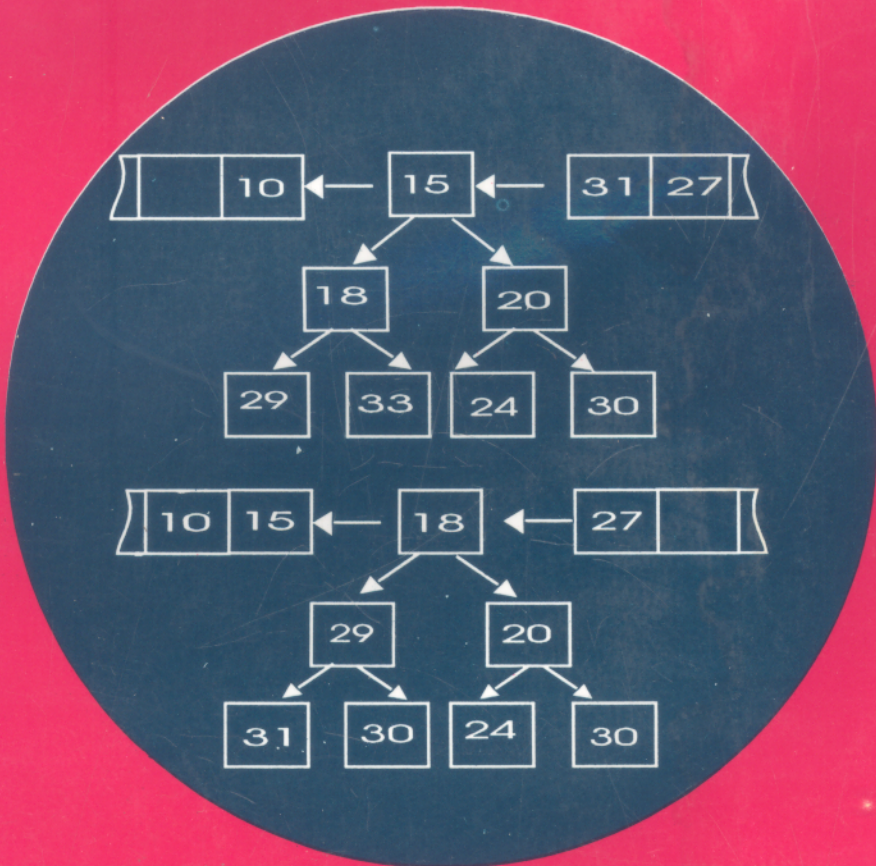


ĐỖ ĐỨC GIÁO

CƠ SỞ TOÁN TRONG LẬP TRÌNH



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

Pgs, Pts. ĐỖ ĐỨC GIÁO

CƠ SỞ TOÁN TRONG LẬP TRÌNH



**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 1998**

5 - 519

544 - 1 - 7/98
KHKT - 98

LỜI GIỚI THIỆU

Cuốn "Cơ sở toán trong lập trình" trình bày các vấn đề toán học cơ bản nhất, nhưng lại hết sức thiết yếu và cần thiết đối với những ai muốn có được các kiến thức tin học vững chắc. Đó cũng là nội dung các kiến thức cần thiết cho các sinh viên Tin học ở trường Đại học Tổng hợp trước đây, nay là trường Đại học Khoa học Tự nhiên, nó cũng là kiến thức cơ bản cho sinh viên chuyên ngành Tin học và Công nghệ thông tin ở các trường đại học khác trong nước cũng như trên thế giới. Tác giả đã có nhiều cố gắng trong việc trình bày tinh giản một khối lượng kiến thức đồ sộ.

Đọc xong cuốn sách này, người đọc có đủ kiến thức cơ bản về toán để có thể hiểu được sâu sắc các vấn đề trong tin học và không có các kiến thức này thì không thể hiểu được bản chất các khái niệm cơ bản trong công nghệ thông tin hiện đại.

Cuốn sách này sẽ giúp ích cho tất cả những ai muốn học chuyên ngành Tin học, ngoài ra cũng là tài liệu tham khảo cho sinh viên chuyên ngành Công nghệ thông tin, đồng thời nó cũng rất có ích cho những ai sau vài năm làm công tác tin học, nay muốn chuẩn bị điều kiện để trau dồi thêm kiến thức mới, thêm kiến thức hiện đại và thêm kiến thức ở bậc sau đại học.

Pgs, Pts. Nguyễn Quốc Toàn

PHÓ CHỦ NHIỆM KHOA CNTT

ĐẠI HỌC KHTN - ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn “*Cơ sở toán trong lập trình*” bao gồm nội dung một số giáo trình thuộc lĩnh vực “*Đảm bảo toán học cho khoa học máy tính*” đang được giảng dạy cho sinh viên và học viên cao học ngành Tin học và Công nghệ thông tin ở trường Đại học Quốc gia Hà nội.

Cuốn sách nhằm cung cấp một cách hệ thống những khái niệm và kiến thức cơ bản nhất của toán học trong khoa học máy tính, đặc biệt trong lĩnh vực lập trình. Những khái niệm và kiến thức đề cập trong cuốn sách này được viết dưới dạng tình giản và dễ hiểu, nhưng lại hết sức thiết yếu và cần thiết cho người đọc muốn có được các kiến thức tin học vững chắc và muốn hiểu được bản chất của các khái niệm cơ bản trong Công nghệ thông tin hiện đại như Pgs. Nguyễn Quốc Toàn đề cập trong lời giới thiệu.

Nội dung cuốn sách không nằm ngoài nội dung chương trình đào tạo cử nhân Tin học, cử nhân Công nghệ thông tin và sau đại học của trường Đại học Khoa học Tự nhiên thuộc Đại học Quốc gia Hà Nội. Vì vậy đối tượng phục vụ của cuốn sách này là tất cả những ai muốn học ngành cử nhân Tin học và cử nhân Công nghệ thông tin hệ chính quy cũng như hệ tại chức ở các trường đại học trong cả nước. Cuốn sách còn là một tài liệu tham khảo cho những ai muốn thi và học cao học ngành Công nghệ thông tin, đồng thời nó cũng rất bổ ích đối với những người làm công tác tin học như là một công cụ phục vụ cho lĩnh vực chuyên môn của mình.

Trước hết để giúp cho sinh viên và học viên ngành Tin học và Công nghệ thông tin của trường Đại học Khoa học Tự nhiên có tài liệu học tập,

nhằm khắc phục tình trạng “học chay” như hiện nay, đồng thời nhằm một bước nâng cao chất lượng đào tạo của trường Đại học KHTN, chúng tôi mạnh dạn viết cuốn sách này trong hoàn cảnh khả năng trình độ có hạn, thời gian đầu tư suy nghĩ để viết không được nhiều nên chắc chắn cuốn sách không tránh khỏi những khiếm khuyết. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn và tiếp thu mọi ý kiến của bạn đọc. Thư góp ý xin gửi về : Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ Thuật - 70 Trần Hưng Đạo Hà Nội.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Pgs. Nguyễn Quốc Toàn (Phó chủ nhiệm khoa CNTT) đã đọc và viết lời giới thiệu cho cuốn sách; xin cảm ơn Pts. Vũ Ngọc Loan (Trung tâm tin học ứng dụng - Trường Đại học Khoa học Xã hội và Nhân văn - ĐHQG Hà Nội) đã đọc bản thảo và cho nhiều ý kiến đóng góp về nội dung; cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Công nghệ thông tin và trường Đại học Khoa học Tự nhiên đã có chủ chương động viên cán bộ giảng dạy tham gia viết giáo trình phục vụ sinh viên học tập, cảm ơn Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để cuốn sách sớm đến tay bạn đọc.

Tác giả

CHƯƠNG 1

KHÁI NIỆM THUẬT TOÁN - PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP - PHƯƠNG PHÁP ĐỆ QUY

§1. KHÁI NIỆM THUẬT TOÁN

1. Thuật toán là gì

Thuật toán là một khái niệm quan trọng của toán học. Nói đến thuật toán là nói đến một dãy các quy tắc, nhằm xác định một dãy các thao tác trên một đối tượng, sao cho sau một số hữu hạn bước thực hiện các thao tác ta đạt được mục tiêu cần làm.

2. Các đặc trưng của thuật toán

- *Tính dừng*: Sau một số hữu hạn bước thuật toán phải dừng.

- *Tính xác định*: Ở mỗi bước, các bước thao tác phải hết sức rõ ràng, không gây nên sự nhập nhằng. Nói rõ hơn là trong cùng một điều kiện hai bộ xử lý cùng thực hiện một bước của thuật toán phải cho những kết quả như nhau.

- *Tính hiệu quả*: Trước hết thuật toán cần đúng đắn, nghĩa là sau khi đưa dữ liệu vào thuật toán sẽ hoạt động và đưa ra kết quả như ý muốn.

- *Tính phổ dụng*: Thuật toán có thể giải bất kỳ một bài toán nào trong lớp các bài toán. Cụ thể là thuật toán có thể có các đầu vào là các bộ dữ liệu khác nhau trong một miền xác định.

- *Yếu tố vào ra*: Đối với một thuật toán luôn có một đối tượng vào (input) và đối tượng ra (output).

3. Ngôn ngữ thuật toán

- Ngôn ngữ dùng để miêu tả thuật toán gọi là ngôn ngữ thuật toán.

- Thuật toán thường được mô tả bằng một dãy các lệnh. Bộ xử lý sẽ thực hiện các lệnh đó theo một trật tự nhất định cho đến khi gặp lệnh dừng thì kết thúc.

- Ngôn ngữ thuật toán bao gồm: Các đối tượng và các quy tắc liên kết các đối tượng đó với nhau. Các đối tượng ban đầu gọi là *đối tượng nguyên thủy* hay là *các đối tượng cơ sở*.

- Ngôn ngữ thuật toán bao gồm ba loại:

- + Ngôn ngữ liệt kê từng bước;
- + Sơ đồ khối;
- + Ngôn ngữ cấu trúc.

a) Ngôn ngữ liệt kê từng bước nội dung như sau:

1. Thuật toán: Tên thuật toán và chức năng.
2. Vào: Dữ liệu vào với tên kiểu.
3. Ra: Các dữ liệu ra với tên kiểu.
4. Biến phụ (nếu có) gồm tên kiểu.
5. Hành động là các thao tác với các lệnh có nhãn là các số tự nhiên.

Ví dụ : Để giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, ta có thể mô tả thuật toán bằng ngôn ngữ liệt kê như sau:

Bước 1: Xác định các hệ số a, b, c .

Bước 2: Kiểm tra xem hệ số a có khác 0 hay không ?

Nếu $a = 0$ quay lại thực hiện bước 1.

- Bước 3: Tính biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Bước 4: Nếu $\Delta < 0$ thông báo phương trình vô nghiệm và chuyển đến bước 8.
- Bước 5: Nếu $\Delta = 0$, tính $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ và chuyển sang bước 7.
- Bước 6: Tính $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ và chuyển sang bước 7.
- Bước 7: Thông báo các nghiệm x_1, x_2 .
- Bước 8: Kết thúc thuật toán.

b) Sơ đồ khối

Để mô tả thuật toán bằng sơ đồ khối ta cần dựa vào các nút sau đây:

- *Nút thao tác*: Biểu diễn bằng hình chữ nhật, trong đó ghi câu lệnh cần thực hiện. Nếu có nhiều câu lệnh liên tiếp cần được thực hiện thì chúng có thể được viết chung trong một hình chữ nhật.



Nút thao tác

- *Nút điều kiện*: Được biểu diễn bằng hình thoi, trong đó ghi điều kiện cần kiểm tra trong quá trình tính toán.



Nút điều kiện

- *Nút khởi đầu, kết thúc*: Thường được biểu diễn bằng hình tròn thể hiện sự bắt đầu hay kết thúc quá trình.



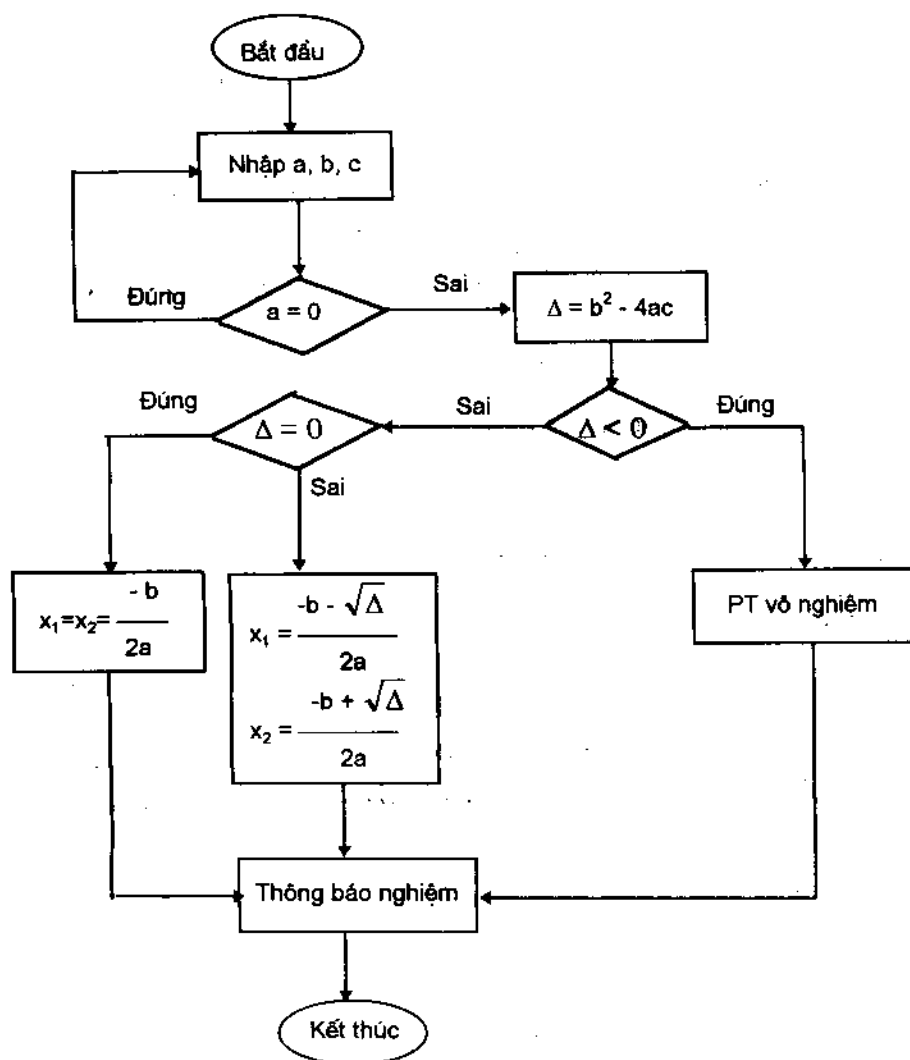
Nút khởi đầu,
kết thúc

- *Cung*: Là đoạn nối từ nút này đến nút khác và có mũi tên chỉ hướng.



Cung

Ví dụ: Để giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ta có thể mô tả thuật toán bằng phương pháp sơ đồ khối sau:



c) Ngôn ngữ lập trình

Để giải các bài toán, trong thực tế bằng máy tính người ta thường sử dụng một loại ngôn ngữ, gọi là *ngôn ngữ lập trình*, chẳng hạn như ngôn ngữ lập trình Cobol, Algol, Pascal, v.v... Chương trình chính là một dãy hữu hạn các câu lệnh được viết theo một quy tắc nhất định trên một ngôn ngữ lập trình nào đó. Hay nói cách khác để giải một bài toán trước hết cần có một thuật toán để giải bài toán đó. Để máy tính hiểu được

thuật toán, người ta sử dụng một ngôn ngữ lập trình cụ thể để diễn đạt thuật toán thông qua ngôn ngữ đó.

Ví dụ: Để giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ta mô tả thuật toán bằng một chương trình viết trên Pascal như sau:

```

Program Giai_phuong_trinh_bac_hai;
var
    a,b,c,denta:real;
BEGIN
    clrscr;
    write('Nhap he so : ');
    repeat
        write('a:= '); readln(a);
        write('b:= '); readln(b);
        write('c:= '); readln(c);
    until a<>0;
    denta:=sqrt(b) - 4*a*c;
    if denta < 0 then
        begin
            write('phuong trinh vo nghiem');
            halt;
        end
    else
        begin
            if denta=0 then
                begin
                    write('phuong trinh co nghiem kep x=',(-b)/(2*a));
                    exit;
                end
            else
                begin
                    x1:=(-b-sqrt(denta))/(2*a);
                    x2:=(-b+sqrt(denta))/(2*a);
                    writeln('phuong trinh co hai nghiem han biet');
                    write('x1= ',x1, ' , ',x2 =',x2);
                end
            end
        end
    end
end

```

```

exit;
end;
end;
readln;
END.

```

4. Độ phức tạp thuật toán

Khi đề xuất một thuật toán ngoài việc quan tâm đến tính đúng đắn của thuật toán, người ta thường phải quan tâm đến một số vấn đề như: ưu điểm, nhược điểm, tính phổ dụng, thời gian tính toán phụ thuộc vào dữ liệu như thế nào, v.v... Với các thuật toán được sử dụng có tần số cao như các thuật toán sắp xếp, thuật toán tìm kiếm, v.v. người ta đặc biệt quan tâm đến thời gian cần thiết cho việc thực hiện thuật toán đó.

Thông thường với mỗi thuật toán, thì dữ liệu vào sẽ có kích thước là một số nào đó. Chẳng hạn khi ta sắp xếp một dãy số thì kích thước của dữ liệu có thể xem như là số phần tử của dãy đó. Rõ ràng với n càng lớn thì thời gian cần thiết cho việc sắp xếp sẽ càng lớn và nó là một hàm của đối số n . Ta ký hiệu hàm đó là $f(n)$.

Trước khi đưa vào khái niệm độ phức tạp của thuật toán, ta đề cập tới một số khái niệm sau :

Khái niệm về độ tăng của hàm :

Một trong những khái niệm thường dùng để phân tích độ tăng của một hàm là khái niệm O được định nghĩa như sau :

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm từ tập các số nguyên dương hoặc tập các số thực vào tập các số thực. Ta nói $f(x)$ là $O(g(x))$ nếu tồn tại hai hằng số C và k sao cho

$$|f(x)| \leq C |g(x)|, \text{ với mọi } x > k.$$

Cần lưu ý rằng cặp các hằng số C và k thỏa mãn điều kiện trên là không duy nhất, đồng thời nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ mà $h(x)$ là hàm thỏa mãn $|g(x)| < |h(x)|$ với $x > k$ thì ta cũng có : $f(x)$ là $O(h(x))$.

Ví dụ 1: Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, với a_i là các số thực ($i = 0, 1, \dots, n$). Khi đó $f(x) = O(x^n)$.

Thật vậy ta có, với mọi $x > 1$:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0| \\ &\leq |a_n| x^n + |a_{n-1}| x^{n-1} + \dots + |a_1| x + |a_0| \\ &= x^n \left(|a_n| + \frac{|a_{n-1}|}{x} + \dots + \frac{|a_1|}{x^{n-1}} + \frac{|a_0|}{x^n} \right) \\ &\leq x^n (|a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|). \end{aligned}$$

Đặt $C = |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|$ và $k = 1$, ta có

$$|f(x)| \leq Cx^n \text{ với mọi } x > k, \text{ hay } f(x) \text{ là } O(x^n).$$

Ví dụ 2: Cho $f(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Chỉ ra $f(n)$ là $O(n^2)$.

Thật vậy $f(n) < n + n + n + \dots + n = n \cdot n = n^2$, nên $f(n)$ là $O(n^2)$ với $C = 1$, và $k = 1$.

Ví dụ 3: Chỉ ra hàm $n!$ là $O(n^n)$ và $\log n!$ là $O(n \log n)$.

Ta có $n! < n^n$, nên $n!$ là $O(n^n)$ với $C = 1$ và $k = 1$.

Từ $n! < n^n$ ta có $\log n! < n \log n$, nên $\log n!$ là $O(n \log n)$ cũng với $C = k = 1$.

Ví dụ 4: Hãy chỉ ra hàm $\log n$ là $O(n)$. Thật vậy ta có $n < 2^n$ với mọi $n \geq 1$, nên $\log n < n$ (lôga cơ số 2) và vì vậy $\log n$ là $O(n)$ với $C = k = 1$.

Độ tăng của tổ hợp các hàm:

Từ khái niệm về độ tăng của hàm ta có một số kết quả sau đây:

Ví dụ 5: Nếu $f_1(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$ thì

$$(f_1(x) + f_2(x)) \text{ là } O(\max\{g_1(x), g_2(x)\}).$$

Thật vậy, theo giả thiết tồn tại C_i và k_i sao cho

$$|f_i(x)| \leq C_i |g_i(x)| \text{ với mọi } x > k_i, (i = 1, 2).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta lại có } |f_1(x) + f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\
 &\leq C_1 |g_1(x)| + C_2 |g_2(x)| \\
 &\leq C |g(x)| \text{ với mọi } x > k,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ở đây } k &= \max\{k_1, k_2\} \text{ và } C = C_1 + C_2, \\
 \text{còn } g(x) &= \max\{|g_1(x)|, |g_2(x)|\}.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 6 : Cho $f_1(x)$ và $f_2(x)$ đều là $O(g(x))$. Khi đó $f_1(x) + f_2(x)$ là $O(g(x))$. Đây là hệ quả của ví dụ 5.

Ví dụ 7 : Nếu $f_1(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$ thì

$$f_1(x).f_2(x) \text{ là } O(g_1(x).g_2(x)).$$

Thật vậy, theo giả thiết $|f_1(x)| \leq C_1 |g_1(x)|$ với mọi $x > k_1$ và $|f_2(x)| \leq C_2 |g_2(x)|$ với mọi $x > k_2$.

$$\begin{aligned}
 \text{Xét } |f_1(x).f_2(x)| &= |f_1(x)| \cdot |f_2(x)| \leq C_1 C_2 |g_1(x)| \cdot |g_2(x)| \\
 &= C_1 C_2 |g_1(x).g_2(x)|.
 \end{aligned}$$

Vậy $f_1(x).f_2(x)$ là $O(g_1(x).g_2(x))$, nếu chọn $C = C_1 C_2$, còn $k = \max\{k_1, k_2\}$.

Ví dụ 8 : Cho $f(n) = n \log(n!) + n^2 \log n$, với $n = 1, 2, 3, \dots$. Hãy chỉ ra $f(n)$ là $O(n^2 \log n)$.

Thật vậy, ta có trước hết $n \log(n!)$ là $O(n^2 \log n)$, còn $n^2 \log n$ là $O(n^2 \log n)$. Từ ví dụ 6 ta có $f(n)$ là $O(n^2 \log n)$.

Ví dụ 9 : Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f^n(x)$ là $O(g^n(x))$, ở đây $f^n(x) = \underbrace{f(x).f(x) \dots f(x)}_{n \text{ lần}}$.

Thật vậy, theo giả thiết $|f(x)| \leq C |g(x)|$ với mọi $x > k$.

$$\text{Xét } |f^n(x)| = \underbrace{|f(x).f(x) \dots f(x)|}_{n \text{ lần}} = \underbrace{|f(x)| \cdot |f(x)| \dots |f(x)|}_{n \text{ lần}} \leq C^n |g^n(x)| \text{ với }$$

$x > k$. Hay $|f^n(x)| \leq C |g^n(x)|$ với $x > k$, ở đây $C := C^n$.

Vậy $f^n(x)$ là $O(g^n(x))$.

Ví dụ 10 : Giả sử $f(x)$ là $O(g(x))$ với $f(x)$, $g(x)$ là các hàm đơn điệu tăng và không giới nội. Chứng minh $\log(f(x))$ là $O(\log(g(x)))$.

Thật vậy, theo giả thiết ta có $|f(x)| \leq C_1 |g(x)|$ với mọi $x > k_1$. Ta cũng có thể giả thiết $f(x) > 1$, $g(x) > 1$ với x đủ lớn. Hay $f(x) \leq Cg(x)$ với x đủ lớn. logarit cơ số 2 bất đẳng thức trên ta có

$$\log(f(x)) \leq \log(C_1 g(x)) = \log C_1 + \log(g(x)) \leq 2\log(g(x)) \text{ với } x \text{ đủ lớn.}$$

Hay $\log f(x)$ là $O(\log(g(x)))$.

Độ phức tạp thuật toán

Ở đây chúng ta chỉ đề cập tới độ phức tạp của thuật toán về thời gian tính toán mà không đề cập tới độ phức tạp về không gian của thuật toán.

Các phép toán được dùng để đo độ phức tạp thời gian của thuật toán là phép so sánh số nguyên, các phép cộng, các phép trừ, các phép nhân, các phép chia các số nguyên hoặc bất kỳ một phép tính sơ cấp nào khác xuất hiện trong quá trình tính toán.

Cần lưu ý các thuật ngữ dùng trong độ phức tạp thuật toán hay gặp :

- Độ phức tạp $O(1)$ gọi là độ phức tạp hằng số.
- Độ phức tạp $O(\log n)$ gọi là độ phức tạp lôgarit.
- Độ phức tạp $O(n)$ gọi là độ phức tạp tuyến tính.
- Độ phức tạp $O(n \log n)$ gọi là độ phức tạp $n \log n$.
- Độ phức tạp $O(n^b)$ gọi là độ phức tạp đa thức.
- Độ phức tạp $O(b^n)$ ($b > 1$) gọi là độ phức tạp hàm mũ.
- Độ phức tạp $O(n!)$ gọi là độ phức tạp giai thừa.

Sau đây sẽ tiến hành phân tích thời gian cần thiết để thực hiện các đoạn chương trình và một số ví dụ cơ bản.

Đối với một đoạn chương trình bất kỳ mà mỗi lệnh của nó chỉ được sử dụng một lần, khi đó tổng số các lệnh được xử lý sẽ là độc lập đối với

n , nghĩa là những đoạn chương trình như vậy sẽ có độ phức tạp thời gian là $O(1)$.

Ví dụ 11. Xét đoạn chương trình sau:

```
for i:=1 to n do
  begin
    ....
  end;
```

Trong thân của đoạn chương trình trên không có vòng lặp sẽ cần n lần lặp, do đó độ phức tạp thời gian là $n.O(1)$, tức là $O(n)$.

Ví dụ 12. Xét đoạn chương trình sau:

```
for i:=1 to n do
  begin
    for j:=1 to m do
      .....
    end;
```

Theo phần a) vòng lặp for bên trong của nó không có vòng lặp có độ phức tạp thời gian là $O(n)$, do đó đoạn chương trình này có độ phức tạp thời gian là $n.O(n)$, tức là $O(n^2)$.

Ví dụ 13. Xét đoạn chương trình sau:

```
i:=1;
while i ≤ n do
  begin
    .....
    i:=i*2;
  end;
```

Ta thấy rằng i sẽ thay đổi từ 1, 2, 4, 8... cho đến đạt hoặc vượt quá n . Số phép lặp khi đó sẽ cần là $1 + \lceil \log_2 n \rceil$. Do đó đoạn chương trình trên sẽ có độ phức tạp thời gian là $O(\log_2 n)$.

Ví dụ 14. Mô tả thuật toán tìm phần tử lớn nhất trong một dãy hữu hạn các số nguyên và tìm độ phức tạp của thuật toán đó.

Bước 1 : Đặt giá trị cực đại tạm thời bằng số nguyên đầu tiên của dãy.

Bước 2 : So sánh số nguyên tiếp theo với giá trị tạm thời, nếu nó lớn hơn giá trị cực đại tạm thời thì đặt cực đại tạm thời bằng số nguyên đó.

Bước 3: Lặp lại bước trước (nếu còn các số nguyên trong dãy).

Bước 4 : Dừng khi không còn số nguyên nào trong dãy. Cực đại tạm thời ở điểm này chính là số nguyên lớn nhất trong dãy.

Mô tả thuật toán tìm phần tử lớn nhất trong dãy hữu hạn :

Procedure MAX($a_1, a_2, \dots, a_n$: integer);

 max := a_1

 for $i := 2$ to n

 if max < a_i then max := a_i

 {max là phần tử lớn nhất}

Lưu ý : Mỗi số hạng của dãy dùng 2 phép so sánh, một để xác định chưa đạt đến cuối dãy, một để xác định có phải cập nhận giá trị lớn nhất tạm thời hay không. Việc so sánh này được dùng cho mỗi phần tử a_i trong dãy từ phần tử thứ hai trở đi ($i = 2, 3, \dots, n$). Sau đó là phép so sánh để ra khỏi vòng lặp, nên số phép so sánh cần dùng tất cả là $2(n - 1) + 1$ đối với thuật toán trên. Vậy thuật toán trên có độ phức tạp thời gian là $O(n)$ (độ phức tạp tuyến tính).

Ví dụ 15. Mô tả thuật toán xác định vị trí của một phần tử trong một bảng liệt kê sắp thứ tự. Đây là bài toán tìm kiếm được phát biểu như sau :

Xác định vị trí của x trong bảng liệt kê các phần tử phân biệt: $a_1, a_2, \dots, a_n$ hoặc xác định x không có mặt trong bảng liệt kê đó.

Dưới đây ta đề cập tới thuật toán tìm kiếm tuyến tính:

Mô tả thuật toán : Thuật toán bắt đầu so sánh x với a_1 . Nếu $x = a_1$ thì nghiệm là vị trí của a_1 , tức là 1. Nếu $x = a_2$ thì nghiệm là vị trí của

a_2 , tức là 2, còn trường hợp $x \neq a_2$ thì so sánh x với a_3 . Quá trình trên được tiếp tục cho đến khi nào $x = a_n$ thì giá trị là n , còn $x \neq a_n$ thì x không có mặt trong bảng liệt kê.

Mô tả thuật toán tìm kiếm tuyến tính :

Procedure Tìm_kiểm_tuyến_tính (x : integer, $a_1, a_2, \dots, a_n$: các số nguyên phân biệt)

$i := 1$

while ($i \leq n$ and $x \neq a_i$) do

$i := i + 1$

if $i \leq n$ then location := i

else location := 0

{location là chỉ số dưới của số hạng bằng x hoặc 0 nếu không tìm được x }

Lưu ý : Ở mỗi một bước của vòng lặp trong thuật toán có hai phép so sánh : một để xem đã tới cuối dãy chưa và một phép so sánh để xem phần tử x có trùng với một số hạng của bảng hay không. Cuối cùng là một phép so sánh ngoài vòng lặp.

Nếu $x = a_i$ thì có $2i + 1$ phép so sánh được sử dụng. Số phép so sánh lớn nhất là $2n + 1$ (khi $x \neq a_i, i = 1, 2, \dots, n$). Sau đó cần một phép so sánh để thoát khỏi vòng lặp. Vậy khi x không có mặt trong bảng thì tổng số phép so sánh trong thuật toán này là $2n+2$. Hay độ phức tạp của thuật toán là $O(n)$.

Ví dụ 16. Cũng bài toán trên nhưng các phần tử trong bảng được sắp theo thứ tự tăng dần. Ví dụ tìm số 19 trong bảng liệt kê theo thứ tự tăng dần : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22. Hay một cách tổng quát : tìm x trong bảng liệt kê $a_1, a_2, \dots, a_n$ với $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Để giải bài toán trên ta dùng thuật toán nhị phân, được mô tả như sau : So sánh x với số hạng a_m ở giữa dãy ($m = [(n+1)/2]$, ở đây $[x]$ là phần nguyên lớn nhất không vượt quá x). Nếu $x > a_m$ thì việc tìm kiếm x trên dãy gồm các số hạng $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$. Còn nếu $x \leq a_m$ thì việc tìm

kiểm sẽ thực hiện trên dãy gồm các số $a_1, a_2, \dots, a_m$. Cả hai trường hợp đều đưa đến bài toán tìm kiếm trên bảng không lớn hơn $[n/2]$ phần tử. Quá trình trên được thực hiện cho tới khi bảng liệt kê chỉ còn một phần tử và so sánh x với chính số hạng này.

Mô tả thuật toán tìm kiếm nhị phân :

Procedure Tìm_kiểm_nhị_phân

(x : integer, $a_1, a_2, \dots, a_n$: integers - tăng dần)

i := 1 {i là điểm nút trái của khoảng tìm kiếm}

j := n {j là điểm nút phải của khoảng tìm kiếm}

while i < j

begin

 m := [(i + j)/2]

 if x > a_m then i := m+1

 else j := m

end

if x = a_i then location := i

else location := 0

{location là chỉ số dưới của số hạng bằng x (hoặc 0) nếu không tìm thấy x}

Lưu ý : Độ phức tạp của thuật toán tìm kiếm nhị phân trên là $O(\log n)$ vì nó phải dùng tới $2[\log n] + 2$ phép toán so sánh. Rõ ràng thuật toán tìm kiếm nhị phân tốt hơn thuật toán tìm kiếm tuyến tính.

Ví dụ 17. Xét thuật toán Euclid:

Trong lý thuyết số người ta đã chứng minh được rằng :

Nếu $a = bq + r$, trong đó a, b, q, r là các số nguyên thì :

$$\text{UCLN}(a, b) = \text{UCLN}(b, r) \quad (*)$$

Giả sử a, b là các số nguyên dương, với $a \geq b$. Đặt $r_0 = a$, $r_1 = b$. Bằng cách áp dụng kết quả trên ta có :

$$r_0 = r_1 q_1 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1)$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \quad (0 \leq r_3 < r_2)$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \quad (0 \leq r_n < r_{n-1})$$

$$r_{n-1} = r_n q_n.$$

Số dư xuất hiện trong dãy các phép chia liên tiếp, vì dãy các số $a = r_0 > r_1 > r_2 > \dots \geq 0$ không thể chứa quá a số hạng. Từ (*) ta suy ra :

$$\text{UCLN}(a, b) = \text{UCLN}(r_0, r_1) = \text{UCLN}(r_1, r_2) = \dots$$

$$\text{UCLN}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{UCLN}(r_{n-1}, r_n) = \text{UCLN}(r_n, 0) = r_n.$$

Vậy ước chung lớn nhất là số dư $\neq 0$ cuối cùng trong dãy các phép chia.

Ví dụ : Tìm $\text{UCLN}(414, 662)$

Áp dụng thuật toán Euclid ta được :

$$662 = 414.1 + 248$$

$$414 = 248.2 + 166$$

$$248 = 166.1 + 82$$

$$166 = 82.2 + 2$$

$$82 = 2.41$$

Do đó $\text{UCLN}(414, 662) = 2$ (2 là số dư cuối cùng khác không).

Thuật toán Euclid được mô tả như sau :

Procedure $\text{UCLN}(a, b : \text{positive integers})$

$x := a$

$y := b$

while $y \neq 0$

begin

$r := x \bmod y$

```

x := y
y := r
end {UCLN(a, b) là x}

```

Lưu ý : Giá trị ban đầu của x, y tương ứng là a và b . Ở mỗi giai đoạn của thủ tục x được thay bằng y và y được thay bởi $x \bmod y$, tức là số dư r trong phép chia x cho y . Quá trình này được lặp lại chừng nào $y \neq 0$ và thuật toán sẽ dừng khi $y = 0$. Giá trị của x ở điểm này là số dư $\neq 0$ cuối cùng trong thủ tục và chính là ước số chung lớn nhất cần tìm.

Dùng định lý Lamé người ta chỉ ra độ phức tạp của thuật toán Euclid là $O(\log b)$.

§2. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP

Quy nạp toán học là một phương pháp có lợi để chứng minh một mệnh đề có liên quan đến dãy số tự nhiên. Để chỉ ra một khẳng định là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$, bằng phương pháp quy nạp toán học thì ta phải thực hiện các bước sau:

- Chứng minh mệnh đề đúng với $n = n_0$.
- Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$.
- Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$.

Sau đây là một số ví dụ minh họa cho phương pháp chứng minh bằng quy nạp toán học:

Ví dụ 1: Chứng minh với mọi $n, n \in \mathbb{N}$ ta có :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} \quad (1)$$

Thật vậy

- Với $n = 1$ thì hai vế bằng nhau và bằng 1.

b. Giả sử đẳng thức trên đúng với mọi $n \leq k$ có nghĩa là với mọi $n \leq k$ ta có:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n.(n+1).(n+2)}{6}$$

c. Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k+1$, tức là phải chứng minh

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1).(k+2).(k+3)}{6}$$

Thật vậy với $n = k$, theo giả thiết quy nạp ta có:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k.(k+1).(k+2)}{6}$$

Do đó ta có :

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k.(k+1).(k+2)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1).(k+2).(k+3)}{6}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k+1$, do đó (1) được chứng minh.

Ví dụ 2: Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi $n \geq 1$.

$$1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1 \quad (1)$$

a) Với $n = 1$, khi đó hai vế của (1) bằng nhau nên (1) đúng.

b) Giả sử (1) đúng với $n = k$ có nghĩa là với mọi $n \leq k$ đẳng thức sau luôn đúng:

$$1.1! + 2.2! + \dots + k.k! = (k+1)! - 1.$$

c) Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh đẳng thức sau:

$$1.1! + 2.2! + \dots + k.k! + (k+1).(k+1)! = (k+2)! - 1.$$

Thật vậy với $n = k$ theo giả thiết quy nạp ta có

$$1.1! + 2.2! + \dots + k.k! = (k+1)! - 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} & 1.1! + 2.2! + \dots + k.k! + (k+1).(k+1)! \\ &= (k+1)! - 1 + (k+1).(k+1)! = (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức (1) đúng với $n = k+1$ và do đó công thức trên là đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 3: Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi $n > 1$, $a > -1$ và $a \neq 0$:

$$(1+a)^n > 1 + na \quad (1)$$

a) Số tự nhiên n bé nhất lớn hơn 1 là 2, khi đó vế trái của (1) lớn hơn vế phải của (1). Vậy (1) đúng với $n = 2$.

b) Giả sử (1) đúng với mọi $n \leq k$ tức là với $k > 1$ và $n \leq k$ thì ta có:

$$(1+a)^k > 1 + ka \quad (2)$$

c) Tiếp theo cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là cần phải chứng minh

$$(1+a)^{k+1} > 1 + (k+1).a \quad (3)$$

Thật vậy vì $(1+a) > 0$ và từ (2) ta có: $(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \cdot (1+a)$

$$\text{Vậy } (1+a)^{k+1} > (1+ka)(1+a) \quad (4)$$

$$\text{Ta biến đổi } (1+ka)(1+a) = 1 + ka + a + k.a^2 > 1 + (1+k).a \quad (5)$$

$$\text{vì } k.a^2 > 0.$$

Từ (4) và (5) suy ra (3) đúng và do đó bất đẳng thức đã được chứng minh.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng tích của 3 số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 6.

