o. Thường người ta thừa nhận rằng hiện tượng dịch chuyển điểm không của trọng lực kế xảy ra chậm và đều vì vậy có thể xem đường biểu diễn của độ chuyển theo thời gian tuyến tính trong một khoảng thời gian đo ở các điểm đo thường. Nếu độ dịch chuyển điểm 0 không tuyến tính, người ta phân ra từng giai đoạn tuyến tính. Muốn có hiệu số trọng lực giữa điểm đo thường s và điểm T_o, ta chỉ cần đoc hiệu số giữa tung độ của điểm s và điểm s' tương ứng trên đường biểu diễn độ trôi đã được thiết lập tại điểm tựa T_o.



Hình 93: Hiệu chỉnh độ dịch chuyển điểm 0

____ Δg quan sát bị dịch chuyển điểm O

------- độ dịch chuyển điểm 0 tuyến tính

Khi chế tạo trọng lực kế, người ta đã lấy mẫu, nghĩa là xác định số vạch chia tương ứng với một gia tăng vạch Δg biết trước. Chẳng hạn như độ gia tăng Δg giữa hai điểm mà ở hai nơi đó giá trị trọng lực g đã được xác định chính xác. Điều này cho phép xác định hằng số định mẫu C của trọng lực kế, nghĩa là giá trị của mỗi vạch chia trên núm đọc bằng mGal. Giữa một điểm đo s và điểm đo đặc biệt T_o chọn làm chuẩn gọi là điểm tựa, ta có:

$$\Delta g = g_S - g_{T_o} \qquad (10.33)$$

Bằng chỉ số vạch quan sát tại s trừ đi chỉ số vạch quan sát tại điểm tựa T_o.

Dưới đây ta lần lượt xem cơ chế hoạt động của hai trọng lực kế tiêu biểu được thông dụng trong thăm dò. Đó là trọng lực kế LaCoste – Romberg và trọng lực kế Worden.

§3 MÁY ĐO TRỌNG LỰC - MỘT SỐ MÁY PHỔ BIẾN.

3.1. Trọng lực kế Lacoste – Romberg.

Loại trọng lực kế này được chế tạo rộng rãi dưới tên gọi khác nhau: North American, Askania, Magnolia... Cấu tạo của máy gồm một tay đòn hợp một góc $\theta \approx 90^o$ với phương thẳng đứng, mang ở đầu một khối m và có thể dao động quanh trục ngang 0 dưới tác dụng của trọng lực. Khối m được giữ cân bằng nhờ lò xo chính nghiêng một góc $\alpha = 45^o$ (OA = OB); một đầu lò xo gắn tại B, đầu kia gắn tại điểm A trong mặt phẳng đứng chứa trục quay O (hình 90). Trong điều kiện đó, ta thấy rằng khi g tăng một lượng dg, lò xo dãn một lượng dl, sức căng T của lò xo tăng, nhưng tay đòn (khoảng cách d từ O đến lò xo) giảm: mômen M_2 của lực đối kháng không phải là một hàm tuyến tính của θ, mà phụ thuộc phi tuyến vào góc θ như mômen M_1 của trọng lượng mg. Sự phụ thuộc phi tuyến vào θ là điều kiện gây bất ổn định.

Ta có biểu thức của M_1 và M_2 :

$$M_1 = mga\cos\theta$$

$$M_2 = -k(l - l_o)\,d = -k(l - l_o)b\sin\alpha$$

$$= -k(l - l_o)\frac{bh}{l}\sin\theta$$

Ta thấy nếu sắp xếp sao cho:

$$mga = k(l - l_0)bh/l \qquad (10.34)$$

hay

$$mg = k(l - l_0)\frac{b}{a}\frac{h}{l} \qquad (10.35)$$

thì ta luôn luôn được : $M_1 = -M_2$

hay

$$M_1 + M_2 = 0 \qquad (10.36)$$

Đối với góc θ bất kỳ : Tức là máy sẽ cân bằng bất cứ ở vị trí nào (bất ổn định hoàn toàn). Trong thực tế chỉ cần thêm vào

M_2 một lượng nhỏ để máy hoạt động với một độ nhạy rất cao trong một dải đo rộng. Theo (10.35); khi trọng lực tăng một đại lượng dg chiều dài của lò xo chính sẽ tăng đại lượng dl cho bởi:

$$dg = \left(\frac{k}{m}\frac{b}{a}\frac{l_o}{l^2}h\right)dl \qquad (10.37)$$

Biểu thức này cho thấy là ứng với một biến thiên dg, độ dãn càng lớn nếu các số hạng trong dấu ngoặc càng nhỏ, đặc biệt là nếu chiều dài lò xo lực nghỉ (khi không có lực căng) bằng không $l_o = 0$. Trong điều kiện đó, lực căng $T = k(l - l_o)$ của lò xo trở thành $T = kl$. Biểu thức (10.37) thể hiện rõ ràng ích lợi của loại trọng lực kế có lò xo không có độ dài ban đầu, gọi là "*lò xo không*".

Trên thực tiễn, người ta xác định độ gia tăng dg không qua việc đo góc θ hoặc độ dãn dl của lò xo chính, mà thiết kế máy hoạt động theo phương pháp không, bằng cách gắn thêm một lò xo thứ hai để đưa tay đòn về vị trí nằm ngang (vị trí xuất phát): tại mỗi điểm đo, người ta điều chỉnh vị trí của điểm A (LaCoste–Romberg) hoặc điểm 0 (North American) để sao cho tay đòn trở về nằm ngang. Điều này có nghĩa là chiều dài CA = h của lò xo phụ thay đổi một lượng dh ở mỗi điểm đo (hình 89). Điểm A sẽ di dời một khoảng dh.

Lấy đạo hàm logarit (10.35) ta được:

$$\frac{dg}{g} = \frac{dh}{h} \qquad (10.38)$$

rút ra được : $$dg = \left(\frac{kb}{ma}h - g\right) + \frac{kb}{ma}dh \qquad (10.39)$$

hay : $$dg = A + B\,dh$$

Các hằng số A và B được xác định cho mỗi loại trọng lực kế bằng cách đo dg ở hai địa điểm bằng phương pháp con lắc. Sau khi đã xác định được giá trị của A và B người ta vẽ đường cong mẫu dg = f(dh). Trong thực tế đo đạc, người ta ghi số vòng vặn núm k được chia độ tỉ lệ với lượng dh. Sử dụng đường cong

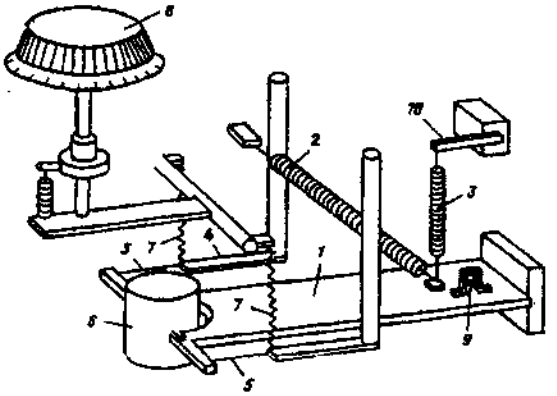
mẫu dg – và biết được số vòng chia n, ta suy ra được giá trị số gia trọng lực Δg $\left(\frac{1}{10}\text{mGal}\right)$. Độ nhạy của máy khoảng $\frac{1}{10}$mGal.

Áp dụng số: Theo (10.38) ứng với độ nhạy bằng $\frac{1}{10}$mGal ta có một độ dịch chuyển bằng :

$$\frac{dh}{h} = \frac{10^{-5}}{g} \approx 10^{-8}$$

$$dh = 10^{-7}\ \text{cm} = 10\text{Å}$$

với chiều dài của lò xo đọc bằng 10cm.



H 94: Trọng lực kế North American

1. Tay đòn	*6. Bù trừ phong vũ.*
2. Lò xo chính	*7. Lò xo nối với lò xo lá 4*
3. Lò xo dải đo	*8. Núm tinh chỉnh.*
4. Lò xo lá	*9. Vạch chỉ số.*
5. Dây giữ trục quay tay đòn	*10. Tay đòn làm căng lò xo dải đo.*

– Trọng lực kế LaCoste – Romberg được sản xuất 2 loại : loại dải đo hẹp dùng cho thăm dò. Loại dải đo rộng cho công tác trắc địa với dải đo rộng 7000 mGal phục vụ cho công tác xây dựng mạng lưới điểm tựa. Độ dịch chuyển điểm không rất bé, 0,5 mGal/tháng, có bộ phận ổn nhiệt, làm cho máy làm việc đường dài. Sai số đo của máy đạt 0,04 mGal, độ nhạy 0,01 mGal. Máy được ứng dụng rộng rãi ở phương Tây.

– Trọng lực kế North American khối m bằng vàng nặng 64g, chiều dài của tay đòn 0G = 8cm. Toàn bộ máy nặng khoảng 10kg không kể trọng lượng của chân và bộ phận cung cấp điện (bình acqui).

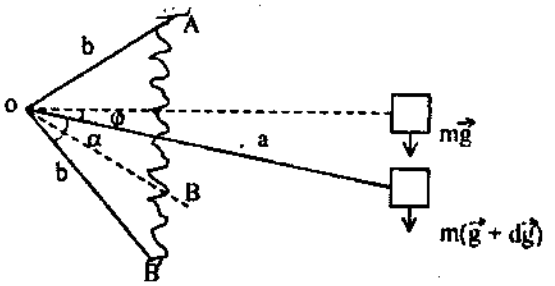
3.2. Trọng lực kế Askania.

Trọng lực kế Askania (GS) nặng 20,5 kg. Cả giá máy và vỏ đựng máy cách từ, tổng cộng 43 kg. Ngoài ra còn có phụ kiện ghi đo bằng tế bào quang điện. Do nặng, máy được đặt tại các trạm quan sát biến thiên trọng lực ngày đêm do địa triều. Sai số đo không quá 0,001mGal. Máy có bộ phận ổn nhiệt bằng điện và chân không hoá. Dải đo của máy GS–16 là 2000mGal, của GS–15 là 600mGal.

3.3. Trọng lực kế Worden.

Máy này được thiết kế tại Mỹ (Texas) theo nguyên tắc của con lắc nằm ngang trong địa chấn kế Galitzine, và đã được bất ổn định hoá. Sai số đo tuỳ model, từ 0,01 đến 0,08 mGal. Độ nhạy 0,01 mGal. Có bộ phận bù trừ nhiệt độ bằng sợi kim loại.

Bộ phận linh động vẫn là tay đòn nằm ngang OG gắn chặt với tay đòn OB. Chúng hợp một góc $\alpha = 45^o$ và dao động quanh trục ngang O, khi trọng lực gia tăng một lượng dg, tay đòn hợp một góc φ với trục ngang (vị trí xuất phát) làm thay đổi chiều dài ℓ củalò xo chính AB có đầu cố định gắn tại A.



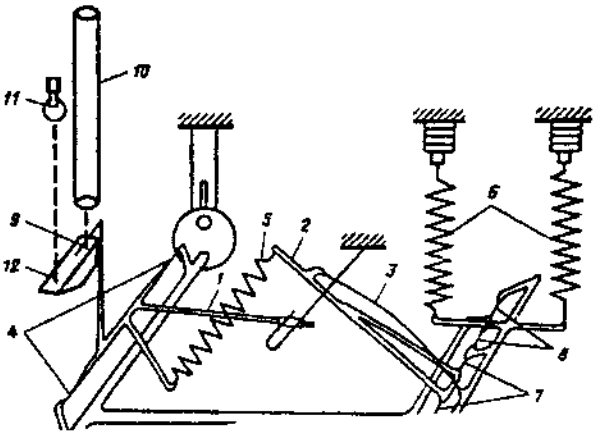
Hình 95: Sơ đồ nguyên tắc của trọng lực kế Worden

Như với trọng lực kế LaCoste – Romberg, người ta đo dg bằng cách đo lực cần thiết để đưa tay đòn về vị trí nằm ngang theo phương pháp không. Trọng lực kế Worden : toàn bộ bằng

thạch anh đun chảy, rất gọn, nhẹ, chỉ nặng 2 – 3kg, hoạt động bằng pin.

– Các giải pháp bù trừ thay đổi áp suất và nhiệt độ:

Muốn cho trọng lực kế nhạy chúng phải được phòng chống những sự thay đổi vị trí cân bằng gây ra do các biến đổi áp suất và nhiệt độ. Tác dụng của hai yếu tố này rất lớn vì một gia tăng áp suất bằng 1cm tương đương với một độ giảm của trọng lực bằng 2mGal, và một biến đổi $\frac{1^0}{10}$C gây ra đối với trọng lực kế North American, một thay đổi kết quả đọc trên 1 mGal.



Hình 96 : Trọng lực kế Worden, Sharp, GAG-2

1. Tay đòn.
2. Tay đòn+ bù trừ nhiệt.
3. Dây bù trừ nhiệt.
4. Dây treo tay đòn.
5. Lò xo chính.
6. Lò xo dải đo.
7. Dây treo tay đòn bù trừ nhiệt.
8. Dây treo bộ phận đo.
9. Vạch chỉ số linh động.
10. Thị kính.
11. Đèn chiếu sáng.
12. Lăng kính.

Đối với áp suất, hai giải pháp được chọn lựa, giải pháp thứ nhất nhằm đặt bộ phận đo trong chân không (trọng lực kế Worden), giải pháp thứ hai nhằm thực hiện cân bằng sức đẩy Archimède hai bên trục quay 0 (trọng lực kế North American) bằng cách gắn thêm một bình bù trừ hình trụ rỗng kín ở đầu kia của tay đòn. Ta có thể kể thêm giải pháp thứ ba là ngâm bộ

phận đo trọng một chất lỏng không chịu nén (trọng lực kế Norgard).

Đối với nhiệt độ, trong các lực kế kim loại (trọng lực kế La Coste Romberg, North American có lò xo bằng invar), tác dụng của các biến đổi nhiệt độ được khắc phục bằng cách duy trì bộ phận đo ở nhiệt độ không thay đổi 0,1^{0}C bên trong bình điều nhiệt. Các điện trở hơ nóng của bình này được cung cấp điện bằng bình acqui, bình acqui này cũng được dùng để làm sáng các bộ phận khác của trọng lực kế, như dây chữ thập v.v...

Một giải pháp thứ hai (trọng lực kế Worden) nhằm sử dụng vật liệu có tính đàn hồi thay đổi ngược chiều so với các kim loại dưới tác dụng của nhiệt độ: người ta chọn thạch anh nguyên chất đun lỏng vì tính đàn hồi của nó tăng khi nhiệt độ tăng, do đó mà các trọng lực kế lò xo bằng thạch anh mang tên là trọng lực kế thạch anh, trong đó một gia tăng độ đàn hồi của lo xo thạch anh được bù trừ bằng một sự giãn độ đàn hồi của một lò xo khác bằng kim loại.

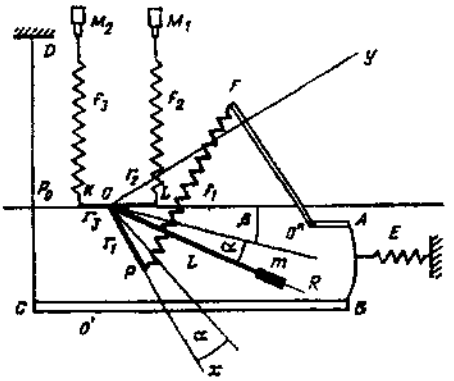
3.4. Trọng lực kế Liên Xô (cũ) thế hệ sau loại GAK.

Môlôđenxki, nhà chế tạo trọng lực kế đầu tiên của Liên Xô đã chế tạo ra trọng lực kế vào năm 1939 và đưa vào sản suất hàng loạt năm 1946, là trọng lực kế GKM mang tên ông. Sau đó, loại trọng lực kế bất ổn định ra đời sau năm 1950. Cuối thập kỷ 50, K.E Vexelov đã chế tạo trọng lực kế bất ổn định GAK, đã được sử dụng phổ biến tại nước ta. Thế hệ sau này là trọng lực kế loại GNU - KA, là loại trọng lực kế thạch anh có dải đo hẹp (nhưng chính xác cao). Có loại đo ở đáy biển, điều chỉnh từ xa để thăm dò dầu khí tại thềm lục địa. Có loại dải đo rộng để thành lập mạng lưới điểm tựa GNSK–A.

– Trong lực kế GNU - K.

Trong lực kế GNU - KB được sử dụng để thăm dò chi tiết. Sai số đo trong chuyến đo kéo dài 4 giờ là 0,03 mGal. Dải đo không cần thay đổi là 100mGal. Độ nhạy 0.06mGal. Bộ phận nhạy cảm là con lắc trong địa chấn kế thẳng đứng Galitzine giống như ở trọng lực kế LaCoste – Romberg, North American,

Worden... Trọng lực kế này được bất ổn định hóa, hoạt động theo phương pháp đo ở vị trí không. Trục con lắc làm bằng chỉ thạch anh căng ngang. Sơ đồ của trọng lực kế này ở hình 97. Trọng lực kế có bộ phận bù trừ nhiệt. trọng lực kế GNU - KC có núm thay đổi dải đo. Một vòng vặn của núm cho một bước 9mm, có dải đo toàn bộ là 6000 mGal. Trọng lực kế GNU - KA và GNU - KB được sử dụng trong thăm dò chi tiết, để thăm dò các quặng mỏ, dầu khí.



Hình 97: Sơ đồ trọng lực kế GNU - KB

OR – tay đòn mang khối lượng m.
F_1 – lò xo chính.
α - góc nghiêng của tay đòn khỏi vị trí ban đầu.
β - góc nghiêng ban đầu so với phương ngang.
BO'C - cần thứ 1
AO"F – cần thứ 2
AB – lò xo căng
DC – lò xo bù trừ nhiệt
f_3 – lò xo dải đo
OL – trục
M_1 – núm đo vi cấp
M_2 – núm đổi dải đo
f2 – lò xo vi đo cấp

– Trọng lực kế GMT–1 và GMT–2.

Trọng lực kế loại *GMT–1* có dải đo rất rộng và có bộ phận ổn nhiệt, được sử dụng trong việc thiết lập mạng lưới điểm tựa trên khu vực rộng lớn. Dải đo không cần thay đổi là 1,5 Gal và đảm bảo sai số không quá 0,02 % của số gia trọng lực. Nghĩa là nếu biến thiên là 1000Gal, thì sai số là 0,2 mGal.

Tuy nhiên để tăng dải đo, cũng có lò xo phụ cho phép tăng đến 7–8 Gal. Bù trừ nhiệt được thực hiện bằng lò xo kim loại.

Trọng lực kế có ổn nhiệt vài phần trăm độ. Hệ thống nhạy cảm (con lắc) được đặt trong chân không và có bộ phận bù trừ áp suất trong trường hợp mất chân không. Dáng bề ngoài của trọng lực kế như phích nước đá, có đường kính 14cm, cao 50cm. Ba chân là núm vặn. Thời gian đo từ 3–5 phút. Trọng lực kế chỉ nặng 8 kg. Việc có bộ phận ổn nhiệt đòi hỏi phải theo dõi ăc–qui nuôi bộ phận này.

Trọng lực kế GMT–2 được chuyên dùng cho việc thăm dò chi tiết. Con lắc được bất ổn định hoá và treo ngang bằng 2 lò xo xoắn làm bằng invar. Trọng lực kế hoạt động theo nguyên tắc đo ở vị trí không và đọc số đo bằng quang học. Lò xo bù trừ được điều khiển bằng núm tinh chỉnh cực nhạy. Trọng lực kế được ổn nhiệt và ổn áp, có bộ phận chống ảnh hưởng của từ trường Trái đất. Khi xách máy di chuyển, có bộ phận hãm giữ hệ thống con lắc. Trọng lực kế được chuyên dùng để thăm dò chi tiết, như sử dụng vào việc tìm kiếm dầu khí, khoáng mỏ. Dải đo là 1500 mGal, không cần thay đổi. Độ nhạy của trọng lực kế đạt 0,2–0,4 mGal. Sai số trung phương của một chuyến đo dài ngày 8–10 ngày là 0.06 mGal. Độ trôi điểm không 0,5 mGal/ngày. Trọng lực kế hoạt động ở nhiệt độ -40^0 – $+40^0$C. Trọng lượng của trọng lực kế không kèm vỏ là 8kg.

3.5. Trọng lực kế có độ chính xác cao.

Bên cạnh những thành tựu trong việc chế tạo những trọng lực kế hoạt động trong điều kiện đặc biệt nêu trên với độ chính xác chưa được cao lắm, nhiều cố gắng đã được thực hiện nhằm nâng cao độ chính xác của trọng lực kế để tiếp cận một số vấn đề. Chẳng hạn như người ta biến đổi các trọng lực kế thăm dò để chúng hoạt động như một máy ghi địa triều tại một điểm cố định, thông thường đặt dưới những căn hầm sâu, nhiệt độ bên ngoài không đổi. Trong điều kiện hoạt động như vậy, độ chính xác khoảng 1 microGal là điều cần thiết để nghiên cứu triều trọng lực.

Trong những năm gần đây, do yêu cầu trong lĩnh vực vi trọng lực (thăm dò trong ngành xây dựng), người ta thiết kế những trọng lực kế có độ chính xác vài microGal. Hãng LaCoste

đã chế tạo vi trọng lực kế đo microGal đầu tiên năm 1968 có độ chính xác gần 2 microGal.

Trong thăm dò trọng lực, ngoài con lắc và trọng lực kế, trước đây người ta còn sử dụng một loại máy đo nữa: cân xoắn. Cân xoắn đầu tiên được thực hiện vào đầu thế kỷ 20 do nhà địa vật lý Hungari, Eotvos và được đưa vào sử dụng trong thăm dò địa vật lý. Máy không đo tuyệt đối hay tương đối g mà đo thành phần gradient ngang của g, dg/dx và dg/dy, tức là gradientometer. Đơn vị của gradient ngang là Eotvos, bằng 10^{-9} Gal/cm hay 1mGal/10km. Nhược điểm của cân xoắn là rất nhạy với những lồi lõm của địa hình quanh điểm đo, việc đo rất chậm. Vì vậy mà hiện nay cân xoắn rất ít được sử dụng.

– Vi trọng lực kế CG–3 :

Nhằm mục đích tăng cường độ chi tiết của phương pháp thăm dò trọng lực, năm 1999 Viện Vật lý Địa cầu Việt Nam đã nhập một máy trọng lực độ nhạy cao CG–3 của hãng máy địa vật lý nổi tiếng Scintrex của Canada. Ưu điểm của loại máy thế hệ mới này là: – Có độ phân dải cao, cỡ 0,005 đến 0,001 mGal, nên có thể sử dụng trong thăm dò vi trọng lực và thiết lập mạng lưới tựa trọng lực.

– Máy đo tự động hoàn toàn nên việc thao tác nhanh, số liệu quan trắc hiện lên trực tiếp trên màn hình và có bộ nhớ lưu trữ cũng như khả năng chuyển tải số liệu từ máy CG–3 vào máy tính, tạo nên sự gắn nối chặt chẽ giữa quá trình quan trắc – phân tích – xử lý số liệu tự động hoá hoàn toàn.

– Số liệu quan trắc được nối kết với một hệ phần mềm xử lý các hiệu chỉnh như : nhiệt độ, độ nghiêng, địa triều, nhiễu, độ ồn và rung động, v.v... nhằm đảm bảo độ chính xác cao trong công tác quan trắc trọng lực.

Bước đầu, nhằm tìm hiểu khả năng ứng dụng của máy CG–3. Viện Vật lý Địa cầu Việt Nam đã tiến hành quan trắc thí điểm nghiên cứu biến thiên trọng lực, tính ổn định của máy cũng như khả năng sử dụng máy CG–3 trong nghiên cứu vi trọng lực ở Việt Nam.

Nguyên lý hoạt động cơ bản của CG–3 là dựa trên cơ sở hệ thống đàn hồi thạch anh. Lực hấp dẫn tác động tới điểm khối lượng được cân bằng bởi một lò xo và lực hồi phục tĩnh điện. Vị trí của điểm khối lượng bị dịch chuyển là do sự thay đổi của giá trị trọng lực. Một giá trị tương đối nhỏ của lực hồi phục tĩnh điện có thể đưa vị trí của điểm khối lượng về vị trí ban đầu. Dòng điện một chiều được chọn sao cho dải đo của máy trọng lực đạt 7000 mGal mà không phải đặt lại. Máy trọng lực CG–3 có bộ phận giảm ảnh hưởng tiếng ồn, ghi tự động với độ phân giải cao, đạt cỡ 0,005 đến 0,001 mGal và vì vậy có thể được sử dụng trong đo trọng lực chính xác cao (đo tựa trọng lực) hoặc nghiên cứu vi trọng lực, hoặc thăm dò trọng lực chi tiết. Phạm vi hoạt động của máy trong giới hạn thay đổi nhiệt độ từ –40°C đến +45°C. Toàn bộ các bộ phận cấu tạo của máy trọng lực được đặt trong môi trường chân không tuyệt đối, đảm bảo cho hoạt động ổn định của hệ thống đàn hồi thạch anh, tạo nên tính ổn định của máy và đảm bảo độ trôi điểm không đạt bé hơn 0,02 mGal/ngày.

Quan trắc thử nghiệm máy trọng lực CG–3 được tiến hành tại phòng Địa động lực, Viện Vật lý địa cầu. Kết quả quan trắc cho thấy:

- Hệ số máy CG–3 lấy bằng 1,16 là ổn định, điều này được biểu hiện bằng sự chồng khớp giữa đường cong biến thiên trọng lực và biến thiên địa triều.
- Vận tốc dịch chuyển điểm không là 0,012 mGal/ngày.
- Độ lệch khỏi tiêu chuẩn của máy trọng lực là rất nhỏ, nhỏ hơn 0,024 mGal/ngày trong điều kiện sử dụng chế độ loại bỏ tiếng ồn và rung động địa chấn.
- Việc tính toán hiệu chỉnh biến thiên địa triều một cách tự động là nhân tố quan trọng để nâng cao khả năng thực hiện các phép đo trọng lực có độ chính xác cao. Có thể sử dụng máy trọng lực CG–3 trong thăm dò vi trọng lực, thậm chí cả ở tỷ lệ rất lớn, cỡ 1/1000 – 1/5000.

§4. TRỌNG LỰC KẾ VỚI TRANG BỊ ĐẶC BIỆT

Trọng lực kế dùng trong thăm dò là những máy "*khỏe*". Chúng có thể được sử dụng trong những điều kiện hoạt động rất khó khăn. Những trục trặc xảy ra thường là do các bộ phận ngoài bản thân bộ phận đo, chẳng hạn như bình điều nhiệt hỏng, độ chân không thay đổi...

Người ta đã thiết kế các loại trọng lực kế dùng cho thăm dò tầm xa. Chúng cho phép thực hiện việc đo đạc từ xa khi các điều kiện đo trọng lực là ở đáy biển trong thăm dò các thềm lục địa. Máy trọng lực kế chuyên đo trên biển được lắp 2 cánh giảm sóc vào con lắc và con lắc được ngâm trong dầu nhờn, nhằm dập tắt dao động do sóng biển.

Chúng ta phải kể đến khả năng mở ra hiện nay cho nhà thăm dò và nhà địa trắc thực hiện những việc đo trọng lực trên tàu và ngay cả trên máy bay, độ chính xác đạt được thực hiện nay vào khoảng 1 mGal khi đo trên tàu và 5 mGal khi đo trên máy bay. Các trọng lực kế này được trang bị đặc biệt để ghi liên tục các biến thiên của g bao gồm cả những gia tốc gây nên do các chuyển động của giá tựa (tàu hoặc máy bay), các biến thiên gia tốc ngàn lần lớn hơn các dị thường trọng lực cần xác định.

CHƯƠNG XI

CÔNG TÁC KHẢO SÁT TRỌNG LỰC NGOÀI THỰC ĐỊA

§1. CÁC LOẠI KHẢO SÁT TRỌNG LỰC

Căn cứ vào nhiệm vụ đặt ra cho công tác thăm dò trọng lực đối với vùng nghiên cứu mà người ta chọn loại khảo sát trọng lực thích hợp : cách bố trí các điểm đo, mật độ điểm đo cũng như độ chính xác đo đạc trọng lực, v.v... theo yêu cầu của từng loại khảo sát đó. Có thể phân biệt loại khảo sát trọng lực chính:

- Khảo sát sơ bộ.
- Khảo sát khu vực.
- Khảo sát chi tiết.

1.1. Khảo sát sơ bộ.

Nhiệm vụ đề ra cho khảo sát trọng lực sơ bộ là nhằm nghiên cứu phân bố trường trọng lực trên những vùng rộng lớn. Kết quả của khảo sát sơ bộ cho ta một bức tranh khái quát về cấu tạo địa chất của vỏ Trái đất trong vùng khảo sát, hoặc phát họa những cấu trúc lớn, dưới sâu hoặc phân vùng các nham trầm tích, phát hiện vùng nâng lên của nền, các vùng trũng, những nếp võng tích tụ các nham thạch trầm tích dày, hoặc phát hiện những đứt gãy sâu của vỏ Trái đất.

Loại khảo sát này tương ứng với bản đồ tỉ lệ từ 1: 2500.000 đến 1: 200.000 hoặc theo tuyến với bước đo từ 2km đến 10km.

1.2. Khảo sát khu vực

Nhiệm vụ là vẽ bản đồ địa chất – địa vật lý khu vực và tìm kiếm khoáng sản, cụ thể là nhằm khoanh những vùng có triển vọng để tiến hành công tác khảo sát địa chất, địa vật lý tỉ mỉ hơn về sau, hoặc phát hiện những cấu tạo địa phương thuận lợi cho sự tích tụ các khoáng sản có ích.

Tỉ lệ bản đồ từ 1: 200.000 đến 1: 10.000 hoặc theo tuyến với khoảng cách từ 150m đến 2000m.