Thật vậy, tích của 3 số nguyên liên tiếp sẽ là một số có dạng $n(n+1)(n+2)$. Vậy ta cần chỉ ra $n(n+1)(n+2) \div 6$ (ở đây dùng ký hiệu $\div$ để chỉ sự chia hết).

a) Khi $n = 1$, khi đó $n(n+1)(n+2) = 6$ chia hết cho 6.

b) Giả sử với mọi $n \leq k$, ta đều có $n(n+1)(n+2) \div 6$ (1)

c) Tiếp theo cần chứng minh tính chất đó đúng với $n = k+1$, tức là cần phải chứng minh: $(k+1)(k+2)(k+3) \div 6$ (2)

Do giả thiết quy nạp (1) và $n = k$, ta có:

$$k(k+1)(k+2) \div 6 \quad (3)$$

Thấy rằng $(k+1)(k+2)(k+3) = k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)$. Từ (3) ta thấy rằng khẳng định (2) sẽ là đúng đắn nếu $3(k+1)(k+2) \div 6$ (4)

Do $(k+1)$ và $(k+2)$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên tích của hai số đó sẽ phải là số chẵn hay $3(k+1)(k+2) \div 6$. Vậy (4) đúng hay khẳng định đúng với $n = k + 1$. Điều đó kết thúc việc chứng minh.

Qua các thí dụ trên thấy rằng bằng phương pháp chứng minh quy nạp toán học ta có thể chứng minh một số mệnh đề có liên quan đến dãy số tự nhiên nếu dự đoán được quy luật của nó phụ thuộc vào các số cụ thể như thế nào. Tuy nhiên trong một số bài toán ta không biết được điều cần chứng minh là gì. Ví dụ, hãy tính tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên. Rõ ràng là đối với một số bài toán không khó lắm trong việc tìm ra quy luật, chẳng hạn như bài toán vừa phát biểu ở trên ta vẫn có thể ứng dụng được phương pháp chứng minh quy nạp toán học. Tất nhiên là trước hết bằng sự quan sát có tính thống kê ta có thể dự đoán được quy luật cho bài toán, sau đó hãy dùng phương pháp chứng minh quy nạp toán học. Chúng ta hãy xét một số ví dụ:

Ví dụ 5: Hãy tính tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên

$$T = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1).$$

Nhận thấy rằng:

$$\text{Khi } n = 1, T = 1.$$

$$\text{Khi } n = 2, T = 1 + 3 = 4 = 2^2.$$

$$\text{Khi } n = 3, T = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$\text{Khi } n = 4, T = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2.$$

.....

Quan sát sự thống kê đó ta có thể dự đoán rằng với n là một số tự nhiên bất kỳ thì

$$T = 1 + 2 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (1)$$

Tiếp theo bằng chứng minh quy nạp ta có thể dễ dàng chứng minh (1) là đúng đắn.

Ví dụ 6: Hãy tính tổng $T = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$\text{Khi } n = 1, T = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi } n = 2, T = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$$

.....

Vậy liệu chẳng tổng T sẽ thoả mãn đẳng thức

$$T = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta thấy rằng đẳng thức trên là đúng đắn. Tuy nhiên phương pháp quy nạp toán học không phải là phương pháp duy nhất để giải quyết những bài toán như thế. Chẳng hạn để tính tổng

$$T = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ngoài phương pháp đã nêu trên ta có thể tính T bằng phân tích như sau:

Nhận thấy rằng với mọi số tự nhiên $k \geq 1$ ta có

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\text{Do đó với } k = 1, \quad \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$k = 2, \quad \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

.....

$$k = n, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Cộng theo từng vế ta có ngay } T = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

§3. PHƯƠNG PHÁP ĐỆ QUY

Đệ quy là một khái niệm tồn tại trong cuộc sống, trong toán học, trong lập trình. Đệ quy cho ta một phương pháp ngắn gọn và sáng sủa để mô tả các đối tượng cũng như một số quá trình. Như vậy đệ quy là một phương pháp xác định tập hợp các đối tượng thoả mãn một yêu cầu nào đó. Nó bao gồm các quy tắc, trong đó một số quy tắc dùng để xác định các đối tượng ban đầu, còn quy tắc khác dùng để xác định các đối tượng tiếp theo nhờ các đối tượng ban đầu đã được xác định.

Ví dụ 1: Một dãy số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ có tính chất sau $a_0 = 0$, $a_n = 2a_{n-1} + 3$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó ta có thể xác định được số hạng a_n tổng quát của dãy số trên như sau:

Trước hết hãy chọn các số α_1, α_2 sao cho

$$(a_n - \alpha_1) = \alpha_2(a_{n-1} - \alpha_1) \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $a_n = \alpha_2 a_{n-1} - \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1$

Rõ ràng các số α_1, α_2 phải thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

Từ hệ trên ta có ngay $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = 2$. Đặt $q_n = a_n - \alpha_1$, với $n \geq 1$. Suy ra $q_n = 2 \cdot q_{n-1}$ với $n \geq 1$ và $q_1 = 6$, từ đó ta có $q_n = q_1 \cdot 2^{n-1}$. Vậy $a_n - \alpha_1 = q_1 \cdot 2^{n-1}$ suy ra $a_n = \alpha_1 + q_1 \cdot 2^{n-1} = 6 \cdot 2^{n-1} - 3$.

Một chương trình con đệ quy để tính số hạng tổng quát a_n có thể được viết như sau:

```
Function fn(n:integer):integer;
Var
    a,i,x:integer;
BEGIN
    if n=0 then fn=0
    else fn=2*fn(n-1)+3;
END;
```

Ví dụ 2: Một dãy $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ có tính chất sau: $a_0=0, a_1=1, a_2=1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ với mọi $n \geq 2$ được gọi là dãy Fibonacci thứ n . Như vậy dãy Fibonacci là dãy: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... và với $n \geq 2$ ta có thể tìm được số Fibonacci thứ n nếu biết số Fibonacci thứ $n-1$ và thứ $n-2$. Bằng quy nạp toán học ta dễ dàng chứng minh được rằng với $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Tuy nhiên công thức trên có thể tính trực tiếp như sau:

Trước hết ta hãy tìm một cặp số α_1, α_2 sao cho:

$$a_n - \alpha_1 a_{n-1} = \alpha_2 (a_{n-1} - \alpha_1 a_{n-2}).$$

$$\text{suy ra} \quad a_n = (\alpha_1 + \alpha_2) a_{n-1} - \alpha_1 \alpha_2 a_{n-2}$$

Rõ ràng các cặp số α_1, α_2 thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Khi đó α_1, α_2 sẽ là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ do đó ta có thể chọn $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Đặt $q_n = a_n - \alpha_1 a_{n-1}$.

Khi đó $q_n = \alpha_2 q_{n-1}$ với $n \geq 2$ và $q_1 = 1$. Ta có $q_n = \alpha_2^{n-1}$.

Vậy $a_n - \alpha_1 a_{n-1} = \alpha_2^{n-1}$ suy ra $a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2^{n-1}$.

$$a_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 \quad (1)$$

$$a_3 = \alpha_1 a_2 + \alpha_2^2 \quad (2)$$

$$a_4 = \alpha_1 a_3 + \alpha_2^3 \quad (3)$$

.....

$$a_{n-1} = \alpha_1 a_{n-2} + \alpha_2^{n-2} \quad (n-2)$$

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2^{n-1} \quad (n-1)$$

Khi nhân hai vế của đẳng thức (n-2) với α_1 , đẳng thức (n-3) với α_1^2 ... đẳng thức (1) với α_1^{n-2} và cộng lại theo từng vế ta có:

$$a_n = \alpha_1^{n-1} a_1 + \alpha_1^{n-2} \alpha_2 + \dots + \alpha_1^{n-3} \alpha_2^2 = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

Vậy
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \text{với } n \geq 2, \text{ tuy nhiên công}$$

thức này cũng đúng với $n \geq 0$.

Chương trình con để tính số hạng tổng quát a_n có thể được viết như sau:

Function fn(n:integer):integer;

Var

a,i,x:integer;

BEGIN

if $n \leq 1$ then $fn := n$

else $f(n) := f(n-1) + f(n-2)$;

END;

Ví dụ 3: Có m phần thưởng được chia cho n học sinh giỏi được xếp hạng từ 1, ..., n. Hỏi rằng có bao nhiêu cách chia phần thưởng trên sao cho các điều kiện sau được thoả mãn :

1. Nếu học sinh A giỏi hơn học sinh B thì số phần thưởng của A sẽ lớn hơn hoặc bằng số phần thưởng của học sinh B.

2. Tất cả m vật để thưởng đều phải đưa hết cho học sinh.

Giả sử rằng với $i < j$ và $1 \leq i, j \leq n$ thì học sinh thứ i giỏi hơn học sinh thứ j. Ký hiệu số phần thưởng mà học sinh thứ i nhận được là T_i . Từ giả thiết của bài toán ta suy ra các điều kiện sau cần được thoả mãn:

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n \geq 0$$

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n = m$$

$$T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_n$$

Ký hiệu CHIA(m,n) là số cách chia m phần thưởng cho n học sinh theo yêu cầu ở trên. Nhận xét rằng:

Khi $m = 0$, tức là không có phần thưởng nào thì khi đó rõ ràng chỉ có duy nhất một cách chia: Mỗi học sinh được 0 phần thưởng. Vậy $\text{CHIA}(0,n) = 1$ đối với mọi n.

Khi có m phần thưởng và không có học sinh giỏi, đương nhiên sẽ không có cách chia nào. Vậy: $\text{CHIA}(m,0) = 0$ đối với mọi $m \neq 0$.

Khi có m phần thưởng và n học sinh giỏi và $m < n$, khi đó n-m học sinh phía cuối sẽ không nhận được phần thưởng nào, do đó :

$$\text{CHIA}(m,n) = \text{CHIA}(m,m) \text{ khi } m < n.$$

Khi có m phần thưởng và n học sinh giỏi và $m > n$, khi đó ta xét hai trường hợp sau đây:

a) Khi học sinh cuối cùng không nhận được phần thưởng nào, khi đó số cách chia sẽ là $\text{CHIA}(m,n-1)$

b) Khi học sinh cuối cùng nhận được 1 phần thưởng, khi đó tất cả các học sinh giỏi sẽ nhận được ít nhất 1 phần thưởng, do đó số cách chia trong trường hợp này sẽ là $\text{CHIA}(m-n,n)$.

Tóm lại khi có m vật thưởng và n học sinh giỏi thì số cách chia sẽ là $\text{CHIA}(m,n-1) + \text{CHIA}(m-n,n)$.

Trên cơ sở đó ta có thể viết một chương trình con đệ quy thể hiện thuật toán trên:

```
Function CHIA(m,n:integer):integer;
```

```
BEGIN
```

```
    if m=0 then CHIA:=1
```

```
    else if n=0 then CHIA:=0
```

```

else if  $m < n$  then CHIA := CHIA(m, m)
      else CHIA := CHIA(m, n-1) + CHIA(m-n, n)

```

END;

1. Thuật toán quay lui

Bài toán:

Hãy xây dựng các bộ giá trị gồm có n thành phần $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ từ một tập hữu hạn cho trước sao cho các bộ đó thoả mãn một yêu cầu B cho trước nào đó.

Phương pháp:

Ta xây dựng các phần tử $x_1, x_2, \dots, x_n$ theo cách sau đây:

Giả sử đã xác định được $k-1$ phần tử đầu tiên của dãy đó là $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$. Cần xác định tiếp phần tử thứ x_k . Phần tử này được xác định theo cách sau:

Giả sử T_k là tập tất cả các giá trị mà phần tử x_k có thể nhận được. Vì tập T_k là hữu hạn nên ta có thể đặt n_k là số phần tử của tập T_k . Khi đó ta có thể liệt kê các phần tử của T_k theo một thứ tự nào đó. Tức là có thể thành lập một ánh xạ 1-1 từ tập T_k lên tập $\{1, 2, \dots, n_k\}$.

Xét $j \in 1, 2, \dots, n_k$. Nói rằng “ j chấp nhận được” nếu ta có thể bổ sung phần tử thứ j trong T_k với tư cách là phần tử x_k vào dãy $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ để được dãy $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k$.

Nếu $k = n$ khi đó bộ $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$ có đủ n thành phần và thoả mãn yêu cầu đặt ra, do đó bộ này được đưa vào quan hệ kết quả.

Nếu $k < n$ ta cần phải thực hiện tiếp quá trình trên, tức là phải bổ sung tiếp phần tử x_{k+1} vào dãy $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Như vậy nét đặc trưng phương pháp quay lui là ở chỗ có được lời giải ta phải đi từng bước bằng phép thử. Khi một bước lựa chọn chấp nhận cần ghi nhớ thông tin cần thiết và tiến hành bước tiếp theo. Ngược

lại khi không có một lựa chọn nào được chấp nhận thì cần phải thực hiện lại bước trước, xóa bớt ghi nhớ và thử lại với những lựa chọn còn lại.

a) Thủ tục đệ quy cho thuật toán quay lui.

```

Procedure thu(k:integer);
Var j:integer;
BEGIN
    for j:=1 to  $n_k$  do
        if <j là chấp nhận được > then
            Begin
                <xác định  $x_k$  theo j >
                if  $k=n$  then <ghi nhận bộ giá trị mới>
                else thu(k+1);
            End;
    END;{thu}

```

Điều đáng quan tâm ở đây là:

1. Làm thế nào để xác định được tập T_k , tức là tập tất cả các khả năng mà phần tử thứ k của dãy $x_1, x_2, \dots, x_n$ có thể nhận được.
2. Khi đã có tập T_k để xác định x_k thấy rằng x_k phụ thuộc vào chỉ số j nó còn phụ thuộc vào các $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$, vì vậy cần phải ghi nhớ trạng thái của quá trình xác định dãy bằng một biến nhớ nào đó sau khi xác định được x_k theo j và đồng thời cần phải trả lại trạng thái cũ sau lời gọi Thu(k+1).

Ngoài thủ tục Thu(k) nên có một thủ tục gọi là khởi tạo nhằm tạo ra một số giá trị cũng như những trạng thái cần thiết ban đầu.

b. Các thí dụ minh họa cho thuật toán quay lui:

Trong các ví dụ dưới đây bộ giá trị $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sẽ được lưu trữ dưới dạng mảng một chiều là $x[1], x[2], \dots, x[k]$.

1) Hãy liệt kê tất cả các hoán vị của n số tự nhiên đầu tiên.

Đặt $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Khi đó một hoán vị của n số tự nhiên đầu tiên sẽ là một bộ $x[1], x[2], \dots, x[n]$. Trong đó $x[i] \neq x[j]$ với $i \neq j$ và $x[i] \in N[i]$.

Nhận thấy rằng $T_1 = N$. Giả sử đã xác định $x[1], x[2], \dots, x[k-1]$, khi đó :

$$T_k = N - \{x[1], x[2], \dots, x[k-1]\}.$$

Để ghi nhớ tập T_i , $i = 1, \dots, n$, ta cần sử dụng một mảng $b[1..n]$ là các giá trị boolean sao cho $b[i] = \text{true}$ khi và chỉ khi $i \in T_k$.

Sau đây là chương trình liệt kê tất cả các hoán vị của n số tự nhiên đầu tiên.

```

Program hoanvi;
uses crt;
type mang = array[1..20] of integer;
Var x:mang;
    b: array[1..20] of boolean;
    n,d:integer;
(*-----*)
Procedure khai tao;
Var i:integer;
BEGIN
    inc(d);
    write('so phan tu=');readln(n);
    for i:=1 to n do b[i]:=true;
    d:=0;
END;
(*-----*)
Procedure inkq;
Var i:integer;

```

```

BEGIN
    inc(d);
    write('Hoan vi thu',d:3,',');
    for i:=1 to n do write(x[i]:4);
    writeln;
END;
(*-----*)
Procedure thu(k:integer);
Var j:integer;
BEGIN
    for j:=1 to n do
        Begin
            x[k]:=j;
            b[j]:=false; {chuyen ve trang thai moi}
            if k=n then inkq
            else thu(k+1);
            b[j]:=true; {tro ve trang thai cu}
        End;
    END;
(*-----*)
BEGIN {Main}
    clrscr;
    khoi tao;
    Thu(1);
    readln;
END. {Hoan vi}

```

2) Liệt kê tất cả các chuỗi nhị phân có độ dài n .

Nhận thấy rằng một chuỗi nhị phân độ dài n có dạng $x[1], x[2], \dots, x[n]$ với $x[i] \in N$. Đặt $B = \{0,1\}$. Nhận thấy rằng $T_1 = B$.

Giả sử đã xác định được $x[1], x[2], \dots, x[k-1]$. Thấy rằng $T_k = B$ do đó số phần tử của tập $T_k=2$. Vì vậy chương trình liệt kê tất cả các chuỗi nhị phân có độ dài n được thể hiện như sau:

```

Program chuoi_nhi_phan;
uses crt;
type mang=array[1..20] of 0..1;
Var x:mang;
    n,d:integer;
(*-----*)
Procedure khai_tao;
Var i:integer;
BEGIN
    write('do dai cua chuoi:');readln(n);
    d:=0;
END;
(*-----*)
Procedure inq;
Var i:integer;
BEGIN
    inc(d);
    write('Chuoi thu',d:3:);
    for i:=1 to n do write(x[i]:4);
    writeln;
END;
(*-----*)
Procedure thu(k:integer);
Var j:integer;
BEGIN
    for j:=1 0 to 1 do
        Begin
            x[k]:=j;

```

```

        if k=n then inkq
        else thu(k+1);
    End;
END;
(*—————*)
BEGIN
    clrscr;
    khai_tao;
    thu(1);
    writeln;
    write('Tong so co',d:4,'chui nhi phan');
    readln;
END.

```

3) Bài toán đặt các con hậu

Phát biểu bài toán :

Cho bàn cờ hình vuông cỡ $n \times n$. Hãy liệt kê tất cả các cách xếp n con hậu trên bàn cờ sao cho chúng không ăn được nhau. Tức là không có 2 con hậu nào cùng dòng, cùng cột, cùng đường chéo nào đó cùng phương với đường chéo chính hoặc đường chéo phụ.

Giải thuật:

Xét một bàn cờ gồm n hàng, n cột được đánh số $1, \dots, n$. Chúng ta sẽ sử dụng chỉ số k để chỉ hàng và chỉ số j để chỉ cột. Vậy $1 \leq k, j \leq n$. Quy ước nếu $x[k] = j$ thì có nghĩa con hậu ở hàng thứ k được đặt ở cột j .

Nhận thấy rằng $T_1 = N = \{1, 2, \dots, n\}$

Giả sử đã xác định được $x[1], x[2], \dots, x[k-1]$, cần xây dựng tiếp $x[k]$ để thoả mãn yêu cầu của bài toán. Trước hết ta có một vài khái niệm.

Xem rằng bàn cờ có hai đường chéo. Đường chéo chính là đoạn AC và đường chéo phụ là đoạn BD. Khi đó có $2n$ đường chéo cùng chiều với đường chéo chính. Nhận thấy rằng với 2 ô bất kỳ trên cùng một đường chéo thì tổng các chỉ số hàng và chỉ số cột của các ô đó là như nhau, chẳng hạn cùng bằng một số i nào đó. Khi đó i là chỉ số của đường chéo đó. Rõ ràng $2 < 2n$ và $i = k + j$ nếu đường chéo đó đi qua ô có tọa độ là (k, j) .

Trên cơ sở đó ta có thể chọn một mảng $c[2..2n]$ các giá trị Boolean để ghi nhận xem đường chéo đó có thể còn đặt con hậu vào đó được không, tức là $c[i] = \text{True}$ khi và chỉ khi trên đường chéo đó chưa có con hậu nào.

Tương tự thấy rằng cũng có $2n$ đường chéo cùng chiều với đường chéo phụ BD. Nhận thấy rằng với 2 ô bất kỳ trên cùng một đường chéo thì hiệu của chỉ số hàng và chỉ số cột của các ô đó là như nhau, chẳng hạn cùng bằng một số m nào đó. Khi đó ta gọi m là chỉ số của đường chéo đó. Rõ ràng $1 - n \leq m \leq n - 1$ và $m = k - j$ nếu đường chéo đó đi qua ô có tọa độ là (k, j) . Chúng ta cũng chọn một mảng $p[2..2n]$ là các giá trị Boolean để ghi nhận xem đường chéo đó có thể còn đặt con hậu vào đó được không tức là $p[m] = \text{True}$ khi và chỉ khi trên đường chéo đó chưa có con hậu nào. Khi đó tập T_k , tức là tập có thể của các chỉ số các cột mà con hậu trên hàng thứ k có thể đặt vào. Như vậy tập tất cả các giá trị mà $x[k]$ có thể nhận là tập T_k được xác định bởi biểu thức sau:

$$T_k = \{j \mid j \in N, j \neq x[h] \text{ với } h \in \{1, 2, \dots, k-1\}, c[k+j] = \text{True}, p[k-j] = \text{True}\}$$

Chương trình để giải bài toán .

```

Program Tam_hau;
uses crt;
type mang=array[1..20] of integer;
var   x:mang;
      a:array[1..20] of boolean;
      c:array[2..40] of boolean;
```

```
p:array[-19..19] of boolean;  
n,d:integer;  
  
(*-----*)  
Procedure Khoi_tao;  
var i,j,m:integer;  
BEGIN  
    write('kich co ban co:');readln(n);  
    for j:=1 to n do a[j]:=true;  
    for i:=2 to 2*n do c[i]:=true;  
    for m:=1-n to n-1 do p[m]:=true;  
    d:=0;
```

```
END;
```

```
(*-----*)
```

```
Procedure inkq;  
Var i:integer;  
BEGIN  
    inc(d);  
    write('Phuong an ',d:3,'');  
    for i:=1 to n do write(x[i]:4);  
    if i mod 10 = 0 then readln;  
    writeln;
```

```
END;
```

```
(*-----*)
```

```
Procedure thu(k:integer);
```

```
Var j:integer;
```

```
BEGIN
```

```
    for j:=1 to n do
```

```
        Begin
```

```
            x[k]:=j;
```

```
            a[j]:=false;
```

```
            c[j+k]:=false;
```

```
p[k-j]:=false;  
if k=n then inkq else thu(k+1);  
a[j]:=true;  
c[k+j]:=true;  
p[k-j]:=true;  
End;  
END;  
(*————*)  
BEGIN  
  clrscr;  
  khai_tao;  
  thu(1);  
  write('tong so co',d:3,'phuong an ');  
  readln;  
END.
```

CHƯƠNG 2

QUAN HỆ

§1. QUAN HỆ VÀ BIỂU DIỄN QUAN HỆ

1. Quan hệ và ví dụ về quan hệ

Cho hai tập A, B khác rỗng. Một tập con R của tích Đề các $A \times B$ được gọi là một quan hệ R từ tập A vào tập B . Như vậy cho quan hệ R từ A vào B , tức là cho $R \subseteq A \times B$.

Giả sử $(a, b) \in A \times B$, với $a \in A, b \in B$. Khi đó nếu $(a, b) \in R$ thì ta viết aRb và đọc là a có quan hệ R với b . Còn nếu $(a, b) \notin R$ thì ta nói rằng a không có quan hệ R với b và kí hiệu là $a \nR b$.

Ví dụ 1: Cho $A = \{a, b, c, d\}, B = \{n, m\}$.

Khi đó tập $R = \{(a,n), (b,n), (c,m)\} \subseteq A \times B$ là một quan hệ từ A vào B và aRn, bRn, cRm , còn $a \nR m$.

Ví dụ 2: Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$.

Giả sử $R = \{(1,4), (2,5), (3,6), (4,7)\}$. Khi đó R là một quan hệ từ A vào B .

Ví dụ 3: Cho $A = \{1,2,3,4,5\}$. Với mọi $a, b \in A$ ta định nghĩa aRb khi và chỉ khi $a + b$ là một số lẻ.

Khi đó R là một quan hệ từ A vào A hay $R \subseteq A \times A$.

$R = \{(1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (2,5), (5,2), (4,5), (5,4)\}$.

2. Phương pháp biểu diễn quan hệ

Các phương pháp biểu diễn quan hệ thông thường là: Phương pháp định nghĩa, phương pháp ma trận và phương pháp đồ thị.

a. Phương pháp định nghĩa: Phương pháp này được minh họa thông qua các ví dụ 1, 2, 3 ở trên. Hay phương pháp định nghĩa là phương pháp cho R một cách trực tiếp hoặc gián tiếp dựa vào tính chất các phần tử của R.

b. Phương pháp ma trận: Cho hai tập hữu hạn $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ và $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Giả sử R là một quan hệ từ A vào B, hay $R \subseteq A \times B$. Khi đó ma trận của quan hệ R là một ma trận cấp $n \times m$, tức là gồm n hàng và m cột mà phần tử δ_{ij} ở hàng i cột j của ma trận đó được xác định như sau :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } a_i R b_j \\ 0, & \text{nếu không có } a_i R b_j \end{cases}$$

Ma trận trên được ký hiệu là $M_R^{n \times m}$. Do các phần tử của ma trận này là 0 hoặc 1 nên ma trận $M_R^{n \times m}$ còn được gọi là *ma trận logic*. Rõ ràng là khi biết quan hệ R, ta tìm được ma trận logic biểu diễn nó và ngược lại khi biết ma trận logic thì ta xác định được quan hệ R ứng với ma trận logic đó.

Ví dụ 4: Cho $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{x, y, z, t\}$. Giả sử R là một quan hệ từ A vào B: $R = \{(a, x), (a, z), (a, t), (b, y), (b, t), (c, x), (c, x), (c, y), (c, t), (d, x), (d, y), (d, z), (e, y), (e, t)\}$. Khi đó ma trận biểu diễn quan hệ R sẽ là:

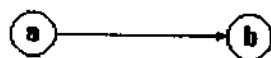
$$M_R^{5 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rõ ràng từ ma trận trên ta dễ dàng xác định được quan hệ R.

c. Phương pháp đồ thị: Cho tập hữu hạn khác trống:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

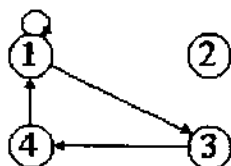
Khi đó một quan hệ $R \subseteq A \times A$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị có hướng như sau: Mỗi một $a \in A$ được xem là một đỉnh của đồ thị, do đó số đỉnh của đồ thị bằng số phần tử của tập A . Với $(a, b) \in R$ thì có một cung đi từ đỉnh a tới đỉnh b . Như vậy nếu $a, b \in A$ mà $(a, b) \in R$ hay aRb thì từ a đến b có một cung



Nếu $(a, a) \in R$ thì ta có một khuyên tại đỉnh a . Nếu $(a, b) \notin R$ thì không có một cung nào đi từ a tới b .

Cũng như đối với cách biểu diễn quan hệ bằng ma trận, với mỗi một quan hệ $R \subseteq A \times A$ ta có thể biểu diễn quan hệ bằng đồ thị có hướng và ngược lại, ứng với mỗi một đồ thị có hướng mà các đỉnh thuộc tập A có thể xác định được một quan hệ R trên A , sao cho nó nhận đồ thị đó là dạng biểu diễn của nó.

Ví dụ 5: Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và quan hệ $R \subseteq A \times A$, với $R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 4), (4, 1)\}$. Khi đó đồ thị biểu diễn quan hệ R sẽ là:



Ngược lại cũng từ đồ thị đó ta hoàn toàn có thể xác định lại quan hệ R đã cho.

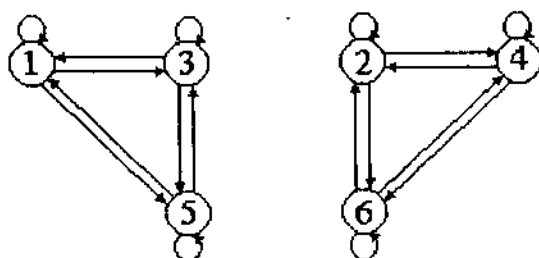
Ví dụ 6: Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và quan hệ $R \subseteq A \times A$ được xác định như sau: Với mọi $a, b \in A$, aRb khi và chỉ khi hiệu $a - b$ là một số chẵn. Khi đó ta có thể biểu diễn quan hệ theo cả 3 phương pháp như sau:

a. **Biểu diễn quan hệ R theo định nghĩa,** quan hệ R chính là tập $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,6), (6,4)\}$

b. Biểu diễn quan hệ R theo ma trận

$$M_R^{6 \times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Biểu diễn quan hệ R theo đồ thị



3. Tính chất của quan hệ

Cho A là một tập hữu hạn, khác rỗng. Sau đây ta xét một số tính chất của quan hệ $R \subseteq A \times A$.

a. Tính phản xạ: Quan hệ R có tính phản xạ nếu $\forall a \in A$ ta luôn có aRa , hay $(a, a) \in R$.

b. Tính đối xứng: Quan hệ R có tính đối xứng nếu $\forall a, b \in A$ mà aRb thì bRa , hay nếu $(a, b) \in R$ thì $(b, a) \in R$.

c. Tính phản đối xứng: Quan hệ R có tính phản đối xứng nếu $\forall a, b \in A$ mà aRb và bRa thì $a = b$, tức nếu $(a, b) \in R$ và $(b, a) \in R$ thì $a = b$.

d. Tính bắc cầu: Quan hệ R có tính bắc cầu nếu $\forall a, b, c \in A$ mà aRb và bRc thì có aRc , tức là nếu $(a, b), (b, c) \in R$ thì $(a, c) \in R$.

Nhận xét: Bằng phương pháp biểu diễn quan hệ theo ma trận và theo đồ thị ta dễ dàng nhận biết được một số tính chất của quan hệ.

Ví dụ :

- Một quan hệ có tính phản xạ khi và chỉ khi ma trận biểu diễn nó có tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1.

- Một quan hệ có tính phản xạ khi và chỉ khi đồ thị biểu diễn nó tại mỗi đỉnh đều có khuyên.

- Một quan hệ có tính đối xứng khi và chỉ khi ma trận biểu diễn nó là một ma trận đối xứng qua đường chéo chính.

- Một quan hệ có tính đối xứng khi và chỉ khi đồ thị biểu diễn nó có tính chất : với a, b là hai đỉnh bất kì và nếu có một cung đi từ đỉnh a đến đỉnh b thì cũng có một cung đi từ đỉnh b đến đỉnh a.

Sau đây ta xét một số ví dụ.

Ví dụ 7: Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Tập $R \subseteq A \times A$ được định nghĩa như sau: $\forall a, b \in A$ thì aRb khi và chỉ khi tổng $a + b$ là một số lẻ.

1. Biểu diễn R bằng 3 phương pháp đã nêu.

2. R có những tính chất gì ?

3. Có nhận xét gì về ma trận và đồ thị của R ?

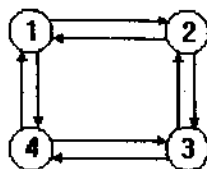
- Dạng định nghĩa của R là

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (2, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

- Dạng ma trận của R là

$$M_R^{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dạng đồ thị của R là



Ta có nhận xét về một số tính chất của quan hệ R như sau:

- Quan hệ R có tính chất đối xứng, vì $a + b = b + a$ hay nếu $(a, b) \in R$ thì $(b, a) \in R$.
- R không phản xạ, vì với $(1, 1) \notin R$.
- R không phản đối xứng, vì $(1, 2) \in R$, $(2, 1) \in R$ nhưng $2 \neq 1$.
- R không bắc cầu, vì $(1, 2) \in R$, $(2, 3) \in R$ nhưng $(1, 3) \notin R$.

Nhận xét tính chất của R từ ma trận của quan hệ R : Trong ma trận trên phần tử trên đường chéo chính bằng 0, nên R là không phản xạ. Do các phần tử đối xứng qua đường chéo chính đều bằng nhau nên R có tính đối xứng.

Nhận xét tính chất của R từ đồ thị của quan hệ R : Vì trong đồ thị tồn tại đỉnh không có khuyên nên quan hệ R là không phản xạ. Từ đồ thị ta thấy rằng nếu có một cung đi từ đỉnh i sang đỉnh j thì cũng có cung ngược lại đi từ đỉnh j sang đỉnh i , do đó R có tính chất đối xứng. Tồn tại một cặp cung có hướng là $(1, 2)$ và $(2, 3)$ trong đồ thị, nhưng cung $(1, 3)$ lại không thuộc đồ thị, do đó quan hệ R không có tính bắc cầu.

Ví dụ 8: Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $R \subseteq A \times A$ được định nghĩa như sau: $\forall a, b \in A$ thì: $aRb \Leftrightarrow a + b = 2k$ (k là nguyên). Chúng ta sẽ chỉ ra quan hệ R thoả mãn 3 tính chất: Phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Thật vậy:

- R có tính chất phản xạ, vì $\forall a \in A$ ta có $a + a = 2a$ là một số chẵn, do đó $(a, a) \in R$.

- R có tính chất đối xứng, vì $\forall a, b \in A$ mà $a + b = 2k$ thì $b + a = 2k$, do đó nếu $(a, b) \in R$ thì $(b, a) \in R$.

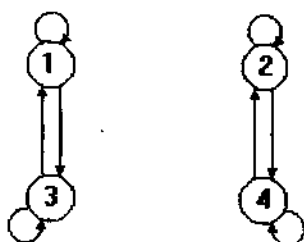
- R có tính chất bắc cầu, vì $\forall a, b, c \in A$ nếu $a + b = 2k$, $b + c = 2k'$ thì $a + c = (2k - b) + (2k' - b) = 2(k + k') - 2b = 2k''$ với k, k', k'' là các số nguyên nào đó. Điều đó có nghĩa là nếu $(a, b) \in R$ và $(b, a) \in R$ thì $(a, c) \in R$.

Nhận xét về đồ thị và ma trận của R:

Ma trận của quan hệ R :

$$M_R^{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dạng đồ thị của R :



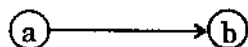
Nhận xét: - Trong ma trận của quan hệ R, các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1, do đó quan hệ R có tính phản xạ. Vì các phần tử đối xứng qua đường chéo chính đều bằng nhau suy ra R có tính đối xứng.

- Từ đồ thị của R, mỗi đỉnh đều có khuyên, do đó quan hệ R có tính phản xạ. Từ đỉnh i đến đỉnh j có một cung thì cũng có cung ngược lại từ j đến i nên R có tính đối xứng.

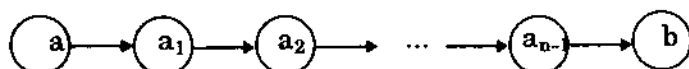
§2. CUNG VÀ ĐƯỜNG TRONG ĐỒ THỊ CỦA QUAN HỆ

1. Định nghĩa 1:

Giả sử $R \subseteq A \times A$. Nếu $a, b \in A$ mà $(a, b) \in R$ hay aRb thì từ a đến b có một cung hướng đi từ a đến b:



Nếu giữa đỉnh a và đỉnh b có tồn tại một dãy các đỉnh $a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = b$ sao cho $a_i R a_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) thì ta nói từ a đến b có một đường đi trong đồ thị của quan hệ R.



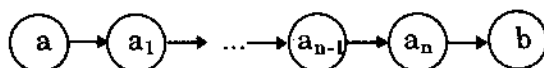
Độ dài của đường đi là số các cung có mặt trong đường đó. Trong đường trên có độ dài n . Nếu đường đi có độ dài bằng 1 thì đường đi đó là một cung, hay cung có thể xem là đường đi có độ dài bằng 1.

2. Tính chất

Định lý 1: Cho quan hệ $R \subseteq A \times A$ và R có tính chất bắc cầu. Khi đó nếu trong đồ thị của R có một đường đi độ dài n ($n \geq 1$) từ đỉnh a đến đỉnh b thì cũng có một cung từ a đến b .

Chứng minh: (Quy nạp theo $n \geq 1$).

- Trường hợp $n = 1$. Cung và đường trùng nhau nên định lý là đúng.
- Giả sử định lý đúng cho n , tức là từ a đến b có một đường đi có độ dài n thì cũng có một cung từ a sang b .
- Xét đường đi bất kì từ a đến b có độ dài $n+1$ trong đồ thị của R :



ở đây $aRa_1, a_1Ra_2, \dots, a_{n-1}Ra_n, a_nRb$. Đường đi từ a đến a_n có độ dài n nên theo giả thiết quy nạp thì từ a đến a_n có một cung, tức là aRa_n . Do R có tính bắc cầu nên từ aRa_n và a_nRb ta có aRb , hay trong đường độ dài $n+1$ từ a đến b có một cung đi từ a đến b . Định lý được chứng minh.

§3. QUAN HỆ NGƯỢC VÀ QUAN HỆ HỢP THÀNH

1. Quan hệ ngược

Định nghĩa 2: Giả sử R là một quan hệ từ tập A vào tập B . Quan hệ ngược của quan hệ R được kí hiệu là R^{-1} . Đó là một quan hệ từ tập B vào tập A và được định nghĩa như sau: $R^{-1} = \{(b, a)/a \in A, b \in B \text{ và } aRb\}$.

Ma trận quan hệ ngược:

Giả sử $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Ma trận quan hệ ngược là ma trận logic cấp $m \times n$, tức là ma trận gồm m hàng, n cột mà phần tử hàng j cột i là α_{ji} được xác định như sau:

$$\alpha_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } b_j R^{-1} a_i \\ 0, & \text{trong trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{nếu } a_i R b_j \\ 0, & \text{trong trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

$= \delta_{ij}$, là phần tử ở hàng i cột j trong ma trận của quan hệ R .

Như vậy, nếu quan hệ R có ma trận là $M_R^{n \times m} = [\delta_{ij}]$, ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$) thì ma trận của quan hệ ngược $R^{-1} \subseteq B \times A$ mà ta ký hiệu là $M_{R^{-1}}^{m \times n} = [\alpha_{ji}]$ ($j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$) sẽ nhận được từ $M_R^{n \times m}$ bằng cách đổi hàng thành cột, cột thành hàng.

Ví dụ 9: Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7\}$, R là quan hệ từ A vào B được cho bởi tập $R = \{(1,5), (1,7), (2,6), (3,6), (3,5)\}$. Tìm quan hệ ngược R^{-1} và ma trận của nó.

Theo định nghĩa ta có $R^{-1} = \{(5,1), (7,1), (6,2), (6,3), (5,3)\}$

$$M_R^{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{R^{-1}}^{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rõ ràng ma trận của quan hệ R^{-1} nhận được từ ma trận của quan hệ R bằng cách đổi hàng thành cột, cột thành hàng.

2. Quan hệ hợp thành

Định nghĩa 3: Giả sử R là quan hệ từ tập A vào tập B , S là quan hệ từ tập B vào tập C . Khi đó một quan hệ Q từ A vào C được định nghĩa sau đây gọi là quan hệ hợp thành giữa hai quan hệ R và S :

$$Q = \{(a,c)/a \in A, c \in C, \exists b \in B \text{ sao cho } aRb \text{ và } bSc\}$$

Ta kí hiệu quan hệ hợp thành giữa R và S qua $Q = R.S$.