1.3 Khảo sát chi tiết.

Loại khảo sát trọng lực này được tiến hành trên những bản đồ tỉ lệ từ 1: 10.000 đến 1: 1.000 hoặc theo tuyến với bước đo từ 20m đến 150m. Nhiệm vụ của nó là chi tiết hóa chính xác các cấu trúc địa chất đã được phát hiện, nhưng chưa đầy đủ hoặc mới dự đoán, hoặc nghiên cứu những cấu trúc nhỏ, tìm kiếm quặng khoáng sản : sắt, chromit, mangan, sulfur đồng, vàng, muối, than, đá, các mỏ dầu khí... theo các dấu hiệu trực tiếp hoặc gián tiếp của chúng. Trong một số điều kiện thuận lợi, khảo sát chi tiết còn có nhiệm vụ xác định hình dạng, kích thước, thế nằm của thân quặng và đánh giá trữ lượng.

Mật độ của các điểm sẽ tiến hành quan sát trọng lực được chọn sao cho giải quyết được nhiệm vụ địa chất đề ra, tùy theo tỉ lệ bản đồ đo đạc và dựa trên sự đánh giá phỏng chừng bề sâu và kích thước của đối tượng địa chất nghiên cứu. Các điểm đo trọng lực ngoài thực địa cách nhau khoảng từ 10km đến khoảng 20m (thăm dò chi tiết), nhưng nói chung khoảng cách (bước đo) tốt nhất là nhỏ hơn 1,5 độ sâu dự đoán và bằng hoặc nhỏ hơn kích thước dự đoán của đối tượng địa chất. Trong thăm dò dầu khí, mật độ điểm đo thường từ 1 đến 2 điểm trên 4 km^2, vì những cấu trúc địa chất có khả năng tích trữ dầu, thông thường có kích thước lớn (cấu trúc vòm muối có bán kính chỉ vào khoảng 3 – 4 km). Do đó mà tác dụng trọng lực của những cấu trúc đó phải được quan sát trên một vùng rộng lớn, ở những điểm cách nhau khá xa.

Trong thăm dò quặng mỏ, thăm dò trọng lực gần như ít khi được sử dụng dưới dạng khảo sát sơ bộ, mà thường được dùng như một phương pháp thăm dò thẳng chi tiết, nhằm kiểm tra các kết quả phân tích của phương pháp từ hoặc địa điện đã được thực hiện trước đó. Vì vậy nên khoảng cách giữa các điểm đo trọng lực thường được quyết định chủ yếu từ kết quả phân tích của phương pháp thăm dò từ hoặc địa điện chi tiết, cách

nhau từ 10m đến 30m và thông thường, là chính những điểm đo đã tiến hành hai phương pháp đó.

Tùy theo cách bố trí các điểm đo trọng lực ngoài thực địa, người ta phân biệt hai loại đo: Bố trí điểm theo diện tích (gọi là đo diện tích) và bố trí theo tuyến (gọi là đo tuyến).

Đo diện tích là dạng cơ bản của thăm dò trọng lực. Khi đó các điểm đo được phân bố đều khắp trên toàn bộ diện tích vùng công tác ở những vùng mà địa hình không quá phức tạp. Khoảng cách các điểm quan sát gần như nhau và thẳng hàng. Các điểm đo được chọn tại các điểm nút của mạng lưới ô vuông hay chữ nhật để việc xử lý các số liệu đo đạc trọng lực trên máy tính điện tử được thuận lợi hoặc nhằm sử dụng lại các số liệu này khi cần chi tiết hoá một số tuyến nào đó. Ích lợi của đo theo diện là nó cho phép có được phân bố trường trọng lực trên diện tích vùng khảo sát.

Trong loại đo theo tuyến, các điểm quan sát được bố trí trên một tuyến riêng biệt hoặc dọc theo các đường quốc lộ. Kết quả của dạng đo này cho phép có được những nét cơ bản về sự biến đổi của trường trọng lực dọc theo các tuyến, quốc lộ đã chọn. Loại đo theo tuyến thường được sử dụng để khảo sát sơ bộ khái quát (khi đó, các điểm đo được bố trí cách nhau vài km), hoặc nhằm nghiên cứu những cấu trúc địa chất dự đoán hai chiều. Khi đó, các điểm đo được bố trí trên các tuyến vuông góc với phương chạy của cấu trúc ấy. Bố trí điểm theo tuyến thường áp dụng khi cần chính xác hoá những nét đặc biệt của trường trọng lực trên vùng đã được đo theo diện, hoặc nhằm chính xác hóa đối tượng địa chất mà những tài liệu thăm dò thực địa trước đã cho thấy.

Bảng dưới đây trình bày mối quan hệ giữa các loại khảo sát trọng lực tỉ lệ khác nhau và yêu cầu đối với độ chính xác của phép đo trọng lực, độ dày mạng lưới điểm đo. Khi xây dựng phương án công tác, tùy theo điều kiện địa chất cụ thể của vùng nghiên cứu và tính của dị thường, khả năng đạt độ chính xác của tọa độ, độ cao, đặc điểm của máy đo, v.v... để đảm bảo các yêu cầu đặt ra đối với thăm dò trọng lực. Đó là thể hiện được

các đặc điểm của trường dị thường do một đối tượng địa chất cần nghiên cứu gây ra.

Bảng 15. Độ chính xác, mật độ điểm đo cho từng loại khảo sát

Tiết diện bản đồ (mgal)	Tỉ lệ bản đồ và đồ thị tổng kết	Sai số trung bình bình phương (mgal)		Mật độ Điểm	
		Dị thường Bouguer	Giá trị Trọng lực	Đo diện (km^2/ điểm)	Đo tuyến (km^2/ điểm)
10	1: 2.500.000 1: 1.000.000	– 2.5	– 0.8	150 – 400	5 – 10
5	1: 1.000.000 1: 500.000	– 2.0	– 0.5	25 – 100	2.5 – 5
5	1: 5.00.000 1: 200.000	– 1.5	– 0.3	20 – 50	2 – 5
2	1: 2.00.000 1: 100.000	– 0.8	– 0.3	4 – 10	1– 2
1	1: 100.000 1: 50.000	– 0.5	– 0.3	1 – 4	0.5– 1
0.5	1: 50.000 1: 25.000	– 0.2	– 15	0.2 – 1	0.2 – 5
0,2 – 0,25	1: 25.000 1: 10.000	– 0.2	– 0.1	0.2 – 0.5	0.1 – 5
0.1	1: 10.000 1: 5.000	– 0.1	– 0.07	2 – 0.1	0.05 – 15
	1: 5.000 và tỉ lệ lớn hơn	– 0.04	– 0.03	0 – 0.1	0.02 – 0.05

Bảng trên nêu mối quan hệ giữa các loại khảo sát trọng lực tỉ lệ khác nhau với yêu cầu về mật độ điểm đo và độ chính xác đo đạc.

§2 CÔNG TÁC ĐO TRỌNG LỰC NGOÀI THỰC ĐỊA

Yêu cầu của công tác trọng lực ngoài thực địa là giải quyết nhiệm vụ địa chất đã đề ra cho thăm dò trọng lực. Do đó, sau

khi đã chọn hình thức bố trí và độ dày của các điểm đo, công tác đo trọng lực ngoài thực địa còn phải chọn hệ thống điểm tựa trọng lực. Tác dụng của mạng lưới tựa trọng lực là:

- Loại trừ tích lũy sai số khi xác định giá trị trọng lực tại các điểm đo thường.
- Loại trừ ảnh hưởng của độ dịch chuyển điểm không của trọng lực kế.
- Kiểm tra và nâng cao chất lượng đo đạc ở các điểm đo thường (theo tuyến, theo diện).
- Đưa toàn bộ giá trị đo đạc trọng lực về một mức nhất định.

2.1. Mạng lưới điểm tựa quốc gia.

Trong thăm dò trọng lực bằng trọng lực kế, người ta thực hiện đo tương đối – số gia Δg một cách liên tục ở tất cả điểm đo so với một điểm T_o chọn là điểm tựa cho vùng khảo sát. Tại điểm tựa T_o giá trị trọng lực tuyệt đối g_0 đã được xác định chính xác, thường bằng cách quan sát chu kỳ dao động của con lắc kép, hoặc đo chuyền bằng các trọng lực kế có độ chính xác cao từ các đài thiên văn gần đó hay từ các điểm tựa quốc gia.

Thực tế, khi đo trọng lực trên những vùng diện tích lớn, một điểm tựa duy nhất không thuận lợi, vì thông thường việc vận chuyển bằng ô tô không đủ nhanh để đảm bảo yêu cầu quay trở về đo kiểm tra ở điểm tựa sau mỗi 2 giờ. Vì vậy mà việc đầu tiên trước khi bắt đầu công tác ngoài thực địa trên toàn bộ diện tích vùng khảo sát là phải xây dựng mang lưới điểm tựa trọng lực chi tiết để tạo nên một hệ thống chắc chắn các giá trị trọng lực chuẩn, gắn liền với các điểm tựa quốc gia và thống nhất các giá trị đo đạc trên phạm vi toàn quốc, tạo thành một mạng lưới đa giác khép kín, mà cạnh của đa giác là một chuyến đo đạc độc lập.

Khảo sát với tỉ lệ nhỏ trên một diện tích rộng, mạng lưới tựa có thể xây dựng hai cấp. Cấp đầu tiên – cấp I, có độ chính

xác rất cao, tạo thành một hệ thống đa giác khép kín nhưng thưa thớt. Tiếp theo là mạng lưới cấp II, xây dựng dầy đặc hơn, dựa trên các điểm tựa cấp I. Mạng lưới điểm tựa cấp II này là cơ sở chính để tiến hành đo trọng lực ở các điểm đo thường, do đó độ chính xác khi lập mạng lưới tựa cấp II cũng phải thỏa mãn yêu cầu như mạng lưới tựa cấp I.

Khi đo đạc tỉ lệ lớn và vừa, như trường hợp nghiên cứu những yếu tố địa chất địa phương hay thăm dò khoáng sản, mạng lưới tựa thường chỉ cần gắn liền với một điểm tựa gốc nào đó trong vùng công tác (còn gọi là điểm tựa chính).

Các điểm tựa phải được phân bố đều khắp trong vùng khảo sát, ở những nơi đi lại thuận lợi, dễ tìm và thường cách nhau khoảng vài chục km, hoặc ít hơn. Mật độ điểm tựa được chọn phải đảm bảo nội suy tuyến tính độ dịch chuyển điểm không của máy đo trong các chuyến đo ở điểm đo thường. Vì vậy, số lượng điểm tựa được chọn thông thường bằng khoảng $\frac{1}{10}$ số lượng điểm đo thường.

Ngoài ra, vì trọng lực kế cho gia số Δg tại các điểm đo thường so với các điểm tựa, cho nên giá trị trọng lực quan sát tại các điểm tựa cần phải được xác định kỹ lưỡng, với độ chính xác cao, 1,5 đến 2 lần độ chính xác quan sát tại các điểm thường.

Để có một mạng lưới tựa chắc chắn và tin cậy, người ta sử dụng loại trọng lực kế có độ chính xác cao, quan sát nhiều lần, đồng thời rút ngắn thời gian mỗi chuyến đo, tiến hành kiểm tra tại 50% đến 100% tổng số điểm tựa. Việc đo trên mạng lưới tựa còn phải được bắt đầu và kết thúc tại điểm xuất phát mà ta đã xác định gia số trọng lực từ đó. Sau khi khép kín các nhánh độc lập của mạng lưới đa giác, chúng ta được một đại lượng gọi là sai số không liên kết hay sai số khép v. Giống như trong trắc địa, sai số khép trọng lực được phân bố về các cạnh của mỗi đa giác tạo thành mạng lưới tựa.

Độ chính xác của công tác đo trọng lực ở các điểm tựa được thể hiện bởi sai số trung phương ε_t theo công thức:

$$\varepsilon_t = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{s - r}} \qquad (11.1)$$

δ_i – độ chênh lệch của gia số trọng lực trước và sau khi san bằng mạng lưới tựa.

s – tổng số cạnh của hệ thống đa giác.

r – tổng số điểm tựa.

Sau khi đã xây dựng mạng lưới tựa cho vùng công tác, người ta mới tiến hành đo số gia Δg_s ở những điểm đo thường. Khi đó, giá trị trọng lực g_S tại điểm đo thường sẽ bằng $g_S = g_T + \Delta g_S$.

2.2. Công tác đo trọng lực ở điểm đo thường.

Giá trị của số gia Δg_s tại các điểm đo thường (đo khảo sát) được xác định bằng trọng lực kế theo phương pháp đo một lần theo tuyến và kết thúc tại một điểm tựa nào đó, hoặc theo phương pháp đo lập lại toàn phần hoặc một phần các điểm thường đã đo khi đo quay trở về theo đường đi cũ và kết thúc tại điểm tựa xuất phát.

Phương pháp đo một lần, thường được tiến hành trong một ngày. Đầu tiên là đo ở điểm tựa, sau đó đo liên tục giá trị của gia số Δg ở các điểm đo thường. Điểm đo cuối cùng là điểm tựa nào đó.

Khi đo lập lại, mỗi ngày đo đều phải bắt đầu và kết thúc tại cùng một điểm tựa và trong chuyến đo trở về phải đo lặp lại một phần ở các điểm thường, khoảng chừng 1/3 số điểm.

Chuyến đo phải làm sao đi qua tối thiểu 3 điểm tựa để kiểm tra dịch chuyển điểm không. Nếu sự dịch chuyển không phải tuyến tính như mong muốn thì phải bố trí các điểm đo sao cho trên mỗi nhánh của đa giác, dịch chuyển điểm không, được coi là tuyến tính.

Như vậy, bằng cách xây dựng mạng lưới các điểm tựa (T_o. T_1,...,T_n) trình bày ở phần trên, việc vận chuyển bằng ô tô được tổ chức để quay về điểm tựa cũ sau mỗi 2 giờ trong chuyến đo một lần. Bằng cách quay về nhiều lần tại các điểm tựa và điểm thường, ngoài mục đích xác định được độ dịch chuyển điểm không của máy đo và qua đó tính được các giá trị của Δg_s và lấy trung bình, người ta còn loại trừ được tích lũy sai số và nâng cao độ chính xác việc đo ở các điểm đo thường.

Sau cùng, mỗi điểm đo thường s mang một con số tiêu biểu cho gia số Δg_s đó là hiệu số giữa giá trị trọng lực g_s tại s và giá trị trọng lực tại điểm gốc T_o:

$$\Delta g_s = g_s - g_{To} = (g_s - g_{Tn}) + (g_{Tn} - g_{To}) \qquad (11.2)$$

tính bằng mGal.

Tiêu chuẩn dùng để đánh giá độ chính xác của các quan sát trọng lực là sai số trung phương ε một lần quan sát ở các điểm đo thường. Sai số này được tính theo công thức:

$$\varepsilon = \sqrt{\sum \frac{\delta_i^2}{m-n}} \qquad (11.3)$$

trong đó:

δ – độ chênh lệch của giá trị trọng lực quan sát và giá trị trọng lực trung bình.

m – tổng số các lần quan sát tại các điểm kiểm tra.

n – tổng số điểm kiểm tra.