Ma trận của quan hệ hợp thành: Giả sử Q là quan hệ hợp thành của hai quan hệ R và S , $Q = R.S$. Khi đó ma trận của quan hệ hợp thành Q được xác định như sau:

Giả sử có $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ và $C = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$. Ma trận của quan hệ $R \subseteq A \times B$ là $M_R^{n \times m}$ gồm m hàng, n cột và phần tử hàng i , cột j là :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } a_i R b_j \\ 0, & \text{trong trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

Ma trận của quan hệ $S \subseteq B \times C$ là $M_S^{m \times r}$ gồm m hàng, r cột và phần tử β_{jk} ở hàng j cột k được xác định bởi

$$\beta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } b_j S c_k \\ 0, & \text{trong trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

Gọi γ_{ik} là phần tử ở hàng i cột k của ma trận quan hệ hợp thành $Q = R.S$, kí hiệu là $M_Q^{n \times r}$

$$\gamma_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } a_i Q c_k \\ 0, & \text{trong trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

Theo định nghĩa của quan hệ hợp thành thì:

$$\gamma_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } \exists b_j \in B \text{ sao cho } a_i R b_j \text{ và } b_j S c_k \\ 0, & \text{trong trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

Từ đó ta thấy $\gamma_{ik} = 1$ khi và chỉ khi $\delta_{ij} = \beta_{jk} = 1$, hay ma trận của quan hệ hợp thành bằng ma trận của quan hệ R nhân với ma trận của quan hệ S :

$$M_Q^{n \times r} = M_R^{n \times m} \cdot M_S^{m \times r}$$

Ví dụ 10: Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$ và $C = \{a, b\}$.

$R \subseteq A \times B$ được cho bởi:

$$R = \{(1,6), (1,8), (2,7), (2,9), (3,9), (4,6), (4,8), (5,7)\}$$

$S \subseteq B \times C$ được cho bởi: $S = \{(6,a), (7,a), (8,a)\}$

Xác định quan hệ hợp thành $Q = R.S$ và chỉ ra rằng

$$M_Q^{5 \times 2} = M_R^{5 \times 4} \cdot M_S^{4 \times 2}$$

Thật vậy xét quan hệ $Q \subseteq A \times C$ và dựa vào R, S ta có:

$$Q = R.S = \{(1,a), (1,b), (2,a), (4,a), (4,b), (5,a)\}$$

$$M_R^{5 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; M_S^{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; M_Q^{5 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{Rõ ràng ta có: } M_Q^{5 \times 2} = M_R^{5 \times 4} \cdot M_S^{4 \times 2}.$$

§4. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

1. Định nghĩa quan hệ tương đương

Giả sử R là một quan hệ từ tập A vào tập A . Quan hệ R được gọi là quan hệ tương đương trên A nếu R thỏa mãn 3 tính chất sau đây:

- Tính phản xạ : $\forall a \in A$ ta có aRa .
- Tính đối xứng : $\forall a, b \in A$ nếu aRb thì bRa .
- Tính bắc cầu : $\forall a, b, c \in A$ nếu aRb và bRc thì aRc .

Ví dụ 11: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Trên A ta định nghĩa quan hệ R như sau: $\forall a, b \in A$ thì $aRb \Leftrightarrow a + b = 2k$ với k là một số nguyên dương nào đó.

Ta sẽ chỉ ra R là quan hệ tương đương. Tức là cần chỉ ra R thỏa mãn các tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

- Phản xạ: $\forall a \in A$ ta có $a + a = 2a$ nên aRa .
- Đối xứng: Giả sử $a, b \in A$ và aRb khi đó $a + b = 2k$, do đó $b + a = 2k$ nên bRa .
- Bắc cầu: Giả sử $a, b, c \in A$ và aRb, bRc , tức là $a + b = 2k_1$ và $b + c = 2k_2$.

$$\text{Xét: } a + c = (2k_1 - b) + (2k_2 - b) = 2(k_1 + k_2) - 2b = 2(k_1 + k_2 - b)$$

Từ đó suy ra $a + c = 2k_3$ với k_3 là một số nguyên dương nào đó, nên aRc . Vậy R là quan hệ tương đương.

2. Phân hoạch tương đương trên tập hợp

Cho tập $A \neq \emptyset$ và hữu hạn phần tử. Ta chia tập A thành n tập con $A_1, A_2, \dots, A_n$ sao cho $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ và $A_i \cap A_j = \emptyset$ với $i \neq j$. Khi đó ta nói các tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ là một phân hoạch tương đương trên tập A . Ngược lại, ứng với mỗi phân hoạch tương đương $A_1, A_2, \dots, A_n$ trên tập A , ta xác định quan hệ tương đương R trên A sinh ra phân hoạch đó như sau: $\forall a, b \in A, aRb \Leftrightarrow \exists A_i$ sao cho $a, b \in A_i$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Ta sẽ chỉ ra rằng quan hệ R định nghĩa như trên là quan hệ tương đương trên A và R sinh ra phân hoạch đã cho. Thật vậy ta sẽ chứng tỏ R thoả mãn 3 tính chất:

- Phản xạ: Với mỗi $a \in A$ có duy nhất A_i để $a \in A_i$ hay aRa .
- Đối xứng: Nếu $a, b \in A$ mà aRb , suy ra có ít nhất A_i sao cho $a, b \in A_i$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), từ đó $b, a \in A_i$ và ta có bRa .
- bắc cầu: Giả sử $a, b, c \in A$ và aRb, bRc ta chỉ ra aRc . Thật vậy, từ aRb suy ra tồn tại tập A_i để $a, b \in A_i$ và từ bRc suy ra tồn tại tập A_j để $b, c \in A_j$. Do tính chất $A_i \cap A_j = \emptyset$ với $i \neq j$ nên suy ra $A_i = A_j$ (vì chúng cùng chứa b). Điều đó chứng tỏ $a, c \in A_i$ hay aRc .

Ví dụ 12: Cho $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ và phân hoạch của A là $A_1 = \{2, 3\}$, $A_2 = \{4\}$, $A_3 = \{5, 6\}$. Quan hệ tương đương R sinh ra phân hoạch trên là $R = \{(2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (5, 6), (6, 5)\}$. Dễ dàng chỉ ra R là quan hệ tương đương trên A . Để chỉ ra R sinh ra A_1, A_2, A_3 ở trên, ta lập ma trận:

$$M_R^{5 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hàng thứ nhất và hàng thứ hai của ma trận sinh ra $A_1 = \{2, 3\}$.

Hàng thứ ba của ma trận sinh ra $A_2 = \{4\}$

, Hàng thứ tư, thứ năm của ma trận sinh ra tập $A_3 = \{5, 6\}$.

Cần lưu ý rằng: Với mỗi quan hệ tương đương R trên tập A thì nó sẽ sinh ra một phân hoạch tương đương trên tập A và ngược lại với phân hoạch tương đương trên A sẽ sinh ra một quan hệ tương đương trên A .

Ví dụ 13: Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Trên A ta định nghĩa quan hệ R như sau: $\forall a, b \in A: aRb \Leftrightarrow a - b = 3k$ (với k là một số nguyên). Hãy chỉ ra quan hệ R trên là quan hệ tương đương và tìm phân hoạch tương đương trên A do R sinh ra.

Từ định nghĩa ta có: $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (1, 4), (4, 1), (1, 7), (7, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 7), (7, 4)\}$.

Trước hết chỉ ra R thoả mãn 3 tính chất:

- Phản xạ: Với $\forall a \in A$ rõ ràng $a - a = 0 = 3 \cdot 0$ nên aRa .

- Đối xứng: Giả sử $a, b \in A$ và aRb . Ta có $a - b = 3k$.

Dĩ nhiên $b - a = 3(-k)$ do đó bRa .

- bắc cầu: Giả sử $a, b, c \in A$, aRb và bRc theo định nghĩa ta có $a - b = 3k_1$, $b - c = 3k_2$. Xét $a - c = (3k_1 + b) - (b + 3k_2) = 3(k_1 - k_2) = 3k_3$. Vậy aRc .

Để tìm phân hoạch tương đương trên A do R sinh ra ta lập ma trận của R :

$$M_R^{7 \times 7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Các hàng 1, 4 và 7 sinh ra tập $A_1 = \{1, 4, 7\}$.

Các hàng 2 và 5 sinh ra tập $A_2 = \{2, 5\}$.

Các hàng 3 và 6 sinh ra tập $A_3 = \{4, 6\}$.

Khi đó các tập A_1, A_2, A_3 sẽ tạo thành một phân hoạch tương đương trên A .

§5. BAO ĐÓNG BẮC CẦU CỦA QUAN HỆ

1. Bao đóng bắc cầu của quan hệ

Giả sử $R \subseteq A \times A$. Bao đóng bắc cầu của quan hệ R được kí hiệu bởi $[R]$ là quan hệ bắc cầu nhỏ nhất chứa R , hay $R \subseteq [R]$. Nói cách khác, nếu R là một quan hệ trên A , thì $[R]$ là một quan hệ nhỏ nhất chứa A sao cho nếu với mọi cặp $(a, b) \in R$ và $(b, c) \in R$ thì $(a, c) \in [R]$.

Ví dụ 14: Cho $A = \{a, b, c\}$ và $R = \{(a, b), (b, c)\}$ là một quan hệ trên A . Khi đó dễ dàng thấy rằng quan hệ $[R] = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ là bao đóng bắc cầu nhỏ nhất chứa R .

Định lý 2: Giả sử S là quan hệ bắc cầu trên A và R là quan hệ trên A thoả mãn $R \subseteq S$. Khi đó $[R] \subseteq S$.

Chứng minh: Ta chỉ ra rằng nếu $(a, c) \in [R]$ thì $(a, c) \in S$. Thật vậy: Nếu $(a, c) \in R$ thì ta có ngay $(a, c) \in S$.

Nếu $(a, c) \notin R$, điều đó có nghĩa là phải $\exists (a, b) \in R$ và $(b, c) \in R$ để từ đó có $(a, c) \in [R]$. Theo giả thiết $R \subseteq S$ nên ta cũng có $(a, b) \in S$ và $(b, c) \in S$. Do S là quan hệ bắc cầu, suy ra $(a, c) \in S$.

Định lý đã được chứng minh.

2. Xác định bao đóng bắc cầu của quan hệ

Trước hết ta kí hiệu:

$R^1 = \{(a, b) / a, b \in A, aRb\}$: đường độ dài 1 từ a đến b .

$R^2 = \{(a, b) / a, b \in A, \exists c_1 \in A \text{ sao cho } aRc_1 \text{ và } c_1Rb\}$:
đường độ dài 2 đi từ a đến b .

$R^3 = \{(a, b) / a, b \in A, \exists c_1, c_2 \in A \text{ sao cho } aRc_1, c_1Rc_2, c_2Rb\}$:
đường độ dài 3 đi từ a đến b.

.....
 $R^n = \{(a, b) / a, b \in A, \exists c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \in A \text{ sao cho } aRc_1, c_1Rc_2, \dots, c_{n-1}Rb\}$: đường độ dài n đi từ a đến b.

$$\text{Đặt } R^\infty = \bigcup_{n=1}^n R^n.$$

Từ ký hiệu trên ta có: $(a, b) \in R^\infty$ nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho $(a, b) \in R^k$. Điều đó cũng tương đương với việc tồn tại $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ sao cho $aRc_1, c_1Rc_2, c_2Rc_3, \dots, c_{k-2}Rc_{k-1}, c_{k-1}Rb$, nói cách khác $(a, b) \in R^\infty$ nếu tồn tại một đường đi độ dài k từ a đến b.

Định lý 3: Giả sử $R \subseteq A \times A$. Khi đó $R^\infty = [R]$.

Điều đó có nghĩa là R^∞ là bao đóng bắc cầu nhỏ nhất chứa R.

Chứng minh: a. Trước hết chứng minh rằng R^∞ là bao đóng bắc cầu:

Thật vậy, giả sử $(a, b) \in R^\infty$ và $(b, c) \in R^\infty$ ta sẽ chỉ ra rằng $(a, c) \in R^\infty$. Do $(a, b) \in R^\infty$ suy ra tồn tại số nguyên dương k sao cho $(a, b) \in R^k$. Tương tự do $(b, c) \in R^\infty$ ta có số nguyên dương h sao cho $(b, c) \in R^h$. Khi đó tồn tại $c_1, c_2, \dots, c_{k-1} \in A$ sao cho:

$$aRc_1, c_1Rc_2, c_2Rc_3, \dots, c_{k-2}Rc_{k-1}, c_{k-1}Rb \quad (1)$$

Mặt khác cũng tồn tại $s_1, s_2, \dots, s_{h-1} \in A$ sao cho:

$$bRs_1, s_1Rs_2, s_2Rs_3, \dots, s_{h-2}Rs_{h-1}, s_{h-1}Rc \quad (2)$$

Nối đường (1) và (2) tại đỉnh chung b ta có đường độ dài k+h đi từ a đến c, do đó $(a, c) \in R^{k+h}$, hay $(a, c) \in R^\infty$.

b. Tiếp theo sẽ chứng minh rằng với bất kỳ quan hệ bắc cầu S chứa R thì đều có $R^\infty \subseteq S$.

Thật vậy, giả sử có $(a, b) \in R^\infty$. Khi đó tồn tại $c_1, c_2, \dots, c_{k-1} \in A$ sao cho: $aRc_1, c_1Rc_2, c_2Rc_3, \dots, c_{k-2}Rc_{k-1}, c_{k-1}Rb$, tức là từ a đến b có một đường độ dài k. Vì $R \subseteq S$ nên từ $aRc_1, c_1Rc_2, c_2Rc_3, \dots, c_{k-2}Rc_{k-1}, c_{k-1}Rb$ ta có: $aSc_1, c_1Sc_2, c_2Sc_3, \dots, c_{k-2}Sc_{k-1}, c_{k-1}Sb$

Do S là quan hệ bắc cầu nên theo định lý 1 suy ra từ a đến b có một cung, tức là $(a, b) \in S$. Điều đó chứng tỏ $R^\infty \subseteq S$, hay $R^\infty = [R]$ là bao đóng bắc cầu nhỏ nhất chứa R .

Thuật toán tìm bao đóng bắc cầu nhỏ nhất của quan hệ R theo định lý 3 rất khó thực hiện, vì vậy ta cần đưa ra một thuật toán đơn giản hơn sau đây:

Định lý 4: Giả sử tập A có n phần tử và R là một quan hệ từ A vào A . Khi đó $R^\infty = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$.

Chứng minh: a. Bao hàm thức $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n \subseteq R^\infty$ là hiển nhiên.

b. Ta chứng minh bao hàm thức ngược lại.

$$R^\infty \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$$

Giả sử $(a, b) \in R^\infty$. Khi đó tồn tại một số nguyên dương k sao cho $(a, b) \in R^k$. Điều đó có nghĩa là tồn tại $c_1, c_2, \dots, c_{k-1} \in A$ sao cho: $aRc_1, c_1Rc_2, c_2Rc_3, \dots, c_{k-2}Rc_{k-1}, c_{k-1}Rb$. Như vậy có một đường từ a đến b độ dài k . Có hai khả năng:

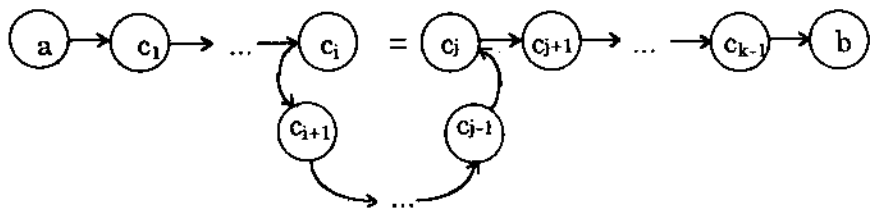
b.1) Khi $k \leq n$.

Trong trường hợp này R^k là một trong các tập R^i ($i=1, \dots, n$) do đó $(a, b) \in R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$.

b.2) Khi $k > n$.

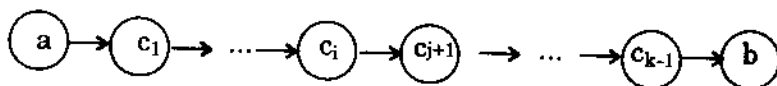
Vì từ a đến b có đường với độ dài k , có nghĩa là tồn tại $c_1, c_2, \dots, c_{k-1} \in A$ sao cho: $aRc_1, c_1Rc_2, c_2Rc_3, \dots, c_{k-2}Rc_{k-1}, c_{k-1}Rb$

Trong đường đó có $k+1$ đỉnh mà $k > n$ nên phải tồn tại ít nhất một cặp đỉnh c_i, c_j sao cho $c_i = c_j$ và $i < j$. Khi đó đường đi độ dài k từ a đến b có dạng:



ở đây $aRc_1, c_1Rc_2, c_2Rc_3, \dots, c_{i-1}Rc_i, \dots, c_{j-1}Rc_j, \dots, c_{k-1}Rb$

Trong đường trên ta bỏ đi chu trình vòng, tức là bỏ đi các đỉnh $c_{i+1}, \dots, c_{j-1}, c_j$ và nối c_i với c_{j+1} bởi một cung ta được đường đi từ a đến b độ dài $k' < k$.



ở đây $aRc_1, \dots, c_iRc_{j+1}, \dots, c_{k-1}Rb$.

Nếu $k' > n$ thì trong đường này vẫn tồn tại các cặp đỉnh bằng nhau, tức là đường đi từ a đến b vẫn còn chu trình. Ta lặp lại quá trình trên để loại bỏ chu trình vòng cho tới khi nào trong đường đi từ a đến b gồm các đỉnh a, b và các đỉnh trung gian khác nhau từng cặp. Đường như thế sẽ có độ dài $\leq n$ và do đó $(a, b) \in R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$. Định lý đã được chứng minh.

§6. THUẬT TOÁN XÁC ĐỊNH BAO ĐÓNG BẮC CẦU CỦA QUAN HỆ

Theo định lý 4 thì $R^\infty = R \cup R^1 \cup \dots \cup R^n$ là bao đóng bắc cầu nhỏ nhất của quan hệ R trên tập A gồm n phần tử.

Ta gọi M_R là ma trận của quan hệ R .

M_{R^2} là ma trận của quan hệ R^2 .

.....

M_{R^n} là ma trận của quan hệ R^n .

Còn M_{R^∞} là ma trận bao đóng bắc cầu nhỏ nhất chứa quan hệ được xác định trong định lý 4.

Khi đó ta có $M_{R^\infty} = M_R \vee M_{R^2} \vee \dots \vee M_{R^n} = M_{[R]}$.

$$\text{Ví dụ: } M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Khi đó } M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{và } M_{R^3} = M_{R^2} \cdot M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vậy } M_{[R]} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Định lý 4 dùng để làm cơ sở cho thuật toán tính ma trận quan hệ của bao đóng bắc cầu nhỏ nhất chứa R trên tập A gồm n phần tử.

Thuật toán tính bao đóng bắc cầu nhỏ nhất chứa quan hệ R trên tập A gồm n phần tử:

Procedure bao_dong_bac_cau(M_R : ma trận cấp n.n của R)

A := M_R ;

B := A;

for i:=2 to n do

Begin

A := $M_R \cdot A$;

B := B $\vee$ A;

End; (B là ma trận của $[R] = R^1 \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$)

Chú ý 1: Độ phức tạp của thuật toán trên là $O(n^4)$.

Chú ý 2: Ngoài thuật toán trên, người ta có thể dùng thuật toán Warshall để tính $M_{[R]}$ với độ phức tạp thấp hơn là $O(n^3)$, (xem [13]).

CHƯƠNG 3

ĐỒ THỊ HỮU HẠN

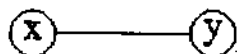
§1. ĐỒ THỊ HỮU HẠN

1. Một số khái niệm

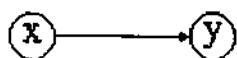
Định nghĩa 1:

Giả sử X là tập hữu hạn, không rỗng các phần tử nào đó và $U \subseteq X \times X$. Bộ $G = \langle X, U \rangle$ được gọi là đồ thị hữu hạn. Mỗi phần tử $x \in X$ gọi là *một đỉnh* và mỗi phần tử $u = (x, y) \in U$ gọi là *một cạnh* của đồ thị $G = \langle X, Y \rangle$. Vì thế X còn được gọi là tập các đỉnh và U là tập các cạnh của đồ thị G . Nếu $u = (x, x) \in U$ thì đỉnh x gọi là một khuyên trong G . Nếu với mọi cạnh $u = (x, y) \in U$ ta không phân biệt thứ tự của các đỉnh x và y , tức là từ x đến y không kể hướng thì ta nói rằng đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ là *đồ thị hữu hạn vô hướng* hoặc gọi tắt là *đồ thị vô hướng*. Trong trường hợp ngược lại, nếu mỗi cạnh $u = (x, y) \in U$ là một cặp đỉnh có thứ tự hay có hướng đi từ x đến y thì ta nói rằng đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ là *đồ thị hữu hạn có hướng*, hay gọi tắt là *đồ thị có hướng*. Mỗi cạnh của đồ thị có hướng còn được gọi là *một cung*. Khi $(x, y) \in U$ thì ta nói rằng x, y là hai đỉnh kề nhau.

Ta có thể mô tả một cạnh (x, y) trong đồ thị vô hướng như sau:



Tương tự ta cũng có thể mô tả một cung (x, y) trong đồ thị có hướng như sau:



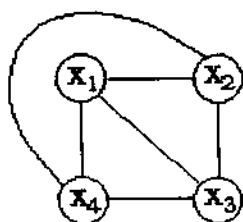
Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$, (có hướng hoặc không có hướng) và $u = (x, y) \in U$ là một cạnh nối đỉnh x và đỉnh y . Khi đó ta nói u là cạnh chứa các đỉnh x, y hoặc x, y là hai đỉnh thuộc cạnh u . Khi đó x, y được gọi là *hai đỉnh kề nhau*. Hai cạnh được gọi là *kề nhau* nếu giữa chúng có đỉnh chung. Ví dụ với $u = (x, y)$ và $v = (y, z)$ thì chúng là hai cạnh kề nhau.

Định nghĩa 2: Đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ được gọi là đồ thị đơn nếu giữa hai đỉnh bất kì được nối với nhau bởi không quá một cạnh (một cung).

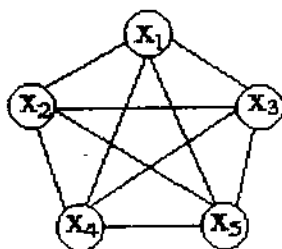
Định nghĩa 3: Đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ được gọi là đa đồ thị nếu nó có ít nhất một cặp đỉnh được nối với nhau bởi hai cạnh (hai cung) trở lên.

Định nghĩa 4: Đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ được gọi là đồ thị phẳng nếu nó có dạng biểu diễn hình học trên mặt phẳng mà các cạnh chỉ cắt nhau ở đỉnh. Trong trường hợp ngược lại đồ thị là không phẳng.

Chẳng hạn:



đồ thị phẳng

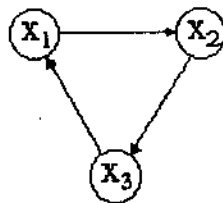
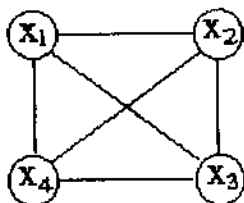


đồ thị không phẳng

Định nghĩa 5: a) Đồ thị vô hướng $G = \langle X, U \rangle$ được gọi là đồ thị đầy đủ nếu mỗi cặp đỉnh đều có cạnh nối giữa chúng.

b) Đồ thị có hướng $G = \langle X, U \rangle$ được gọi là đồ thị đầy đủ nếu mỗi cặp đỉnh đều có cung nối giữa chúng (chiều của cung có thể tùy ý).

Chẳng hạn :

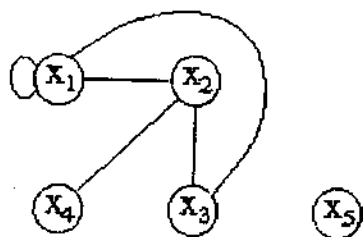


là đồ thị đầy đủ.

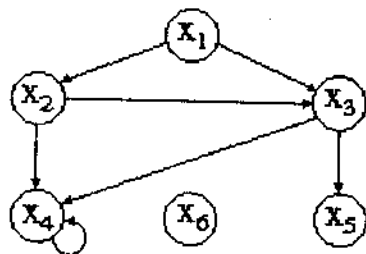
Định nghĩa 6: a) Cho đồ thị vô hướng $G = \langle X, U \rangle$. Với $x \in X$, ta ký hiệu $m(x)$ là số các cạnh thuộc đỉnh x và $m(x)$ gọi là bậc của đỉnh x . Nếu đỉnh x có khuyên thì đặt $m(x) = 2$. Nếu $m(x) = 0$ thì x được gọi là đỉnh cô lập và nếu $m(x) = 1$ thì $m(x)$ được gọi là đỉnh treo. Bậc của đồ thị vô hướng $G = \langle X, U \rangle$ được ký hiệu là $m(G) = \sum_{x \in X} m(x)$.

b) Cho đồ thị có hướng $G = \langle X, U \rangle$, nếu $x \in X$ là một đỉnh của đồ thị, ta ký hiệu $m^+(x)$ là số các cung vào của đỉnh x , còn $m^-(x)$ là số các cung ra khỏi x . Khi đó ta gọi $m^+(x)$ là bậc vào của đỉnh x còn $m^-(x)$ là bậc ra của đỉnh x . Bậc của đồ thị có hướng $G = \langle X, U \rangle$ được ký hiệu là $m(G) = \sum_{x \in X} m^+(x) + \sum_{x \in X} m^-(x)$. Với $x \in X$ mà $m^+(x) + m^-(x) = 0$ thì ta nói rằng x là đỉnh cô lập, còn nếu có $m^+(x) = 0, m^-(x) = 1$ hoặc $m^+(x) = 1, m^-(x) = 0$ thì x được gọi là đỉnh treo.

Ví dụ 1: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ như hình vẽ dưới đây và theo định nghĩa ta có: $m(x_1) = 4, m(x_2) = 3, m(x_3) = 2, m(x_4) = 1, m(x_5) = 0$. Khi đó x_4 là đỉnh treo, x_5 là đỉnh cô lập và $m(G) = 10$.



Ví dụ 2: Xét đồ thị có hướng $G_1 = \langle X, U \rangle$ (hình vẽ) ta cũng có: $m^+(x_1) = 0, m^-(x_1) = 2, m^+(x_2) = 1, m^-(x_2) = 2, m^+(x_3) = 2, m^-(x_3) = 2, m^+(x_4) = 3, m^-(x_4) = 1, m^+(x_5) = 1, m^-(x_5) = 0, m^+(x_6) = m^-(x_6) = 0, m^+(x_5) = 1, m^-(x_5) = 0$. Khi đó x_5 là đỉnh treo, x_6 là đỉnh cô lập và bậc của đồ thị G_1 bằng $m(G_1) = 14$.



2. Biểu diễn đồ thị

Có hai phương pháp biểu diễn đồ thị.

• Biểu diễn hình học:

Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$, khi đó ta có thể biểu diễn G bằng phương pháp hình học như chúng ta đã đề cập ở một số phần trước. Ở đây xin nhắc lại và cụ thể hơn như sau: Mỗi $x \in X$ ta đặt tương ứng với một điểm trong mặt phẳng, điểm đó gọi là đỉnh của đồ thị. Do tập X là hữu hạn nên nó tương ứng với tập hữu hạn các đỉnh trên mặt phẳng.

a. Trường hợp $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị vô hướng. Trong trường hợp này nếu $u = (x, y) \in U$ thì trong mặt phẳng, các đỉnh x và đỉnh y được nối với nhau bởi một cạnh không có hướng. Nếu $(x, x) \in U$ thì tại đỉnh x sẽ có một khuyên.

b. Trường hợp $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị có hướng. Nếu $u = (x, y) \in U$ thì trong mặt phẳng sẽ có một cung có hướng đi từ đỉnh x đến đỉnh y . Trường hợp $x = y$ thì tại đỉnh x có một khuyên có hướng vào chính nó.

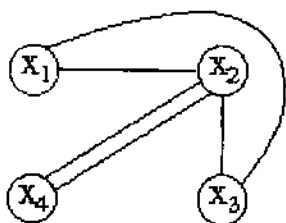
• Biểu diễn bằng ma trận kề

a. Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị vô hướng với $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Đồ thị G có thể biểu diễn bằng ma trận kề vuông cấp n , mà phần tử δ_{ij} ở hàng i cột j được xác định như sau: $\delta_{ij} = d$, nếu cặp đỉnh x_i, x_j có d cạnh nối với nhau. Khi cặp đỉnh x_i, x_j không có cạnh nào nối với nhau thì $\delta_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Bằng cách đó ta sẽ nhận được ma trận biểu diễn đồ thị đã cho.

Ma trận của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng, tức là các phần tử đối xứng qua đường chéo chính sẽ tương ứng bằng nhau.

b. Trường hợp $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị có hướng với $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ thì đồ thị G có thể biểu diễn bằng ma trận kề vuông cấp n mà phần tử hàng i , cột j của nó là δ_{ij} được xác định như sau: đối với mỗi cặp đỉnh (x_i, x_j) , từ x_i đến x_j nếu có d cung thì $\delta_{ij} = d$. Trong trường hợp ngược lại thì $\delta_{ij} = 0$. Nói chung ma trận biểu diễn đồ thị có hướng là ma trận không đối xứng.

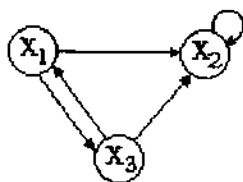
Ví dụ 3: Cho đồ thị vô hướng $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$ như hình vẽ dưới đây :



Ta có thể biểu diễn G_1 dưới dạng ma trận đối xứng như sau:

$$M_{G_1}^{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 4: Cho đồ thị có hướng $G_2 = \langle X_2, U_2 \rangle$ như hình vẽ :



Ma trận kề của nó :

$$M_{G_2}^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

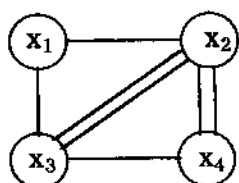
Chú ý: Nếu ma trận kề của đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ mà mọi phần tử của nó là 0 hoặc 1 thì ma trận kề đó gọi là ma trận logic. Mọi đồ thị đơn đều có ma trận kề là ma trận logic. Ma trận kề không phải là ma trận logic thì ma trận đó là ma trận của đa đồ thị.

Đối với ma trận kề của đồ thị ta có:

Định lý 1: Nếu $G = \langle X, U \rangle$ là đa đồ thị với $M_G = (a_{ij})$ là ma trận kề, thì số các đường khác nhau đi từ đỉnh x_i đến đỉnh x_j có độ dài l bằng phần tử P_{ij} của ma trận tích $\underbrace{M_G \cdot M_G \dots M_G}_{l \text{ lần}} = M_G^l = (P_{ij})$

Chứng minh: Quy nạp theo $l \geq 1$ và dựa vào định nghĩa phép nhân ma trận.

Ví dụ 5: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ được thể hiện ở hình vẽ dưới đây:



và ma trận kề của G

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tìm tất cả các đường độ dài $l = 2$ đi từ x_1 đến x_4 , từ x_3 đến x_4 và từ x_2 vào x_2 . Trước hết tính ma trận tích

$$\begin{aligned} M_G^2 = M_G \cdot M_G &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Từ ma trận này ta thấy số đường độ dài 2 từ x_1 đến x_4 là 2, đó là các đường: $x_1ax_2px_4$ và $x_1ax_2qx_4$.

Số các đường độ dài 2 từ x_3 đến x_4 là 4, đó là các đường: $x_3cx_2px_4$, $x_3cx_2qx_4$, $x_3dx_2px_4$, $x_3dx_2qx_4$.

Số các đường độ dài 2 từ x_2 vào x_2 là 9, đó là các đường: $x_2px_4px_2$, $x_2qx_4qx_2$, $x_2px_4qx_2$, $x_2qx_4px_2$, $x_2cx_3cx_2$, $x_2dx_3dx_2$, $x_2cx_3dx_2$, $x_2dx_3cx_2$ và $x_2ax_1ax_2$.

Từ Định lý 1 ta có hệ quả sau:

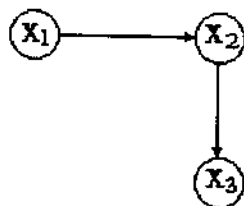
Hệ quả:

Trong đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ ta luôn có:

a) G chứa đường độ dài 1 từ đỉnh x_i sang đỉnh x_j khi và chỉ khi $M_G^1 \neq 0$.

b) G không có chu trình khi và chỉ khi tồn tại số nguyên dương k sao cho từ đó trở đi ta có $M_G^k = 0$, ở đây 0 là ma trận 0, tức là mọi phần tử của ma trận đều bằng 0.

Ví dụ 6: Xét $G = \langle X, U \rangle$ như hình dưới



ma trận kề $M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ và ma trận tích $M_G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Trong đồ thị có chứa đường đi độ dài 2 từ x_1 đến x_3 .

$M_G^3 = M_G \cdot M_G \cdot M_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nên đồ thị không có chu trình.

3. Đường và chu trình trong đồ thị

Định nghĩa 7: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị vô hướng (hoặc có hướng). Một đường đi trong đồ thị là một dãy $x_{i1}u_{i1} x_{i2}u_{i2} \dots x_{ij}u_{ij} \dots x_{ik}u_{ik}x_{ik+1}$, trong đó các x_{ij} là các đỉnh còn các u_{ij} là các cạnh sao cho với $\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}$ thì đỉnh x_{ij} và đỉnh x_{ij+1} là hai đỉnh kề nhau. Đường đi đó xuất phát từ đỉnh x_{i1} và kết thúc tại đỉnh x_{ik+1} (hoặc đi từ đỉnh x_{i1} đến đỉnh x_{ik+1}). Độ dài của đường bằng số các cạnh (hoặc cung) trong đường đó.

Chu trình trong đồ thị là một đường đi có đỉnh xuất phát và kết thúc trùng nhau.

Định nghĩa 8: Đường (chu trình) trong đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ được gọi là đơn nếu nó đi qua mỗi cạnh không quá một lần.

Đường (chu trình) được gọi là *sơ cấp* nếu nó đi qua các đỉnh, mỗi đỉnh đúng một lần.

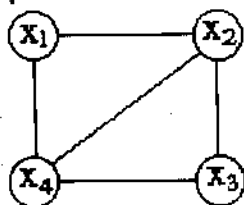
4. Đồ thị con, đồ thị bộ phận và đồ thị liên thông

Định nghĩa 9: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$

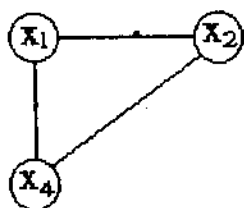
a) Nếu trong đồ thị đó ta bỏ đi một số đỉnh nào đó và các cạnh xuất phát từ các đỉnh đó thì phần còn lại của đồ thị được gọi là đồ thị con của đồ thị G đã cho.

b) Nếu trong đồ thị G ta bỏ đi một số cạnh, giữ nguyên các đỉnh thì phần còn lại của đồ thị được gọi là đồ thị bộ phận của đồ thị G .

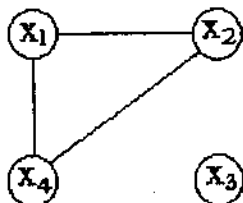
Ví dụ 7: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ như hình vẽ dưới đây :



Trong G bỏ đi x_3 và các cạnh kề đỉnh x_3 (hình vẽ dưới) ta được đồ thị $G' = \langle X', U' \rangle$ là đồ thị con của đồ thị G .

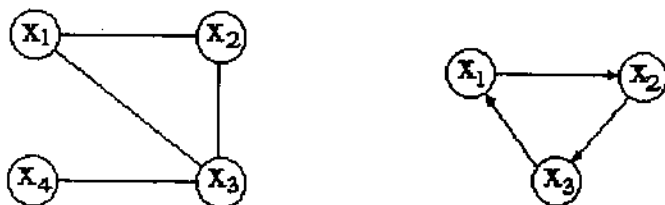


Trong ví dụ trên, nếu ta giữ lại các đỉnh, bỏ hai cạnh kề đỉnh x_3 ta được đồ thị $G'' = \langle X, U' \rangle$ là đồ thị bộ phận của đồ thị G ban đầu.



Định nghĩa 10: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$. Hai đỉnh phân biệt $x, y \in X$ được gọi là *liên thông* nếu tồn tại một đường đi nối các đỉnh x, y với nhau. Đồ thị G được gọi là *liên thông* nếu với hai đỉnh phân biệt bất kì trong đồ thị đều là liên thông.

Ví dụ 8: Các đồ thị $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$ và đồ thị $G_2 = \langle X_2, U_2 \rangle$ là các đồ thị liên thông.



Định nghĩa 11: Giả sử $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$ và $G_2 = \langle X_2, U_2 \rangle$ là hai đồ thị liên thông với giả thiết là $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ và với hai đỉnh bất kỳ x, y ($x \in X_1, y \in X_2$), không có đường hoặc cạnh nào nối hai đỉnh đó với nhau. Khi đó ta nói đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ với $X = X_1 \cup X_2, U = U_1 \cup U_2$ có hai thành phần liên thông G_1 và G_2 . Các đồ thị G_1, G_2 cũng được gọi là các thành phần liên thông của đồ thị G .

Lưu ý: Khái niệm thành phần liên thông có thể mở rộng cho một số thành phần là một số nguyên dương k tùy ý.

5. Một số tính chất ban đầu của đồ thị

Sau đây là khẳng định về bậc của đồ thị.

Định lý 2: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị hữu hạn. Khi đó bậc của đồ thị G bằng 2 lần số cạnh của đồ thị, tức là $m(G) = 2|U|$.

Chứng minh: Giả sử $x, y \in X$ và $(x, y) \in U$.

Nhận xét: a) Giả sử $x \neq y$. Khi đó nếu xóa cạnh (x, y) thì bậc của đồ thị sẽ giảm đi 2. Nếu ta xóa tất cả các cạnh có dạng như trên thì đồ thị còn lại chỉ gồm các đỉnh cô lập hoặc các đỉnh có khuyên.

b) Tại mỗi đỉnh x có khuyên, nếu ta xóa khuyên thì bậc của đồ thị cũng sẽ giảm đi 2.

c) Như vậy sau khi xóa một cạnh hoặc một khuyên thì bậc của đồ thị giảm đi 2 và sau khi xóa tất cả các cạnh và các khuyên của đồ thị thì bậc của đồ thị còn lại là bằng 0.

Từ nhận xét trên, hiển nhiên ta có đẳng thức $m(G) = 2|U|$.

Đó là điều cần phải chứng minh.

Định lý 3: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là một đồ thị có $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Khi đó số các đỉnh bậc lẻ của đồ thị trên là một số chẵn.