2.3. Công tác trắc địa.

Công tác đo địa hình đóng vai trò quan trọng trong thăm dò trọng lực. Khi đúc kết số liệu đo đạc trọng lực thu được ngoài thực địa bằng trọng lực kế, không những cần phải biết tọa độ (kinh và vĩ độ) của các điểm này nhằm xác định giá trị trọng lực bình thường và đưa điểm quan sát ngoài thực địa lên bản đồ.

Độ chính xác đòi hỏi đối với công tác trắc địa về địa hình thông thường là 5cm cho độ cao z và vào khoảng 10cm cho các

tọa độ x, y nếu muốn có độ chính xác dị thường Bouguer ± 0,02 mGal.

Bảng 16 sau đây nói lên mối quan hệ giữa độ chính xác xác định dị thường Bouguer và sai số giới hạn khi xác định vị trí và độ cao của điểm quan sát.

Bảng 16: Mối quan hệ giữa độ chính xác của dị thường Bouguer và độ chính xác của việc xác định của vị trí và độ cao điểm đo.

Độ chính xác của dị thường Bouguer (mgal)	Tỉ lệ bản đồ Tổng kết	Sai số giới hạn Xác định tọa độ (m)	Độ chính xác Xác định độ cao (m)
± 2,5	1: 2.5.00.000 1: 1.000.000	600	± 10,0
± 2,0	1: 1.000.000 1: 5.00.000	600	± 5,0
±0,8	1: 200.000 1: 100.000	240 120	± 2,5
± 0,4	1: 100.000 1: 100.000	120 660	± 1,0 ± 0,5
± 0,2	1: 500.000 1: 25.000	60 30	±0.3 – 0.25
± 0,8 – 0,1	1: 10.000 1: 5.000	12 6	
± 0,04	1: 5.000 1: 2.000	6 2- 4	± 0.15

§3. SAN BẰNG MẠNG LƯỚI ĐIỂM TỰA.

3.1. Khái niệm.

Giả sử chúng ta tiến hành đo giá trị trọng lực tại các điểm tựa A, B, C theo ba cạnh của tam giác ABC và nhận được các gia số trọng lực Δg_{AB}, Δg_{BC}, Δg_{CA}, khi khép kín tam giác ABC, tổng đại số các gia số trọng lực từ A đến B, B đến C và C đến A phải bằng không. Tuy nhiên trong thực tế tổng đại số của chúng

thường không bằng không, vì tất cả các đo đạc đều chứa sai số. Kết quả là tổng đại số các gia số trọng lực khi trở về điểm tựa xuất phát không triệt tiêu mà bằng một đại lượng nào đó gọi là sai số khép hay sai số không liên kết của mạng lưới. Nói chung, một hệ thống điểm tựa gồm có bao nhiêu mạng kế tiếp thì bấy nhiêu sai số không liên kết. Tồn tại của sai không liên kết đặt ra một bài toán, đó là bài toán bù trừ, còn gọi là san bằng mạng lưới điểm tựa.

Trong thăm dò trọng lực, song song với việc đo trọng lực còn phải tiến hành công tác đo địa hình kế tiếp, tương tự như mạng lưới điểm tựa trọng lực.

Để thấy sự cần thiết cũng như ý nghĩa của sự san bằng các sai số khép, hãy xem một mạng lưới như hình 98, gồm 6 điểm tựa, từ A đến E và việc đo tiến hành theo các đường cạnh của 3 tam giác. Giá trị của g tại A giả sử đã biết, vấn đề là xác định giá trị của g tại E. Bài toán đơn giản này không có nghiệm duy nhất, bởi vì để xác định giá trị tại E từ điểm tựa gốc, chúng ta phải đi bằng nhiều đoạn đường khác nhau, như ABDE, ACE, do đó g tại đó sẽ có giá trị khác nhau. Là một điều tai hại cho việc khai thác đúng đắn kết quả đo trọng lực là khi mỗi điểm tựa không có giá trị duy nhất của g. Vì vậy việc san bằng các sai số khép có mục đích trước hết là nhằm có giá trị đo trọng lực mang tính đơn trị tại bất kỳ điểm tựa nào của mạng lưới. Giá trị trọng lực này không phụ thuộc vào nhánh di chuyển của hệ thống đa giác mà dọc theo đó gia số trọng lực đã được xác định luôn. Vậy cần phải tính cho mỗi cạnh của mạng lưới một hiệu chỉnh a, b, c... sao cho sai số khép trong từng đa giác trở nên bằng không hoặc không đáng kể.

Nhằm đạt mục đích trên, người ta tiến hành san bằng mạng lưới tựa theo nguyên tắc sau : Trong mỗi đa giác, sai số khép được phân bố cho các cạnh tỉ lệ nghịch với trọng số của cạnh tương ứng. Trọng số của một cạnh thường là số lần quan sát trọng lực thực hiện dọc theo cạnh đó.

Nếu gia số trọng lực Δg dọc theo các cạnh của mỗi đa giác được xác định với độ tin cậy như nhau, khi đó sai số khép sẽ

được phân bố đều cho các cạnh ứng với độ tin cậy thấp sẽ tiếp nhận một hiệu chỉnh lớn cho gia số Δg và ngược lại.

Quá trình san bằng được lập lại nhiều lần cho đến khi số khép của từng đa giác của mạng lưới trở nên không đáng kể (bằng hoặc gần bằng không). Khi tiến hành san bằng mạng lưới tựa, chú ý cần phải tuân theo quy ước sau:

Trên mỗi cạnh của đa giác người ta dùng mũi tên để chỉ hướng tăng của trọng lực.

Muốn tính sai số khép (tức là tổng đại số trọng lực Δg trong mỗi đa giác), người ta di chuyển dọc theo các cạnh (nhánh) của đa giác đó theo chiều quy ước, chẳng hạn theo chiều dương. Nếu hướng của đa số trọng lực trùng chiều quy ước thì gia số trọng lực Δg mang dấu +. Gia số trọng lực Δg sẽ mang dấu – trong trường hợp ngược lại.

Để kiểm tra tính đúng đắn của các hiệu chỉnh (phần sai số khép phân bố cho các cạnh), người ta áp dụng tiêu chuẩn sau đây, lần lượt cho từng đa giác thứ i của mạng lưới:

$$\sum_{k=1} \delta_k^i - v_i = 0 \qquad (11.4)$$

Sau một lần san bằng toàn bộ mạng lưới tựa mỗi đa giác sẽ được một giá trị sai số khép mới, nhỏ hơn sai số khép cũ. Người ta tiếp tục lập lại quá trình tính toán đến khi nào sai số khép sau cùng của mỗi đa giác trở nên bé hơn giá trị sai số khép cho phép:

$$v_r = \pm 2\varepsilon\sqrt{\frac{n}{m}} \qquad (11.5)$$

Trong đó: ε là sai số trung phương trong 1 lần đo tại các điểm của mạng lưới tựa.

n – số cạnh của đa giác

m – là số lần quan sát gia số trọng lực tại các điểm.

Biết được giá trị hiệu chỉnh trên mỗi cạnh, chúng ta điều chỉnh giá trị gia số trọng lực dọc theo từng nhánh của mạng lưới.

Sai số trung phương của gia số trọng lực sau khi đã san bằng mạng lưới tựa cho đơn vị trọng số được tính theo công thức:

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1} p\delta_i^2}{n}} \qquad (11.6)$$

Trong đó : δ là hiệu chỉnh cho mỗi cạnh của đa giác; n là số đa giác trong mạng lưới tựa.

Sai số trung phương của gia số trọng lực dọc theo tất cả các cạnh của mạng lưới tựa sẽ bằng:

$$\sigma_m = \pm\frac{\sigma}{\sqrt{p_m}} \qquad (11.7)$$

Trong đó p_m là trọng số trung bình của các trọng số trên các cạnh của mạng lưới.

Để đánh giá chất lượng của mạng lưới tựa, người ta tính giá trị trung bình của sai số trung phương của trọng lực g tại các điểm tựa bằng công thức:

$$\sigma = \pm\frac{\sigma_m}{\sqrt{2}} \qquad (11.8)$$

Có nhiều phương pháp, tối thiểu bình phương, v.v... chúng được sử dụng trong thực tế tùy theo mạng lưới tựa đơn giản hay phức tạp, gồm một số lượng lớn đa giác với những nhánh chằng chịt, cắt lên nhau. Mỗi phương pháp được chọn tùy theo thời gian tính toán cần thiết san bằng bằng tay hoặc trên máy tính điện tử.

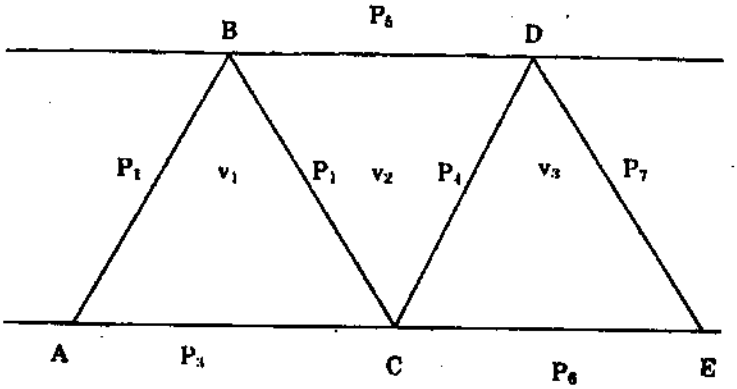
Dưới đây chúng ta hãy xem vài phương pháp san bằng mạng lưới tựa thông dụng trong lĩnh vực trọng lực.

3.2. Phương pháp giải tích

Xét một mạng lưới tựa hình thành bởi ba tam giác kế tiếp 1, 2, 3 (hình 98).

Gọi: v_1, v_2, v_3 lần lượt là sai số khép của các tam giác 1, 2, 3.

- p_1, p_2, p_3 là trọng số của các cạnh AB, BC, AC,...
- n_1, n_2, n_3, là đại lượng nghịch đảo của các trọng số p_1, p_2, p_3 tức $n_1 = 1/p_1$.
- k là lượng sai số khép phân bố cho cạnh mang trọng số đơn vị.



Hình 98: Mạng lưới điểm tựa gồm ba tam giác.

Chúng ta tiến hành san bằng mạng lưới tựa trên bằng phương pháp giải tích như sau:

Ở phía ngoài mỗi tam giác trên hình 98, gần các cạnh, người ta ghi trị số trọng lực g bằng 1/100 mGal quan sát dọc theo cạnh tương ứng.

Thiết lập hệ trong phương trình với ba án số k_1, k_2, k_3 cho tam giác 1, 2, 3, chú ý nguyên tắc phân bố sai số khép tỉ lệ nghịch với trọng số. Khi thiết lập phương trình còn phải chú ý điều kiện trung gian của các cạnh chung của các tam giác tiếp giáp trong thí dụ ở hình 98, cạnh BC của tam giác 1 và 2 cạnh CD của đa giác 2 và 3, do đó khi phân bố số khép trong tam

giác này nhận một lượng sai số bổ sung bằng $\frac{k_2}{p_2}$ từ tam giác 2 chuyển sang, qua trung gian cạnh chung BC = P_2, tức là trong tam giác sai số khép sẽ là $v_1 + \frac{k_2}{p_2}$. Ngược lại, khi phân bố sai số khép v_2 cho các cạnh của tam giác 2 thì tam giác này sẽ nhận một lượng sai số bổ sung bằng $\frac{k_1}{p_2}$ từ tam giác 1 chuyển sang qua trung gian cạnh chung BC, đồng thời nhận một lượng sai số bổ sung nữa $\frac{k_3}{p_4}$ từ tam giác 3 qua trung gian cạnh chung CD (p_4). Kết quả, sai số khép thực sự của tam giác 2 là:

$$v_2 + \frac{k_1}{p_2} + \frac{k_3}{p_4} .$$

Tương tự như vậy, khi hoàn chỉnh san bằng tam giác 3. Áp dụng tiêu chuẩn san bằng (11.4) cho từng đa giác 1, 2, 3, ta được hệ thống phương trình với ba ẩn số k_1, k_2, k_3 sau đây:

Tam giác 1: $$\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right)k_1 - \frac{k_1}{p_2} - v_1 = 0$$

Tam giác 2: $$\left(\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_4}+\frac{1}{p_5}\right)k_2 - \frac{k_1}{p_2} - \frac{k_3}{p_4} - v_2 = 0 \quad (11.10)$$

Tam giác 3: $$\left(\frac{1}{p_4}+\frac{1}{p_6}+\frac{1}{p_7}\right)k_3 - \frac{k_2}{p_4} - v_3 = 0$$

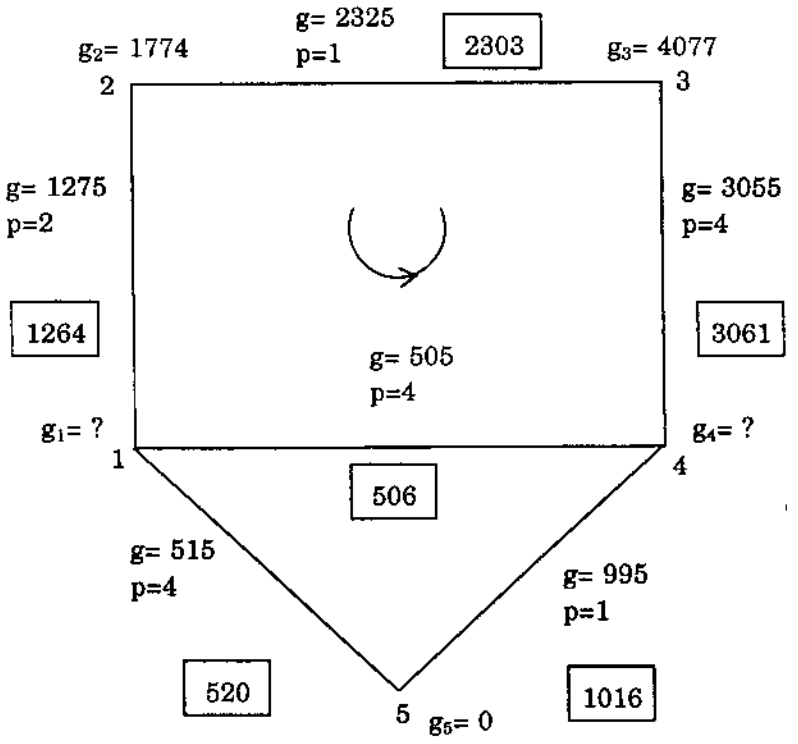
Giải hệ thống phương trình trên, ta được giá trị hệ số k cho mỗi đa giác, tức là được lượng sai số khép (hiệu chỉnh) cần phân bố cho mỗi cạnh, thí dụ như cạnh AB sẽ nhận một hiệu chỉnh bằng $\delta_1^1 = \frac{k_1}{p_1}$, cạnh BC chung của hai tam giác 1 và 2 sẽ nhận một hiệu chỉnh bằng: $\delta_2^1 = \frac{1}{p_2}(k_1 - k_2)$...