Chứng minh: Giả sử trong n đỉnh có k đỉnh bậc lẻ là $x_1, x_2, \dots, x_k$. Các đỉnh còn lại có bậc chẵn là các đỉnh $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$. Ở đây $m(x_i) = 2m_i + 1$ với $i = 1, \dots, k$ và $m(x_j) = 2m_j$ với $j = k+1, \dots, n$; m_i, m_j là số nguyên dương. Theo định lý 2 thì:

$$m(G) = \sum_{i=1}^k m(x_i) + \sum_{j=k+1}^n m(x_j) = 2|U|$$

$$\text{Do} \quad \sum_{i=1}^k m(x_i) = \sum_{i=1}^k (2m_i + 1) = 2 \sum_{i=1}^k m_i + k$$

$$\text{và} \quad \sum_{j=k+1}^n m(x_j) = 2 \sum_{j=k+1}^n m_j$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra} \quad m(G) &= \sum_{i=1}^k m(x_i) + \sum_{j=k+1}^n m(x_j) \\ &= 2 \sum_{i=1}^k m_i + k + 2 \sum_{j=k+1}^n m_j \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^k m_i + \sum_{j=k+1}^n m_j \right) + k = 2|U|. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra k là một số chẵn, tức là số các đỉnh bậc lẻ trong đồ thị phải là một số chẵn.

Trong trường hợp $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị có hướng điều khẳng định cũng là đúng đắn và sự chứng minh là tương tự.

Định lý được chứng minh.

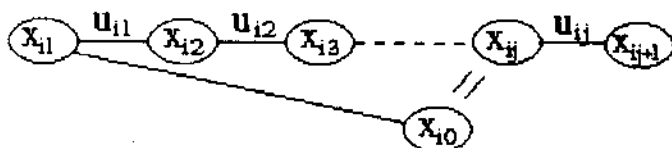
Sau đây ta xét một khẳng định liên quan đến chu trình của đồ thị.

Định lý 4: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị vô hướng. Nếu trong đồ thị mà mỗi đỉnh $x \in X$ đều có bậc $m(x) \geq 2$ thì đồ thị có chu trình sơ cấp.

Chứng minh: Xét tất cả các đường sơ cấp có thể có trong đồ thị. Rõ ràng số các đường này là hữu hạn. Vì thế trong số các đường sơ cấp đó sẽ tồn tại một đường có độ dài lớn nhất. Giả sử đó là đường ω :

$$x_{i1}u_{i1}x_{i2}u_{i2} \dots x_{ij}u_{ij}x_{i,j+1}$$

Hay dưới dạng hình học thì đường ω là:



Theo giả thiết $m(x_{i1}) \geq 2$ nên tồn tại ít nhất một đỉnh x_{i0} và một cạnh nối các đỉnh x_{i1} và x_{i0} . Đỉnh x_{i0} phải trùng với một đỉnh, chẳng hạn là đỉnh x_{ij} trong đường ω , vì nếu không thì đường ω không phải là đường dài nhất, trái với giả thiết ban đầu ω là đường có độ dài lớn nhất. Điều đó chứng tỏ phải tồn tại một chu trình trong đồ thị đang xét. Đây là chu trình sơ cấp, vì các đường ta xét đều là đường sơ cấp.

Định lý được chứng minh.

Định lý 5: Đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ là liên thông khi và chỉ khi nó có một thành phần liên thông.

Chứng minh: Điều khẳng định được trực tiếp suy từ định nghĩa.

§2. SỐ ỔN ĐỊNH TRONG, SỐ ỔN ĐỊNH NGOÀI VÀ NHÂN CỦA ĐỒ THỊ

1. Số ổn định trong

Định nghĩa 12: Cho đồ thị vô hướng $G = \langle X, U \rangle$ và $A \subseteq X$ là tập các đỉnh của đồ thị.

a) Tập A gọi là *tập ổn định trong* của đồ thị nếu hai đỉnh bất kỳ x, y trong A là không kề nhau, tức là không có một cạnh nào của đồ thị chứa hai đỉnh x và y .

b) Tập A là *tập ổn định trong cực đại* nếu nó thoả mãn 2 điều kiện:

1. A là tập ổn định trong.
2. Nếu thêm vào A một đỉnh tuỳ ý không nằm trong A thì A sẽ không còn là tập ổn định trong.

c) Gọi L là họ tất cả các tập ổn định trong của đồ thị $G = \langle X, U \rangle$. Khi đó ký hiệu $\alpha(G) = \max \{|A| : A \in L\}$ và $\alpha(G)$ được gọi là *số ổn định trong* của đồ thị G .

Nhận xét 1: Một tập ổn định trong thì mọi tập con của nó cũng là tập ổn định trong của đồ thị. Với các tập ổn định trong ta chỉ quan tâm đến tập có số phần tử lớn nhất, vì lực lượng của tập đó chính là số ổn định trong của đồ thị.

2. Số ổn định ngoài

Định nghĩa 13: Cho đồ thị vô hướng $G = \langle X, U \rangle$ và $B \subseteq X$ là tập các đỉnh của đồ thị.

a) Tập B được gọi là *tập ổn định ngoài* của đồ thị nếu với mỗi phần tử $y \in X - B$ đều tồn tại $x \in B$ sao cho có cạnh nối giữa x và y . Đôi khi người ta gọi B là *tập thống trị* của đồ thị.

b) Tập B được gọi là *tập ổn định ngoài cực tiểu* nếu nó thoả mãn 2 điều kiện sau:

1. Tập B là tập ổn định ngoài.
2. Nếu bỏ đi một phần tử bất kì của B thì B không còn là tập ổn định ngoài.

Gọi M là họ tất cả các tập ổn định ngoài của đồ thị $G = \langle X, U \rangle$. Khi đó ký hiệu $\beta(G) = \min\{|B| : B \in M\}$ và $\beta(G)$ được gọi là *số ổn định ngoài* của đồ thị G .

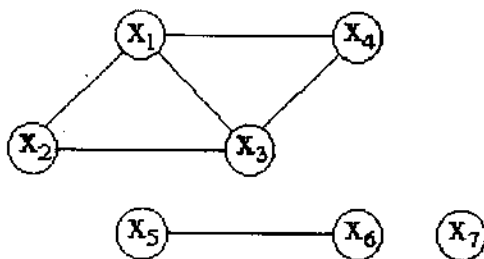
Nhận xét 2: Với các tập ổn định ngoài, ta thường quan tâm đến tập ổn định ngoài có số phần tử ít nhất vì lực lượng của nó liên quan tới số ổn định ngoài của đồ thị.

3. Nhân của đồ thị

Định nghĩa 14: Cho đồ thị vô hướng $G = \langle X, U \rangle$. Nếu tập $A \subseteq X$ vừa là tập ổn định trong lại vừa là tập ổn định ngoài của đồ thị G thì A được gọi là nhân của đồ thị.

Nhận xét 3: Đối với nhân của đồ thị, ta quan tâm tới nhân có số phần tử ít nhất.

Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ dưới dạng



Các tập ổn định trong của đồ thị là:

$$A_1 = \{x_1, x_5, x_7\}$$

$$A_6 = \{x_2, x_6, x_7\}$$

$$A_2 = \{x_1, x_6, x_7\}$$

$$A_7 = \{x_4, x_5, x_7\}$$

$$A_3 = \{x_3, x_5, x_7\}$$

$$A_8 = \{x_4, x_6, x_7\}$$

$$A_4 = \{x_3, x_6, x_7\}$$

$$A_9 = \{x_2, x_4, x_5, x_7\}$$

$$A_5 = \{x_2, x_5, x_7\}$$

$$A_{10} = \{x_2, x_4, x_6, x_7\}$$

Trong đó chỉ có 2 tập ổn định trong là có 4 phần tử. Các tập ổn định trong còn lại có không quá 3 phần tử. Tập A_9 và A_{10} là các tập ổn định trong cực đại vì nếu thêm một đỉnh mới vào các tập đó thì chúng không còn là tập ổn định trong nữa. Số ổn định trong của đồ thị trên là $\alpha(G) = 4$.

Đối với đồ thị trên ta có các tập ổn định ngoài cực tiểu là $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$, $B_3 = A_3$, $B_4 = A_4$. Vì bản thân B_i ($i = \overline{1,4}$) là các tập ổn định ngoài và nếu bớt đi một trong các phần tử của chúng thì tập còn lại không còn là tập ổn định ngoài nữa. Số ổn định ngoài của đồ thị trên là $\beta(G) = 3$. Nhân của đồ thị trên là B_1, B_2, B_3, B_4 và B_i ($i = \overline{1,4}$) là các tập ổn định trong và đồng thời cũng là các tập ổn định ngoài. Số các nhân của đồ thị trên là 4.

4. Thuật toán tìm số ổn định ngoài

Bài toán: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Hãy tìm số ổn định ngoài của đồ thị G , tức tìm $\beta(G)$. Bài toán này còn được gọi là bài toán đặt vọng gác.

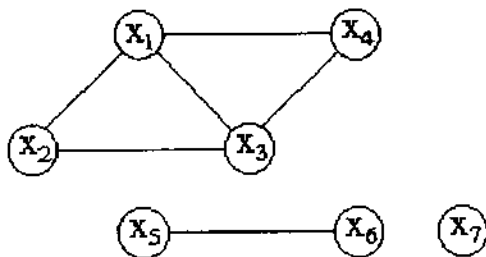
Thuật toán:

- Bước 1: Xây dựng ánh xạ $\Delta: X \rightarrow 2^X$ theo cách thức sau: Với mỗi $x_i \in X$ thì có $\Delta(x_i) \subseteq X$ và được xác định: $y \in \Delta(x_i)$ nếu $y = x_i$ hoặc có một cạnh nối x_i và y với nhau.

- Bước 2: Giả sử bước 1 xác định được các tập $\Delta(x_1), \Delta(x_2), \dots, \Delta(x_n)$

Cần xác định một tập $B \subseteq X$ có số phần tử ít nhất sao cho $\Delta(B) = X$. Khi đó B là tập ổn định ngoài cực tiểu của đồ thị và $\beta(G) = |B|$.

Ví dụ 9: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$, với $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ dưới đây:



Hãy tìm số ổn định ngoài $\beta(G)$.

Giải:

- Bước 1: Xác định ánh xạ $\Delta: X \rightarrow 2^X$

$$\Delta(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$\Delta(x_2) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$\Delta(x_3) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$\Delta(x_4) = \{x_1, x_3, x_4\}$$

$$\Delta(x_5) = \{x_5, x_6\}$$

$$\Delta(x_6) = \{x_5, x_6\}$$

$$\Delta(x_7) = \{x_7\}$$

- Bước 2: Dựa vào bước 1 ta có:

$$\Delta(x_1) \cup \Delta(x_5) \cup \Delta(x_7) = X$$

$$\Delta(x_1) \cup \Delta(x_6) \cup \Delta(x_7) = X$$

$$\Delta(x_3) \cup \Delta(x_5) \cup \Delta(x_7) = X$$

$$\Delta(x_3) \cup \Delta(x_6) \cup \Delta(x_7) = X$$

Mọi trường hợp khác đều không thoả mãn bài toán.

Vậy ta có 4 tập:

$$B_1 = \{x_1, x_5, x_7\}$$

$$B_3 = \{x_3, x_5, x_7\}$$

$$B_2 = \{x_1, x_6, x_7\}$$

$$B_4 = \{x_3, x_6, x_7\}$$

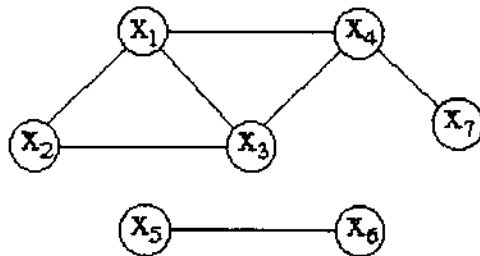
là các tập ổn định ngoài có số phần tử ít nhất (bằng 3) và thoả mãn

$$\Delta(B_i) = X, \text{ với } i = \overline{1,4}$$

Ta có $\beta(B_i) = |B_i| = 3$.

Ví dụ 10: Cho đồ thị vô hướng $G = \langle X, U \rangle$, với:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ dưới đây:



Hãy tìm số ổn định ngoài $\beta(G)$.

Giải:

- Bước 1: Xác định ánh xạ $\Delta: X \rightarrow 2^X$

$$\Delta(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$\Delta(x_2) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$\Delta(x_3) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$\Delta(x_4) = \{x_1, x_3, x_4, x_7\}$$

$$\Delta(x_5) = \{x_5, x_6\}$$

$$\Delta(x_6) = \{x_5, x_6\}$$

$$\Delta(x_7) = \{x_4, x_7\}$$

• Bước 2:

$$\Delta(x_4) \cup \Delta(x_5) \cup \Delta(x_2) = X$$

$$\Delta(x_4) \cup \Delta(x_6) \cup \Delta(x_2) = X, \dots$$

Một trong các tập ổn định ngoài có số phần tử ít nhất là:

$$B = \{x_2, x_4, x_5\}. \text{ Vậy } \beta(G) = 3.$$

§3. SẮC SỐ CỦA ĐỒ THỊ

Định nghĩa 15: Sắc số của đồ thị G là số màu tối thiểu cần dùng để tô màu các đỉnh của đồ thị sao cho hai đỉnh kề nhau phải có màu khác nhau.

Ta ký hiệu sắc số của đồ thị G là $\lambda(G)$. Đối với lớp đồ thị đầy đủ ta có kết quả sau:

Định lý 5: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$. Nếu đồ thị là đầy đủ thì sắc số của nó bằng số đỉnh của đồ thị, tức là: $\lambda(G) = |X|$.

Chứng minh: Sử dụng phép qui nạp theo số đỉnh $|X|$ của đồ thị.

Nếu $|X| = 1$, tức là đồ thị có một đỉnh. Khi đó cần tô một màu là đủ. Giả sử định lý đã đúng cho mọi đồ thị đầy đủ có số đỉnh không vượt quá k , tức là với đồ thị đầy đủ $G = \langle X, U \rangle$ có $|X| = k$ với $n \leq k$ thì có $\lambda(G) = n$. Xét một đồ thị đầy đủ bất kỳ gồm $k + 1$ đỉnh $G = \langle U', X' \rangle$ với $X' = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$.

Đặt $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ khi đó ta có:

$$X' = X \cup \{x_{k+1}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$$

Nếu trong đồ thị G' bỏ đi đỉnh x_{k+1} và các cạnh nối nó với các đỉnh khác thì ta nhận được đồ thị đầy đủ $G = \langle X, U \rangle$ có $|X| = k$. Vì G có k

đỉnh nên theo giả thiết qui nạp cần có k màu khác nhau để tô các đỉnh trong G . Vì x_{k+1} là các đỉnh kề với các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_k$ nên để tô đỉnh x_{k+1} cần phải dùng màu khác với các màu đã tô ở các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_k$. Do đó $\lambda(G) = k + 1$.

Định lý được chứng minh.

Định lý 6: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị vô hướng. $\lambda(G) = 2$ khi và chỉ khi trong G không có chu trình độ dài lẻ.

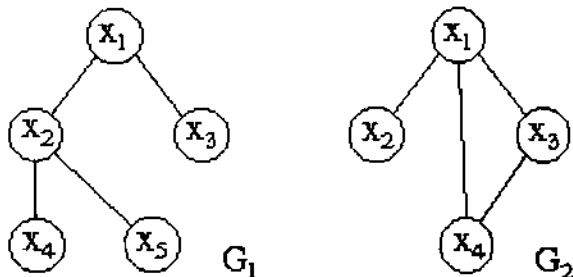
Chứng minh: Trước hết ta có thể giả thiết G là đồ thị liên thông. Vì nếu không ta sẽ chứng minh đồ thị trên các thành phần liên thông của G .

Điều kiện đủ: Giả sử G không có chu trình độ dài lẻ. Ta chỉ ra $\lambda(G) = 2$. Thật vậy, ta tô màu các đỉnh của G theo nguyên tắc sau: nếu $x \in X$ được tô màu xanh thì các đỉnh kề của x là $y, z, \dots$ lại tô màu đỏ. Tiếp theo các đỉnh kề của $y, z, \dots$ lại tô màu xanh. Cứ như vậy, do số đỉnh hữu hạn và G liên thông nên tất cả các đỉnh trong X sẽ được tô hoặc xanh hoặc đỏ và không có một đỉnh nào được tô cả hai màu xanh, đỏ đồng thời, vì nếu có điều đó xảy ra thì sẽ có một chu trình độ dài lẻ đi qua x (trái với giả thiết). Hay $\lambda(G) = 2$.

Điều kiện cần: Giả sử $\lambda(G) = 2$. Dễ thấy rằng nếu chỉ dùng 2 màu để tô các đỉnh của G thì trong G phải không có chu trình độ dài lẻ, vì nếu có chu trình độ dài lẻ thì tô màu các đỉnh theo quy tắc trên sẽ có ít nhất 1 đỉnh được tô đồng thời cả 2 màu.

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 11: Cho $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$ không có chu trình độ dài lẻ, còn $G_2 = \langle X_2, U_2 \rangle$ có chu trình độ dài lẻ (hình vẽ).



Trong G_1 nếu ta tô x_1 bởi màu xanh, thì x_2 và x_3 tô màu đỏ. Vì x_2 màu đỏ nên x_4, x_5 tô màu xanh, hay $\lambda(G_1) = 2$, ở đây G_1 không có chu trình độ dài lẻ. Xét G_2 có chu trình độ dài lẻ nên không thể tô bằng 2 màu, mà phải dùng 3 màu: xanh, đỏ và vàng.

Về quan hệ giữa sắc số và số ổn định trong của đồ thị ta có định lý sau:

Định lý 7: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị vô hướng với $|X| = n$. Khi đó số ổn định trong $\alpha(G)$ và sắc số $\lambda(G)$ của G thoả mãn bất đẳng thức:

$$\alpha(G) \cdot \lambda(G) \geq n$$

Chứng minh: Đặt $\lambda(G) = s$, theo định nghĩa của sắc số thì dùng s màu để tô các đỉnh trong X theo nguyên tắc hai đỉnh kề phải tô bằng 2 màu khác nhau.

Cách tô màu như trên lập nên một phân hoạch tương đương trên tập X : $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_s = X$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ ($i \neq j$). ở đây nếu ta đánh số các màu từ 1, 2, ..., s thì X_i gồm các đỉnh cũng được tô màu i ($i=1, \dots, s$). Mặt khác theo định nghĩa số ổn định trong $\alpha(G)$ thì $|X_i| \leq \alpha(G)$ ($i = 1, \dots, s$). Từ đó ta có đánh giá:

$$|X| = n = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_i| + \dots + |X_s| \leq s \cdot \alpha(G)$$

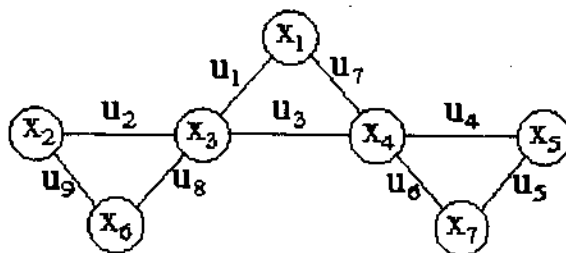
Hay $\lambda(G) \cdot \alpha(G) \geq n$. Định lý được chứng minh.

§4. THUẬT TOÁN TÌM CHU TRÌNH EULER VÀ ĐƯỜNG EULER

1. Chu trình Euler

Định nghĩa 16: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị vô hướng. Một chu trình ω trong đồ thị G được gọi là chu trình Euler nếu nó đi qua tất cả các cạnh của G và mỗi cạnh đi qua đúng một lần.

Ví dụ 12: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$



Chu trình Euler trong đồ thị trên là:

$$Z = x_1 u_1 x_3 u_8 x_6 u_9 x_2 u_2 x_3 u_3 x_4 u_4 x_5 u_5 x_7 u_6 x_4 u_7 x_1$$

Định lý 8: Đồ thị vô hướng $G = \langle X, U \rangle$ có chu trình Euler khi và chỉ khi G là liên thông và bậc của tất cả các đỉnh trong đồ thị G là số chẵn.

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả sử đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ có chu trình Euler. Ta cần chứng minh G là đồ thị liên thông và với mỗi $x \in X$ có $m(x) = 2k$ với k là một số nguyên dương nào đó.

Thật vậy, giả sử $G = \langle X, U \rangle$ không liên thông hay G có ít nhất hai thành phần liên thông $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$ và $G_2 = \langle X_2, U_2 \rangle$. Trong đó $X_1 \cup X_2 = X$, $U_1 \cup U_2 = U$, giữa các đỉnh trong X_1 và trong X_2 không có cạnh hoặc đường nối với nhau. Giả sử ω là chu trình Euler trong G . Theo định nghĩa của chu trình Euler thì ω là chu trình đi qua tất cả các cạnh trong G , mỗi cạnh đúng một lần. Nếu ω có đỉnh chung với $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$ thì ω là chu trình nằm trọn trong đồ thị G_1 . Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của ω . Chứng tỏ đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ là liên thông.

Bây giờ ta chứng minh mỗi đỉnh $x \in X$ trong G đều có bậc chẵn, tức là cần chỉ ra $m(x) = 2k$, với $k \in \{1, 2, \dots\}$. Trước hết thấy rằng $k \neq 0$ bởi vì nếu $k = 0$ thì x là điểm cô lập trong G , tức là G không liên thông, trái với điều đã chỉ ra. Giả sử ngược lại tồn tại một đỉnh $x_i \in X$ mà $m(x_i)$ là một số lẻ, chẳng hạn $m(x_i) = 3$. Đối với x_i có 3 cạnh đi vào nó, giả sử đó là các cạnh (x_i, x_j) , (x_i, x_p) và $(x_i, x_1) \in U$. Chu trình Euler ω sẽ

đi qua 3 cạnh đó. Khi đó một trong 3 cạnh trên có ít nhất một cạnh mà chu trình Euler ω đi qua 2 lần. Điều đó mâu thuẫn với định nghĩa của chu trình ω . Vậy $m(x)$ là một số chẵn với $\forall x \in X$.

Điều kiện đủ: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị liên thông và mỗi đỉnh $x \in X$ đều có bậc chẵn: $m(x) = 2k$, $k \in \{1, 2, \dots\}$. Ta chứng minh trong đồ thị G có tồn tại một chu trình Euler.

Với giả thiết trên, trước hết ta chứng minh rằng tại mỗi đỉnh của G có tồn tại chu trình đơn (tức là chu trình đi qua các cạnh, mỗi cạnh đúng một lần). Để chứng minh điều đó, ta lưu ý rằng không thể có một đỉnh x mà $m(x) = 2$. Điều đó là đúng bởi vì khi đó tại đỉnh x có khuyên và do đó x cũng là một đỉnh cô lập, trái với giả thiết đồ thị G là liên thông.

Giả sử $x \in X$ là một đỉnh nào đó. Ta chỉ ra có chu trình đơn P qua x . Do $m(x) > 2$ suy ra tồn tại các đỉnh x_1 sao cho $x_1 \neq x$ và x kề với x_1 . Do $m(x_1) > 2$ suy ra tồn tại các đỉnh x_2 sao cho $x_2 \neq x_1$ và x_2 kề với x_1 . Do $m(x_{i-1}) > 2$ suy ra tồn tại các đỉnh x_i sao cho $x_i \neq x_{i-1}$ và x_i kề với x_{i-1} . Khi tới bước thứ i thì ta đã có một đường đi từ x đến x_i , qua các cạnh, mỗi cạnh đúng một lần. Quá trình trên không thể kéo dài vô hạn do tính hữu hạn của đồ thị G . Giả sử số bước hữu hạn đó là i . Điều này chứng tỏ x và x_i là hai đỉnh kề nhau, tức là có cạnh nối x và x_i . Điều đó là đúng vì bước i là bước cuối cùng. Như vậy tại đỉnh x có chu trình đơn P đi qua.

Bây giờ ta chứng minh rằng trong đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ có chu trình Euler. Theo chứng minh trên với đỉnh $x \in X$ có chu trình đơn đi qua là P_1 và P_1 là chu trình trong đồ thị G . Hãy đánh dấu xoá các cạnh trong P_1 . Nếu sau khi “đánh dấu xoá” các cạnh trên đường P_1 tạo ra một số đỉnh cô lập mới thì hãy “đánh dấu loại bỏ” các đỉnh cô lập mới đó. Kết quả thu được sẽ là một đồ thị mới $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$ là đồ thị con của đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ đã cho. Ta chỉ ra đồ thị G_1 thoả mãn một số tính chất sau:

- Chu trình P_1 trong đồ thị G và G_1 có đỉnh chung, bởi vì G là đồ thị liên thông.

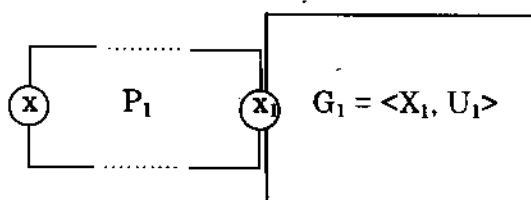
- Đồ thị G_1 gồm các đỉnh $x \in X_1$ có bậc chẵn.

Thật vậy, nếu $x \in X_1$ mà x không thuộc các đỉnh trong P_1 thì $m(x_1)$ hiển nhiên là một số chẵn.

Còn nếu $x_1 \in X_1$ mà x_1 là đỉnh thuộc P_1 thì sau khi “đánh dấu bỏ” hai cạnh của P_1 chứa đỉnh đó thì bậc của đỉnh x_1 sẽ giảm đi 2 đơn vị, do đó $m(x_1)$ cũng là chẵn.

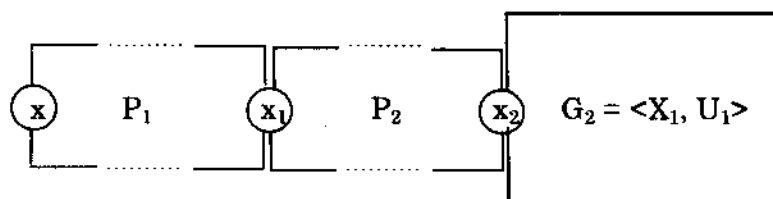
Tóm lại với $\forall x \in X_1$ thì $m(x)$ là một số chẵn.

Ta có thể minh họa đồ thị G với chu trình đơn P_1 và đồ thị con G_1 như hình vẽ dưới đây:

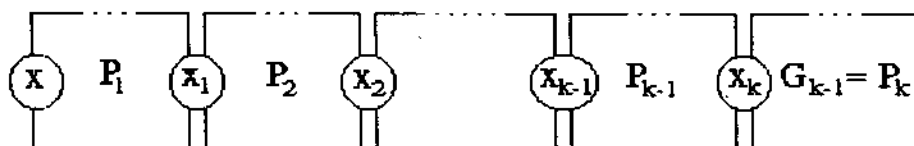


x_1 là đỉnh chung giữa P_1 và G_1 . Đối với $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$ tại đỉnh $x_1 \in X_1$ có tồn tại chu trình đơn P_2 mà cách xây dựng P_2 cũng như đối với P_1 .

Trong P_2 bỏ tất cả các cạnh, giữ lại các đỉnh có cạnh hoặc đường nối với các đỉnh khác trong G_1 ta được đồ thị con $G_2 = \langle X_2, U_2 \rangle$ của G_1 . Đồ thị cũng có tính chất như G_1 , là liên thông, $\forall x \in X_2$ đều có bậc chẵn và G_2 và P_2 có điểm chung chẳng hạn tại x_2 :

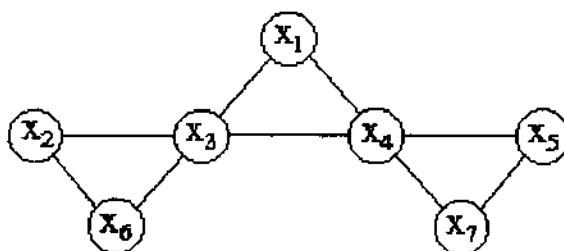


Do tính hữu hạn của đồ thị $G = \langle X, U \rangle$, quá trình xây dựng các chu trình đơn sẽ dừng lại ở bước thứ k nào đó. Như vậy, trước khi sang bước thứ k ta đã có $k - 1$ chu trình đơn $P_1, P_2, \dots, P_{k-1}$ và đồ thị $G_{k-1} = \langle X_{k-1}, U_{k-1} \rangle$ là đồ thị con của đồ thị $G_{k-2} = \langle X_{k-2}, U_{k-2} \rangle$. Đồ thị G_{k-1} là liên thông và mọi đỉnh $x \in X_{k-1}$ có bậc chẵn, đồng thời G_{k-1} và P_{k-1} có điểm chung là x_k . Vì quá trình trên dừng lại sau k bước nên đồ thị G_{k-1} là một chu trình đơn qua x_k và bao gồm hết các cạnh trong đồ thị G_{k-1} . Vì nếu không sẽ dẫn tới mâu thuẫn do k là bước cuối cùng.



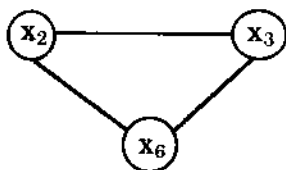
Ghép các chu trình đơn $P_1, P_2, \dots, P_k$ tại các đỉnh chung ta được tập các chu trình Euler trong đồ thị $G = \langle X, U \rangle$. Định lý được chứng minh.

Ví dụ minh họa cho điều kiện đủ của định lý. Xét đồ thị như hình dưới đây:

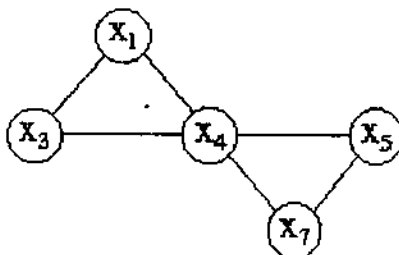


Đây là đồ thị liên thông và có các đỉnh đều bậc chẵn.

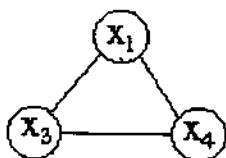
Xuất phát từ đỉnh x_2 ta có chu trình đơn P_1 :



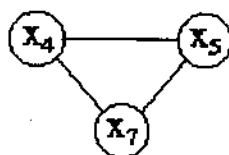
và G_1 là



Từ G_1 ta có P_2 là



và P_3 là



2. Thuật toán tìm chu trình Euler

Bài toán: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$. Hãy tìm chu trình Euler của đồ thị G nếu có.

Thuật toán:

- Bước 1: Kiểm tra xem G có là đồ thị liên thông hay không. Nếu G là liên thông thì chuyển sang bước 2. Ngược lại thì thuật toán dừng và kết luận rằng đồ thị không có chu trình Euler.

- Bước 2: Kiểm tra xem tất cả các đỉnh trong G đều có bậc chẵn hay không. Nếu tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn thì chuyển sang bước tiếp theo. Nếu không, hãy dừng lại và kết luận rằng đồ thị đã cho không có chu trình Euler.

- Bước 3: Xây dựng các chu trình đơn trong G sao cho tất cả các cạnh của đồ thị đều có các chu trình đơn đi qua và mỗi cạnh chỉ đi qua một lần. Ghép các chu trình đơn như trên tại các đỉnh chung nhau ta được tập các chu trình Euler cần tìm.

Procedure Euler(G : đồ thị liên thông với tất cả các đỉnh bậc chẵn)

Chu trình:= chu trình trong G bắt đầu tại một đỉnh được chọn tùy ý và có cạnh được thêm vào để xây dựng đường đi qua các đỉnh và cuối cùng quay lại đỉnh được chọn ban đầu;

$g := G$ với các cạnh của G sau khi bỏ đi chu trình;

While g còn cạnh

Begin

chu trình con:= chu trình trong g bắt đầu tại đỉnh trong g cũng là đỉnh đầu mút của một cạnh thuộc chu trình;

$g := g$ với các cạnh của chu trình con và tất cả các đỉnh cô lập bị loại bỏ;

chu trình := chu trình với chu trình con được chèn vào tại một đỉnh thích hợp;

End; {chu trình là chu trình Euler}

3. Đường Euler

Định nghĩa 17: Đường Euler trong đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ là đường đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đi qua đúng một lần.

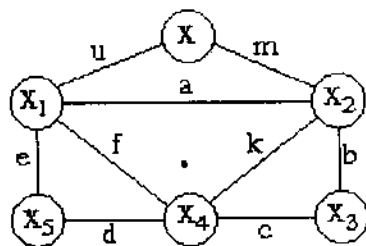
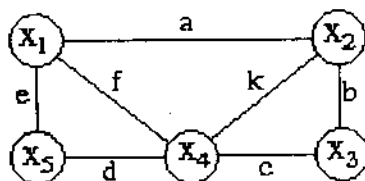
Nhận thấy rằng mỗi chu trình Euler là đường Euler đóng.

Định lý 9: Cho $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị vô hướng liên thông. Điều kiện cần và đủ để đồ thị có đường Euler là số đỉnh bậc lẻ trong đồ thị là 0 hoặc 2.

Chứng minh: Trường hợp số đỉnh bậc lẻ bằng 0 thì G là đồ thị liên thông và mọi đỉnh đều có bậc chẵn. Theo định lý 8 thì trong G có chu trình Euler, tức là đường Euler.

Nếu số đỉnh bậc lẻ bằng 2, chẳng hạn đó là các đỉnh x_1 và x_2 . Hãy thêm vào một đỉnh mới x và hai cạnh (x, x_1) và (x, x_2) vào đồ thị $G = \langle X, U \rangle$. Ta có đồ thị mới $G' = \langle X', U' \rangle$, ở đây $X' = X \cup \{x\}$, $U' = U \cup \{(x, x_1), (x, x_2)\}$. Rõ ràng G' là liên thông và mọi đỉnh đều có bậc chẵn. Theo định lý 8 thì trong G' có tồn tại chu trình Euler, cũng là đường Euler.

Ví dụ 13: Cho $G = \langle X, U \rangle$ liên thông và có hai đỉnh bậc lẻ là x_1 và x_2 .



Bổ sung thêm đỉnh mới x và 2 cạnh $u = (x, x_1)$, $v = (x, x_2)$ vào đồ thị G ta thu được $G' = \langle X', U' \rangle$. Đồ thị G' là liên thông và có mọi đỉnh đều bậc chẵn, do đó theo định lý 8 tồn tại chu trình Euler:

$$x u x_1 e x_5 d x_4 c x_3 b x_2 k x_1 f x_1 a x_2 v x$$

Hãy bỏ đỉnh x và 2 cạnh u, v ta được đường Euler trong G là:

$$x_1 e x_5 d x_4 c x_3 b x_2 k x_1 f x_1 a x_2$$

4. Thuật toán tìm đường Euler

Bài toán: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$. Hãy tìm đường Euler trong G .

Thuật toán:

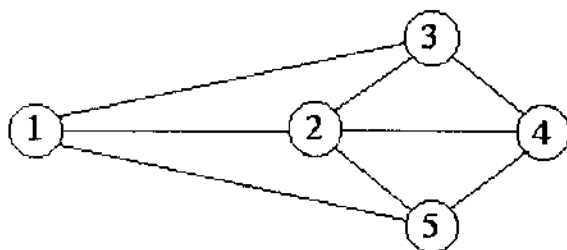
- Bước 1: Kiểm tra xem đồ thị G có liên thông hay không. Nếu có thì chuyển sang bước 2. Ngược lại, thì dừng thuật toán và khẳng định rằng không có đường Euler.

- Bước 2: Kiểm tra xem mọi đỉnh trong G đều có bậc chẵn hay không. Nếu có chuyển sang bước 3. Nếu không chuyển sang bước 4.

- Bước 3: Xây dựng đường Euler trong G .

- Bước 4: Kiểm tra xem số đỉnh bậc lẻ có bằng 2 hay không. Nếu có chuyển sang bước 3. Nếu không thì dừng lại và kết luận không có đường Euler.

Ví dụ 14: Đồ thị sau đây là liên thông, nhưng số đỉnh bậc lẻ là 4 do đó theo định lý 9 thì nó không có đường Euler.



§5. CHU TRÌNH HAMINTON VÀ ĐƯỜNG HAMINTON

1. Chu trình Haminton

Định nghĩa 18: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị vô hướng. Chu trình Haminton là chu trình đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần.

Đối với chu trình Haminton ta có định lý sau đây:

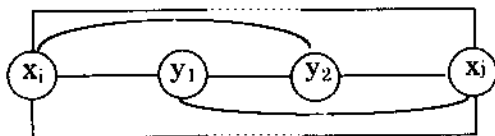
Định lý 10: Nếu đơn đồ thị liên thông $G = \langle X, U \rangle$ có bậc ở mỗi đỉnh không nhỏ hơn nửa số đỉnh của đồ thị, tức là với $\forall x \in X$ ta luôn có $m(x) \geq |X|/2$ thì trong đồ thị có tồn tại chu trình Haminton, ở đây giả thiết $|X| \geq 3$.

Chứng minh: Theo giả thiết có $m(x) \geq |X|/2$ với $\forall x \in X$. Dùng phương pháp phản chứng. Giả sử trong $G = \langle X, U \rangle$ không tồn tại chu trình Haminton. Bổ sung thêm các đỉnh mới vào đồ thị G và từ các đỉnh mới đều có cạnh nối tới tất cả các đỉnh $x \in X$ trong đồ thị G cho tới khi nào đồ thị mới $G' = \langle U', X' \rangle$ có chu trình Haminton thì thôi.

Giả sử tối thiểu các đỉnh mới cần bổ sung vào đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ để được đồ thị $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$ có chu trình Haminton là p đỉnh. Khi đó $|X_1| = |X| + p$.

a) Đỉnh mới phải đứng xen kẽ hai đỉnh cũ trong chu trình Haminton

Thật vậy, nếu hai đỉnh mới y_1, y_2 là kế nhau trong chu trình Haminton



với $x_i, x_j \in X$ còn $y_1, y_2 \in X_1 - X$

Do y_1, y_2 đều có cạnh nối với đỉnh cũ nên ta có thể bỏ đi một trong 2 đỉnh y_1, y_2 ta vẫn được chu trình Haminton. Điều này trái với giả thiết rằng số đỉnh bổ sung thêm là tối thiểu. Vậy đỉnh mới đứng xen kẽ hai đỉnh cũ.

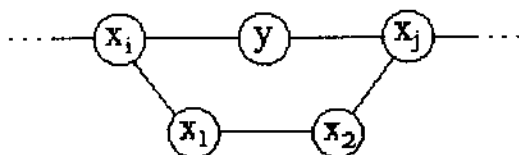
b) Từ khẳng định a) ta thấy chu trình Haminton có dạng



với $x_i, x_j \in X$ còn $y \in X_1 - X$.

Trong trường hợp này ta cần chỉ ra: Số các đỉnh kề của đỉnh x_i sẽ nhỏ hơn hoặc bằng số các đỉnh không kề của đỉnh x_j .