Cần chú ý là khi ghi giá trị hiệu chỉnh δ^i cũng phải tuân theo qui ước về hai hướng di chuyển, chẳng hạn $\delta_2^1 = \frac{1}{p_2}(k_1 - k_2)$ là lượng hiệu chỉnh phân bố cho cạnh BC thuộc tam giác 1, ngược lại $\delta_2^2 = \frac{1}{p_2}(k_2 - k_2)$ là lượng hiệu chỉnh cũng phân bố cho BC, nhưng khi đó cạnh BC được xem thuộc tam giác 2.

Chúng ta hãy áp dụng phương pháp giải tích để san bằng mạng lưới tựa sau gồm hai đa giác (hình 99).

Trên hình 99, người ta đã ghi phía ngoài các đa giác, gần các cạnh tương ứng:

- Trọng số p
- Gia số trọng lực Δg, tính bằng $\frac{1}{100}$ mGal quan sát dọc theo các cạnh.



Hình 99: San bằng mạng lưới điểm tựa gồm hai đa giác

Tính giá trị sai số khép. Sử dụng các số liệu cho trước, chúng ta tính giá trị sai số khép v lần lượt trong đa giác 1 và 2: chiều di chuyển qui ước là chiều lượng giác (chiều +, ngược chiều kim đồng hồ):

- Đa giác 1 : $v_1 = +505 + 3055 - 2325 - 1275 = -40$ tức là $v_1 = -0{,}40$ mGal.

- Đa giác 2: $v_2 = +995 - 515 = -25$ tức là $v_2 = -0{,}25$ mGal

Ta hãy tính sai số khép với phép tính v_1 từ công thức (11.5). trong thí dụ cho p = 3 và ε đòi hỏi không được quá ± 0, 17 mGal. Do đó, sai số khép đối với đa giác 1 và 2 là :

- Đa giác 1 : $v_f^1 = -0{,}41$ mGal

- Đa giác 2 : $v_f^2 = -0{,}34$ mGal

So sánh giá trị thực tế và giá trị cho phép của sai số khép trong từng đa giác, ta thấy rằng các kết quả đó khi thiết lập mạng lưới tựa của thí dụ trên thỏa mãn yêu cầu về sai số khép. Trong hình 99, giá trị sai số khép được ghi ở giữa đa giác.

Bây giờ chúng ta hãy tính lượng sai số khép cần phải đưa về cho các cạnh trong mỗi đa giác.

Đối với đa giác 1 và 2, ta có hệ thống phương trình:

$$\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)k_1-\frac{1}{4}k+40=0$$

$$\left(\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}+\right)k_2-\frac{1}{4}k_2+\frac{1}{4}k_1+25=0$$

Giải hệ thống hai phương trình bày ta được:

$$k_1 = -22{,}5,\ k_2 = -20{,}4$$

Như vậy, các cạnh sẽ nhận một lượng sai số khép δ_i^1 bằng:

- Cạnh 1 - 2: $-22{,}5/2 = -11{,}25$;

• Cạnh 2 - 3: – 22,5

• Cạnh 4 - 5: – 20,4

Lưu ý là cạnh chung 1 - 4 nhận hai lượng sai số khép, –5,62 từ đa giác 1 và 5,1 từ đa giác 2. Để kiểm tra các kết quả trên, chúng ta lấy tổng các sai số đã phân về các cạnh trong mỗi đa giác, để ý sai số được chuyển sang đa giác kế cận qua trung gian cạnh chung 1 - 4:

• Đa giác 1 : – 11,25 – 22,50 – 5,63 –5,62 + 5,1 ≈ – 40

• Đa giác 2 : – 20,4 – 5,1 + 5,62 ≈ – 25.

Như vậy là đa giá trị các sai số cần phân bố cho các cạnh của hệ thống đa giác thỏa các phương trình (11.10). Sau khi biết được giá trị các sai số này, chúng ta tiến hành điều chỉnh các gia số trọng lực Δg trên các cạnh tương ứng để có giá trị chắc chắn của các gia số Δg, cần chú ý qui ước về chiều di chuyển. Lần lượt di chuyển theo chiều lượng giác, ta có từ điểm tựa khác dọc theo các cạnh:

$$g_{14} = + 505 + 1 = + 506$$

$$g_{43} = + 3055 + 6 = + 3061$$

$$g_{21} = - 1275 + 11 = - 1264$$

v.v. . .

Kiểm tra các giá trị của gia số lượng trọng lực trên tổng đại số các gia số Δg trong mỗi đa giác phải bằng không:

• Đa giác 1: + 3061 – 2303 – 1264 = 0

• Đa giác 2: + 1016 – 506 – 510 = 0

Khi điều chỉnh giá trị các gia số trọng lực dọc theo các nhánh của mạng lưới, ta xác định được một cách đơn trị giá trị chắc chắn của trọng lực tại các điểm tựa. Trong thí dụ trên, điểm xuất phát của mạng lưới tựa là điểm 5, giá trị trọng lực tại điểm này được chọn bằng 0. Vì vậy, muốn có giá trị trọng lực tại tất cả các điểm tựa của mạng lưới, ta sử dụng giá trị của các gia

số trọng lực; dấu của các giá số Δg cho bởi chiều mũi tên trên cạnh tương ứng, chẳng hạn như:

$$g_1 = g_5 + \Delta g_{51} = +510$$

$$g_2 = g_1 + \Delta g_{12} = +510 + 1264 = +1774$$

v.v. . .

Bảng 17

Cạnh	1– 4	4 – 3	3 – 2	2 –1	5 – 4	4 – 1	1 – 5
Δ g	+ 505	+ 3055	– 2325	– 1275	+ 995	– 505	– 515
p	4	4	1	2	1	4	4
v		–40				–25	
δ	+ 5,62 – 5,1	+ 5,63	+ 22,5	+ 11,25	÷ 20,4	+ 5,1 – 5,62	+ 5,1
v		0				0	
Δ g	+ 506	+ 3061	– 2303	– 1264	+ 1016	– 506	– 510

Cuối cùng, trong hồ sơ đồ san bằng mạng lưới tựa, chúng ta ghi bên các cạnh giá trị của trọng số p, hiệu chỉnh δ và giá trị của gia số trọng lực Δg trước và sau khi san bằng mạng lưới.

3.3. Phương pháp tương quan.

Trong phương pháp san bằng này người ta tiến hành như sau:

– Người ta bắt đầu phân bố sai số khép từ đa giác có sai số khép lớn nhất rồi đến các đa giác giáp với đa giác này.

- Trong quá trình lặp lại, chú ý đến lượng sai số khép nhận được từ các đa giác tiếp giáp chuyển sang các cạnh chung.
- Khi sai số khép trong từng đa giác của hệ thống trở nên không đáng kể, người ta lấy tổng các sai số đã được phân về cho các cạnh và hiệu chỉnh các gia số trọng lực Δg dọc theo mỗi cạnh.

Như trong phương pháp giải tích, sai số khép được phân bố về cho các nhánh theo nguyên tắc tỉ lệ nghịch với trọng số, vì vậy trước hết cần phải tính tỉ lệ phân bố sai số gọi là " số đỏ " của các cạnh trong mỗi đa giác. Số đỏ k_j của cạnh j được tính theo công thức:

$$k_j = \frac{n_j}{\sum n_j} \qquad (11.11)$$

trong đó n_j là đại lượng nghịch đảo của trọng số ứng với cạnh j : $n_j = \frac{1}{p_j}$; $\sum n$ là tổng số các đại lượng nghịch đảo của trọng số trong mỗi đa giác. Ta thấy trong mỗi đa giác, tổng các số đỏ k_j của các cạnh bằng đơn vị.

Sau đây chúng ta hãy áp dụng phương pháp tương quan san bằng mạng lưới tựa cho bởi thí dụ trên.

– Tính giá trị của số đỏ.

Chúng ta tính giá trị các số của tất cả các cạnh của đa giác 1 và 2 theo công thức (11.11)

Đa giác 1

cạnh 1 – 2 $$k_{12} = \frac{1/2}{\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 0,25$$

cạnh 1 – 4 $$k_{14} = \frac{1/4}{\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 0,125$$

Tương tự, ta có: $k_{23} = 0,5$; $k_{34} = 0,125$.

Đa giác 2 : $$k_{14} = \frac{1/4}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 0,166$$

và tương tự: $k_{51} = 0,167$; $k_{45} = 0,667$

Kiểm tra kết quả tính giá trị các số: Tổng số đỏ trong mỗi đa giác phải bằng đơn vị:

- Đa giác 1: 0,25 + 0,5 + 0,125 + 0,125 = 1
- Đa giác 2: 0,167 + 0,166 + 0,567 = 1

Như vậy là giá trị các số đỏ đã được tính đúng.

– Phân bố sai số khép

Chúng ta phân bố sai số khép các cạnh bắt đầu từ đa giác 1 (đa giác có sai số khép lớn nhất, $v_1 = 40$). Muốn có lượng sai số phân bố cho từng cạnh j của đa giác 1, ta chỉ cần lấy v_1 nhân cho giá trị số đỏ tương ứng, chẳng hạng cạnh 1–2 sẽ nhận từ đa giác 1 lượng sai số δ_{12} bằng:

$$\delta_{12} = -40 \times 0,25 = -10 \qquad (0,01\text{mGal})$$

Giá trị này được ghi vào bảng tính và trong hình 99, bên cạnh 1–2

Tương tự, cạnh chung 1– 4 của đa giác 1 nhận một sai số δ_{14} bằng:

$$\delta_{14} = -40 \times 0,125 = -5$$

Giá trị này được ghi vào bảng tính, đồng thời trong hình 99, vào giữa đa giác 2, dưới giá trị sai số khép v_2.

Như vậy sau khi san bằng lần thứ nhất, đa giác 1, đa giác 2 đã nhận của cạnh chung 1– 4 một lượng sai số bổ sung bằng – 5, nghĩa là sai số khép v_2 của đa giác 2 bây giờ là bằng tổng đại số của sai số khép ban đầu (–25) và sai số bổ sung (–5) vừa chuyển qua từ đa giác 1, tức là $v_2 = -25 - 5 = -30$.

Sai số khép mới của hai đa giác 1 và 2 là : $v_1 = 0$, $v_2 = -30$

Bây giờ chúng ta lại tiến hành san bằng mạng lưới, bắt đầu từ đa giác 2 (có sai số khép lớn nhất):

Cạnh chung 1 – 4 nhận một lượng sai số tư đa giác 2 bằng:

$$\delta_{14} = -30 \times 0,166 = -5$$

Chúng ta ghi giá trị này vào bảng tính của cạnh 1 – 4, bên ngoài đa giác 2, đồng thời ghi vào giữa đa giác 1, dưới giá trị sai số khép vòng đầu $v_1 = -40$ (sai số khép v_1 này đã được phân bố cho các cạnh của đa giác 1 ở vòng đầu). Sai số khép của đa giác 1 và đa giác 2 bây giờ là: $v_1 = -5$, $v_2 = 0$.

Sai số khép v_1 lại được phân bố về cho các cạnh:

- Cạnh 2 – 3 $\delta_{25} = -5 \times 0,5 = -2,5$
- Cạnh 1 – 4 $\delta_{14} = -5 \times 0,125 = -0675$

Ta ghi giá trị này vào bảng tính của cạnh 1 – 4 và đồng thời vào giữa đa giác 2, dưới các giá trị sai số khép cũ (-25, - 5).

Như vậy là sau hai lần phân bố, sai số khép bây giờ của đa giác 1 là 0 và của đa giác 2 là – 1. Sai số khép mới $v_2 = -1$ đáng lẻ phải được phân bố một lần nữa cho ba cạnh của đa giác 2, nhưng vì giá trị sai số khép mới này không đáng kể, 1/100 mGal, cho nên chúng ta có thể đưa cạnh ngoài 4 – 5, mang trọng số nhỏ nhất.

Trên đây, chúng ta vừa san bằng mạng lưới tựa bằng phương pháp tương quan, trong đó, sai số khép được phân bố tỉ lệ nghịch với số đỏ của mỗi cạnh. Như trong phương pháp giải tích, để có giá trị chắc chắn của trọng lực tại các điểm tựa của mạng lưới, g_1 và g_4 trong thí dụ trên, chúng ta cần phải hiệu chỉnh giá trị các gia số trọng lực Δg trên các nhánh. Muốn vậy, ta lấy tổng đại số các sai số đã phân bố cho mỗi nhánh (ghi ở bảng tính) và chuyển các kết quả đó vào bên trong đa giác gần cạnh tương ứng. Chú ý là khi chuyển vào trong đa giác, ta phải đổi dấu các sai số. Thí dụ: tổng sai số lần lượt phân bố về cạnh 1 – 2 là: - 10 – 1 = -11. Chuyển vào trong đa giác 1, sai số của cạnh 1 – 2 trở thành +11. Đối với cạnh chung 1 – 4, có hai giá trị sai số : - 5 nhận từ đa giác 1 và – 6 từ đa giác 2 chuyển qua, vì vậy tổng đại số hai giá trị sai số này là: - 5 + 6 = + 1. Giá trị này chuyển qua đa giác 2 trở thành –1.

Kiểm tra các giá trị sai số phân về các cạnh của mỗi đa giác, ta lấy tổng các sai số đã ghi bên các cạnh trong mỗi đa giác:

- Đa giác 1 : + 23 + 6 + 1 = + 40
- Đa giác 2 : - 1 + 21 + 5 = + 25

Đối chiếu với giá trị sai số khép ban đầu của hai đa giác, -40 và -25, chúng ta thấy kết quả tính toán trên là đúng.

Bây giờ chúng ta tính giá trị đúng của các gia số trọng lực Δg đọc theo các nhánh của mạng lưới tựa, chú ý qui ước về chiều di chuyển và hướng của các mũi tên (hướng tăng của Δg), ta được:

- Từ điểm tựa 1 đến điểm tựa 4:

$$\Delta g_{14} = + 505 + 1 = + 506 \quad (0{,}01 \text{ mGal})$$

- Từ điểm tựa 4 đến điểm tựa 3 :

$$\Delta g_{43} = + 3055 + 6 = + 3061$$

- Từ điểm tựa 2 đến điểm tựa 1 :

$$\Delta g_{21} = -1275 + 11 = - 1264$$

- Từ điểm tựa 5 đến điểm tựa 4:

$$\Delta g_{54} = + 995 + 21 = + 1016$$

Biết được giá trị đúng của các gia số trọng lực sau khi đã san bằng mạng lưới tựa, ta tính được giá trị chắc chắn của g tại điểm 1 và 4 từ điểm tựa bất kỳ:

$$g_1 = g_2 + \Delta g_{21} = + 1774 - 1264 = + 510$$

$$= g_5 + \Delta g_{51} = 0 + 510$$

$$g_4 = g_5 + \Delta g_{54} = + 1016$$

$$= g_3 + \Delta g_{34} = + 4077 - 3061 = + 1016$$

So sánh giá trị sai số phân bố cho các cạnh và giá trị trọng lực tại các điểm tựa sau khi đã san bằng mạng lưới bằng

hai phương pháp giải tích và tương quan, chúng ta nhận thấy rõ ràng là kết quả cho bởi hai phương pháp đó là như nhau.

§4. HỆ THỐNG MẠNG LƯỚI TRỌNG LỰC POTSDAM.

Trước đây phương pháp con lắc là phương pháp duy nhất sử dụng để đo tuyệt đối giá trị trọng lực tại nhiều điểm trên thế giới, trong mạng lưới trọng lực quốc gia hay liên quốc gia. Năm 1906, dưới sự chỉ đạo của Helmert, hai ông Kuhnen và Furtwangler đã xác định tuyệt đối g tại Viện Trắc địa Potsdam (Đức) với năm con lắc khối lượng từ 2,86kg đến 6,23kg. Trên cơ sở 192 số liệu thu được, hai ông này đã xác định giá trị tuyệt đối của g tại Potsdam:

$$g\ \text{Potsdam} = 981{,}274\text{Gal}$$

Sau đó, ở các nước khác, người ta cũng tiến hành xác định tuyệt đối g tại một điểm chọn làm điểm xuất phát (hay điểm gốc) cho hệ thống trọng lực trên lãnh thổ của mình. Mặt khác để liên kết các hệ thống trọng lực quốc gia với nhau nhằm tạo thành một hệ thống trọng lực thống nhất trên toàn thế giới, phải tính giá trị trọng lực tại các điểm gốc đó bằng cách chuyển từ giá trị trọng lực của một điểm chọn làm gốc chuẩn. Trong hệ thống quốc tế Potsdam điểm gốc chuẩn được chọn tại Potsdam với giá trị trọng lực bằng g Potsdam = 981,274 Gal, giá trị trọng lực những điểm gốc khác của hệ thống được xác định tương đối với Potsdam bằng phương pháp con lắc hoặc trọng lực kế. Các giá trị trọng lực được xác định như vậy được gọi là giá trị thuộc hệ thống Potsdam, hay giá trị chuyển từ Potsdam. Bảng 18 trình bày kết quả trọng lực đo được tại vài nơi, so sánh với giá trị chuyển từ Potsdam.

Bảng 18. Giá trị trọng lực xác định tuyệt đối ở một số nơi.

Điểm đo	Năm đo	Giá trị trọng lực quan sát g_{qs} (mGal)	Giá trị trọng lực theo hệ thống Potsdam g (mGal)	$g_{qs} - g$ (mGal)
Potsdam	1906	981274,0	981274,0	
Washington	1936	980081,6	980099,0	–17,4
Teddington	1940	981183,2	981196,2	–13,0
Leningrad	1956	981913,3	981931,4	–12,1
Paris	1958	980927,7	980940,5	–12,8
Ottawa	1960	980613,2	980627,9	–14,7
Teddington	1965	981181,0	981194,7	–13,7

Trong bảng này ta thấy rằng các giá trị trọng lực đo tuyệt đối nhỏ hơn giá trị chuyển từ Potsdam vào khoảng 12 – 17 mGal.

Trong những năm sau này, nhờ những thiết bị đo chính xác, người ta tiến hành xác định lại giá trị tuyệt đối của g tại nhiều nơi trên thế giới, bằng con lắc hoặc dùng phương pháp rơi tự do (bảng 19). Theo kết quả đo trọng lực năm 1963, giá trị trọng lực tuyệt đối tại Potsdam là 981260,3 mGal, nhỏ hơn kết quả đo cũ vào khoảng 14mgal. Áp dụng phương pháp rơi tự do với thiết bị là giao thoa kế laser, năm 1971 Hamond–Fauer và Sakuma đã xác định tuyệt đối trọng lực tại tám nơi và đưa ra các số liệu mới. Bảng 19 trình bày các kết quả xác định mới đó và so sánh với giá trị chuyển bằng con lắc Gulf do Woolard và Longfield thực hiện năm 1963 dựa trên giá trị chuẩn tại Potsdam (981274.15 mGal).

Bảng 19

Điểm đo	Giá trị trọng lực (mgal)		Hiệu số (mGal)
	Rơi tự do (1)	Chuyển từ Potsdam (2)	
Teddington	981 181,866	981 195,81	–13,944
Paris	980 925,972	980 939,94	– 13,968
Washington	980 101, 271	980 151,24	–13,969

Trong bảng này, chúng ta cũng thấy rằng giá trị tuyệt đối trọng lực đo được nhỏ hơn giá trị tính chuyển từ Potsdam, mà độ chênh lệch trung bình tại ba điểm đo trên bằng 13,960 mGal. Kết quả này, cùng với số liệu đo ở một số nơi khác trên thế giới đã dẫn đến nhận định là giá trị trọng lực được xác định năm 1906 tại Potsdam phải được hiệu chỉnh một lượng bằng 14,0 mGal. Do đó, phải chọn một hệ thống trọng lực quốc tế mới, thay thế hệ thống Potsdam cũ có giá trị g Potsdam = 981,27 Gal. Hội nghị Hiệp hội Quốc tế Trắc địa và địa vật lý tổ chức tại Moskva năm 1971, đã quyết định chọn giá trị mới cho trọng lực gốc chuẩn tại Potsdam : g Potsdam = 981260,3 mGal, thay cho giá trị cũ : g Potsdam = 981,274 Gal, và chọn công thức trọng lực bình thường khác thay thế cho công thức Cassinis mà hội nghị quốc tế về trắc địa và vật lý địa cầu năm 1930 tại Stockholm đã chọn làm công thức quốc tế.

Công thức của trọng lực bình thường được chọn tại hội nghị Moskva năm 1971 là công thức trọng lực bình thường liên quan tới hệ thống trắc địa chuẩn năm 1976 (Geodetic Reference)

$$g = 976{,}031846\ (1 + 0{,}005278895 \sin^2\varphi - 0{,}000023462 \sin^2 2\varphi)$$

CHƯƠNG XII

ÁP DỤNG CƠ SỞ LÝ THUYẾT XÁC SUẤT THỐNG KÊ ĐỂ BIẾN ĐỔI TỐI ƯU TRƯỜNG DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC

§1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

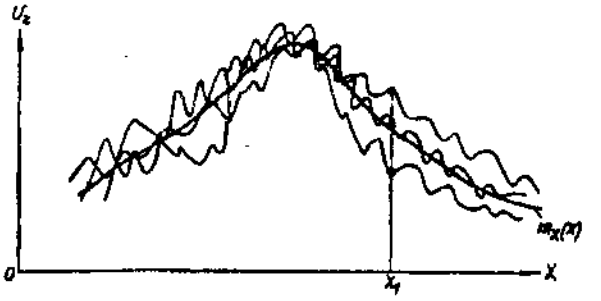
Ta biết rằng mục đích của phương pháp biến đổi trường trọng lực là nhằm xác định các tham số tối ưu cho phép tách ra một cách đầy đủ nhất dị thường của đối tượng địa chất mà ta quan tâm. Việc lựa chọn các tham số tối ưu dựa trên tất cả các thông tin về hình dạng, kích thước, độ sâu, thế nằm,... các thông tin về định lượng và định tính có thể thu nhập được từ những hiểu biết địa chất chung, từ số liệu của các phương pháp nghiên cứu khác cũng như từ việc phân tích chính trường trọng lực. Tất nhiên càng có nhiều thông tin về khối lượng dị thường thì ta càng có thể lựa chọn đáng tin cậy hơn các tham số tối ưu của phương pháp biến đổi.

Tuy nhiên, phần lớn các phương pháp biến đổi trường trọng lực không tính hết được sự đa dạng cũng như đặc trưng ngẫu nhiên của các hiện tượng. Do đó, việc lựa chọn phương pháp biến đối tối ưu cần phải dựa trên những kiến thức về các định luật thống kê của các hiện tượng phản ảnh trong trường trọng lực tổng cộng. Nói cách khác, để giải quyết bài toán cần phải sử dụng công cụ thống kê toán học, đặc biệt là lý thuyết hàm ngẫu nhiên.

- *Hàm ngẫu nhiên* là hàm mà do kết quả thí nghiệm có thể nhận một dạng cụ thể nào đó ta chưa biết trước. Dạng cụ thể này gọi là *hiện thực* của hàm ngẫu nhiên. Khi tiến hành nhiều thí nghiệm trên hàm ngẫu nhiên, ta sẽ được một nhóm hoặc một họ các hiện thực của hàm ngẫu nhiên này.

Lấy thí dụ như trường trọng lực V_z của một vật nào đó có thể coi như hàm ngẫu nhiên của các tọa độ quan sát. Nếu đo trường trọng lực dọc theo mặt cắt trong một vài lần, thì mỗi đường cong $V_z(\lambda)$ sẽ là một hiện thực của hàm ngẫu nhiên và

tập hợp các đường cong này tạo thành một nhóm hay một họ các hiện thực.



Hình 100: Họ các hiện thực của hàm ngẫu nhiên

Mỗi hiện thực là một hàm không ngẫu nhiên (tất định) thông thường, hay nói cách khác, do kết quả của mỗi thí nghiệm nên hàm ngẫu nhiên biến thành một hàm *tất định*. Nếu gán giá trị của đối số $x = x_1$ thì hàm ngẫu nhiên biến thành một đại lượng ngẫu nhiên.

Đối với đại lượng ngẫu nhiên ta thường sử dụng các đặc trưng của nó là kỳ vọng toán học M và phương sai D:

- *Kỳ vọng toán học* M của một đại lượng ngẫu nhiên X được xác định bằng đẳng thức.

$$M(x) = \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad (12.1)$$

trong đó p_i – xác suất các giá trị có thể có x_i của đại lượng ngẫu nhiên X.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Kỳ vọng toán học của đại lượng ngẫu nhiên đôi khi còn gọi là giá trị trung bình của nó.

Công thức (12.1) bao gồm các đại lượng ngẫu nhiên rời rạc. Trong trường hợp X là đại lượng ngẫu nhiên liên tục thì kỳ vọng toán học được xác định bởi tích phân:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \qquad (12.2)$$

trong đó f(x) – mật độ phân bố của đại lượng X.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 1.$$

- Phương sai D của đại lượng ngẫu nhiên X đối với phân bố rời rạc và liên tục được biểu diễn lần lượt bởi các công thức sau:

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 p_i ;$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \bar{x})^2 f(x)dx .$$

Phương sai của đại lượng ngẫu nhiên đặc trưng cho độ tán xạ, tản mạn của nó.

Độ lệch bình phương trung bình (trung phương) được định nghĩa là:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

Hàm ngẫu nhiên được mô tả bằng các đặc trưng tương tự. Nhưng cần lưu ý là đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên là một con số, còn đặc trưng của hàm ngẫu nhiên nói chung là một hàm.

Kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên X(x) là hàm tất định $m_x(x)$, bằng kỳ vọng toán học thiết diện tương ứng của hàm ngẫu nhiên đối với mỗi giá trị của đối số x:

$$m_x(x) = M[X(x)].$$

Kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên là một hàm trung bình nào đó mà xung quanh nó các hiện thực khác nhau của hàm ngẫu nhiên biến đổi một cách khác nhau (hình 101).

Phương sai của hàm ngẫu nhiên X(x) là hàm tất định $D_x(x)$, bằng phương sai thiết diện tương ứng của hàm ngẫu nhiên đối với mỗi đối số x:

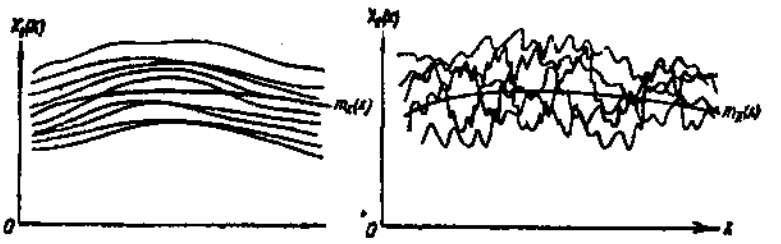
$$D_x(x) = D[(X(x)]. \qquad (12.3)$$

Phương sai của hàm ngẫu nhiên đặc trưng cho tản mạn của hiện thực của hàm đối với kỳ vọng toán học, tức là mức độ ngẫu nhiên của hàm ngẫu nhiên.

Độ lệch bình phương trung bình của hàm ngẫu nhiên được định nghĩa là:

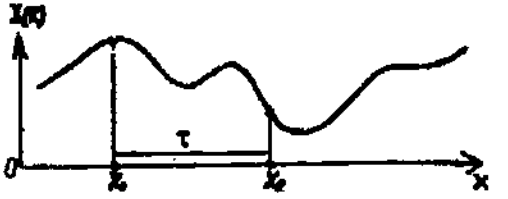
$$\sigma_x(x) = \sqrt{D_x(x)} \qquad (12.4)$$

Kỳ vọng toán học và phương sai là hai đặc trưng quan trọng của hàm ngẫu nhiên, nhưng để mô tả các tính chất của hàm ngẫu nhiên các đặc trưng này vẫn chưa đầy đủ. Thật vậy, khi có cùng kỳ vọng toán học và phương sai, hai hàm $X_1(x)$ và $X_2(x)$ có các dạng khác nhau xác định các hiện thực của chúng: đối với hàm $X_1(x)$ đặc trưng cho sự biến đổi đều, còn đối với hàm $X_2(x)$ – các dao động không đều. Sự khác nhau của tính không đều trong biến đổi của các hàm $X_1(x)$ và $X_2(x)$ không thể mô tả bởi kỳ vọng toán học và phương sai. Khi đó người ta đưa ra một hàm đặc biệt gọi là *hàm tương quan (hàm tự tương quan)*. Hàm tương quan đặc trưng cho mức độ phụ thuộc giữa các thiết diện của một hàm ngẫu nhiên đối với các đối số x khác nhau.



Hình 101: Hiện thực của hai hàm ngẫu nhiên có cùng kỳ vọng toán học và phương sai

Ta xét hai thiết diện của hàm X(x) tương ứng với $X_1(x)$ và $X_2(x)$ (hình 101). Rõ ràng là khi các giá trị $x_1(x)$ và $x_2(x)$ càng gần nhau bao nhiêu, thì các hàm $X_1(x)$ và $X_2(x)$ càng gần nhau bấy nhiêu. Ngược lại, khi tăng khoảng cách giữa các thiết diện, quan hệ giữa $X_1(x)$ và $X_2(x)$ nói chung sẽ giảm.



Hình 102 : Định nghĩa hàm tương quan

Hàm tự tương quan được xác định bởi biểu thức :

$$K_x(x_1, x_2) = M\left\{[X(x_1) - m_x(x_1)]\,[X(x_2) - m_x(x_2)]\right\} \qquad (12.5)$$

Đặt $x_1 = x_2 = x$, ta có :

$$K_x(x, x) = M\{[X(x) - m_x(x)]^2\} = D_x(x)$$

tức là khi $x_1 = x_2$ thì hàm tự tương quan biến thành phương sai của hàm ngẫu nhiên.