Thật vậy, giả sử x_1 là đỉnh kề của x_i và x_2 là đỉnh kề của x_j . Nếu x_2 là đỉnh kề của đỉnh x_i thì chu trình Haminton có dạng



Trong trường hợp này ta có thể bỏ đỉnh y và thay $x_i y x_j$ bởi $x_i x_1 x_2 x_j$. Điều đó trái với giả thiết rằng số đỉnh bổ sung là tối thiểu. Vậy x_2 không kề với x_i . Như vậy ta đã chỉ ra: Với đỉnh x_1 kề của x_i thì tương ứng với đỉnh x_2 không kề với x_j . Khẳng định b) được chứng minh.

Dựa vào khẳng định b) ta có các bất đẳng thức sau:

$$|X_1| = |X| + p \geq s_1 \geq s_2,$$

trong đó s_1 là tổng số đỉnh kề của x_j và số đỉnh không kề của x_i , còn s_2 là tổng số đỉnh kề của x_j và số đỉnh kề của x_i (1). Ta có số đỉnh kề của đỉnh $x_j = m(x_j) \geq |X|/2 + p$ và số đỉnh kề của đỉnh $x_i = m(x_i) \geq |X|/2 + p$ (2). Từ (1) và (2) ta có bất đẳng thức sau:

$$|X_1| = |X| + p \geq (|X|/2 + p) + (|X|/2 + p)$$

Từ đó suy ra $p = 0$. Điều đó chứng tỏ không cần bổ sung đỉnh mới nào, đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ vẫn có chu trình Haminton. Định lý được chứng minh.

2. Đường Haminton

Đường Haminton trong đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ là đường đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh đúng một lần.

Định lý 11: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị có hướng và đầy đủ. Khi đó trong đồ thị luôn luôn tồn tại đường Haminton.

Chứng minh: Giả sử $\omega = x_{i1} x_{i2} \dots x_{ik} x_{ik+1} \dots x_{im-1} x_{im}$ là một đường sơ cấp bất kỳ trong đồ thị. Để đơn giản, ta chỉ viết các đỉnh mà không có các cạnh xen kẽ như định nghĩa.

Nếu trong đường sơ cấp ω mà tất cả các đỉnh trong X đều có mặt thì chính ω là đường Haminton. Nếu còn có những đỉnh trong X nhưng chưa có mặt trong ω thì ta có thể bổ sung hết những đỉnh đó vào đường ω sơ cấp để nó trở thành đường Haminton theo nguyên tắc sau đây:

Giả sử $x \in X$ mà x không nằm trên đường sơ cấp ω . Các trường hợp sau đây xảy ra do tính đầy đủ của đồ thị G :

1. Nếu x có cung tới x_{i1} thì bổ sung x vào đầu ω và nó có dạng:

$$x \ x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{ik} \ x_{ik+1} \ \dots \ x_{im-1} \ x_{im}$$

2. Nếu từ x_{ik} có cung tới x và từ x có cung tới x_{ik+1} thì ta bổ sung x vào giữa hai đỉnh x_{ik} và x_{ik+1} . Khi đó ω có dạng: $x_{i1} x_{i2} \dots x_{ik} x x_{ik+1} \dots x_{im-1} x_{im}$.

3. Nếu từ x_{ik} và x_{ik+1} có cung đi tới x và từ x lại có cung đi tới x_{ik+2} thì ta bổ sung x vào giữa hai đỉnh x_{ik+1} và x_{ik+2} ta được ω có dạng:

$$x \ x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{ik} \ x_{ik+1} \ x \ x_{ik+2} \ \dots \ x_{im-1} \ x_{im}$$

4. Nếu với $\forall k \in [1, m-1]$ mà từ x_{ik} và x_{ik+1} có cung sang x thì ta bổ sung x vào cuối. Khi đó nó có dạng: $x_{i1} x_{i2} \dots x_{ik} x_{ik+1} x x_{ik+2} \dots x_{im-1} x_{im} x$

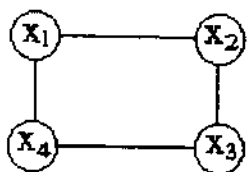
Bằng cách đó ta có thể bổ sung vào ω các đỉnh trong đồ thị mà chưa có mặt trong ω để nó trở thành đường Haminton.

Định lý được chứng minh.

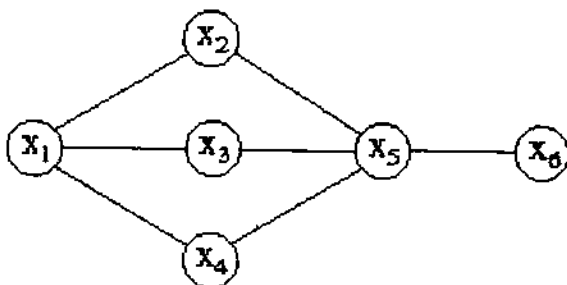
Nhận xét: Trong đồ thị có hướng đầy đủ, nếu ta thay cung bởi cạnh thì ta được đồ thị đầy đủ vô hướng.

Hệ quả: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị đầy đủ với $|X| \geq 3$. Khi đó trong đồ thị G luôn luôn tồn tại chu trình Haminton. Điều ngược lại nói chung không đúng.

Ví dụ 15: Đồ thị sau đây có chu trình Haminton nhưng nó không phải là đồ thị đầy đủ.



Đồ thị dưới đây không có đường Haminton.



§6. ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT TRONG ĐỒ THỊ

1. Đường đi ngắn nhất trong đồ thị không trọng số

Định nghĩa 19: Đồ thị không có trọng số là đồ thị hữu hạn trên các cạnh không có trọng số.

Bài toán: Cho đồ thị không trọng số $G = \langle X, U \rangle$ và hai đỉnh $a, b \in X$. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b , tức là đường từ a đến b có số các cung là ít nhất.

Thuật toán:

- Bước 1: Tại đỉnh a ta ghi số 0.

Các đỉnh có cung (cạnh) đi từ đỉnh a đến ta ghi số 1.

Giả sử ta đã ghi tới i , tức là ta đã đánh số được các tập đỉnh là $A(0) = \{a\}$, $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, ..., $A(i)$ trong đó $A(i)$ là tập tất cả các đỉnh được ghi bởi số i . Ta xác định tập đỉnh được đánh số bởi số $i + 1$ là $A(i+1)$ như sau: $A(i+1) = \{x : x \in X, x \notin A(k) \text{ với } k = 0, \dots, i \text{ và } \exists y \in A(i) \text{ sao cho từ } y \text{ có cạnh hoặc cung tới } x\}$. Do tính hữu hạn của đồ thị, sau một số hữu hạn bước, thuật toán dừng lại và cho kết quả là tập các đỉnh có chứa b được đánh số bởi m là $A(m)$.

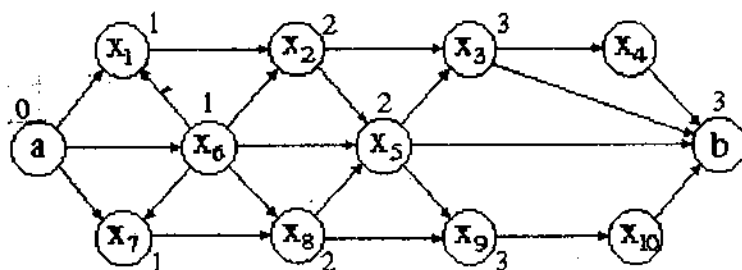
• Bước 2: Do bước 1 thì đỉnh b được đánh số bởi m , điều này chứng tỏ đường đi từ a đến b có m cung và là đường ngắn nhất đi từ a đến b . Để tìm tất cả các đường có độ dài m ngắn nhất đi từ a đến b , ta xuất phát từ b đi ngược về a theo đúng nguyên tắc sau đây:

- Tìm tất cả các đỉnh có cung tới b được ghi số $m - 1$. Giả sử đó là x_{ik} ($k = 1, 2, \dots$).

- Tìm tất cả các đỉnh có cung tới x_{ik} ($k = 1, 2, \dots$) được ghi số $m - 2$.

Bằng cách lùi dần trở lại, đến một lúc nào đó gặp đỉnh ghi số 0, đó chính là đỉnh a . Tất cả các đường xác định theo các bước trên là đường đi từ a đến b có độ dài ngắn nhất là m cần tìm.

Ví dụ 16: Cho đồ thị có hướng như hình dưới đây:



1) Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến b .

• Bước 1: Đỉnh a được đánh số 0 và có $A(0) = \{a\}$

$$A(1) = \{x_1, x_6, x_7\}$$

$$A(2) = \{x_2, x_5, x_8\}$$

$$A(3) = \{x_3, b, x_9\}$$

• Bước 2: Từ bước 1 ta có $b \in A(3)$ nên từ a đến b là đường đi ngắn nhất có 3 cung. Tiếp theo ta xác định tất cả các đường đi ngắn nhất có độ dài 3:

Đỉnh có cung về b được đánh số 2 là x_5

Đỉnh có cung tới x_5 được đánh số 1 là x_6

Đỉnh có cung về x_6 được đánh số 0 là a

Đường cần tìm là $a \ x_6 \ x_5 \ b$

2) Tìm đường đi ngắn nhất đi từ x_8 đến x_{10}

• Bước 1: Đánh số các đỉnh

$$A(0) = \{8\}$$

$$A(1) = \{x_5, x_9\}$$

$$A(2) = \{x_3, b, x_{10}\}$$

• Bước 2: Từ bước 1 ta có $x_{10} \in A(2)$, chứng tỏ đường đi từ đỉnh x_8 đến đỉnh x_{10} có độ dài bằng 2 là đường đi ngắn nhất. Ta xác định đường đó:

Đỉnh có cung tới x_{10} được đánh số 1 là x_9

Đỉnh có cung tới x_9 được đánh số 0 là x_8

Vậy đường cần tìm là $x_8 \ x_9 \ x_{10}$.

2. Đường đi ngắn nhất trong đồ thị có trọng số

Cho đồ thị hữu hạn $G = \langle X, U \rangle$. Với mỗi cạnh $u \in U$ ta đặt tương ứng với số dương $l(u)$ và gọi là trọng số của u .

Đồ thị với các cạnh có trọng số như trên gọi là đồ thị có trọng số.

Ta ký hiệu $D(a, b) :=$ tập tất cả các đường nối đỉnh a với đỉnh b trong đồ thị $G = \langle X, U \rangle$, gọi α là một đường nào đó trong G và giả sử $\alpha = x_1 \ u_1 \ x_2 \ u_2 \ \dots \ x_{n-1} \ u_{n-1} \ x_n$, $x_{ij} \in X$, $u_{ij} \in U$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Khi đó ta

ký hiệu $l(\alpha) = \sum_{j=1}^{n-1} l(u_{ij})$ và gọi là trọng số của đường α .

Bài toán: Cho đồ thị đơn liên thông có trọng số $G = \langle X, U \rangle$ và $a, b \in X$ là hai đỉnh trong đồ thị. Tìm các đường α từ đỉnh a đến đỉnh b trong đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ có trọng số bé nhất, tức α thoả mãn $l(\alpha) = \min\{l(\beta) | \beta \in D(a, b)\}$

Thuật toán:

- Bước 1: Đánh trọng số các đỉnh.

Trọng số của đỉnh xuất phát a là $\sigma(a) = 0$.

Các đỉnh còn lại ta ghi tại mỗi đỉnh một trọng số dương σ đủ lớn sao cho nó lớn hơn trọng số của các đỉnh từ a tới.

- Bước 2: Thực hiện việc giảm trọng số các đỉnh.

Giả sử tại đỉnh x được ghi trọng số $\sigma(x)$. Nếu tồn tại đỉnh y có trọng số $\sigma(y)$ từ y sang x mà $\sigma(x) > \sigma(y) + l(y, x)$ thì ta thay trọng số của $\sigma(x)$ bởi trọng số $\sigma'(x) = \sigma(y) + l(y, x)$. Trường hợp $\sigma(x) < \sigma(y) + l(y, x)$, trọng số của x giữ nguyên là $\sigma(x)$. Quá trình thực hiện cho tới khi trọng số của tất cả các đỉnh trong $G = \langle X, U \rangle$ đạt cực tiểu, tức là $\forall x \in X$ không tồn tại $y \in X$ kể với x mà $\sigma(y) + l(y, x) < \sigma(x)$.

- Bước 3: Xác định đường từ a đến b có trọng số bé nhất.

Từ bước 3 ta xác định được trọng số của đỉnh b . Xuất phát từ b đi về đỉnh kề với b , chẳng hạn đó là đỉnh x_n có tính chất $\sigma(b) = \sigma(x_n) + l(x_n, b)$. Nếu không có đỉnh kề x_n như vậy thì ta đi về đỉnh kề với b có trọng số cạnh (cung) từ đỉnh đó về b là bé nhất.

Từ đỉnh x_n ta đi ngược về đỉnh x_{n-1} có tính chất $\sigma(x_n) = \sigma(x_{n-1}) + l(x_{n-1}, x_n)$, nếu không đi về đỉnh kề với x_n mà trọng số cạnh (cung) giữa chúng là bé nhất.

Bằng cách đó ta sẽ đi về đỉnh x_1 mà đỉnh kề là a sao cho $\sigma(x_1) = \sigma(a) + l(a, x_1) = l(a, x_1)$, với $\sigma(a) = 0$.

Đường $\alpha = ax_1x_2 \dots x_{n-1}x_nb$ là đường đi từ a đến b có trọng số bé nhất trong số tất cả các đường từ a đến b .

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy } l(\alpha) &= l(a, x_1) + l(x_1, x_2) + \dots + l(x_{n-1}, x_n) + l(x_n, b) \\ &= [\sigma(x_1) - \sigma(a)] + [\sigma(x_2) - \sigma(x_1)] + \dots \\ &\quad + [\sigma(x_n) - \sigma(x_{n-1})] + [\sigma(b) - \sigma(x_n)] = \sigma(b) \end{aligned} \quad (1)$$

Giả sử $\beta \in D(a, b)$ là một đường bất kỳ từ a đến b và có dạng: $\beta = ax_1x_2 \dots x_{k-1}x_kb$. Theo bước 2 ta có bất đẳng thức sau:

$$l(a, x_{j_1}) \geq \sigma(x_{j_1}) - \sigma(a) = \sigma(x_{j_1})$$

$$l(x_{j_1}, x_{j_2}) \geq \sigma(x_{j_2}) - \sigma(x_{j_1})$$

$$l(x_{j_{k-1}}, x_{j_k}) \geq \sigma(x_{j_k}) - \sigma(x_{j_{k-1}})$$

$$l(x_{j_k}, b) \geq \sigma(b) - \sigma(x_{j_k})$$

Cộng hai vế ta có:

$$l(\beta) = l(a, x_{j_1}) + l(x_{j_1}, x_{j_2}) + \dots + l(x_{j_{n-1}}, x_{j_n}) + l(x_{j_n}, b) \geq \sigma(b) \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có:

$$l(\alpha) = \min\{l(\beta) / \beta \in D(a,b)\}$$

Thuật toán Dijkstra: Tìm đường đi ngắn nhất

$$l(\alpha) = \min\{l(\beta) / \beta \in D(a,b)\}$$

Procedure Dijkstra (G: đồ thị liên thông có trọng số dương)

{G có các đỉnh $a = v_0, v_1, \dots, v_n = b$ và trọng số $l(v_i, v_j) = \infty$ nếu $(v_i, v_j) \notin U$ của G}

for $i := 1$ to n do

$\sigma(v_i) := \infty$;

$\sigma(a) := 0$;

$S := \emptyset$;

{ban đầu các nhãn được khởi tạo sao cho nhãn của a bằng 0, còn các đỉnh khác bằng ∞ , tập S là rỗng}

While $b \notin S$

Begin

$u :=$ đỉnh không thuộc S có nhãn $\sigma(u)$ nhỏ nhất;

$S := S \cup \{u\}$;

for tất cả các đỉnh v không thuộc S do

if $\sigma(u) + l(u, v) < \sigma(v)$ then $\sigma(v) := \sigma(u) + l(u, v)$

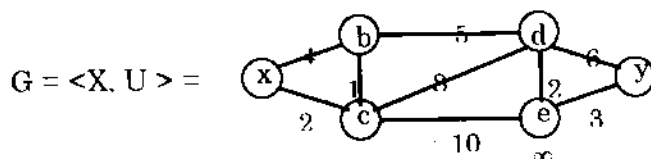
{thêm vào S đỉnh có nhãn nhỏ nhất và sửa đổi nhãn của các đỉnh không thuộc S }

End; $l(\alpha) = l(a, b) =$ độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến b ;

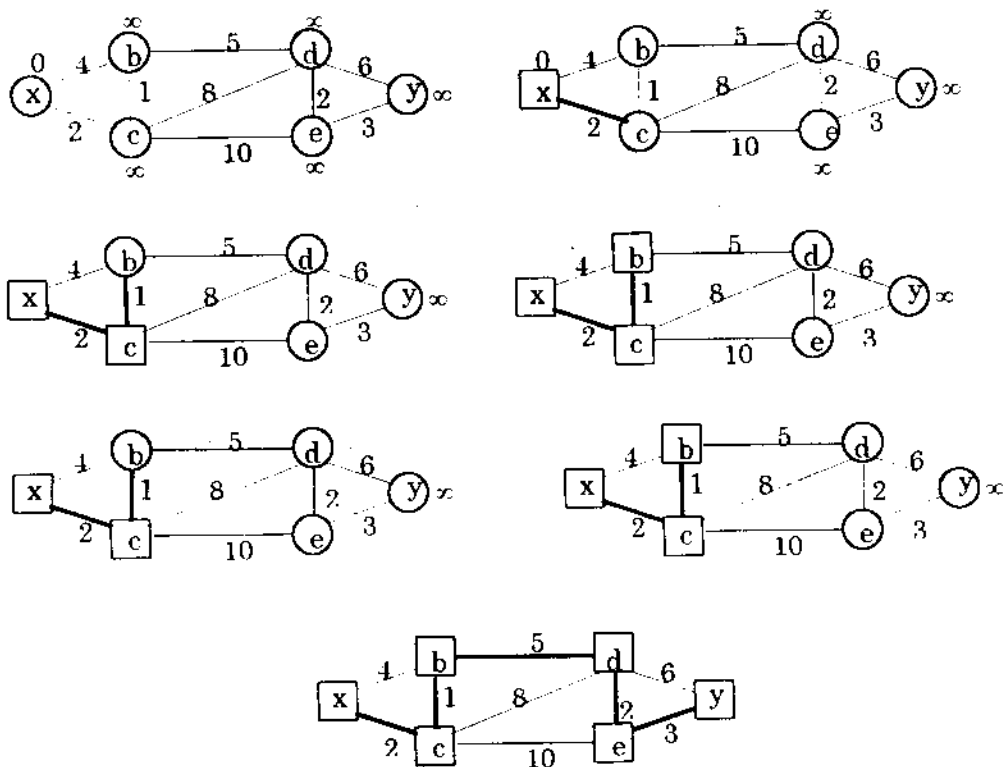
Chú ý: Người ta đã chỉ ra độ phức tạp của thuật toán Dijkstra là $O(n^2)$, tức là phải dùng $O(n^2)$ phép toán cộng và so sánh để tìm độ dài

đường đi ngắn nhất giữa 2 đỉnh trong đồ thị đơn vô hướng liên thông có trọng số.

Ví dụ: Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi độ dài ngắn nhất từ đỉnh x đến đỉnh y của đồ thị có trọng số cho dưới dạng:



Giải: Các bước dùng thuật toán Dijkstra tìm độ dài đường đi ngắn nhất giữa đỉnh x và đỉnh y được biểu diễn bởi các hình dưới đây:



Tại mỗi bước lặp của thuật toán, các đỉnh của S được khoanh thành hình vuông. Đường đi ngắn nhất chỉ chứa các đỉnh đã thuộc vào tập S_k từ x đến đỉnh được in ra cho mỗi bước lặp. Thuật toán kết thúc khi y được khoanh thành hình vuông. Ta nhận được đường đi ngắn nhất từ x đến y là: xcbdey, với độ dài là 13.

CHƯƠNG 4

CÂY

§1. CÂY LÀ MỘT ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG KHÔNG CÓ CHU TRÌNH

1. Các tính chất tương đương

Định lý 1: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ là một cây, tức G là đồ thị liên thông và không có chu trình, ở đây $|x| = n > 1$. Khi đó sáu tính chất sau đây là tương đương:

- 1) G là đồ thị liên thông và không có chu trình.
- 2) G không có chu trình và có $n-1$ cạnh.
- 3) G liên thông và có $n-1$ cạnh.
- 4) G không có chu trình và nếu thêm vào một cạnh nối hai đỉnh không kề nhau thì G xuất hiện duy nhất một chu trình.
- 5) G liên thông và nếu bỏ đi một cạnh tùy ý thì đồ thị nhận được sẽ không liên thông.
- 6) Mỗi cặp đỉnh trong G được nối với nhau bằng một đường duy nhất.

Chứng minh: Ta chứng minh theo trình tự sau:

1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 1). Ta sử dụng đẳng thức $V(G) = m - n + p$ là số chu trình độc lập của đồ thị $G = \langle X, U \rangle$, ở đây $|X| = n$, $|U| = m$, p là số thành phần liên thông của G .

1) $\Rightarrow$ 2): Vì G không có chu trình nên $V(G) = 0$ hay $m - n + p = 0$. Do G liên thông nên $P = 1$. Vậy $m - n + 1 = 0$ hay $m = n - 1$. Chứng tỏ G không có chu trình và số cạnh $m = n - 1$.

2) $\Rightarrow$ 3): Giả sử G không có chu trình và có đúng $n - 1$ cạnh. Ta chứng minh G liên thông và có $n - 1$ cạnh.

Thật vậy giả sử ngược lại G không liên thông. Khi đó $p \geq 2$. $V(G) = m - n + p = 0$ (do G không có chu trình). Thay $m = n - 1$ vào đẳng thức trên ta có $p - 1 = 0$, hay $p = 1$, trái với $p \geq 2$. Vậy G liên thông và số các cạnh là $n - 1$.

3) $\Rightarrow$ 4): Giả sử G là liên thông có $n - 1$ cạnh, ta chỉ ra G không có chu trình và nếu thêm vào G một cạnh nối hai đỉnh không kề nhau bất kỳ thì G xuất hiện chu trình.

Thật vậy vì G liên thông nên $p = 1$, mặt khác $m = n - 1$ nên ta có $V(G) = m - n + 1 = 0$ (1). Hay G không có chu trình.

Nếu thêm vào G một cạnh thì ta được đồ thị G' với số cạnh là n .

$$\text{hay} \quad V(G') = n - n + 1 = 1 \quad (2).$$

Chứng tỏ nếu thêm vào một cạnh thì trong G' xuất hiện 1 chu trình. Từ (1) và (2) ta có 4).

4) $\Rightarrow$ 5): Giả sử G không có chu trình và nếu thêm vào một cạnh nối hai đỉnh không kề nhau bất kỳ thì G xuất hiện 1 chu trình. Ta chỉ ra G liên thông và nếu bỏ đi 1 cạnh tùy ý thì đồ thị nhận được sẽ không liên thông.

Giả sử ngược lại G không liên thông, tức là $\exists$ cặp đỉnh x, y trong G mà không có đường nào nối x với y . Khi đó nối x và y bởi một cạnh, đồ thị nhận được vẫn không có chu trình. Điều này mâu thuẫn với 4). Hay G là liên thông.

Nếu bỏ đi 1 cạnh trong G mà đồ thị vẫn liên thông thì nếu khôi phục lại cạnh này đồ thị sẽ có chu trình. Điều này mâu thuẫn với 4). Tóm lại ta có 5).

5) $\Rightarrow$ 6): Giả sử ngược lại, nếu trong G có tồn tại cặp đỉnh x, y không nối với nhau bằng đường nào cả. Chứng tỏ G không liên thông. Mâu thuẫn với 5). là G liên thông, hay mỗi cặp đỉnh đều có

một đường nối với nhau. Đường đó là duy nhất vì nếu có 2 đường nối cặp đỉnh x, y thì sau khi bỏ đi 1 đường đồ thị vẫn liên thông, trái với 5) là nếu bỏ đi 1 cạnh thì đồ thị sẽ không liên thông.

6) $\Rightarrow$ 1) : Với mỗi cặp đỉnh nối với nhau bởi một đường thì theo định nghĩa G là liên thông.

Giả sử G có chu trình. Xét cặp đỉnh x, y trên chu trình đó. Khi đó x, y có 2 cặp đường nối với nhau, mâu thuẫn với 6).

Định lý được chứng minh.

Định lý 2: Trong một cây số các đỉnh chèo ≥ 2 .

Chứng minh: Phản chứng: Giả sử trong cây $G = \langle X, U \rangle$ số đỉnh chèo < 2 . Có 2 trường hợp xảy ra:

a) Số đỉnh chèo = 0

b) Số đỉnh chèo = 1.

Ta chứng minh cả 2 trường hợp trên đều không xảy ra:

a) Nếu số đỉnh chèo = 0, tức là không có đỉnh chèo, hay mỗi đỉnh trong G đều có ít nhất 2 cạnh liên quan tới đỉnh đó hay bậc của nó ≥ 2 . Xuất phát từ mỗi đỉnh vào 1 cạnh rồi đi ra 1 cạnh khác (không lặp lại). Quá trình này là vô hạn, vì nếu hữu hạn thì sẽ xuất hiện đỉnh chèo. Tính vô hạn này mâu thuẫn với tính hữu hạn của các cạnh của đồ thị.

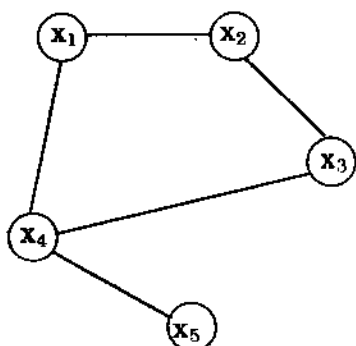
b) Giả sử có 1 đỉnh chèo. Ta xuất phát từ đỉnh này đi ngược lại như quá trình trên thì cũng dẫn đến sự mâu thuẫn với tính hữu hạn của đồ thị. Tóm lại trong một cây bất kỳ số đỉnh chèo không bé hơn 2.

2. Cây bao trùm

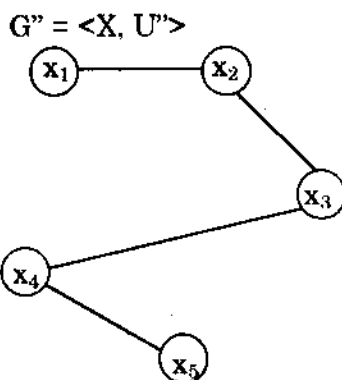
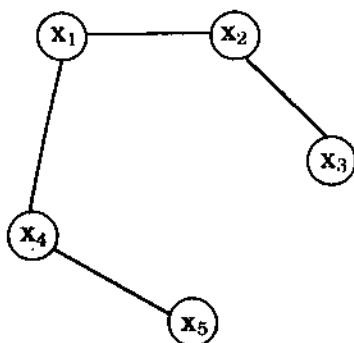
Định nghĩa: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$, với $|X| > 1$.

Giả sử G' là đồ thị bộ phận của G (G' nhận được từ G bằng cách bỏ đi một số cạnh nhưng vẫn giữ lại nguyên đỉnh). Nếu $G' = \langle X, U' \rangle$ là một cây thì G' gọi là cây bao trùm của $G = \langle X, U \rangle$.

Ví dụ: Cho $G = \langle X, U \rangle$ là



là đồ thị liên thông, nhưng không phải là 1 cây (vì nó có 1 chu trình).
Nếu bỏ cạnh nối giữa x_4 và x_3 thì ta được đồ thị bộ phận $G' = \langle X, U' \rangle$ là:



G' là một cây vì G' liên thông và không có chu trình. Theo định nghĩa G' là cây bao trùm của G . Một đồ thị có thể có nhiều cây bao trùm. Ví dụ G'' cũng là cây bao trùm của G .

Định lý 3 : Đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ có cây bao trùm khi và chỉ khi G là đồ thị liên thông.

Chứng minh:

Cần: Giả sử G có cây bao trùm là G' . Ta chỉ ra G là liên thông. Thật vậy nếu G không liên thông thì tồn tại cặp đỉnh x, y mà giữa chúng không được nối bởi đường nào, mà x, y cũng là các đỉnh của G' . Chứng tỏ G' không liên thông trái với giả thiết G' là một cây.

Đủ: Giả sử G là liên thông.

Chú ý: Quá trình trên bao giờ cũng thực hiện được vì:

a) Nếu trong G không có chu trình thì theo định nghĩa G là 1 cây, đó là cây bao trùm $G' \equiv G$.

b) Nếu trong G có chu trình thì bỏ đi 1 cạnh trong chu trình đó ta được G' là liên thông và không còn chu trình.

3. Cây bao trùm bé nhất và thuật toán tìm cây bao trùm bé nhất

Trong thực tế có nhiều bài toán phải tìm cây bao trùm bé nhất để giảm chi phí, xây dựng, vận chuyển (đối với bài toán giao thông), giảm chi phí xây dựng và thiết kế điện năng (đối với nơi cấp điện và nơi tiêu thụ điện).

Ví dụ: Có một nguồn điện phải cung cấp cho n người tiêu thụ. Hãy tìm cách mắc điện để cho tổng độ dài dây dẫn là bé nhất ?

Giải bài toán này thực chất là tìm cây bao trùm bé nhất giữa nơi cấp điện và nơi tiêu thụ.

Bài toán về cây bao trùm bé nhất.

Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$, $|X| = n > 1$. Mỗi cạnh $u' \in U$ ta gán cho nó trọng số là $l(u)$. Giả sử $G' = \langle X, U' \rangle$ là cây bao trùm của G . Ký hiệu $l(G') = \sum_{u \in U'} l(u)$ gọi là trọng số của G' .

$\mathcal{Q}$ Ký hiệu là tập các cây bao trùm của G .

Khi đó nếu cây bao trùm $g \in \mathcal{Q}$ của G thoả mãn $l(g) = \min\{l(g')/g' \in \mathcal{Q}\}$ thì ta nói g là cây bao trùm bé nhất trong G .

Hãy tìm cây bao trùm bé nhất trong G .

Thuật toán tìm cây bao trùm bé nhất.

Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ với $|X| = n > 1$ là đồ thị mà mỗi cạnh $u \in U$ đều có trọng số $l(u)$ và khác nhau từng cặp.

• Bước 1: Xác định cạnh có trọng số bé nhất trong tất cả các cạnh trong U . Giả sử đó là cạnh u_1 .

• Bước 2: Giả sử u_2 là cạnh có trọng số bé nhất trong các cạnh $U \setminus \{u_1\}$.

• Bước 3: Giả sử u_3 là cạnh có trọng số bé nhất trong các cạnh $U \setminus \{u_1, u_2\}$, ở đây $\{u_1, u_2, u_3\}$ là không có chu trình.

Giả sử bước k ta đã xác định được $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}$ có trọng số bé nhất và không có chu trình.

• Bước $k+1$: Xác định chẳng hạn u_{k+1} là cạnh có trọng số bé nhất trong các cạnh $U \setminus \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}$ và $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ không có chu trình.

Thực hiện tới bước $n-1$ thì dừng lại. Khi đó ta có $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$ không có chu trình. Đặt $U_{n-1} = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\} \subseteq U$. Khi đó cây bao trùm $G' = \langle X, U_{n-1} \rangle$ là cây bao trùm bé nhất của G cần tìm.

Để chỉ ra G' là cây bao trùm bé nhất của G ta cần chứng minh:

Định lý 4 : $G' = \langle X, U_{n-1} \rangle$ xây dựng trong thuật toán trên là cây bao trùm bé nhất trong $G = \langle X, U \rangle$, $|X| = n > 1$.

Chứng minh: Trước hết từ cách xây dựng trên ta có $G' = \langle X, U_{n-1} \rangle$ là cây bao trùm của G (do tính chất 2 trong định lý 1). Ta chỉ ra G' là cây bao trùm bé nhất. Thật vậy, giả sử $G'' = \langle X, V \rangle$ là cây bao trùm bé nhất tức là $l(G'') = \min\{l(g') \mid g' \in \mathcal{G}\}$, $\mathcal{G}$ là tập các cây bao trùm của G . Ta sẽ dẫn đến mâu thuẫn là tồn tại cây bao trùm $G''' = \langle X, W \rangle$ bé nhất $\neq G''$. Thật vậy vì $G'' = \langle X, V \rangle$ là cây bao trùm bé nhất nên $V \neq U_{n-1}$ trong G' . Giả sử $u_k \in U_{n-1}$ mà $u_k \notin V$. Khi đó trong đồ thị $\langle X, V \cup \{u_k\} \rangle$ sẽ xuất hiện chu trình duy nhất (theo tính chất 4 trong Định lý 1). Giả sử ω là chu trình đó trong $\langle X, V \cup \{u_k\} \rangle$. Vì trong $G' = \langle X, U_{n-1} \rangle$ không có chu trình mà $u_k \in U_{n-1}$ nên $\exists$ cạnh $u_0 \notin U_{n-1}$ (u_k là cạnh trong ω). Xét đồ thị $G''' = \langle X, W \rangle$ ở đây $W = V \cup \{u_k\} \setminus \{u_0\}$. Rõ ràng G''' không có chu trình (vì ω là chu trình duy nhất trong $\langle X, V \cup \{u_k\} \rangle$). Do $G'' = \langle X, V \rangle$ là cây bao trùm nên $|V| = n-1$ (do tính chất 2 trong Định lý 1). Vậy $|W| = n-1$. Từ đó ta có G''' là cây bao trùm trong G . Mặt khác $u_0 \notin U_{n-1}$ nên $l(u_0) > l(u_k)$, $u_k \in U_{n-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } l(G'') &= \sum_{u \in W} l(u) = \sum_{u \in V} l(u) + \underbrace{l(u_k) - l(u_0)}_{<0} \\ &< \sum_{u \in V} l(u) = l(G'). \end{aligned}$$

Trái với giả thiết G'' là cây bao trùm bé nhất, chứng tỏ $G' = \langle X, U_{n-1} \rangle$ là cây bao trùm bé nhất.

Thuật toán PRIM tìm cây bao trùm bé nhất.

Procedure PRIM (G: Đồ thị liên thông có n đỉnh)

$u :=$ cạnh có trọng số bé nhất;

for $i := 1$ to $n-2$ do

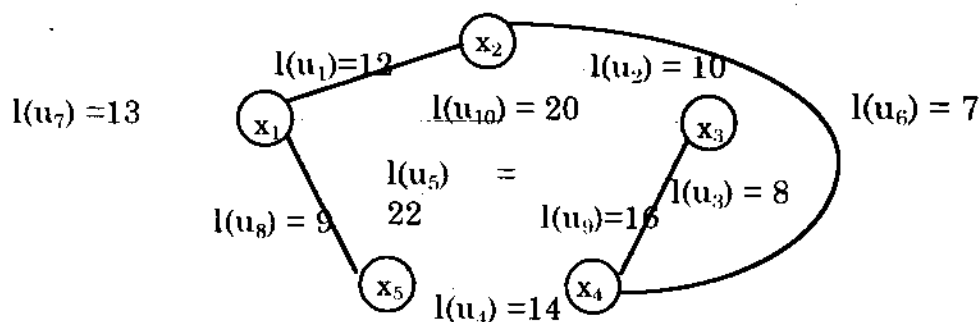
Begin

$v :=$ cạnh có trọng số bé nhất kể với một đỉnh trong u và không tạo ra chu trình trong u nếu ghép nó vào u ;

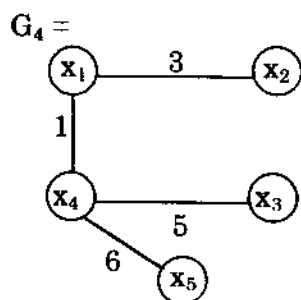
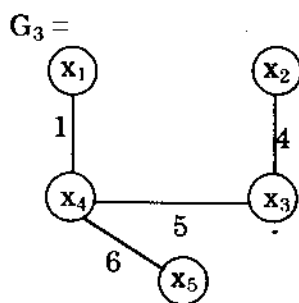
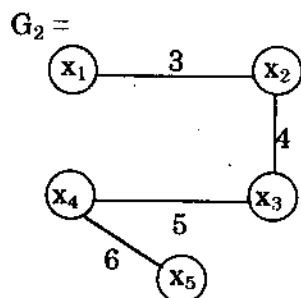
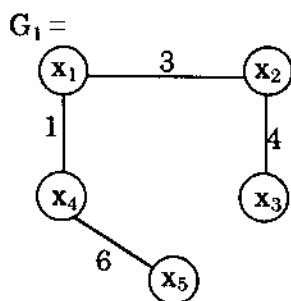
$u := u$ với v được ghép vào;

End; (u là cây bao trùm bé nhất)

Ví dụ 1: Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$ với trọng số các cạnh như sau: $l(u_1) = l(x_1, x_2) = 12$, $l(u_2) = l(x_2, x_3) = 10$, $l(u_3) = l(x_3, x_4) = 8$, $l(u_4) = l(x_4, x_5) = 14$, $l(u_5) = l(x_1, x_4) = 22$, $l(u_6) = l(x_2, x_4) = 7$, $l(u_7) = l(x_2, x_5) = 13$, $l(u_8) = l(x_1, x_5) = 9$, $l(u_9) = l(x_3, x_5) = 16$ và $l(u_{10}) = l(x_1, x_3) = 20$ như hình dưới



Theo định lý 3 thì G có các cây bao trùm cụ thể là:



Trọng số của các cây bao trùm là

$$l(G_1) = 14.$$

$$l(G_2) = 18$$

$$l(G_3) = 16$$

$$l(G_4) = 15$$

Vậy G_1 là cây bao trùm bé nhất trong G .

4. Thuật toán tìm hệ chu trình độc lập

Giả sử $G = \langle X, U \rangle$, với $|X| = n$, $|U| = m$ và G có p thành phần liên thông. Khi đó chu số của đồ thị ta ký hiệu qua $c(G)$ và định nghĩa là $c(G) = m - n + p$. Người ta đã chứng minh được : chu số của đồ thị G bằng số chu trình độc lập của G . Hay $c(G) = v(G)$. Từ đó suy ra : đồ thị G không có chu trình khi và chỉ khi $c(G) = 0$ và có một chu trình duy nhất khi và chỉ khi $c(G) = 1$.

Bài toán:

Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$, $|X| = n > 1$, $|U| = m$ và G có P thành phần liên thông. Tìm hệ chu trình độc lập của G , ta ký hiệu là $v(G)$.

Thuật toán:

- Bước 1: Tìm cây bao trùm của G . Giả sử đó là $G' = \langle X, U' \rangle$, cây này có $n-1$ cạnh và không có chu trình. Từ cách xây dựng $G' = \langle X, U' \rangle$ ta suy ra có $m-n+1$ cạnh bị loại. Giả sử các cạnh bị loại là $u_1, u_2, \dots, u_{m-n+1}$.

- Bước 2: Trong G' nếu ta khôi phục lại cạnh u_1 thì xuất hiện duy nhất một chu trình độc lập mà ta ký hiệu là c_1 (do tính chất 4 của Định lý 1).