Thay cho hàm tương quan $K_x(x_1, x_2)$, ta thường sử dụng hàm tương quan chuẩn hóa:

$$R_X(x_1, x_2) = \frac{K_X(x_1, x_2)}{\sigma_x(x_1)\sigma_x(x_2)} \qquad (12.6)$$

mà $R_X(x_1, x_2)$ chính là hệ số tương quan của đại lượng $X(x_1)$ và $X(x_2)$; khi $x_1 = x_2 = x$, ta có:

$$R_X(x, x) = \frac{K_X(x, x)}{[\sigma_X(x)]^2} = \frac{D_X(x)}{[\sigma_X(x)]^2} = 1$$

Một hàm ngẫu nhiên được gọi là dừng nếu kỳ vọng toán học và phương sai của nó là không đổi, và hàm tương quan chỉ phụ thuộc vào hiệu đối số $x_1 - x_2 = \tau$:

$$m_X(x) = \text{const} \;\; ; \;\; D_X(x) = \text{const}$$

$$K_X(x_1, x_2) = K_X(x_2, x_1) = K_X(\tau).$$

Hàm tương quan chuẩn hóa của một hàm ngẫu nhiên dừng (hệ số tương quan) được xác định bởi biểu thức:

$$R_X(\tau) = \frac{K_X(\tau)}{K_X(0)} = \frac{K_X(\tau)}{D_X}.$$

Hệ số tương quan thay đổi từ 0 đến 1: $R_X(\tau) = 0$ chứng tỏ không có sự tương quan nào giữa X(x) và X(x + τ), $R_X(\tau) = 1$ tương ứng sự tương quan hoàn toàn (hình 103). Khi τ lớn, hàm tương quan trở nên bằng 0; trong phần lớn trường hợp thực tế sự tương quan biến mất khi $R_X(\tau) = 0,3$. Đại lượng khi $R_X(\tau) = 0,3$ gọi là *bán kính tự tương quan R.*

Có khi bán kính tương quan được xem là diện tích giới hạn bởi đường cong $R_X(\tau)$ và trục hoành tức tích phân:

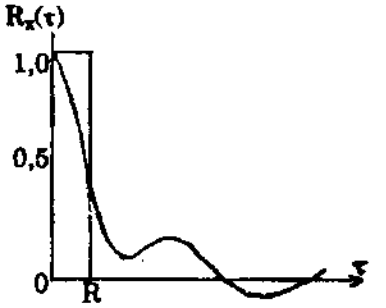
$$R = \int_0^\infty R_X(\tau)d\tau$$

Dạng đường cong $R_X(\tau)$ và bán kính tự tương quan R cho phép ta đánh giá về mức độ biến đổi của hàm X(x) theo sự biến đổi của x. Khi sự tương quan yếu thì đường cong $R_X(\tau)$ giảm nhanh, khi hàm X(x) trơn thì đường cong $R_X(\tau)$ sẽ biến đổi châm. Khi hàm X(x) tuần hoàn, đường cong $R_x(x)$ biến đổi dấu.

Trong phần lớn trường hợp thực tế, hệ số tương quan có thể biểu diễn gần đúng bởi biểu thức.

$$\left.\begin{aligned} R_X(\tau) &= e^{-\frac{\tau^2}{R}} \\ R_X(\tau) &= \frac{N^2}{N^2 + \tau^2} \end{aligned}\right\} \qquad (12.7)$$

trong đó N – số nguyên.



Hình 103: Hàm tương quan của các hàm ngẫu nhiên dừng

§2. DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC LÀ HÀM NGẪU NHIÊN DỪNG.

Các dị thường trong lực có thể coi như hàm ngẫu nhiên dừng do các hiện thực của chúng dao động liên tục xung quanh một hàm trung bình.

Hàm ngẫu nhiên dừng gọi là có *tính ergodic* nếu có một hiện thực cụ thể có thể biểu diễn tốt các tính chất của hàm ngẫu nhiên. Tính chất ergodic là ở chỗ một hiện thực riêng lẻ dưới hàm ngẫu nhiên là hàm đại diện cho tập hợp các hiện thực và có thể thay thế cho tập hợp này.

Sự tiến đến không của hàm tương quan $K_X(\tau)$ khi $\tau \to \infty$ chỉ ra tính ergodic của hàm. Đối với các hàm dừng có tính ergodic, các đặc trưng của chúng được xác định khá đơn giản, đặc biệt là kỳ vọng toán học và hàm tự tương quan có thể tìm gần đúng theo một hiện thực đại diện:

$$M[X(x)] = m_X = \frac{1}{L}\int_0^{+L} X(x)dx; \qquad (12.8)$$

$$K_X(\tau)\frac{1}{L-\tau}\int_0^{L-\tau}[X(x)-m_x][X(x+\tau)-m_X]dx \qquad (12.9)$$

Khi chia khoảng tích phân L thành n phần bằng nhau có chiều dài = L/n, kỳ vọng toán học xác định bởi công thức (12.8) trở thành.

$$m_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i . \qquad (12.10)$$

Tương tự, có thể tính hàm tự tương quan khi $\tau = q\,\Delta x$:

$$K_X(\tau = q\Delta x) = \frac{1}{n-q}\sum_{i=1}^{n-q} X_i^{'}\ X_{i+q}^{'} \qquad (12.11)$$

trong đó: $X_i^{'} = X_i - m_x$.

Khi q = 0

$$D_X = K_X(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^{'}\right)^2 . \qquad (12.12)$$

Việc tính toán hàm tự tương quan được thực hiện đối với q = 0, 1, 2,... đến giá trị q nào đó, khi hàm tương quan trên thực tế trở nên bằng không hoặc bắt đầu dao động xung quanh điểm không. Để xác định m_x và K_x đủ chính xác, số điểm n phải đủ lớn (thường là lớn hơn 100).

Khi nghiên cứu hàm ngẫu nhiên, người ta còn sử dụng rộng rãi biểu diễn phổ của nó. Sự khác nhau giữa biểu diễn phổ các hàm ngẫu nhiên dừng và hàm tất định là ở chỗ biên độ dao động của hàm ngẫu nhiên là một đại lượng ngẫu nhiên. Phổ của hàm ngẫu nhiên dừng được mô tả bởi phân bố phương sai theo các tần số khác nhau như sau:

$$D_X = \int_0^{\infty} G(\omega)\,d\omega \qquad (12.13)$$

trong đó hàm $G(\omega)$ gọi là mật độ phổ của hàm ngẫu nhiên dừng.

Công thức (12.13) là khai triển phương sai D_X thành tổng các số hạng cơ bản $G(\omega)d\omega$, trong đó mỗi số hạng là phương sai ứng với tần số cơ sở $d\omega$ đã cho. Hàm $G(\omega)$ còn gọi là phổ năng lượng của hàm ngẫu nhiên. Phổ năng lượng mô tả thành phần tần số của một quá trình dừng. Đặc trưng này của hàm ngẫu nhiên là không độc lập, mà được xác định bởi hàm tương quan.

Theo định lý Viner hàm tương quan và mật độ phổ có liên quan nhau được xác định bởi hệ thức sau:

$$\left.\begin{aligned} K_X(\tau) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega \\ G(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K_X(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (12.14)$$

Do $K_X(\tau)$ và $G(\omega)$ là hàm lẻ đối với đối số của chúng nên các hệ thức trên có thể viết dưới dạng:

$$\left.\begin{aligned} K_X(\tau) &\int_{0}^{\infty} G(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega \\ G(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K_X(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (12.15)$$

Đối với hàm ngẫu nhiên dừng đẳng hướng (có tính đối xứng tròn) phụ thuộc vào hai tọa độ, công thức (12.13) và (12.15) có dạng:

$$\left.\begin{aligned} D_X = K_X(0) &= \int_{0}^{\infty} G(\omega)d\omega = 2\pi\int_{0}^{\infty} \overline{G}(\omega)\omega\,d\omega \\ K_X(\tau) &= 2\pi\int_{0}^{\infty} \overline{G}(\omega)J_o(\omega\tau)\omega\,d\omega \\ \overline{G}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} K_X(\tau)J_o(\omega\tau)\tau d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (12.16)$$

Các công thức (12.14) và (12.16) có một ý nghĩa rất lớn và được sử dụng rộng rãi trong nghiên cứu phép biến đổi tuyến tính các hàm ngẫu nhiên. Biến đổi tuyến tính là phép biến đổi sao cho toán tử biến đổi có tính cộng được, thí dụ như toán tử vi phân, phép nhân với một hàm xác định. Tất cả các phương pháp biến đổi dị thường trọng lực đều là toán tử tuyến tính.

Trong phép biến đổi tuyến tính hàm ngẫu nhiên dừng, mật độ phổ của nó được nhân cho bình phương môđun đặc trưng tần số của phép biến đổi

$$G_{tr}(\omega) = G(\omega)|\Phi(\omega)|^2 \qquad (12.17)$$

trong đó $G_{tr}(\omega)$ – mật độ phổ của hàm biến đổi.

§3. ỨNG DỤNG ĐỂ XÂY DỰNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TỐI ƯU TRƯỜNG DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC.

Bây giờ ta lấy một thí dụ ứng dụng các công thức đã nhận được ở trên để xây dựng phương pháp biến đổi tối ưu, trong đó cần phải tách một hàm ra từ tổng hai hàm ngẫu nhiên dừng. Bài toán này được Klushin I.G. nghiên cứu.

Giả sử hàm ngẫu nhiên tổng cộng là dị thường trọng lực U quan sát dọc theo một mặt cắt, bao gồm dị thường U_r cần tách ra và dị thường U_n chồng chập lên nó.

$$U = U_r + U_n$$

Hàm U_n có thể biểu diễn cụ thể dưới dạng các dị thường khu vực hoặc địa phương có bậc cao hơn U, dưới dạng sai số quan trắc...

Để có tiêu chuẩn tối ưu của phương pháp biến đổi ta lấy cực tiểu sai số bình phương trung bình gần đúng của dị thường biến đổi U_{rn} đối với giá trị dị thường U_r quan sát được khi không có nhiễu U_n. Khi đó giả thiết rằng các dị thường U_r và U_n không liên quan với nhau (hệ số tương quan bằng không):

$$K_{r,n}(\tau) = K_{n,r}(\tau) = 0.$$

Nếu $G_r(\omega)$ và $G_n(\omega)$ là mật độ phổ của các dị thường U_r và U_n, sau khi biến đổi, mật độ phổ của các dị thường này là:

$$G_r^{(tr)}(\omega) = G_r(\omega)|\Phi(\omega)|^2 \quad ; \quad G_n^{(tr)}(\omega) = G_n(\omega)|\Phi(\omega)|^2 .$$

Đại lượng $G_r(\omega)|1 - \Phi(\omega)|^2$ xác định biến dạng. Giá trị trung bình bình phương của sai số tổng xuất hiện do phép biến đổi nhận được từ biểu thức:

$$\int_0^{\infty}\left[G_r(\omega)|1-\Phi(\omega)|^2+G_n(\omega)|\Phi(\omega)|^2\right]^2 d\omega \qquad (12.18)$$

Đặc trưng của biến đổi $\Phi(\omega)$ phải làm cho tích phân (12.17) có giá trị tối thiểu. Giá trị cực tiểu của tích phân có dạng:

$$\Phi(\omega)=\frac{G_n(\omega)}{G_r(\omega)+G_n(\omega)} \qquad (12.19)$$

Theo biến đổi Fourier, ta nhận được biểu thức đối với hàm U:

$$U_{tr}(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\,\Phi(\omega)d(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}U(\xi,0)e^{-i\omega\xi}d\xi \qquad (12.20)$$

Nếu hàm $\Phi(\omega)$ có tính chất sao cho tích phân $\int_0^{\infty}\Phi(\omega)d\omega$ hội tụ đều, thì khi thay đổi thứ tự tích phân trong vế phải của biểu thức (12.20) ta được.

$$U_{tr}(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(\xi,0)K(\xi-x)d\xi \qquad (12.21)$$

trong đó $$K(\xi-x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(\xi-x)}\frac{G_r(\omega)}{G_r(\omega)+G_n(\omega)}d\omega$$

$$=2\int_0^{\infty}\cos(\xi-x)\frac{G_r(\omega)}{G_r(\omega)+G_r(\omega)}d\omega$$

- Hàm trọng số của phép biến đổi tối ưu.

Trên cơ sở công thức (12.21), ta có thể xây dựng palét. Giả sử điểm quan sát có khoảng cách bằng nhau Δx sao cho $x = n\Delta x$. khi đó biểu thức (12.20) biến thành tổng.

$$U_{tr}(n)=\frac{\Delta x}{2\pi}\left\{U(n)K(0)+\sum_{m=1}^{\infty}[U(n+m)+U(n-m)]K(m)\right\} \qquad (12.22)$$

trong đó

$$K(m)=2\int_0^{\infty}\cos\omega m\Delta x\frac{G_r(\omega)}{G_r(\omega)+G_n(\omega)}d\omega.$$

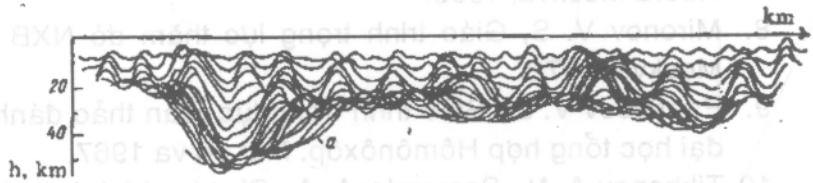
Các trị số K(m) xác định các hệ số của palét. Như vậy, để xây dựng phương pháp biến đổi tối ưu cần phải biết mật độ phổ của dị thường tách ra xác định theo hàm tự tương quan $K_X(\tau)$. Khi tính $G(\omega)$ theo đồ thị $K_X(\tau)$, ta sử dụng tích phân số giải hoặc tính gần đúng $K_X(\tau)$ bởi công thức :

$$K_X(\tau)=\sum_{i=1}^{m} a_i\, e^{-b_i^2\tau^2} \qquad (12.23)$$

khi đó

$$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{b_i}e^{-\frac{\omega^2}{4b_i^2}} \qquad (12.24)$$

Để đánh giá gần đúng $G(\omega)$ và $K_X(\omega)$ có thể sử dụng giá trị trung bình bình phương biên độ của các dị thường tách ra và bán kính tương quan R của chúng. Trên cơ sở công thức (12.22) ta có thể xây dựng phương pháp biến đổi tối ưu cho các trường hợp phân bố dị thường cụ thể. Đối với bài toán ba chiều ta cũng nhận được các công thức của phương pháp biến đổi tối ưu bằng thí dụ tương tự.