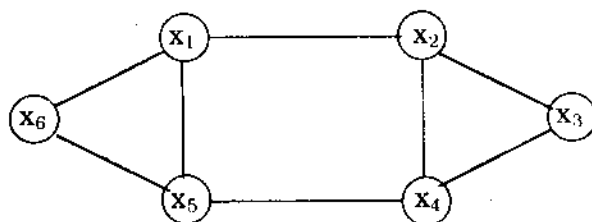
- Bước 3: Để khôi phục lại cạnh u_2 , ta xoá cạnh u_1 và khôi phục lại u_2 thì trong G' xuất hiện duy nhất 1 chu trình mà ta ký hiệu là c_2 .

- Giả sử ta đã thực hiện được bước thứ $m-n$, tức là ta đã xoá cạnh u_{m-n-1} và khôi phục lại cạnh u_{m-n} . Và ta có duy nhất chu trình mà ta ký hiệu là c_{m-n} .

- Bước thứ $m-n+1$: Xoá u_{m-n} và khôi phục lại cạnh bị loại cuối cùng là u_{m-n+1} . Khi đó theo tính chất 4 trong định lý 1 ta có duy nhất 1 chu trình mà ta ký hiệu là c_{m-n+1} .

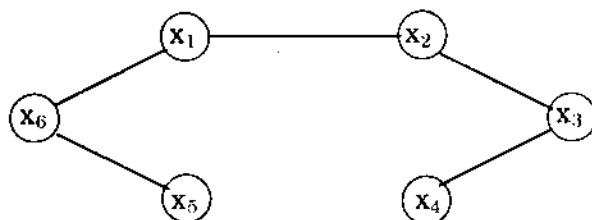
$c_1, c_2, \dots, c_{m-n+1}$ là các chu trình độc lập trong $G = \langle X, U \rangle$. Rõ ràng $V(G) = m-n+1$ chu trình độc lập.

Ví dụ: Cho $G = \langle X, U \rangle$, $|X| = 6$, $|U| = 8$, $p=1$.



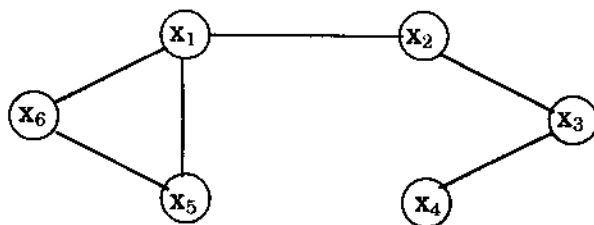
Tìm số chu trình độc lập trong đồ thị trên. $V(G) = 8 - 6 + 1 = 3$.

Bước 1: Tìm cây bao trùm $G' = \langle X, U' \rangle$ là



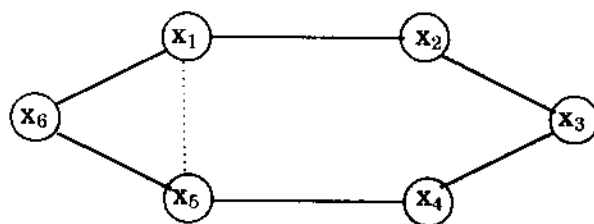
nhận được từ G bằng cách bỏ đi các cạnh (x_1, x_5) , (x_5, x_4) và (x_4, x_2) .

Bước 2: Khôi phục lại cạnh (x_1, x_5) ta được

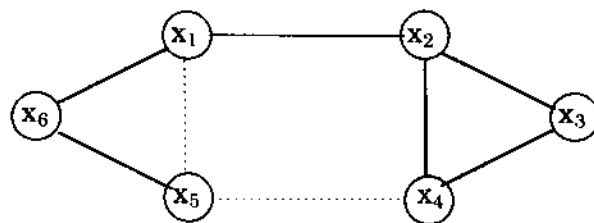


xuất hiện duy nhất chu trình $c_1 = x_1x_5x_6x_1$.

Bước 3: Xoá cạnh (x_1, x_5) và khôi phục lại cạnh (x_5, x_4) ta được chu trình $c_2 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_1$.



Bước 4: Xoá cạnh (x_1, x_5) và (x_5, x_4) , khôi phục cạnh (x_4, x_2) ta được chu trình $c_3 = x_2x_3x_4x_2$.



Tóm lại chu trình độc lập trong G là

$$c_1 = x_1x_5x_6x_1.$$

$$c_2 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_1.$$

$$c_3 = x_2x_3x_4x_2.$$

Hay số chu trình độc lập của đồ thị trên là $V(G) = 3$.

§2. CÂY PHÂN CẤP

1. Định nghĩa cây

Cây là một tập hữu hạn các đỉnh, trong đó có một đỉnh đặc biệt gọi là gốc. Giữa các đỉnh có mối phân cấp “cha con”.

Số các con của một đỉnh gọi là bậc của đỉnh đó. Bậc của đỉnh bằng 0 thì đỉnh đó được gọi là lá. Thông thường đỉnh không phải là lá gọi là đỉnh trong và lá gọi là đỉnh ngoài. Bậc của cây là bậc cao nhất của các đỉnh trong cây. Như vậy một đỉnh là gốc của cây nếu nó không là con của bất cứ đỉnh nào trong cây.

Mức của cây được định nghĩa như sau:

Gốc của cây có mức là: 0.

Nếu mức của cha là i thì mức của con là: $i+1$.

Mức cao nhất của nút trong cây là chiều cao của cây.

Đường đi từ A đến đỉnh B trong một cây là dãy các đỉnh: $A_0 = A, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n = B$, trong đó A_i là bố của A_{i+1} ($i=0, 1, \dots, n-1$) giữa A_i và A_{i+1} được nối với nhau bởi một cạnh.

Độ dài đường đi là số các cạnh trong đường đi đó.

Gọi h là chiều cao của cây T. Khi đó ta có thể định nghĩa chiều cao h là độ dài của đường đi lớn nhất của cây T.

Hai cách định nghĩa chiều cao của cây đề cập ở trên là tương đương nhau.

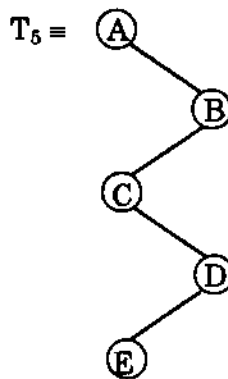
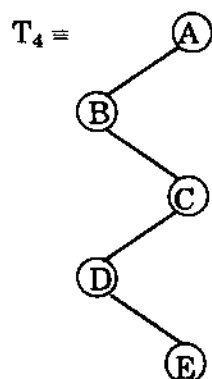
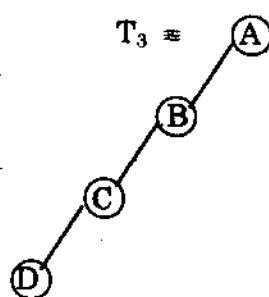
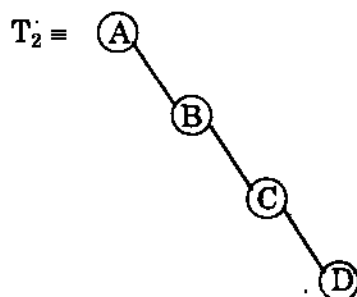
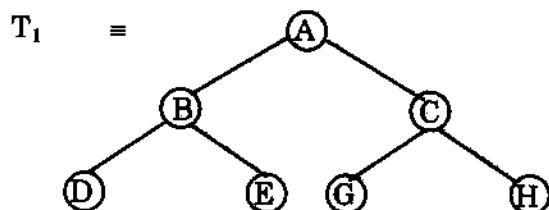
2. Cây phân cấp nhị phân

a. Định nghĩa cây nhị phân

Cây phân cấp được gọi là cây phân cấp nhị phân (để đơn giản ta gọi là cây nhị phân) nếu bậc ở tất cả các đỉnh đều không lớn hơn 2, hay mỗi đỉnh chỉ có tối đa hai con.

Đối với cây con của một đỉnh người ta phân biệt cây con trái và cây con phải, vì lý do đó cây nhị phân cũng gọi là cây có thứ tự.

Ví dụ: Cho các cây nhị phân T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 .



Trong đó người ta gọi T_1 là cây nhị phân đầy đủ,

T_2 là cây nhị phân lệch phải

T_3 là cây nhị phân lệch trái

T_4, T_5 gọi là cây nhị dich dắc

b. Định nghĩa cây nhị phân đầy đủ

Cây nhị phân được gọi là đầy đủ nếu tất cả các đỉnh trong đều có bậc bằng 2 và tất cả các đỉnh ngoài đều thuộc mức lớn nhất của cây T.

3. Một số tính chất của cây nhị phân đầy đủ

Bổ đề 1: Số lượng các đỉnh ở mức i của cây nhị phân đầy đủ là 2^i với $(i=0, 1, \dots)$.

Chứng minh: Quy nạp theo i ta có:

Với $i = 0$. Đỉnh thuộc mức 0 là gốc. Mỗi cây chỉ có một gốc nên bổ đề đúng với $i = 0$.

Giả sử bổ đề đúng với i , tức là số đỉnh ở mức i là 2^i , xét mức $i+1$ và chỉ ra số đỉnh của mức này là 2^{i+1} .

Thật vậy: Mỗi đỉnh ở mức i có đúng hai con nên 2^i đỉnh có $2 * 2^i = 2^{i+1}$ con hay số đỉnh ở mức $i+1$ là 2^{i+1} .

Bổ đề 2: Số lượng của các đỉnh trong và đỉnh ngoài của cây nhị phân đầy đủ có độ cao h là $(2^{h+1} - 1)$.

Chứng minh: Suy ra từ bổ đề 1: Số các đỉnh trong và đỉnh ngoài của cây nhị phân đầy đủ bằng: số các đỉnh ở mức 0 + số các đỉnh ở mức 1 + số các đỉnh ở mức 2 + ... + số các đỉnh ở mức $h = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^h = 2^{h+1} - 1$

Bổ đề 3: Cho cây nhị phân đầy đủ với L = số các đỉnh ngoài. Khi đó số các đỉnh trong của cây là $L-1$.

Chứng minh: Gọi chiều cao của cây là h . Theo Bổ đề 1 thì số các đỉnh ngoài $L = 2^h$. Còn số các đỉnh trong và đỉnh ngoài của cây nhị phân đầy đủ theo Bổ đề 2 là $(2^{h+1}-1)$. Nếu đặt K = số đỉnh trong thì $K + L = (2^{h+1}-1)$.

$$\text{Vậy } K = (2 * 2^h - 1) - 2^h = 2L - 1 - L = L - 1.$$

Định lý 5: Nếu cây nhị phân đầy đủ có n đỉnh và chiều cao là h thì ta có $h = \log_2(n+1) - 1$.

Chứng minh: Theo bổ đề 2 thì $n = 2^{h+1} - 1 \Leftrightarrow n+1 = 2^{h+1}$.

Loga cơ số 2 đẳng thức trên ta có:

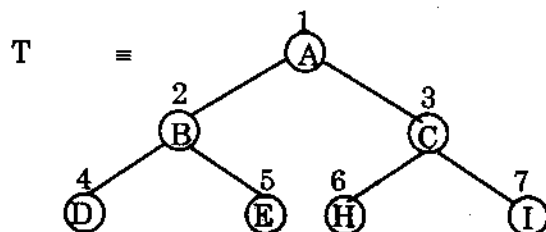
$$\log_2(n+1) = h+1 \text{ hay } h = \log_2(n+1) - 1.$$

4. Biểu diễn cây nhị phân

a. Lưu trữ kế tiếp

Cây nhị phân đầy đủ có thể đánh số các đỉnh theo thứ tự từ mức thấp nhất (mức 0) đến mức cao nhất và trên mỗi mức thì đánh số theo thứ tự từ trái sang phải.

Ví dụ:



Với cách đánh số như trên ta có thể lưu trữ cây T vào một vectơ V theo nguyên tắc:

Đỉnh thứ i được lưu trữ trong thành phần thứ i của V: Cách lưu trữ trên gọi là cách lưu trữ kế tiếp đối với cây nhị phân. Với cách lưu trữ này, nếu biết địa chỉ của cha sẽ tính được địa chỉ của con và ngược lại.

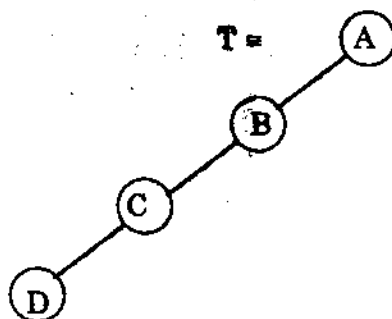
Ví dụ: Địa chỉ của cha là i thì địa chỉ của con bên trái là $2.i$, địa chỉ cây con bên phải là $2.i + 1$ (và ngược lại). Với ví dụ trong cây trên thì hình ảnh lưu trữ của nó là:

$$V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$$

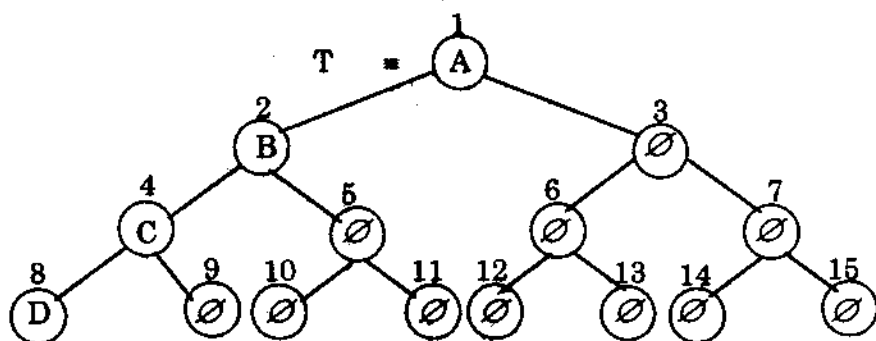
A	B	C	D	E	H	I
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7

Đối với cây nhị phân không đầy đủ thì cách lưu trữ này không thích hợp, nó gây lãng phí bộ nhớ vì có nhiều thành phần trong vectơ bị bỏ trống.

Ví dụ cho cây



Để lưu trữ kế tiếp cây T cần đưa T về cây nhị phân đầy đủ sau, rồi đánh thứ tự các đỉnh theo nguyên tắc đã biết ta được:



Để lưu trữ nó cần véc tơ 15 thành phần mặc dù chỉ có 4 thành phần được lưu trữ, 11 thành phần còn lại trong véc tơ bỏ trống.

A	B	∅	C	∅	∅	∅	D	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}

Để khắc phục được nhược điểm trên mà lại phản ánh đúng dạng tự nhiên của cây ta dùng cách lưu trữ móc nối sau đây:

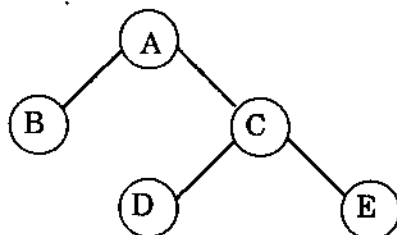
b. Lưu trữ móc nối

Trong cách lưu trữ này, mỗi đỉnh ứng với ba ô liên nhau:

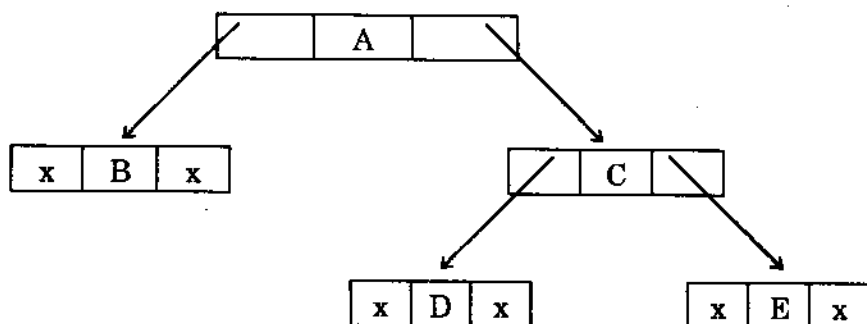
L	I	R
---	---	---

ở đây, I ứng với tập tin (dữ liệu) của đỉnh trong cây, ô L và R là con trỏ trái và phải của I.

Ví dụ:



Cách lưu trữ móc nối trên của cây có dạng:



Cách lưu trữ móc nối cho phép từ cha có thể truy nhập vào con, nhưng ngược lại không được.

§3. THUẬT TOÁN TÌM CÂY NHỊ NGUYÊN TỐI ƯU VỚI CÁC THÔNG TIN CHỨA Ở CÁC LÁ

1. Định nghĩa cây nhị nguyên

Trong mục này chúng ta xét cây nhị nguyên mà mỗi đỉnh trong của nó được mã bằng các số tự nhiên (gọi là các khoá), còn các đỉnh ngoài (tức là lá) chứa các thông tin nào đó. Hay nói cách khác cây nhị nguyên ta nghiên cứu ở đây là đồ thị liên thông không chứa chu trình và bậc ở tất cả các đỉnh bằng 0 hoặc bằng 2 mà chúng ta đã nghiên cứu trong phần lý thuyết đồ thị. Trên lớp các cây nhị nguyên này (chính xác

sẽ định nghĩa sau) chúng ta đưa ra thuật toán phân loại, tìm kiếm thông tin và xây dựng bảng mã cho các thông tin đã được phân loại. Dưới đây chúng ta đề cập tới: thuật toán về sự tương đương giữa các cây nhị nguyên và thuật toán xây dựng cây tối ưu theo cấu trúc cũng như theo thời gian của cây nhị nguyên. Ta ký hiệu $N = \{0, 1, \dots\}$ là tập các số tự nhiên, I là tập các đối tượng hay còn gọi là các thông tin nào đó

Giả sử các ký hiệu $<, > \notin I \cup N, k \in K$.

Cây nhị nguyên được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1:

- a) Mỗi phần tử $i \in I$ gọi là một cây.
- b) Nếu T_1, T_2 là 2 cây còn $k \in N$, thì dãy ký hiệu $k\langle T_1, T_2 \rangle$ gọi là một cây.

Tập tất cả các cây định nghĩa như trên ký hiệu qua TREE và gọi là tập các cây nhị nguyên với các thông tin chứa ở các lá, hay để cho gọn ta gọi là cây nhị nguyên.

Bây giờ ta định nghĩa ánh xạ $f: \text{TREE} \times N \rightarrow I$ và gọi f là hàm làm việc, hay hàm kết quả của cây nhị nguyên.

Định nghĩa 2:

- a) Nếu cây nhị nguyên có dạng là phần tử $i \in I$ thì $f(i, l) = i$ với mọi $l \in N$.
- b) Nếu cây nhị nguyên trong TREE có dạng $k\langle T_1, T_2 \rangle$ thì:

$$f(k\langle T_1, T_2 \rangle, l) = \begin{cases} f(T_1, l) & \text{nếu } l \leq k. \\ f(T_2, l) & \text{nếu } l > k. \end{cases}$$

Dưới đây ta dùng ký hiệu “ $\equiv$ ” (“ $\neq$ ”) để chỉ ra sự đồng nhất (không đồng nhất) bằng nhau của cây.

Định nghĩa 3: Cho hai cây $T_1, T_2 \in \text{TREE}$ ta nói T_1 tương đương với T_2 khi và chỉ khi $f(T_1, l) = f(T_2, l)$ với mọi $l \in N$. Ta ký hiệu $T_1 \approx T_2$.

Do mỗi cây nhị nguyên chỉ có hữu hạn các đỉnh, tuy nhiên N là tập vô hạn các số tự nhiên nên thuật toán duyệt trên toàn bộ sẽ rất khó khăn để kết luận hai cây T_1 và T_2 có tương đương với nhau hay không, vì vậy ta phải tìm thuật toán hữu hiệu hơn để sau một số bước làm việc ta biết được hai cây có tương đương với nhau hay không. Đó là phương pháp tiên đề hoá mà chúng ta sẽ đề cập tới trong chương Logic toán.

2. Hệ tiên đề và quy tắc dẫn xuất của TREE.

Định nghĩa 4: Ta xem “ $\sim$ ” là một ký hiệu mới không có trong tập $N \cup I \cup \{<, >\}$ và giả sử $T_1, T_2 \in \text{TREE}$ khi đó dãy $T_1 = T_2$ được gọi là phương trình cây.

Ta ký hiệu phương trình cây trên TREE là EQU và định nghĩa:

$$\text{EQU} = \{T_1 = T_2 / T_1, T_2 \in \text{TREE}\}$$

Giả sử X là tập con của EQU ($X \subseteq \text{EQU}$) và $T_1 = T_2 \in \text{EQU}$.

Định nghĩa 5: Phương trình cây $T_1 = T_2$ dẫn được từ tập X (ký hiệu $X \vdash T_1 = T_2$) khi và chỉ khi $T_1 = T_2 \in X$ hoặc $T_1 = T_2$ suy ra từ các phần tử của X bằng cách áp dụng một số hữu hạn lần các quy tắc dẫn xuất sau:

Quy tắc 1(R_1): Nếu $T \in \text{TREE}$ thì $X \vdash T = T$.
(Phản xạ)

Quy tắc 2(R_2): Nếu $X \vdash T_1 = T_2$ thì $X \vdash T_2 = T_1$.
(Đối xứng)

Quy tắc 3(R_3): Nếu $X \vdash T_1 = T_2$ và $X \vdash T_2 = T_3$ thì $X \vdash T_1 = T_3$.
(Bắc cầu)

Quy tắc 4(R_4): Nếu $X \vdash T_1 = T_1'$ thì $X \vdash k\langle T_1, T_2 \rangle = k\langle T_1', T_2 \rangle$.
(Ghép trái)

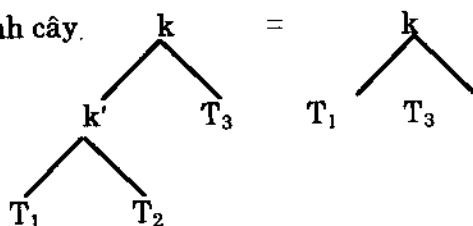
Quy tắc 5(R_5): Nếu $X \vdash T_2 = T_2'$ thì $X \vdash k\langle T_1, T_2 \rangle = k\langle T_1, T_2' \rangle$.
(Ghép phải)

Hệ tiên đề của TREE

Hệ các tiên đề của TREE ta chọn là các phương trình cây sau đây:

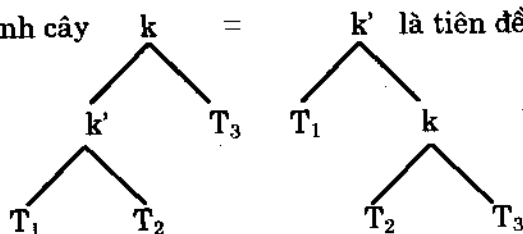
Tiên đề ax_1 :

phương trình cây. k $=$ k là tiên đề nếu $k' \geq k$



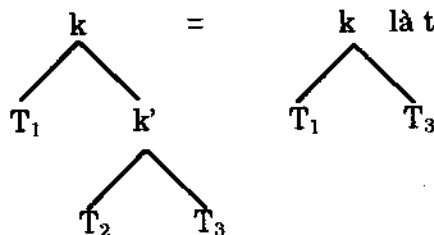
Tiên đề ax_2 :

phương trình cây k $=$ k' là tiên đề nếu $k' < k$



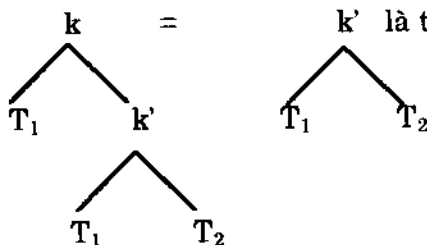
Tiên đề ax_3 :

phương trình cây k $=$ k là tiên đề nếu $k \geq k'$



Tiên đề ax_4 :

phương trình cây k $=$ k' là tiên đề nếu $k < k'$



Tiên đề ax_5 :

phương trình cây $k = T$

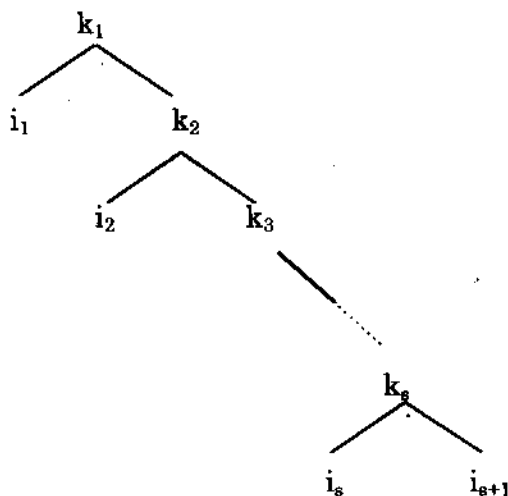


Đặt $AX = \{ax_1\} \cup \{ax_2\} \cup \{ax_3\} \cup \{ax_4\} \cup \{ax_5\} = \{ax_1, ax_2, ax_3, ax_4, ax_5, ax_6\}$ và gọi AX là hệ tiên đề của $TREE$.

3. Dạng lệch phải của cây nhị nguyên

Định nghĩa 6 : Một cây $L \in TREE$ được gọi là cây nhị nguyên lệch phải nếu:

- $L \equiv i$ với mọi $i \in I$ hoặc
- Nếu $L \not\equiv i$ thì $L \equiv k_1 < i_1, k_2 < i_2, \dots, k_s < i_s, i_{s+1} > \dots >$ hoặc



Ở đây $i_1, \dots, i_{s+1} \in I$ và $i_j \neq i_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, s$); $k_1, k_2, \dots, k_s \in N$ và $k_{i+1} - k_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, s-1$).

Định lý 6 (Tính duy nhất của dạng lệch phải).

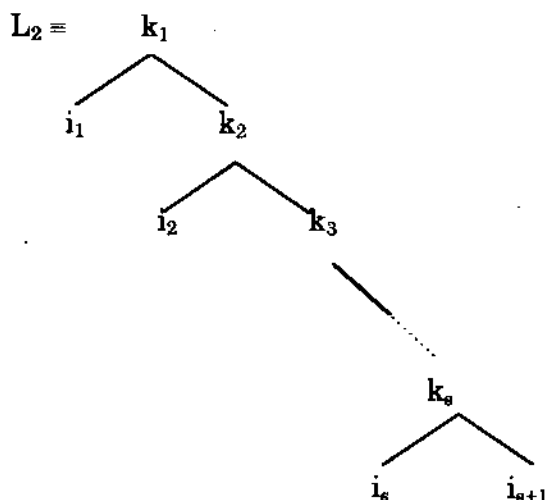
Giả sử L_1, L_2 là hai cây lệch phải. $L_1 \approx L_2$ khi và chỉ khi $L_1 \equiv L_2$.

Chứng minh: Điều kiện đủ là hiển nhiên. Ta chứng minh điều kiện cần:

Giả sử $L_1 \approx L_2$, ta chỉ ra $L_1 \equiv L_2$. Xét 4 khả năng sau đây:

a) $L_1 \equiv i$, $L_2 \equiv j$ ($i, j \in I$). Trường hợp này là hiển nhiên.

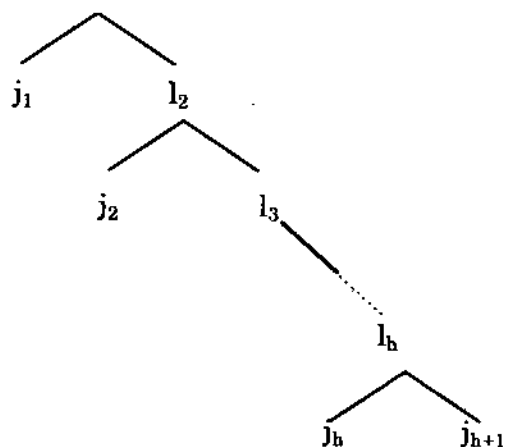
b) $L_1 \equiv i$,



Ở đây $i_1, \dots, i_{s+1} \in I$ và $i_j \neq i_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, s$); $k_1, k_2, \dots, k_s \in N$ và $k_{i+1} - k_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, s-1$).

Trường hợp này do $L_1 \neq L_2$ nên $L_1 \not\equiv L_2$.

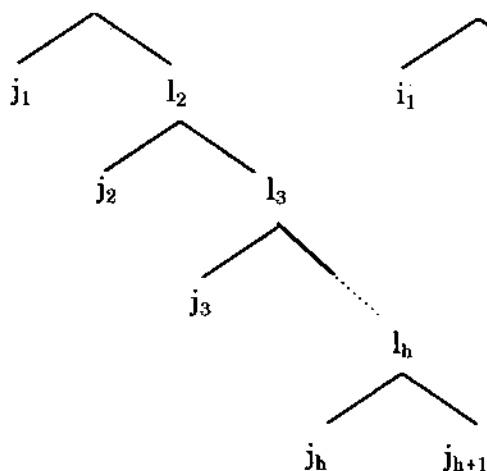
c) $L_1 \equiv$



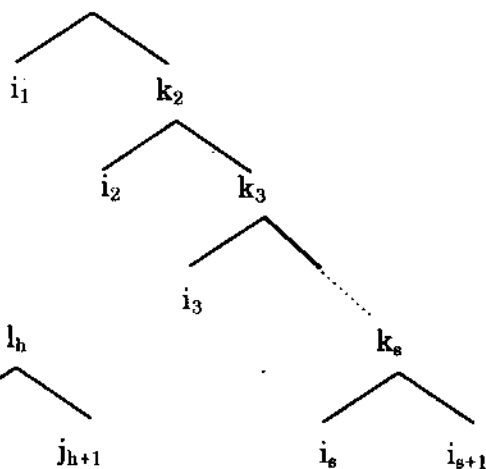
Ở đây $j_1, \dots, j_{h+1} \in I$ và $j_i \neq j_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, h$); $l_1, l_2, \dots, l_h \in N$ và $l_{i+1} - l_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, h-1$).

Trường hợp này tương tự như trường hợp b)

d). $L_1 \equiv l_1$



$L_2 \equiv k_1$



Ở đây $j_1, \dots, j_{h+1}, i_1, \dots, i_{s+1} \in I$ và $j_i \neq j_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, h$), $i_n \neq i_{n+1}$ ($n = 1, \dots, s$); $l_1, l_2, \dots, l_h, k_1, \dots, k_s \in N$ và $l_{i+1} - l_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, h-1$), $k_{n+1} - k_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots, s-1$). Nếu $L_1 \approx L_2$ thì ta chứng minh $L_1 \equiv L_2$, tức là ta chứng minh $h = s$ và $l_1 = k_1, l_2 = k_2, \dots, l_h = k_s, j_1 = i_1, \dots, j_h = i_s$.

Phản chứng, giả sử $l_1 \neq k_1$. Xét trường hợp $l_1 < k_1$ (trường hợp $l_1 > k_1$ tương tự). Lấy $m \in N$, với $m = l_1$. Khi đó ta có:

$$f(L_1, m) = j_1 \text{ và } f(L_2, m) = i_1. \text{ Vì } L_1 \approx L_2 \text{ nên } j_1 = i_1. \quad (1)$$

Lấy $m = l_1 + 1$. Khi đó $f(L_1, m) = j_2$ và $f(L_2, m) = i_1$ (vì $l_1 < m \leq l_2$ và $l_1 < m \leq k_1$). Do $L_1 \approx L_2$ nên $j_2 = i_1$ (2). Từ (1) và (2) ta có $j_1 = j_2$ trái với định nghĩa của cây lệch phải hay $l_1 = k_1$. Hoàn toàn tương tự ta có $l_2 = k_2, l_3 = k_3, \dots, l_h = k_h$ và $j_2 = i_2, j_3 = i_3, \dots, j_h = i_h$. Ta chỉ ra $h = s$. Giả sử $h < s$ ($h > s$ chứng minh tương tự) (xem hình trang sau).

Chú ý: $l_h = k_h < k_{h+1} < \dots < k_s$

Chọn $m \in N$ với $m = k_{h+1}$ thì $f(L_1, m) = j_{h+1}$ và $f(L_2, m) = i_{h+1}$, chọn $p \in N$ với $p = k_{h+1} + 1$ thì ta có $p > l_h$ và $k_{h+1} < p \leq k_{h+2}$. Vậy $f(L_1, p) = j_{h+1}$, $f(L_2, p) = i_{h+1}$. Vì $L_1 \approx L_2$ nên $i_{h+1} = j_{h+1}$ (3) và $i_{h+2} = j_{h+1}$ (4). Từ (3) và (4) ta có $i_{h+1} = i_{h+2}$. Trái với định nghĩa của cây lệch phải. Hay $h = s$ và $j_{h+1} = i_{s+1}$. Vậy $L_1 \equiv L_2$. Định lý được chứng minh.

Định lý 7: Với mọi $T \in \text{TREE}$ tồn tại duy nhất cây lệch phải L sao cho:

a. $T \approx L$

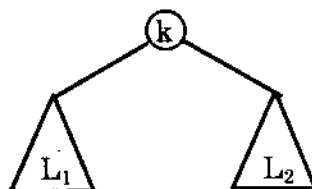
b. $AX|-T = L$

Chứng minh: Tính duy nhất suy ra từ định lý 6. Câu a) suy được từ b) vì mỗi tiên đề ax_i ($i = \overline{1,5}$) là một phương trình cây gồm 2 cây tương đương nhau (kiểm tra lại theo định nghĩa hàm làm việc) và ta lại biết các quy tắc dẫn xuất thì bảo tồn tính tương đương. Vậy chỉ cần chứng minh câu b).

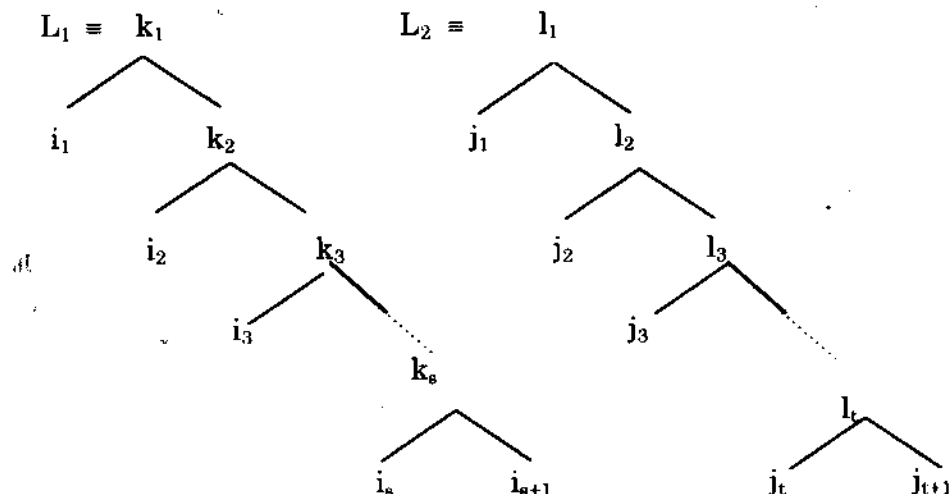
Ta chứng minh theo định nghĩa cây T .

1) Nếu $T \equiv i$, $i \in I$ thì ta chọn ngay $L \equiv i$ rõ ràng theo quy tắc 1 ta có ngay $AX|-T = L$.

2) Giả sử $T \equiv k\langle T_1, T_2 \rangle$, ở đây T_i đã tồn tại cây lệch phải duy nhất L_i sao cho: $AX|-T_i = L_i$ ($i = 1, 2$). Ta chứng minh tồn tại cây lệch phải L của cây $T \equiv k\langle T_1, T_2 \rangle$ sao cho $AX|-T = L$, ở đây theo giả thiết quy nạp thì $T \equiv k\langle T_1, T_2 \rangle$ có dạng



ở đây



Ở đây $j_1, \dots, j_{t+1}, i_1, \dots, i_{s+1} \in I$ và $j_i \neq j_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, t$), $i_n \neq i_{n+1}$ ($n = 1, \dots, s$); $l_1, l_2, \dots, l_t, k_1, \dots, k_s \in N$ và $l_{i+1} - l_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, t-1$), $k_{n+1} - k_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots, s-1$). Xét các trường hợp sau đây:

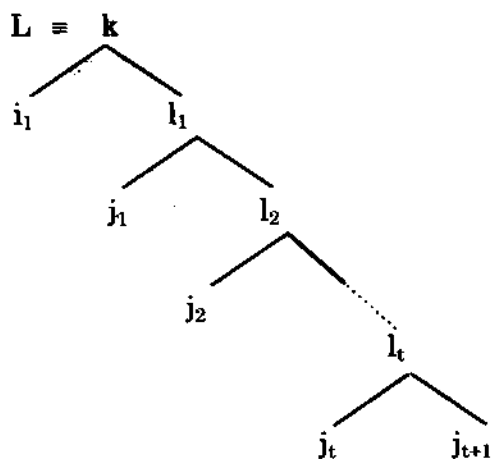
Nếu $k \leq k_1$ thì áp dụng ax_1 ta có

$$T \equiv k \approx \begin{array}{c} k_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ i_1 \quad l_1 \\ \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad j_1 \quad l_2 \\ \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad j_2 \quad \dots \quad l_s \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad i_s \quad i_{s+1} \end{array} \quad (1)$$

Nếu $k > k_1$ thì áp dụng ax_2 ta có:

$$T \equiv k \approx \begin{array}{c} k_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \triangle L_1 \quad k \\ \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad k_2 \quad \triangle L_2 \\ \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad i_2 \quad k_3 \\ \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad i_3 \quad \dots \quad k_s \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad i_s \quad i_{s+1} \end{array} \quad (2)$$

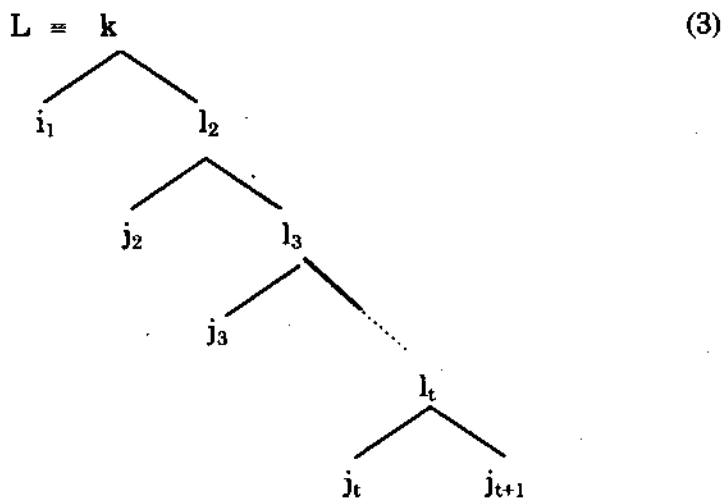
Xét (1). Nếu trong (1) mà $k < l_1$ và $i_1 \neq j_1$ thì ta chọn dạng lệch phải của T là



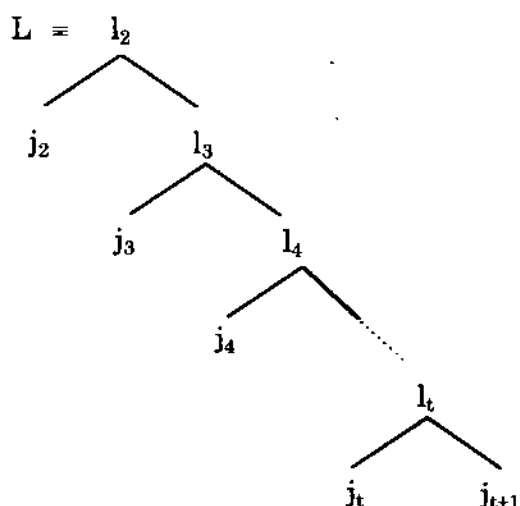
và rõ ràng $AX|-T = L$.