Hình 104 : Cấu trúc sâu xác định bằng phương pháp xác suất thống kê

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Beriozkin V. M., Ứng dụng trọng lực thăm dò để tìm kiếm mỏ dầu khí, NXB Nedra, Moskva, 1973.
2. Groushinsky N, P., Xác định trọng lực trên biển, NXB Nedra, Mokva, 1970.
3. Groushinsky N. P., Xagina N.B., Trọng lực thăm dò, NXB Nedra, Mokva, 1972.
4. Groushinsky N. P., Lý thuyết hình thể Trái Đất, NXB Nauka, Moskva, 1976.
5. Heiskanen W. A., Vening Meinesz F.A., The Earth and its gravity field, Mc Graw – Hill Book Company, INC New York, 1958.
6. Michele Caputo, The gravity field of the Earth, Academic press, New York, 1967.
7. Mudretxovoi E. A., Veselov KE., trọng lực thăm dò. NXB Nedra Moskva, 1990.
8. Mironov V. S, Giáo trình trọng lực thăm dò NXB Nedra, Moskva, 1972.
9. Panteleev V. L., Giáo trình trọng lực (bản thảo đánh máy), đại học tổng hợp Hômônôxốp. Mát cơ va 1967.
10. Tikhonov A. N., Samarsky A. A., Phương trình toán lý, NXB Nauka, Lenigrad, 1966.
11. Shmbiriev B., Lý thuyết hình thể trái đất, NXB Nedra, Moskva, 1975.
12. Serkerov S. A., Lý thuyết thế hấp dẫn và thế từ, NXB Nedra, Moskva, 1990.
13. Uspensky D.G., Trọng lực thăm dò , Leningrad, Nedra 1962.
14. Veselov K. E., Xaghitov M.U., Trọng lực thăm dò, NXB, Nedra, Moskva, 1968.
15. Veselov K.E., Xaghitov M.U, Thăm dò trọng lực, Moskva, Nedra, 1964.
16. Zagrebin D. V., Trọng lực lý thuyết nhập môn, NXB Nauka, Leningrad, 1976.

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu.....3

Chương I

CƠ SỞ LÝ THUYẾT VỀ TRƯỜNG TRỌNG LỰC CỦA TRÁI ĐẤT

§1. Trường trọng lực của Trái Đất.....5

§2. Khai triển thế của trọng lực thành chuỗi hàm cầu.....11

§3. Geoid và Spheroid.....15

§4. Giá trị trọng lực khai triển thành chuỗi hàm cầu.....20

§5. Công thức trọng lực bình thường.....21

§6. Công thức trọng lực bình thường dạng hàm cầu.....28

§7. Các mẫu hình trọng trường Trái đất.....28

Chương II

DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC VÀ CÁC LOẠI HIỆU CHỈNH

§1. Khái niệm về dị thường trọng lực.....30

§2. Hiệu chỉnh khoảng không.....31

§3. Ý nghĩa vật lý của hiệu chỉnh khoảng không.....33

§4. Hiệu chỉnh lớp trung gian và hiệu chỉnh Bouguer (Bughê).....34

§5. Hiệu chỉnh địa hình.....36

§6. Hiệu chỉnh Prey (Prây).....40

§7. Minh họa ý nghĩa vật lý của các hiệu chỉnh.....41

§8. Hiệu chỉnh trong lực và dị thường trọng lực Bouguer ở biển.....43

Chương III

NGHIÊN CỨU CẤU TRÚC SÂU CỦA TRÁI ĐẤT BẰNG DỊ THƯỜNG TRONG LỰC

§ 1. Các giả thuyết về đẳng tĩnh 47
1.1. Mô hình đẳng tĩnh theo giả thuyết Pratt (Prat).....47
1.2. Mô hình đẳng tĩnh theo giả thuyết Airy (E-ri) 48
§ 2. Mối liên hệ giữa bề dày vỏ Trái Đất với độ cao địa hình.....51
§ 3. Mối liên hệ giữa dị thường trọng lực với bề dày vỏ Trái Đất và trạng thái đẳng tĩnh.....52
3.1. Dị thường khoảng không.....53
3.2. Dị thường Bouguer 53
3.3. Xét trường hợp ở vùng biển 54
§ 4. Hiệu chỉnh đẳng tĩnh, liên hệ giữa dị thường đẳng tĩnh với các dị thường trọng lực 59
4.1. Hiệu chỉnh đẳng tĩnh 59
4.2. Liện hệ giữa dị thường đẳng tĩnh, dị thường khoảng không và dị thường Bouguer.....61

Chương IV

HÌNH THỂ TRÁI ĐẤT XÁC ĐỊNH BẰNG TRỌNG LỰC

§ 1. Thế nhiễu và điều kiện biên.....63
1.1 Thế nhiễu 63
1.2. Công thức Bruns 64
1.3. Điều kiện biên cho thế nhiễu 65
§ 2. Bài toán Stokes.....67
§ 3. Chuỗi Stokes, công thức Stokes cho độ cao Geoid.....68
3.1. Chuỗi Stokes cho độ cao Geoid 68
3.2. Công thức Stokes cho độ cao Geoid.....70
§ 4. Bản đồ Geoid.....73
§ 5. Phương pháp trắc đạc độ cao vệ tinh và tính dị thường trọng lực từ độ cao Geoid 75

§ 6. Độ lệch dây dọi 77
6.1. Độ lệch dây dọi xác định qua độ cao Geoid 77
6.2. Hai thành phần chiếu của độ lệch dây dọi 79
6.3. Công thức Vening - Meinesz cho độ lệch dây dọi 80
6.4. Tính chất của hàm Vening – Meinesz 82
6.5. Công thức thực hành 83

Chương V

BÀI TOÁN THUẬN CỦA TRỌNG LỰC THẶM DO

Khái niệm 86
§ 1. Bài toán thuận đối với một số vật thể 3 chiều 87
1.1 Biểu thức tổng quát cho các vật thể hình dạng bất kỳ 87
§ 2. Bài toán thuận đối với các vật thể có dạng hình học đơn giản ba chiều 91
2.1. Hình cầu đặc 91
2.2. Hình hộp chữ nhật 93
§ 3. Bài toán thuận đối với một số vật thể hai chiều 94
3.1 Hình trụ tròn, thanh nằm ngang 95
3.2. Hình trụ nằm ngang tiết diện chữ nhật 98
3.3. Thanh thẳng đứng, hình trụ thẳng đứng hữu hạn 99
3.4. Dải mỏng nằm ngang 100
3.5. Nửa mặt phẳng nằm ngang 101
3.6. Dải thẳng đứng cao hữu hạn 102
3.7. Vỉa thẳng đứng cắm xuông vô cực 102
3.8. Bậc thẳng đứng 106
3.9. Vỉa nằm nghiêng 108
§ 4. Bài toán thuận đối với vật thể có dạng bất kỳ 110
4.1. Palet Young (palet cực) 110
4.2. Palet Hamburgsev 113
4.3 Phương pháp xấp xỉ vật thể bằng tập hợp các vật cơ bản có dạng hình học đơn giản 113

Chương VI

BÀI TOÁN NGƯỢC CỦA TRỌNG LỰC THĂM DÒ

Khái niệm 116
§ 1. Phân tích định tính và định lượng 117
§ 2. Bài toán ngược cho dị vật có dạng đơn giản 118
2.1. Hình cầu đặc 118
2.2. Hình trụ nằm ngang dài vô tận 119
2.3. Nửa mặt phẳng nằm ngang 119
2.4. Bậc thẳng đứng 120
§ 3. Bài toán ngược cho dị vật có dạng tuỳ ý 120
3.1. Xác định khối lượng và toạ độ khối tâm 120
3.2. Phương pháp lựa chọn đối với dị vật phức tạp 124
§ 4. Trường hợp mặt phân cách hai môi trường địa chất có mật độ khác nhau 126
4.1. Đánh giá độ sâu giới hạn theo phương pháp Fisher 126
4.2. Xác định độ sâu mặt phân cách hai mật độ 128
4.3. Phương pháp Tsuboi, Tomada và Aki xác định độ sâu mặt phân cách hai mật đô 129
§ 5. Tính tương đương và tính đa trị của nghiệm 130
§ 6. Tính không chỉnh của bài toán ngược 131
§ 7. Tính chỉnh có điều kiện theo Tikhonov 133
§ 8. Các phương pháp giải bài toán không chỉnh 135
8.1. Phương pháp lựa chọn dựa trên cơ sở thuật toán điều chỉnh 135
8.2. Khái niệm về thuật toán điều chỉnh 137
8.3. Phương pháp cực tiểu hoá phiếm hàm 138
8.4. Phương pháp phiếm hàm điều chỉnh 139
8.5. Phương pháp giả nghiệm 140
§ 9. Bài toán lựa chọn tham số điều chỉnh α 142

9.1. Lựa chon α theo phương pháp cực tiểu hoá phiếm hàm 142
9.2. Lựa chon α theo phương pháp biến phân 143

Chương VII

CÁC PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TRƯỜNG TRỌNG LỰC

Khái niệm 145
§ 1. Phương pháp trung bình hóa 146
§ 2. Biến đổi trường trên cơ sở nghiệm bài toán biên Dirichlet 148
2.1. Tích phân Poisson 148
2.2. Tiếp tục giải tích trường lên cao 150
2.3. Tiếp tục giải tích trường xuống dưới 154
§ 3. Đường đặc trưng độ sâu Klushin 158
3.1. Trường hợp trung bình hoá 158
3.2. Trường hợp chuyển trường lên cao 160
§ 4. Biến đổi trường thành đạo hàm các bậc của thế trọng lực dựa trên cơ sở nghiêm bài toán biên Neumann 164
§ 5. Phương pháp Gradient chuẩn hoá 166
5.1. Giới thiệu phương pháp 167
5.2. Xây dựng mặt cắt phân bố gradient chuẩn hoá và phân tích 169
5.3. Phương pháp của Beriozkin 170
5.4. Phương pháp chuẩn hoá theo diện 171
5.5. Phương pháp gradient chuẩn hoá ba chiều 172

Chương VIII

BIẾN ĐỔI TRƯỜNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHỔ

§ 1. Từ chuỗi Fourier đến tích phân Fourier 176
§ 2. Tích phân Fourier dạng phức 177

§ 3. Các định lý về phổ 179
3.1. Định lý chồng chất 179
3.2. Định lý về phổ của đạo hàm 180
3.3. Định lý về phổ của đạo hàm theo hàm số 180
3.4. Định lý năng lượng (Định lý Parseval) 181
3.5. Định lý về phổ của hàm dịch chuyển 182
3.6. Định lý tích chập 182
§ 4. Áp dụng định lý tích chập để biến đổi trường như phép lọc tần số. 183
§ 5. Áp dụng đinh lý về phổ của đạo hàm theo tham số cho dị thường trọng lực 185
5.1. Ví dụ: Dị vật hai chiều bất kỳ 186
5.2. Ví dụ: Hình trụ tròn nằm ngang vô hạn 188
§ 6. Biến đổi Fourier cho trường hợp ba chiều 191
§ 7. Phổ của đạo hàm dị thường trọng lực theo tham số (ba chiều) 193
§ 8. Phép biến đổi Fourier rời rạc 195

Chương IX

BIẾN THIÊN TRỌNG LỰC VÀ ĐỊA TRIỀU

§ 1. Thế tạo triều 198
§ 2. Các hằng số Love 201
§ 3. Thiếp lập mối liên hệ giữa các hằng số δ, γ với h và k 203
§ 4. Các loại sóng triều 208
§ 5. Phương pháp quan sát địa triều 214

Chương X

PHƯƠNG PHÁP ĐO VÀ MÁY ĐO TRỌNG LỰC

Khái niệm 217
§ 1. Phương pháp đo trọng lực tuyệt đối 218
1.1. Con lắc toán học 218

1.2. Con lắc vật lý 219
1.3. Con lắc thuận nghịch 220
1.4. Vật rơi tự do 221
§ 2. Phương pháp đo trọng lực tương đối 222
2.1. Phương pháp động – con lắc 222
2.2. Phương pháp tĩnh – trọng lực kế 224
§ 3. Máy đo trọng lực – một số máy phổ biến 236
3.1. Trọng lực kế LaCoste – Romberg 236
3.2. Trọng lực kế Askania 239
3.3. Trọng lực kế Worden 239
3.4. Trọng lực kế Liên Xô (cũ) thế hệ sau loại Gak 241
3.5. Trọng lực kế có độ chính xác cao 243
§ 4. Trọng lực kế với trang bị đặc biệt 246

Chương XI

CÔNG TÁC KHẢO SÁT TRỌNG LỰC NGOÀI THỰC ĐỊA

§ 1. Các loại khảo sát trọng lực 247
1.1 Khảo sát sơ bộ 247
1.2. Khảo sát khu vực 247
1.3 Khảo sát chi tiết 248
§ 2. Công tác đo trọng lực ngoài thực địa 250
2.1. Mạng lưới điểm tựa quốc gia 251
2.2. Công tác đo trọng lực ở điểm đo thường 253
2.3. Công tác trắc địa 254
§ 3. San bằng mạng lưới điểm tựa 255
3.1. Khái niệm 255
3.2. Phương pháp giải tích 259
3.3. Phương pháp tương quan 264
§ 4. Hệ thống mạng lưới trọng lực Potsdam 269

Chương XII

ÁP DỤNG CƠ SỞ LÝ THUYẾT XÁC SUẤT THỐNG KÊ ĐỂ BIẾN ĐỔI TỐI ƯU TRƯỜNG DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC

§ 1. Cơ sở lý thuyết.....272

§ 2. Dị thường trọng lực là hàm ngẫu nhiên dừng.....278

§ 3. Xây dựng phương pháp biến đổi tối ưu trường dị thường trọng lực 281

Tài liệu tham khảo 284

TRẦN VĂN NHẠC

PHƯƠNG PHÁP TRỌNG LỰC
TRONG ĐỊA VẬT LÝ

Chịu trách nhiệm xuất bản : GS.TS. TÔ ĐĂNG HẢI
Biên tập : TRỊNH QUANG TRUNG
ĐOÀN THANH ĐIỀN
Sửa bài : TRẦN VĂN NHẠC
ĐOÀN THANH ĐIỀN
Bìa : QUANG MINH

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội
CHI NHÁNH NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
28 Đồng Khởi – 12 Hồ Huấn Nghiệp, Q.1, Tp.HCM
Đt: (08) 8225062 – 8296628 – 8290228

Mã số $\frac{551.4}{\text{KHKT - 2007}}$ 75 – 2007/CXB/462 – 02/KHKT

In 800 cuốn, khổ 16 x 24 cm, tại công ty in Lê Nhân. Giấy phép xuất bản số 75 – 2007/CXB/462 – 02/KHKT. In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2008.

PHƯƠNG PHÁP TRỌNG LỰC TRONG ĐỊA VẬT LÝ

- Cuốn sách giới thiệu bạn đọc các ứng dụng của ngành trọng lực trong các lĩnh vực Khoa học trái đất như nghiên cứu cấu trúc địa chất sâu, hình thể Trái đất... tìm kiếm khoáng sản.
- Sách viết cô đọng và sinh động. Các kết quả nghiên cứu Khoa học của Việt Nam được tác giả sử dụng làm ví dụ, minh họa cho lý thuyết.
- Sách dùng làm giáo trình cho các sinh viên đại học và cao học và tài liệu tham khảo tốt cho các cán bộ công tác trong ngành địa vật lý.

207106

8 935048 971062

Giá : 38.000đ