Nếu $k < l_1$ nhưng $i_1 = j_1$ thì ta chọn $L = L_2$ (do áp dụng tiên đề ax_4)

Nếu $k = l_1$ thì trong (1) ta áp dụng tiên đề ax_3 ta có:



Trong (3) nếu $i_1 \neq j_1$ thì ta chọn L là cây vế phải của (3), còn nếu $i_1 = j_1$ thì áp dụng tiên đề ax_4 .



Trong (1) nếu $k \geq l_1$ thì ta áp dụng tiên đề ax_3 . Tóm lại áp dụng một số hữu hạn lần các tiên đề trong AX ta sẽ tìm được cây lệch phải của T là L sao cho $AX \vdash T = L$.

4. Điều kiện cần và đủ của cây tương đương và thuật toán tìm sự tương đương của cây nhị nguyên với các thông tin chứa ở các lá

a. Định lý 8: Giả sử $T_1, T_2 \in \text{TREE}$. $T_1 \approx T_2$ khi và chỉ khi $AX \vdash T_1 = T_2$.

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả sử $T_1 \approx T_2$ ta chứng minh $AX \vdash T_1 = T_2$. Theo định lý 7 thì với mọi T_i tồn tại dạng lệch phải L_i ($i = 1, 2$) sao cho $T_1 \approx L_1$ (1),

$T_2 \approx L_2$ (2). $AX \vdash T_1 = L_1$ (3) và $AX \vdash T_2 = L_2$ (4). Vì $T_1 \approx T_2$ nên $L_1 \approx L_2$ (5). Từ (5) áp dụng Định lý 6 ta có $L_1 = L_2$ (6). Từ (3) (4) (6) ta có $AX \vdash T_1 = T_2$.

Điều kiện đủ: suy ra từ định lý 7.

b. Thuật toán tương đương:

Cho 2 cây $T_1, T_2 \in \text{TREE}$ muốn biết $T_1 \approx T_2$ hay không ta thực hiện các bước sau:

• Bước 1: Tìm dạng lệch phải của T_1 là L_1 và dạng lệch phải của T_2 là L_2 .

• Bước 2: So sánh L_1 và L_2 .

Nếu $L_1 = L_2$ thì $T_1 \approx T_2$.

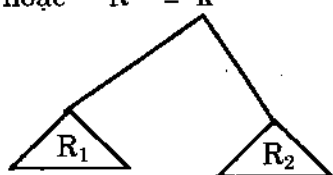
Nếu $L_1 \neq L_2$ thì $T_1 \not\approx T_2$.

Để xây dựng thuật toán tìm cây nhị nguyên đầy đủ tối ưu trước hết ta đưa vào các khái niệm sau.

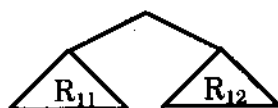
5. Cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh

Định nghĩa 7: Cây nhị nguyên $R \in \text{TREE}$ được gọi là cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh nếu hoặc $R \equiv i$ với $i \in I$

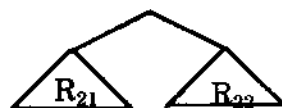
hoặc $R \equiv k$



$R_1 \equiv k_1$



$R_2 \equiv k_2$



Với $k_1 < k < k_2$, $R_{11} \neq R_{12}$, $R_{21} \neq R_{22}$ và $|\gamma(i_n) - \gamma(i_m)| \leq 1$ ($n \neq m$) trong đó i_n, i_m là các thông tin ở đỉnh ngoài của R .

Ở đây $\gamma(i) :=$ Số các cung trong đường đi từ gốc đến đỉnh ngoài chứa thông tin i .

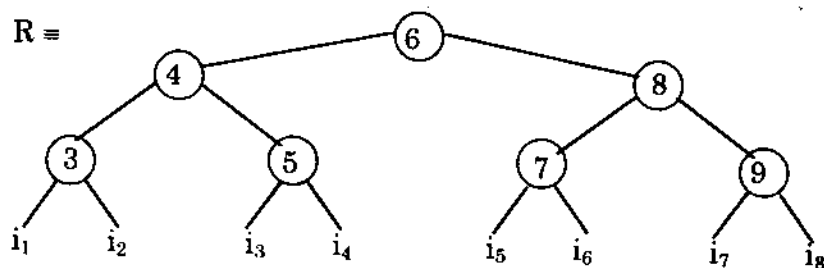
Với $|\gamma(i_n) - \gamma(i_m)| \leq 1$ có hai khả năng:

a. Nếu $|\gamma(i_n) - \gamma(i_m)| = 0$ với mọi cặp $i_n \neq i_m$ thì ta gọi cây R là cây đầy đủ hoàn chỉnh loại 1. Trường hợp này xảy ra khi dạng lệch phải của R có đúng 2^l đỉnh.

b. Nếu $|\gamma(i_n) - \gamma(i_m)| = 1$ đối với cặp $i_n \neq i_m$ nào đó thì R gọi là cây đầy đủ hoàn chỉnh loại 2. Trường hợp này xảy ra khi cây lệch phải R có các đỉnh ngoài $\neq 2^l$.

Ví dụ:

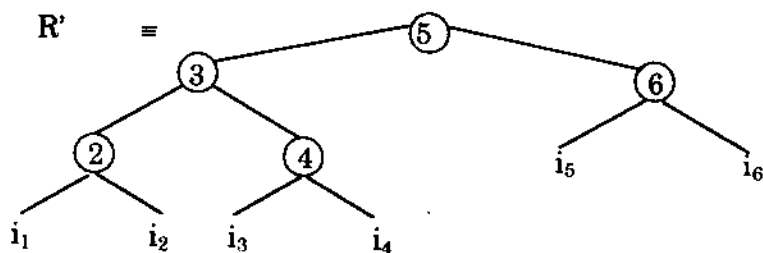
$R \equiv$



$(i_n \neq i_{n+1}, n=1, 2, \dots, 7)$ là cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh loại 1 vì:

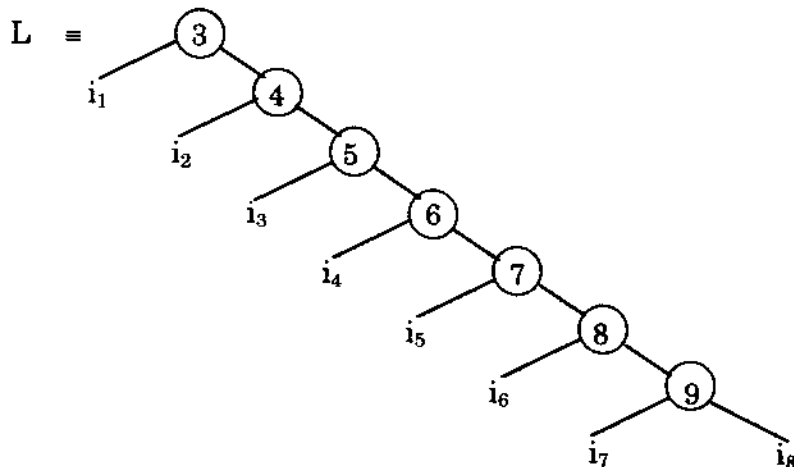
$$|\gamma(i_n) - \gamma(i_m)| = 0 \text{ với mọi } i_n \neq i_m.$$

Còn cây



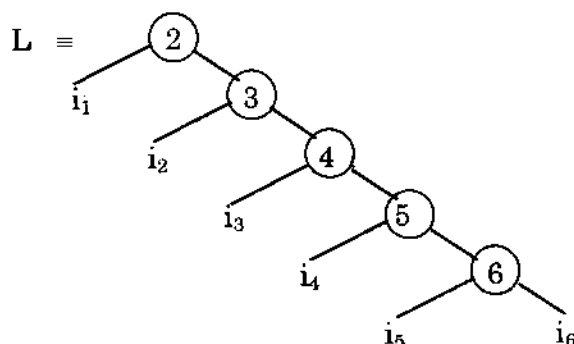
$(i_n \neq i_{n+1})$ là cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh loại 2, vì $|\gamma(i_5) - \gamma(i_4)| = 1$

Dĩ nhiên cây lệch phải của R là:



Có số đỉnh ngoài là $8 = 2^3$.

Còn cây lệch phải của R' là:



Có số đỉnh ngoài là $6 \neq$ số lũy thừa của 2.

Định lý 9: Với mọi $T \in \text{TREE}$ tồn tại cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh R sao cho:

1. $T \approx R$.
2. $AX \vdash T = R$.

Chứng minh: Ta chứng minh phần 2), còn phần 1) suy ra từ phần 2).

Theo Định lý 7 thì với T tồn tại cây lệch phải L sao cho $T \approx L$ (1) và $AX \vdash T = L$ (2). Từ L áp dụng một số hữu hạn lần tiếp để ax_2 ta được cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh loại 1 R nếu số các đỉnh ngoài của L là 2^i , và được cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh loại 2 R' nếu số các đỉnh ngoài của L khác 2^i . Dĩ nhiên ta có $T \approx R$ (vì $T \approx L$ và $L \approx R$) và $AX \vdash T = R$ (vì $AX \vdash T = L$ và $L \approx R$). Định lý được chứng minh.

6. Một số tính chất của cây lệch phải và cây đầy đủ hoàn chỉnh

Ký hiệu $\beta(T) :=$ Số các đỉnh (kể cả đỉnh ngoài) của T .

Định lý 10: Giả sử $L \in \text{TREE}$ là cây lệch phải. Khi đó

$$\beta(L) = \min\{\beta(T) \mid T \in \text{TREE} \text{ và } T \approx L\}.$$

Chứng minh: Giả sử $T \in \text{TREE}$ và $T \approx L$ điều đó có nghĩa là tồn tại dãy các cây $T \equiv T_1, T_2, T_3, \dots, T_n \equiv L$ sao cho $AX \vdash T_i = T_{i+1}$ hay $T_i \approx T_{i+1}$ (vì mỗi lần áp dụng các tiên đề trong AX thì số đỉnh giảm đi nếu

áp dụng các tiên đề trong $AX \setminus \{ax_2\}$ và số đỉnh giữ nguyên nếu ta áp dụng ax_2 . Nói cách khác ta có $\beta(T) = \beta(T_1) \geq \beta(T_2) \geq \dots \geq \beta(T_n) = \beta(L)$ (1). Chúng ta tất cả các cây $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ tương đương với cây L và $\beta(T_i) \geq \beta(L)$ ($i = 1, \dots, n$).

Giả sử $T' \in \text{TREE}$ và $T' \notin \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ nhưng $T' \approx L^*$. Ta chỉ ra $\beta(T') \geq \beta(L)$. Giả sử ngược lại $\beta(T') < \beta(L)$ (2). Theo Định lý 7 đối với cây T' có tồn tại dạng lệch phải L' sao cho $T' = L'$ và $AX \vdash T' = L'$. Cũng như với T tồn tại các cây trung gian: $T' = T'_1, T'_2, T'_3, \dots, T'_m = L'$ sao cho $T' = T'_1 \approx T'_2 \approx \dots \approx T'_m = L'(**)$. Và $\beta(T'_i) > \beta(L)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) (3).

Từ (2) và (3) ta có $\beta(L) > \beta(L')$ (4). Từ (*) và (**) ta có $L \approx L'$.

Theo Định lý 6 thì $R = L'$, (4) và (5) là mâu thuẫn nhau. Tóm lại ta luôn có $\beta(L) = \min\{\beta(T) \mid T \in \text{TREE} \text{ và } T \approx L\}$.

Định nghĩa 8:

a) Một thông tin i trong cây $T \in \text{TREE}$ được gọi là cốt yếu nếu có tồn tại một số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ sao cho $f(T, k) = i$, hay thông tin i được gọi là cốt yếu nếu có một đường đi từ gốc đến lá chứa thông tin i trong cây T ứng với số tự nhiên k .

b) Một thông tin j trong cây T là không cốt yếu nếu không tồn tại một số $k \in \mathbb{N}$ sao cho $f(T, k) = j$. Nói cách khác nếu không có một $k \in \mathbb{N}$ để tạo ra một đường đi từ gốc đến lá chứa thông tin j trong cây T .

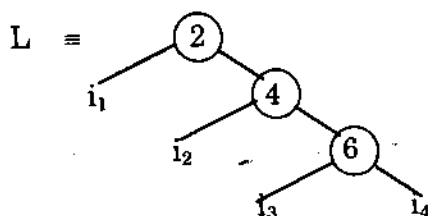
c) Tập $M \subseteq \mathbb{N}$ được gọi là tập mã của các thông tin cốt yếu trong cây T nếu với mỗi $m \in M$ đều tồn tại một thông tin cốt yếu i trong T sao cho $f(T, m) = i$, và ngược lại với mỗi thông tin cốt yếu trong T đều có một phần tử $m \in M$ sao cho $f(T, m) = i$.

Định lý 11: Giả sử $L \in \text{TREE}$ là cây lệch phải và $R \in \text{TREE}$ là cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh. Khi đó nếu $R \approx L$ thì $\beta(R) = \beta(L)$.

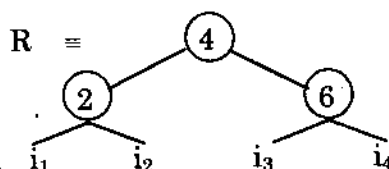
Chứng minh: Cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh R nhận được từ cây lệch phải L bằng cách áp dụng duy nhất tiên đề ax_2 một số hữu hạn lần. Thật vậy, theo Định lý 7 đối với R có tồn tại cây lệch phải L' sao cho $R \approx L'$ (1). Theo giả thiết $R \approx L$ (2). Từ (1) và (2) theo tính chất bắc cầu ta có $L \approx L'$. Theo Định lý 6 thì $L' = L$ mà R nhận được từ L' tức là từ L qua việc áp dụng tiên đề ax_2 thì số đỉnh không đổi nên $\beta(R) = \beta(L)$.

Định lý được chứng minh.

Ví dụ: Cho cây lệch phải



Với $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4$. Áp dụng tiên đề ax_2 ta được cây



Là cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh loại 1 và $R \approx L$.

Rõ ràng $\beta(R) = 7 = \beta(L)$.

Như ta đã biết để chỉ ra hai cây T_1, T_2 tương đương ta phải chứng minh: $f(T_1, l) = f(T_2, l)$ với mọi $l \in N$ là tập các số tự nhiên. Việc kiểm tra lại đẳng thức trên đối với mỗi số tự nhiên $l \in N$ sẽ rất phức tạp, đôi khi không thể thực hiện được. Để khắc phục nhược điểm đó ta sẽ chỉ ra có tồn tại tập hữu hạn các số tự nhiên $M \subset N$ để xét sự tương đương của T_1 và T_2 trên tập N ta chỉ cần chỉ ra T_1, T_2 tương đương trên tập con M là đủ. Nếu $f(T_1, l) = f(T_2, l)$ với mọi $l \in M$ thì ta viết $T_1 \underset{M}{\approx} T_2$.

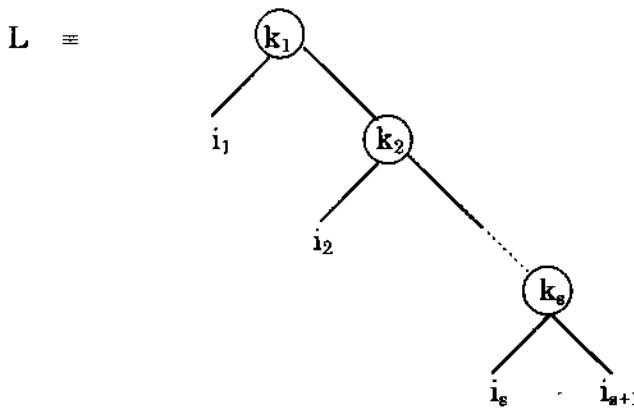
Định lý 12 : Giả sử $T_1, T_2 \in \text{TREE}$ nếu $T_1 \underset{M}{\approx} T_2$ tức là $f(T_1, l) = f(T_2, l)$ với mọi $l \in N$ thì tồn tại tập hữu hạn khác rỗng các số tự nhiên $M \subseteq N$ có tính chất:

1. $T_1 \approx T_2$ khi và chỉ khi $T_1 \underset{M}{\approx} T_2$.
2. $|M| = \min\{|H| \mid H \subset N \text{ và } T_1 \underset{H}{\approx} T_2\}$.
3. Tập M là tập mã của các thông tin cốt yếu trong cây T_1 và T_2 .

Chứng minh: Với T_i có tồn tại duy nhất cây lệch phải L_i sao cho $T_i \approx L_i$ (1) ($i=1, 2$) do định lý 7. Vì $T_1 \approx T_2$ nên từ (1) ta có $L_1 \approx L_2$. Theo định lý 6 thì $L_1 = L_2 = L$. Bây giờ ta chứng minh 1) theo định nghĩa của cây lệch phải L .

Xét trường hợp $L \equiv i$, $i \in L$. Trong trường hợp này tập M gồm một số tự nhiên bất kỳ nào đó. Chẳng hạn $M = \{k\}$. Khi đó do $L \approx T_1 \approx T_2$ nên $f(T_1, l) = f(T_2, l) = i$ với mọi $l \in N$. Dĩ nhiên $f(T_1, k) = f(T_2, k) = i$ hay $T_1 \approx T_2$.

Xét trường hợp còn lại là $L \neq i$ với mọi $i \in I$ trong trường hợp này ta có:



$$k_1 < k_2 < \dots < k_s \text{ và } i_n \neq i_{n+1} \quad (n=1, 2, \dots, s)$$

Chọn $M = \{k_1, k_2, \dots, k_s, k_s + 1\}$ gồm $s+1$ phần tử. Ta chứng minh $T_1 \approx T_2$ khi và chỉ khi $T_1 \approx T_2$. Nếu $T_1 \approx T_2$ thì $T_1 \approx T_2$ là hiển nhiên theo định nghĩa. Giả sử $T_1 \approx T_2$ ta chỉ ra $T_1 \approx T_2$.

Thật vậy: Với mọi $l: l \leq k_1$ ta có $f(T_1, l) = f(T_2, l) = i_1$.

Với mọi $l: k_1 < l \leq k_2$ ta có $f(T_1, l) = f(T_2, l) = i_2$.

Với mọi $l: k_2 < l \leq k_3$ ta có $f(T_1, l) = f(T_2, l) = i_3$.

.....

Với mọi $l: k_{s-1} < l \leq k_s$ ta có $f(T_1, l) = f(T_2, l) = i_s$.

Với mọi $l: l > k_s$ ta có $f(T_1, l) = f(T_2, l) = i_{s+1}$.

Tóm lại nếu $T_1 \approx T_2$ thì $T_1 \approx T_2$.

Chứng minh 2.

$|M| = s+1$ tức M có $s+1$ phần tử $\{k_1, k_2, \dots, k_s, k_s + 1\}$ các phần tử k_i ($i=1, s$) không thể bỏ đi khỏi tập M vì nếu bỏ đi phần tử k_i thì L không còn là cây lệch phải của T_1 và T_2 nữa và do đó tính tương đương giữa L và T_1 bị phá vỡ. Còn phần tử thứ $s+1$ là k_s+1 không thể bỏ đi khỏi tập M , nó có thể thay bởi số n nào đó nếu $n > k_s$. Trường hợp này $|M| = s+1$. Dĩ nhiên với mọi $H \subset N$ mà $M \subseteq H$ thì ta luôn có $T_1 \approx_H T_2$ khi và chỉ khi $T_1 \approx_M T_2$, hay $|M| = \min\{|H| / H \subset N \text{ và } T_1 \approx_H T_2\}$.

Chứng minh 3): suy từ định nghĩa.

7. Thuật toán tìm cây nhị nguyên tối ưu với các thông tin chứa ở các lá

Vấn đề cây tối ưu trong phần này ta xét theo hai nghĩa:

- Tối ưu theo cấu trúc (hay theo đỉnh).
- Tối ưu theo thời gian làm việc (tìm kiếm).

7.1. Tối ưu theo cấu trúc

Định nghĩa 9: Giả sử $T_0 \in \text{TREE}$. T_0 gọi là cây tối ưu theo cấu trúc nếu T_0 thỏa mãn các điều kiện sau:

- T_0 là cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh.
- $\beta(T_0) = \min \{\beta(T) / T \in \text{TREE} \text{ và } T \approx T_0\}$.
- $h(T_0) = \min \{h(T) / T \in \text{TREE} \text{ và } T \approx T_0\}$.

4. Trong cây T , mã của đỉnh cha lớn hơn mã của đỉnh con bên trái và nhỏ hơn mã của đỉnh con bên phải.

Thuật toán tìm cây tối ưu theo cấu trúc:

Cho cây $T \in \text{TREE}$. Ta có thể tìm cây tối ưu theo cấu trúc T_0 mà $T \approx T_0$ theo các bước sau đây:

- Bước 1: Tìm dạng lệch phải L của T (Theo định lý 7).

• Bước 2: Tìm cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh R từ L bằng cách áp dụng tiên đề ax_2 một số hữu hạn lần. R chính là cây tối ưu theo cấu trúc cần tìm (theo Định lý 10 và 11).

7.2. Tối ưu theo thời gian

Để định nghĩa khái niệm tối ưu theo thời gian, ta cần nhớ lại khi cho phần tử $l \in N$ vào cây $T \in \text{TREE}$ thì hàm ánh xạ $f(T, l)$ xác định duy nhất một đường đi từ đỉnh cây T đến một lá nào đó. Đường đi đó ta ký hiệu là $\omega(l)$.

Đặt $W(T) = \{\omega(l) / l \in N\}$ với cây $T \in \text{TREE}$. Gọi F là ánh xạ đơn trị từ tập $W(T)$ vào tập R^+ các số thực dương. Khi đó ta gọi $F(\omega(l))$ là thời gian xác định thông tin mà đường $f(T, l)$ dẫn tới trong cây T ứng với khóa là l . Tiếp theo ta đặt $\Delta(T, F, P) = \sum_{l \in M} P(l) F(\omega(l))$ và được gọi là thời gian

trung bình (ứng với F, P) để xác định các thông tin chứa trong cây T ứng với tập các câu hỏi $M \subset N$. Ở đây P là phân bố xác suất rời rạc trên M , còn M là tập xác định trong Định lý 12.

Định nghĩa 10: Giả sử $T_1 \in \text{TREE}$, T_1 được gọi là cây tối ưu theo thời gian nếu T_1 thỏa mãn các điều kiện sau:

1. T_1 là cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh.
2. $\Delta(T_1, F, P) = \min_{T \in \text{TREE và } T \approx_M T_1} \{\Delta(T, F, P)\}$.

3. Trong cây T , mã của đỉnh cha lớn hơn mã của đỉnh con bên trái và nhỏ hơn mã của đỉnh con bên phải.

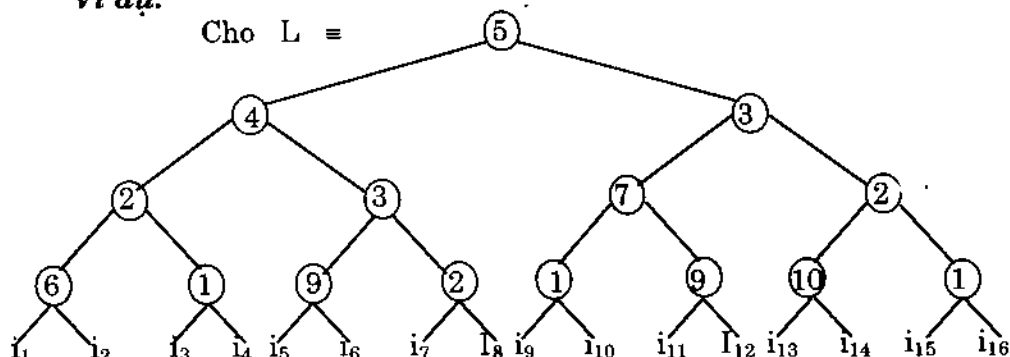
Thuật toán tìm cây tối ưu theo thời gian:

Với mỗi $T \in \text{TREE}$ ta xây dựng được cây tối ưu theo thời gian T_1 mà $T_1 \approx T_2$ theo các bước sau:

- Bước 1: Tìm cây lệch phải của T là L .
- Bước 2: Từ L tìm cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh R và R chính là cây tối ưu theo thời gian.

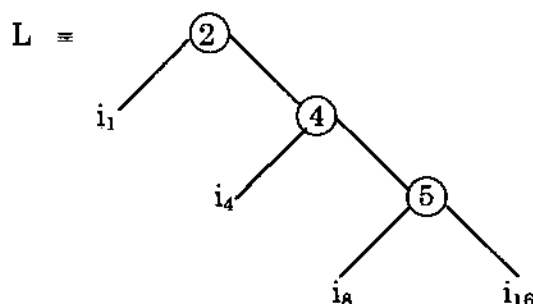
Ví dụ:

Cho $L \equiv$

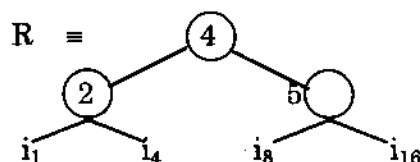


Với $i_n \neq i_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots, 15$)

Bước 1: Tìm dạng lệch phải của T là



Bước 2: Từ L tìm cây nhị nguyên đầy đủ là



ở đây $T \underset{M}{\approx} L \underset{M}{\approx} R$. $M = \{2, 4, 5, 6\}$.

F: $W(T) \rightarrow R^+$ ta định nghĩa như sau: $F(\omega(l)) :=$ Số các cung của đường $\omega(l)$, $l \in M$. Phân bố xác suất P trên M ta lấy là phân bố xác suất đều tức là $P(l) = 1/4$ với mọi $l \in M$ hay $P(2) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/4$.

Với T ta tính được :

$$F(\omega(2)) = F(\omega(4)) = F(\omega(5)) = F(\omega(6)) = 4.$$

$$\text{Vậy } \Delta(T, F, P) = \sum_{l \in M} P(l)F(\omega(l)) = 1/4 = \sum_{l \in M} F(\omega(l)) = 1/4(4+4+4+4) = 4.$$

Đối với cây lệch phải L ta có:

$$F(\omega(2)) = 1, F(\omega(4)) = 2, F(\omega(5)) = F(\omega(6)) = 3.$$

$$\Delta(L, F, P) = 1/4(1 + 2 + 3 + 3) = 9/4.$$

Đối với R ta có: $F(\omega(2)) = F(\omega(4)) = F(\omega(5)) = F(\omega(6)) = 2.$

$$\Delta(R, F, P) = 1/4(2 + 2 + 2 + 2) = 2.$$

Có thể chỉ ra với mọi cây $T' \in \text{TREE}$ mà $T' \approx_M R$.

$T' \notin \{T, L, R\}$ ta có:

$$\Delta'(T', F, P) = \sum_{l \in M} P(l)F(\omega(l)) \geq 9/4.$$

Hay $\Delta(R, F, P) = \min\{\Delta(T, F, P) \mid T \in \text{TREE} \text{ và } T \approx R\}$ theo định nghĩa R là cây tối ưu theo thời gian.

Qua ví dụ trên ta thấy cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh là tối ưu theo cấu trúc và cũng tối ưu theo thời gian.

Các giải thuật tối ưu hóa cây nhị nguyên một chiều với các thông tin chứa ở các lá

- Giải thuật duyệt theo thứ tự tầng:

size := kích thước thật của mảng dùng để lưu giữ cây.

Giả sử $T[i]$ là một nút của cây ta xây dựng giải thuật duyệt theo thứ tự tầng. Giải thuật này duyệt qua tất cả các nút con của $T[i]$, mỗi nút thăm đúng một lần, kể cả nút $T[i]$.

for $z = h_i$ to h do

Begin

$k = 2^{z-h_i}$;

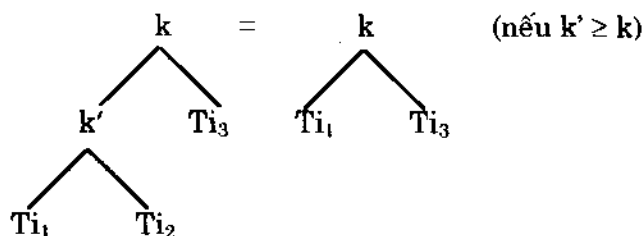
for $t1 = 0$ to $k-1$ do

if $(k*i + t1 \leq \text{size})$ and $(T[k*i + t1] \neq 0)$ then

Xử lý nút $T[k*i + t1]$;

End;

- Giải thuật xử lý tiên đề ax_1 .



{Trong đó $T[i] = k$, $T[2*i] = k'$ }

Giải thuật cho Ti_1 trở đến k

Procedure Up(j: integer);

{T[j] lưu giá trị nút gốc của cây Ti_1 }

{Sau khi gọi thủ tục này thì k' sẽ bị xóa và nút gốc của Ti_1 là T[j]}

for $k = hj$ to h do

Begin

$l := 2^{k-hj}$;

for $t1 = 0$ to $l - 1$ do

if ($j*l + t1 \leq \text{size}$) then

begin

$k_1 := j*l + t1$;

$T[(k_1 - t1) \text{ div } 2 + t1] := T[k_1]$;

$T[k_1] := 0$;

end;

End;

Tính lại giá trị của size;

Return;

Giải thuật xử lý tiên đề ax_1 tại nút $T[i]$

Procedure ax1(i: integer);

if Key(i) and Key(2*i) then

{ Kiểm tra T[i] và nút con trái là khoá hay không }

if $T[i] \leq T[2*i]$ then

Begin

$j = 2*i+1$; {T[j] là nút con phải của T[i]}

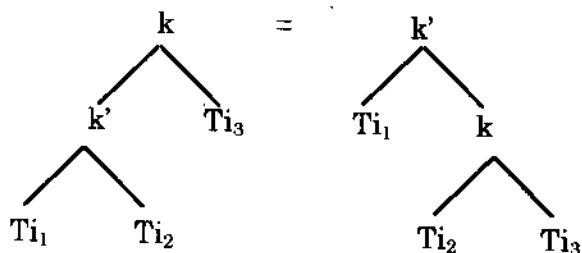
if ($2*j + 1 \leq \text{size}$) then Xoá cây con Ti_2

if ($2*j \leq \text{size}$) then Up(2*j) ; {Cho Ti_1 trở đến k }

End;

Return;

- Giải thuật xử lý tiên đề ax_2



Giải thuật đẩy $T[i]_3$ xuống

Procedure Down(int j);

{ $T[j]$ là nút gốc của Ti_3 }

for $k = h$ Downto h_1 do

Begin

$l := 2^{k-h_1}$;

for $t1 := 0$ to $l - 1$ do

if ($j * l + t1 \leq \text{size}$) then

begin

$k1 := j * l + t1$;

$T[2 * k1 + l - t1] := T[k1]$;

$T[k1] := 0$;

end;

End;

Đặt $\text{size} = 2^{h+1}$

Tính lại giá trị của size ;

Return;

Giải thuật cho cây con Ti_2 trở đến nút gốc của Ti_3

Lúc đầu nút gốc của Ti_2 là $T[4*i+1]$, sau khi xử lý nút gốc của Ti_2 là $T[4*i+2]$

Procedure Up2(j: integer);

{T[j] chứa giá trị k'}

j1 := 2*j + 1;

for k:= hj1 to h do

Begin

l := 2^{k-hj1} ;

for t1 := l-1 Downto 0 do

if (j1 + t1 <= size) then

begin

T[j1*t1 + t1 + 1] := T[j1*t1 + t1];

T[j1*t1 + t1] := 0;

end;

End;

Tính lại giá trị của size;

Return;

Giải thuật xử lý tiên đề ax₂ tại nút T[i]

Procedure ax2(i :integer);

if Key(i) and Key(2*i) then

if T[i] > T[2*i] then

Begin

j:=2*i + 1;

Down(j); {Đẩy cây con phải của T_i xuống}

T[2*i + 1] = T[i]; {Gán nút con phải của T[i] bằng k}

T[i] = T[2*i]; {Gán T[i] bằng k'}

Up2(2*i); {Cho cây con T_{i2} trở đến gốc của T_{i5}}

Up(2*i); {Cho T_{i1} trở đến k'}

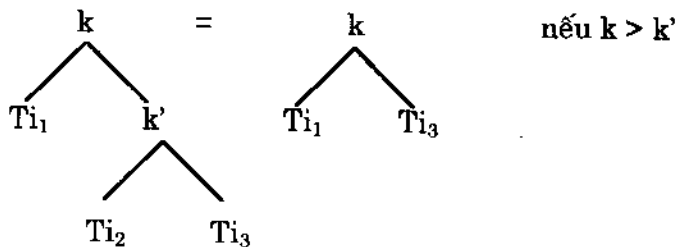
End;

Tính lại giá trị của size;

Return;

- Giải thuật xử lý tiên đề ax_3

Giải thuật cho cây Ti_3 trở đến k



Procedure Up3(int j);

{T[j]} là nút gốc của cây Ti_3 }

{Lúc đầu nút gốc của Ti_3 là $T[4i+3]$, sau khi gọi thủ tục này nút gốc của Ti_3 là $T[2i+1]$ }

for $k = hj$ to h do

Begin

$l := 2^{k-hj}$;

for $t1 = 0$ to $l - 1$ do

if $(j * l + t1 \leq \text{size})$ then

begin

$k1 := j * l + t1$;

$T[(k1 - l + t1) \text{ div } 2] := T[k1]$;

$T[k1] := 0$;

end;

End;

Tính lại giá trị của size;

Return;

Giải thuật xử lý tiên đề ax_3 tại nút $T[i]$

Procedure ax3(int i);

if Key(i) and Key($2*i+1$) then

if $T[i] \geq T[2*i+1]$ then

Begin

$j = 2*i + 1;$

if $(2*j \leq \text{size})$ then Xoá cây con T_{i_2}

if $(2*j + 1 \leq \text{size})$ then Up3($2*j+1$);

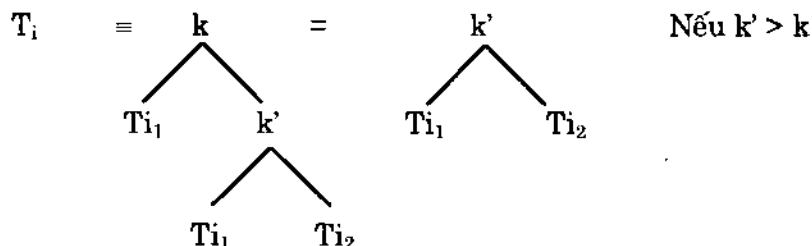
{Xóa k' và cho T_{i_3} trở đến k }

End;

Tính lại giá trị của size;

Return;

• Giải thuật xử lý tiên đề ax_4



Procedure ax_4 (int i);

if Key(i) and (Key($2*i+1$))) then

if $(T[2*i]=T[4*i+3])$ then

Begin

$T[2*i] = 0;$ {Xóa lá i}

$T[i] = T[2*i+1];$

$T[2*i] = T[4*i+2];$

Up2($4*i+3$);

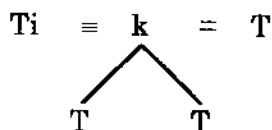
{Cho T_{i_2} trở đến k' , khi này nút gốc của T_{i_2} là $T[2*i+1]$ }

End;

Tính lại giá trị của size;

Return;

- Giải thuật xử lý tiên đề ax₅



Procedure ax5

if $T[\text{size}] = T[\text{size} - 1]$ then

Begin

$T[\text{size} \div 2] = T[\text{size}];$

$T[\text{size}] = 0; T[\text{size} - 1] = 0;$

$\text{size} = \text{size} \div 2;$

End;

Return;

- Giải thuật xây dựng cây lệch phải.

for $i = 1$ to size do ax1(i);

for $i = 1$ to size do ax2(i);

for $i = 1$ to size do ax3(i);

for $i = 1$ to size do ax4(i);

for $i = 1$ to size do ax5(i);

Kết quả cho cây lệch phải L tương đương với cây T.

- Giải thuật chuyển cây lệch phải L về cây tối ưu.

Giả sử cây lệch phải của T là $L \equiv k_1 \langle i_1, k_2 \langle i_2, \dots, k_s \langle i_s, i_{s+1} \rangle \dots \rangle \rangle$, trong đó $k_1 < k_2 < \dots < k_s$ và $i_j \neq i_{j+1} (j = 1, \dots, s)$. Khi đó ta lưu giá trị các nút và giá trị các lá của L vào mảng trung gian Temp như sau:

$\text{Temp}[2^*i] = k_i (i=1, 2, \dots, n)$

$\text{Temp}[2^*j - 1] = i (j=1, 2, \dots, n+1)$

Ta sẽ xây dựng thủ tục chuyển mảng Temp về cây nhị nguyên hoàn chỉnh đầy đủ loại 1 nếu $2n+1$ là lũy thừa của 2, ngược lại ta có cây nhị nguyên hoàn chỉnh đầy đủ loại 2.

Tổng số nút của cây tối ưu là $2n+1$ (bằng tổng số nút của cây lệch phải), nên chiều cao của cây tối ưu phải là $\lceil \log_2(2n+2) \rceil$ (ký hiệu $\lceil x \rceil$ là phần nguyên $\leq x$).

Xây dựng Hàm Split.

Hàm Split (int a,b);

$T_m := b - a + 1;$

$h = \text{trunc}(\log_2(T_m+1))+1;$

if $T_m > 2^{h-1} + 2^{h-2}$ then $T_m = 2^{h-1}$

else $T_m := 2^{h-2};$

Return $a + T_m - 1;$

Giải thuật chuyển Temp về cây nhị phân tìm kiếm đầy đủ hoàn chỉnh.

Procedure Optimization(T: T1;size: integer);

{ kết quả lưu vào mảng T₁}

1. $T_m = \text{Split}(1, 2*n+1);$

Nút gốc của T1 là $T1[1] = \text{Temp}[T_m];$

$\text{Temp}[T_m] = 0;$

Trong thủ tục này ta dùng mảng Temp1 lưu các giá trị trung gian.

$\text{Temp1}[1] = 0;$

$\text{Temp1}[2] = T_m;$

$\text{Temp1}[3] = 2*n+1;$

2. Khi đó ta có:

$T1[2] = \text{Temp}[\text{Split}(\text{Temp1}[1]+1, \text{Temp1}[2])];$

$T1[3] = \text{Temp}[\text{Split}(\text{Temp1}[2]+1, \text{Temp1}[3])];$

Tiếp tục bổ xung các giá trị cho mảng trung gian Temp1:

Temp1[4] = Split(Temp1[1]+1, Temp1[2])

Temp1[5] = Split(Temp1[2]+1, Temp1[3])

Sắp xếp Temp1 theo thứ tự tăng dần ta được dãy 5 phần tử Temp1[1], Temp1[2], ..., Temp1[5].

Tương tự bước 2 ta được T1[4], T1[5], T1[6], T1[7];

Thực hiện tương tự các bước trên ta được T1 là cây tam phân tìm kiếm tối ưu.

• Giải thuật xây dựng hàm Result và khảo sát sự tương đương của hai cây T1 và T2.

Xây dựng hàm Result.

Hàm Result(TREE T; int key)

i=1;

while (key(i)) do

if (Key > T[i]) then i=2*i +1

else i =2*i;

Return T[i];

• Giải thuật khảo sát tính tương đương của hai cây T1 và T2

Chuyển T1 về cây lệch phải $k_1 < i_1, k_2 < i_2, \dots, k_n < i_n, i_{n+1} > \dots$

Chuyển T2 về cây lệch phải $k'_1 < i'_1, k'_2 < i'_2, \dots, k'_n < i'_n, i'_{n+1} > \dots$

Chọn tập $M = \{k_1, k_2, \dots, k_n, k_{n+1}\} \cup \{k'_1, k'_2, \dots, k'_n, k'_{n+1}\}$

Nếu tồn tại $k \in M$ mà $\text{Result}(T_1, k) \neq \text{Result}(T_2, k)$ thì hai cây T1 và T2 không tương đương.

Ngược lại nếu với mọi $k \in M$ mà $\text{Result}(T_1, k) = \text{Result}(T_2, k)$ thì $T_1 \approx T_2$.

§4. THUẬT TOÁN TÌM CÂY NHỊ NGUYÊN TỐI ƯU VỚI CÁC THÔNG TIN CHỨA Ở CÁC ĐỈNH TRONG

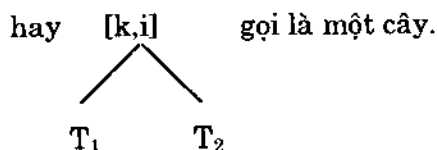
1. Định nghĩa

Giả sử I là tập các đối tượng hay còn gọi là các thông tin nào đó. N là tập các số tự nhiên.

Các ký hiệu $\langle / \rangle$, $/[/]$ và $\tau \notin N \cup I$. Đặt $I^+ = I \cup \{\tau\}$.

Định nghĩa 11:

1. τ là một cây
2. Nếu T_1, T_2 là 2 cây còn $k \in N$, thì dãy ký hiệu $[k, i] \langle T_1, T_2 \rangle$



Đỉnh trong của cây được định nghĩa ở trên gồm hai thành phần: thành phần thứ nhất là số tự nhiên $k \in N$ còn gọi là khoá của đỉnh, thành phần thứ hai $i \in I^+$ gọi là thông tin tại đỉnh có khoá là k .

Tập tất cả các cây định nghĩa như trên ký hiệu qua $TREE$ và gọi là tập các cây nhị nguyên với các thông tin chứa ở các đỉnh trong.

Bây giờ ta định nghĩa ánh xạ $f: TREE \times K \rightarrow I^+$ và gọi f là hàm làm việc, hay hàm kết quả của cây nhị nguyên.

Định nghĩa 12:

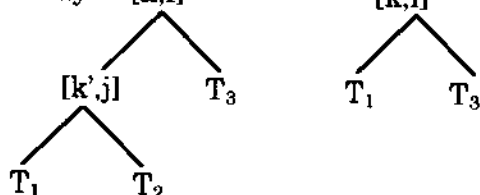
1. $f(\tau, l) = \tau$.
2. $f([k, i] \langle T_1, T_2 \rangle, l) = \begin{cases} f(T_1, l) & \text{nếu } l < k. \\ i & \text{nếu } l = k \\ f(T_2, l) & \text{nếu } l > k. \end{cases}$

2. Hệ tiên đề của TREE

Hệ các tiên đề của TREE ta chọn là các phương trình cây sau đây:

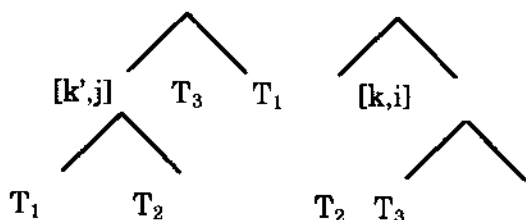
Tiên đề ax_1

Phương trình cây $[k,i] = [k,i]$ là tiên đề nếu $k' \geq k$



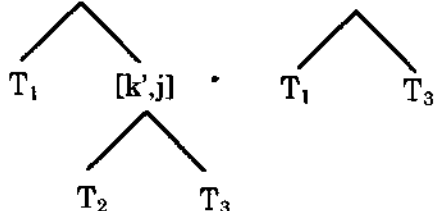
Tiên đề ax_2 :

phương trình cây $[k,i] = [k',j]$ là tiên đề nếu $k' < k$



Tiên đề ax_3 :

phương trình cây $[k,i] = [k,i]$ là tiên đề nếu $k \geq k'$



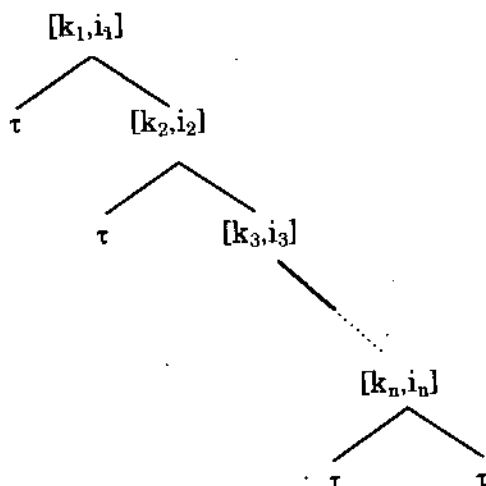
Đặt $AX = ax_1 \cup ax_2 \cup ax_3$ và gọi AX là hệ tiên đề của TREE.

3. Dạng lệch phải của TREE

Định nghĩa 13: Một cây $L \in \text{TREE}$ được gọi là cây lệch phải nếu:

a. $L \equiv \tau$.

b. Nếu $L \neq \tau$ thì $L \equiv [k_1, i_1] < \tau, [k_2, i_2] < \tau, \dots, [k_n, i_n] < \tau, \tau > \dots >$ hoặc



Ở đây $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ và $k_{i+1} - k_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Định lý 14 : Giả sử $L_1, L_2 \in \text{TREE}$ là hai cây lệch phải. $L_1 \approx L_2$ khi và chỉ khi $L_1 \equiv L_2$.

Chứng minh: Tương tự như Định lý 6.

Định lý 15 : Với mọi $T \in \text{TREE}$ tồn tại duy nhất cây lệch phải L sao cho:

- a. $T \approx L$.
- b. $AX|-T = L$.

Chứng minh: Tương tự như định lý 7.

4. Thuật toán tương đương trên TREE

Định lý 16 : Giả sử $T_1, T_2 \in \text{TREE}$. $T_1 \approx T_2$ khi và chỉ khi $AX|-T_1 = T_2$.

Chứng minh: tương tự như định lý 8.

Thuật toán tương đương:

Cho 2 cây $T_1, T_2 \in \text{TREE}$ muốn biết $T_1 \approx T_2$ hay không ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Tìm dạng lệch phải của T_1 là L_1 và dạng lệch phải của T_2 là L_2 .

- Bước 2: So sánh L_1 và L_2 .

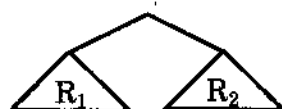
Nếu $L_1 \neq L_2$ thì $T_1 \not\models T_2$.

Nếu $L_1 = L_2$ thì $T_1 \approx T_2$.

5. Cây nhị nguyên đầy đủ trên TREE

Định nghĩa 14: Cây nhị nguyên $R \in \text{TREE}$ được gọi là cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh nếu hoặc $R = \tau$

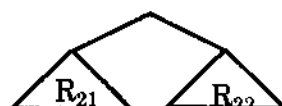
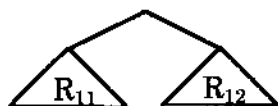
hoặc $R = [k, i]$



với

$$R_1 = [k_1, i_1]$$

$$R_2 = [k_2, i_2]$$



Với $k_1 < k < k_2$ và $|\gamma(\tau_i) - \gamma(\tau_j)| \leq 1$ ($i \neq j$) trong đó τ_i là ký hiệu τ ở lá thứ i , τ_j là ký hiệu τ ở lá thứ j trong các cây $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$.

Ở đây $\gamma(\tau_i) :=$ Số các cung trong đường đi từ gốc đến lá thứ i trong R .

Với $|\gamma(\tau_i) - \gamma(\tau_j)| \leq 1$ có hai khả năng:

a. Nếu $|\gamma(\tau_i) - \gamma(\tau_j)| = 0$ với mọi cặp $i \neq j$ thì ta gọi cây R là cây đầy đủ hoàn chỉnh loại 1. Trường hợp này xảy ra khi dạng lệch phải của R có đúng 2^i đỉnh ngoài chứa τ .

b. Nếu có tồn tại một cặp lá thứ i và lá thứ j khác nhau sao cho $|\gamma(\tau_i) - \gamma(\tau_j)| = 1$ thì R gọi là cây đầy đủ hoàn chỉnh loại 2. Trường hợp này xảy ra khi cây lệch phải R có các đỉnh ngoài $\neq 2^i$.

Định lý 17 : Với mọi $T \in \text{TREE}$, tồn tại cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh $R \in \text{TREE}$ sao cho:

a. $T \approx R$.

b. $AX|-T = R$.

Chứng minh tương tự như định lý 9.

6. Một số tính chất của cây lệch phải và cây hoàn chỉnh đầy đủ trên TREE

Định lý 18 : Giả sử $L \in \text{TREE}$ là cây lệch phải. Khi đó $\beta(L) = \min\{\beta(T) / T \in \text{TREE} \text{ và } T \approx L\}$

Chứng minh: tương tự như định lý 10.

Định lý 19: Giả sử $L \in \text{TREE}$ là cây lệch phải và $R \in \text{TREE}$ là cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh. Khi đó nếu $R \approx L$ thì $\beta(R) = \beta(L)$.

Chứng minh: Tương tự như định lý 11.

Định lý 20 : Giả sử $T_1, T_2 \in \text{TREE}$ nếu $T_1 \approx T_2$ tức là $f(T_1, l) = f(T_2, l)$ với mọi $l \in N$ thì tồn tại tập hữu hạn khác rỗng các số tự nhiên $M \subset N$ có tính chất:

1. $T_1 \approx T_2$ khi và chỉ khi $T_1 \approx_M T_2$.
2. $|M| = \min\{|H| / H \subseteq N \text{ và } T_1 \approx_H T_2\}$.
3. Tập M là tập mã của các thông tin cốt yếu trong cây T_1 và T_2 .

Chứng minh: tương tự như định lý 12.

Lưu ý: Tập M là tập các mã của các thông tin cốt yếu trong T_1 và T_2 được xác định như sau:

Nếu $L = \tau$, thì $M = \{k\}$, $k \in N$.

Nếu $L = [k_1, i_1] < \tau, [k_2, i_2] < \tau, \dots, [k_n, i_n] < \tau, \tau > \dots >$ thì $M = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$.

7. Thuật toán tìm cây tối ưu trên TREE

7.1. Tối ưu theo cấu trúc

Bài toán: Cho cây $T \in \text{TREE}$. Tìm cây tối ưu theo cấu trúc của T .

Thuật toán:

Bước 1: Tìm dạng lệch phải L của T .

Bước 2: Tìm dạng nhị nguyên hoàn chỉnh đầy đủ R của T bằng cách từ L áp dụng tiên đề ax_2 .

R chính là cây tối ưu theo cấu trúc cần tìm trên TREE theo định nghĩa 9 trong §3.

7.2. Tối ưu theo thời gian

Cây tối ưu theo thời gian cũng chính là cây tối ưu theo cấu trúc mà ta tìm được ở thuật toán trên.

Dưới đây ta đưa ra các hàm xử lý tiên đề ax_1 , ax_2 , ax_3 .

Ta dùng cấu trúc sau đây để lưu trữ cây.

```
typedef struct tree
```

```
{ int key;
```

```
  char info[10];
```

```
  struct tree *left;
```

```
  struct tree *right;
```

```
} TREE;
```

```
//Duyệt tiên đề  $ax_1$ 
```

```
int ax1(TREE *t)
```

```
{
```

```
  int i;
```

```
  TREE *tp[50];
```

```
  int bottom;
```

```
  tp[1] = t;
```

```
  //duyet tp[top]
```

```
  do{
```

```
    if((*tp[1]).left!=NULL)
```

```
      {tp[++bottom] = (*tp[1]).left;
```

```
        if((*tp[1]).key <= (*tp[bottom]).key)
```

```

        {
            (*tp[1]).left=(*tp[bottom]).left;
            return 1;
        }
    }

    if((*tp[1]).right!=NULL)
        tp[++bottom] = (*tp[1]).right;
        for(i=1;i<bottom;i++)
            tp[i]=tp[i+1];
        bottom--;
    } while(bottom > 0);

    return 0;
}

//Duyet tien de ax2
int ax2(TREE *t)
{
    int i;
    TREE *tp[100], *p1;
    int key;
    char info[50];
    int bottom;
    tp[1] = t;
    //duyet tp[1]
    do{
        if((*tp[1]).left!=NULL)
            {tp[++bottom] = (*tp[1]).left;

```

```

        if((*tp[1]).key > (*tp[bottom]).key)
        {
            key=(*tp[1]).key;
            (*tp[1]).key = (*tp[bottom]).key;
            (*tp[bottom]).key = key;
            strcpy(info,(*tp[1]).info);
            strcpy((*tp[1]).info, (*tp[bottom]).info);
            strcpy((*tp[bottom]).info, info);
            (*tp[1]).left=(*tp[bottom]).left;
            p1=(*tp[1]).right;
            (*tp[1]).right=tp[bottom];
            (*tp[bottom]).left=(*tp[bottom]).right;
            (*tp[bottom]).right=p1;
            return 1;
        }
    }

    if((*tp[1]).right!=NULL)
        tp[++bottom] = (*tp[1]).right;
    for(i=1;i<bottom;i++) tp[i]=tp[i+1];
    bottom--;
    } while(bottom > 0);

    return 0;
}

//Duyet tien de ax3
int ax3(TREE *t)

```

```
{  
    int i;  
    TREE *tp[50];  
    int bottom;  
    tp[1] = t;  
    //duyet tp[top]  
    do{  
        if((*tp[1]).left!=NULL)  
            tp[++bottom] = (*tp[1]).left;  
        if((*tp[1]).right!=NULL)  
        {  
            tp[++bottom]=(*tp[1]).right;  
            if((*tp[1]).key >=(*tp[bottom]).key  
            {(*tp[1]).right=(*tp[bottom]).right;  
            return 1;  
            }  
        }  
        for(i=1;i<bottom;i++)  
            tp[i]=tp[i+1];  
        bottom-=1;  
    } while(bottom > 0);  
    return 0;  
}
```

CHƯƠNG 5

NHẬP MÔN VỀ VĂN PHẠM VÀ NGÔN NGỮ HÌNH THỨC

§1. KHÁI NỆM CHUNG VỀ NGÔN NGỮ

Ngôn ngữ là phương tiện giao tiếp. Sự giao tiếp ở đây có thể là sự giao tiếp giữa người với nhau hoặc giữa người và máy, hoặc giữa máy và máy. Ngôn ngữ để con người có thể giao tiếp với nhau được gọi là ngôn ngữ tự nhiên, chẳng hạn như tiếng Anh, tiếng Nga, tiếng Việt là các ngôn ngữ tự nhiên. Như chúng ta thấy các quy tắc cú pháp của ngôn ngữ tự nhiên rất phong phú, đa dạng, phức tạp. Tuy nhiên những yêu cầu nghiêm ngặt về ngữ nghĩa trong các ngôn ngữ tự nhiên chưa cao, chẳng hạn như cùng một từ hoặc cùng một câu ta có thể hiểu chúng theo những nghĩa khác nhau tùy theo những ngữ cảnh cụ thể. Để có sự giao tiếp giữa người và máy, hoặc giữa máy và máy cần phải có một ngôn ngữ mà các quy tắc cú pháp chặt chẽ hơn, nói cách khác là với một từ hoặc một câu thì nghĩa của chúng phải là duy nhất. Những ngôn ngữ như thế được gọi là ngôn ngữ hình thức.

Để xây dựng một ngôn ngữ hình thức cần có một tập hợp hữu hạn khác trống các ký hiệu nào đó gọi là *bảng chữ cái*. Dãy hữu hạn các phân tử của bảng chữ cái được gọi là một từ hay xâu trên bảng chữ cái. Một tập hợp các từ trên bảng chữ cái được gọi là ngôn ngữ.

Trong chương này ta đề cập đến một số khái niệm và kết quả cơ bản liên quan đến ngôn ngữ hình thức.

1. Bảng chữ cái

Cho Σ là một tập hợp hữu hạn khác trống các phần tử nào đó mà ta gọi là một bảng chữ cái. Mỗi phần tử trong Σ được gọi là một ký tự.

Ví dụ: - Bộ chữ cái của ngôn ngữ tiếng Việt là 29 ký tự, cụ thể là:

$$\Sigma = \{a, b, \dots, y\}.$$

- Để có các xâu nhị phân ta thường dùng bảng chữ cái gồm hai ký hiệu 0, 1 tức là $\Sigma = \{0, 1\}$.

2. Xâu ký tự

Nói đến một xâu ký tự hay một từ trên bảng chữ cái Σ là nói đến một dãy hữu hạn các ký tự trên bảng Σ mà chúng được viết liên nhau.

Ví dụ: Beautiful là một xâu trên bảng chữ cái $\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}$.

Độ dài của xâu là số các ký tự có trong xâu đó.

010110 là một xâu trên bảng chữ cái $\Sigma = \{0, 1\}$ có độ dài là 6. Với ω là một xâu thì ta ký hiệu $|\omega|$ (hoặc $l(\omega)$) là độ dài của xâu đó. Người ta quy ước xâu rỗng là xâu có độ dài bằng 0. Xâu rỗng được ký hiệu bởi Λ .

3. Ngôn ngữ

Mỗi tập các từ trên các bảng chữ cái được gọi là ngôn ngữ trên bảng chữ cái đó. Cho bảng chữ cái Σ , khi đó tất cả các từ trên bảng chữ Σ kể cả các xâu rỗng được ký hiệu bởi Σ^* . Tập tất cả các từ trên bảng chữ cái Σ mà mọi từ trong nó đều có độ dài khác 0 được ký hiệu bởi Σ^+ . Từ đó ta có $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\Lambda\}$. Các tập $\emptyset$ và tập $\{\Lambda\}$ được xem là các ngôn ngữ trên bảng chữ cái bất kỳ.

Đối với một ngôn ngữ $L \subseteq \Sigma^*$, người ta thường quan tâm đến một số vấn đề sau:

- Với một xâu ω bất kỳ cho trước. Một vấn đề đặt ra là xâu ω có thuộc ngôn ngữ L cho trước hay không.

- Với xâu bất kỳ ω trong L , làm thế nào để sinh ra ω .

Đó là những vấn đề liên quan đến biểu diễn ngôn ngữ. Người ta thường biểu diễn ngôn ngữ nhờ các văn phạm hoặc các máy hình thức.

§2. VĂN PHẠM VÀ NGÔN NGỮ SINH BỞI VĂN PHẠM

1. Định nghĩa văn phạm

Ta có thể hình dung một văn phạm như một “thiết bị tự động” mà nó có khả năng sinh ra một tập hợp các từ trên một bảng chữ cái cho trước. Mỗi từ được sinh ra sau một số hữu hạn bước thực hiện các quy tắc của văn phạm.

Việc xác định một ngôn ngữ trên bảng chữ cái cho trước có thể được thực hiện bằng một trong các cách thức sau:

Cách 1: Đối với mỗi xâu thuộc ngôn ngữ đã cho ta có thể chọn một quy cách hoạt động của “thiết bị tự động” để sau một số hữu hạn bước làm việc nó dừng lại và sinh ra chính xâu đó.

Cách 2: “Thiết bị tự động” có khả năng lần lượt sinh ra tất cả các xâu trong ngôn ngữ đã cho.

Cách 3: Với một xâu w cho trước, “thiết bị tự động” có thể cho biết xâu đó có thuộc ngôn ngữ đã cho hay không.

Trong lý thuyết văn phạm người ta đã chứng minh được rằng ba cách thức trên là tương đương nhau, hay văn phạm làm việc theo các cách trên là tương đương nhau.

Vì vậy, ở đây ta quan tâm đến cách thứ nhất, tức là ta xét văn phạm như là một thiết bị tự động sinh ra các từ. Vì lẽ đó mà người ta còn gọi các “thiết bị tự động” đó là văn phạm sinh.

Việc sinh ra các từ có thể được thực hiện bằng nhiều cách khác nhau. Các từ có thể được sinh ra bởi các văn phạm, bởi các ô tô máy, bởi các máy hình thức như các máy Turing v.v... Ở đây ta đề cập đến cách của CHOMSKY đưa ra vào những năm 1956 - 1957.

Định nghĩa 1: Văn phạm G là một bộ sắp thứ tự gồm 4 thành phần $\langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, trong đó:

a) Σ, Δ là các tập hữu hạn, khác rỗng, không giao nhau. Tập Σ được gọi là từ điển cơ bản, mỗi phần tử của nó được gọi là ký hiệu cơ bản hay ký hiệu kết thúc (terminal). Tập Δ được gọi là từ điển hỗ trợ các phần tử của nó được gọi là các ký hiệu hỗ trợ hay còn gọi là ký hiệu không kết thúc (nonterminal). Đặt $V = \Sigma \cup \Delta$, V được gọi là từ điển đầy đủ.

b) Ký hiệu $I \in \Delta$ được gọi là ký hiệu ban đầu.

c) R là tập các quy tắc mà mỗi phần tử của nó có dạng $\alpha \rightarrow \beta$, ở đây α, β là các từ trên từ điển đầy đủ $V = \Sigma \cup \Delta$, ký hiệu $\rightarrow \in V$.

Định nghĩa 2: Cho văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ và một quy tắc $r = \alpha \rightarrow \beta \in R$. Ký hiệu $\alpha \in V = \Sigma \cup \Delta$. Một xâu có dạng $\xi_1 \alpha \xi_2$ được gọi là một vị trí của α trong xâu $\omega = \xi_1 \alpha \xi_2$. Ở đây ω là một xâu trên từ điển đầy đủ $V = \Sigma \cup \Delta$. Khi đó ta nói xâu $\eta = \xi_1 \beta \xi_2$ là nhận được từ $\omega = \xi_1 \alpha \xi_2$ nhờ việc áp dụng quy tắc $r = \alpha \rightarrow \beta$ vào vị trí $\xi_1 \alpha \xi_2$ của α trong xâu $\omega = \xi_1 \alpha \xi_2$. Xâu η gọi là xâu dẫn được trực tiếp từ xâu ω trong văn phạm G và được ký hiệu là $\omega \vdash_G \eta$ hay đơn giản hơn là $\omega \vdash \eta$.

Định nghĩa 3: Dãy các xâu $D = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k)$ được gọi là một dẫn xuất của xâu ω_k từ ω_0 trong văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$. Nếu $\omega_{i-1} \vdash \omega_i$, với $i = 1, 2, \dots, k$. Số k được gọi là độ dài của dẫn xuất D .

Dẫn xuất của ω_k từ ω_0 trong văn phạm D được ký hiệu là $\omega_0 \vdash_G \omega_k$ hay đơn giản hơn là $\omega_0 \vdash \omega_k$. Nếu ω_i nhận được từ ω_{i-1} bằng cách áp dụng quy tắc $r = \alpha \rightarrow \beta$ thì ta nói quy tắc r được áp dụng ở bước thứ i .

2. Ngôn ngữ của văn phạm:

Định nghĩa 4: Cho văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ và $D = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k)$ là một dẫn xuất của xâu ω_k từ ω_0 trong văn phạm G . Nếu $\omega_0 = I$ và $\omega_k \in \Sigma^*$ (tập tất cả các xâu trên Σ) thì ω_k được gọi là một xâu (từ) sinh bởi văn phạm G và khi đó dẫn xuất $D = (I, \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k = P)$ với $P \in \Sigma^*$ được gọi là dẫn xuất đầy đủ trong G .

Ngôn ngữ sinh ra bởi văn phạm G được ký hiệu qua $L(G)$ và được định nghĩa là:

$$L(G) = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^* \text{ và } I \vdash_G \omega\}.$$

Ví dụ: Cho $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ với $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta = \{I\}$, $R = \{I \rightarrow aIb, I \rightarrow ab\}$.

Khi đó thấy rằng: $L(G) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.

Thật vậy dẫn xuất đầy đủ của $a^n b^n$ là:

$$D = \{I, aIb, a^2Ib^2, \dots, a^{n-1}Ib^{n-1}, a^n b^n\}. \text{ Hay } I \vdash a^n b^n.$$

Định nghĩa 5: Hai văn phạm G và G' được gọi là tương đương nhau nếu $L(G) = L(G')$.

Ví dụ: Cho văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ với $\Sigma = \{a, b\}$,

$$\Delta = \{I\}, R = \{I \rightarrow aIb, I \rightarrow \wedge\}.$$

$$G' = \langle \Sigma', \Delta', I', R' \rangle \text{ với } \Sigma' = \{a, b\},$$

$$\Delta' = \{I\}, R' = \{I \rightarrow aIb, I \rightarrow ab\}.$$

Để thấy rằng $L(G') = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, do đó G và G' là hai văn phạm tương đương với nhau, sai khác từ $\wedge$.

§3. PHÂN LOẠI VĂN PHẠM CỦA CHOMSKY

CHOMSKY phân loại văn phạm thành bốn nhóm trên cơ sở định nghĩa văn phạm nói chung:

Nhóm 0: Văn phạm ngữ cấu,

Nhóm 1: Văn phạm cảm ngữ cảnh,

Nhóm 2: Văn phạm phi ngữ cảnh,

Nhóm 3: Văn phạm chính quy.

Dưới đây ta định nghĩa văn phạm từ nhóm 0 đến nhóm 3 như sau:

Định nghĩa 6: Văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ được gọi là văn phạm ngữ cấu (VPNC) nếu mọi quy tắc $r \in R$ đều có dạng $r = \alpha \rightarrow \beta$, trong đó $\alpha \in V^+$, $\beta \in V^*$. Quy tắc của VPNC gọi là quy tắc ngữ cấu. Ngôn ngữ do văn phạm ngữ cấu sinh ra được gọi là ngôn ngữ ngữ cấu (NNNC).

Định nghĩa 7: Văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ được gọi là văn phạm cảm ngữ cảnh (VPCNC) nếu với mọi quy tắc $r \in R$ đều có dạng $r = \alpha \rightarrow \beta$, ở đây $\alpha \in V^+$, $\beta \in V^*$ và $|\alpha| \leq |\beta|$.

Ví dụ: Cho văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ với: $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta = \{I\}$,

$$R = \{I \rightarrow aIb, I \rightarrow bIa, I \rightarrow II, I \rightarrow ab\}$$

là một văn phạm cảm ngữ cảnh.

Mỗi quy tắc của văn phạm cảm ngữ cảnh gọi là quy tắc cảm ngữ cảnh. Ngôn ngữ do văn phạm cảm ngữ cảnh sinh ra gọi là ngôn ngữ cảm ngữ cảnh (NNCNC).

Ví dụ: Cho văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Delta = \{I, A, B\}$, $I \in \Delta$ và $R = \{I \rightarrow abc, I \rightarrow aAbc, Ab \rightarrow bA, Ac \rightarrow Bbc, bB \rightarrow Bb, aB \rightarrow aaA, aB \rightarrow aa\}$. Khi đó G là văn phạm cảm ngữ cảnh.

Định nghĩa 8: Văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ được gọi là văn phạm phi ngữ cảnh nếu mọi quy tắc $r \in R$ đều có dạng $r = A \rightarrow \theta$, ở đây ký hiệu $A \in \Delta$ và $\theta \in V^* = (\Sigma \cup \Delta)^*$.

Mỗi quy tắc của văn phạm phi ngữ cảnh gọi là quy tắc phi ngữ cảnh. Ngôn ngữ do văn phạm phi ngữ cảnh sinh ra gọi là ngôn ngữ phi ngữ cảnh (NNPNC).

Cho xâu $\omega = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$. Khi đó ảnh gương của nó là xâu $\hat{\omega} = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$. Ảnh gương của ngôn ngữ L sẽ là tập $\{\hat{\omega} \mid \omega \in L\}$.

Ảnh gương của ký tự a là $a = \hat{a}$ còn ảnh gương của từ rỗng ϵ là chính nó.

Xét văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ với $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta = \{I\}$,

$$R = \{I \rightarrow \epsilon, I \rightarrow aIa, I \rightarrow bIb\}.$$

G là văn phạm phi ngữ cảnh và nó sinh ra ngôn ngữ phi ngữ cảnh $L(G) = \{\omega \hat{\omega} \mid \omega \in V^*\}$.

Chẳng hạn với xâu $\omega = abab$, khi đó ta có $\hat{\omega} = baba$ và xâu $\omega \hat{\omega} = ababbaba$ là $D = (I, aIa, bIb, abaIaba, ababbaba = \omega \hat{\omega})$

Định nghĩa 9: Văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ gọi là văn phạm chính quy nếu tập R gồm các quy tắc có dạng $A \rightarrow aB$, $A \rightarrow a$ hoặc $A \rightarrow Ba$, $A \rightarrow a$, ở đây $A, B \in \Delta$, $a \in \Sigma$.

Quy tắc của văn phạm chính quy gọi là quy tắc chính quy. Ngôn ngữ do văn phạm chính quy sinh ra được gọi là ngôn ngữ chính quy (NNCQ).

Ví dụ: Giả sử $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, với $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Delta = \{I\}$,

$$R = \{I \rightarrow aI, I \rightarrow bI, I \rightarrow cI, I \rightarrow a, I \rightarrow b, I \rightarrow c\}.$$

Khi đó G là một văn phạm chính quy. Để thấy rằng xâu $a^m b^n c^k \in L(G)$ vì dẫn xuất đầy đủ của $\omega = a^m b^n c^k$ là $D = (I, aI, a^2I, \dots, a^m I, a^m bI, a^m b^2I, \dots, a^m b^n I, a^m b^n cI, a^m b^n c^2I, \dots, a^m b^n c^{k-1}I, a^m b^n c^k = \omega)$.

Nhận xét: Từ định nghĩa ta thấy khái niệm văn phạm ngữ cấu là khái niệm tổng quát nhất, nghĩa là lớp các văn phạm 0 là lớp rộng nhất nó chứa đựng văn phạm cảm ngữ cảnh, lớp văn phạm cảm ngữ cảnh chứa lớp các văn phạm phi ngữ cảnh. Lớp các văn phạm phi ngữ cảnh chứa lớp văn phạm chính quy. Vì vậy đối với lớp các ngôn ngữ do chúng sinh ra thoả mãn bao hàm thức:

$$\text{NNCQ} \subseteq \text{NNPNC} \subseteq \text{NNCNC} \subseteq \text{NNNC}$$

Ta cũng thấy về mặt cấu trúc ngữ pháp thì các quy tắc sinh của các văn phạm phi ngữ cảnh và của văn phạm chính quy là đơn giản hơn cả và chúng có nhiều ứng dụng trong việc thiết kế các ngôn ngữ lập trình và trong nghiên cứu về chương trình dịch, v.v... Vì vậy trong phần tiếp theo chúng ta dành thêm sự quan tâm tới hai lớp văn phạm đó nhưng trước hết hãy xét một số ví dụ về văn phạm.

§4. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ VĂN PHẠM

Ví dụ 1: Cho văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, trong đó $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là bảng ký hiệu cơ bản, $\Delta = \{I, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\}$ là bảng ký hiệu hỗ trợ. $I \in \Delta$ là ký hiệu ban đầu. Tập quy tắc

$$R = \{I \rightarrow a_1 A_1, A_1 \rightarrow a_2 A_2, A_2 \rightarrow a_3 A_3, \dots, A_{n-2} \rightarrow a_{n-1} A_{n-1}, A_{n-1} \rightarrow a_n\} \quad (n \geq 2).$$

Theo định nghĩa đây là văn phạm chính quy. Văn phạm này sinh ra ngôn ngữ chính quy $L(G) = \{\omega = a_1 a_2 \dots a_n\}$.

Thật vậy với từ ω ta có dẫn xuất đầy đủ trong G là :

$$D = (I, a_1 A_1, a_1 a_2 A_2, \dots, a_1 a_2 \dots a_{n-1} A_{n-1}, a_1 a_2 \dots a_n).$$

Ví dụ 2: Cho văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, trong đó $\Sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\Delta = \{I\}$, $R = \{I \rightarrow aI, I \rightarrow a \mid a \in \Sigma\}$. Đây cũng là văn phạm chính quy và nó sinh ra ngôn ngữ chính quy sau đây:

$$L(G) = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^+\}, \text{ tức là } L(G) = \Sigma^+$$

Chẳng hạn với $\omega = x_{i1} x_{i2} \dots x_{ik} \in \Sigma^+$. Ta thấy ω do G sinh ra vì nó có dẫn xuất đầy đủ sau đây:

$$D = (I, x_{i1}I, x_{i2}I, x_{i1} x_{i2} \dots x_{ik-1}I, x_{i1}x_{i2} \dots x_{ik})$$

Ví dụ 3: Ngôn ngữ ϕ sinh ra bởi văn phạm chính quy sau đây:

$$G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle, \text{ trong đó } \Sigma = \{a\}, \Delta = \{I\}, R = \{I \rightarrow aI\}.$$

Thật vậy G làm việc không bao giờ dừng, tức là không có xâu $\omega \in \Sigma^*$ và $\omega \neq \epsilon$ mà G sinh ra. Hay G sinh ra ngôn ngữ ϕ .

Ví dụ 4: Văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, với $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta = \{I, B\}$, $R = \{I \rightarrow aI, I \rightarrow aB, B \rightarrow bB, B \rightarrow b\}$ cũng là văn phạm chính quy và $L(G) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}$ là ngôn ngữ chính quy do G sinh ra.

Thật vậy với $\omega = a^n b^m$ ta có dẫn xuất đầy đủ trong G là

$$D = (I, aI, a^2I, \dots, a^{n-1}I, a^nB, a^n bB, \dots, a^n b^{m-1}B, a^n b^m).$$

Ví dụ 5: Ngôn ngữ $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ sinh ra bởi văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta = \{I\}$, $R = \{I \rightarrow aIb, I \rightarrow ab\}$.

Thật vậy từ $a^n b^n$ với $n \geq 1$ có dẫn xuất đầy đủ trong G là

$$D = (I, aIb, a^2Ib^2, \dots, a^{n-1}Ib^{n-1}, a^n b^n).$$

Ví dụ 6: Cho ngôn ngữ $\{a^n b^n a^m \mid n, m \geq 1\}$. Ta xét văn phạm

$$G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle \text{ là phi ngữ cảnh với } \Sigma = \{a, b\}, \Delta = \{I, A\}$$

$$R = \{I \rightarrow Ia, A \rightarrow aAb, A \rightarrow ab, I \rightarrow Aa\}$$

Khi đó ta thấy xâu $a^n b^n a^m$ ($n, m \geq 1$) sẽ có dẫn xuất đầy đủ trong G là

$$D = (I, Ia, Ia^2, \dots, Ia^{m-1}, Aa^m, aAb a^m, a^2Ab^2 a^m, \dots, a^{n-1}Ab^{n-1} a^m, a^n b^n a^m)$$

Nhận xét: Nếu trong phạm vi G ta thay tập quy tắc R bởi

$R = \{I \rightarrow aI, A \rightarrow bAa, A \rightarrow ba, I \rightarrow aA\}$ thì ta nhận được văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ là phi ngữ cảnh sinh ra ngôn ngữ $\{a^m b^n a^n \mid n, m \geq 1\}$.

Khẳng định là đúng vì

$$D = (I, aI, a^2I, \dots, a^{m-1}I, a^m A, a^m b A a^2, \dots, a^m b^{n-1} A a^{n-1}, a^m b^n a^n)$$

là một dẫn xuất đầy đủ của $a^m b^n a^n$ trong G .

Ví dụ 7: Ngôn ngữ L trên từ điển $\{a, b\}$ gồm tất cả các từ khác Λ và mỗi từ trong L chứa số ký tự a bằng số ký tự b . Khi đó L là một ngôn ngữ phi ngữ cảnh. Thật vậy, xét văn phạm

$$G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle, \text{ trong đó } \Sigma = \{a, b\}, \Delta = \{I\},$$

$$R = \{I \rightarrow II, I \rightarrow aIb, I \rightarrow bIa, I \rightarrow ab, I \rightarrow ba\}.$$

Rõ ràng văn phạm G là phi ngữ cảnh và nó sinh ra ngôn ngữ L .

Chẳng hạn với từ $a^m b^m$ ta có dẫn xuất đầy đủ sau :

$$D = (I, aIb, a^2Ib^2, \dots, a^{m-1}Ib^{m-1}, a^m b^m)$$

Hoặc với từ $\omega = ababaabb$ có dẫn xuất đầy đủ là

$$D = (I, II, aIbI, ababI, ababaIb, ababaabb).$$

Ví dụ 8: Cho $\omega = a_{i1}a_{i2}\dots a_{ik}$, khi đó ta ký hiệu $\hat{\omega} = a_{ik}\dots a_{i2}a_{i1}$ là ảnh gương của từ ω . Khi đó ta có thể kiểm tra được ngôn ngữ $L = \{\omega \hat{\omega} \mid \omega \in \Sigma^+\}$ được sinh ra bởi văn phạm phi ngữ cảnh:

$$G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle, \text{ với } \Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \Delta = \{I\}$$

$$R = \{I \rightarrow aIa, I \rightarrow aa\}, a \in \Sigma.$$

Ví dụ 9: Cho tập $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_k, b\}$.

Khi đó ngôn ngữ $L = \{\omega b \omega \mid \omega \in \Sigma^+\}$ được sinh ra bởi văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, với Σ như trên, $\Delta = \{I, A_1, A_2, \dots, A_k\}$,

$$R = \{I \rightarrow IA_1a_1, I \rightarrow b, a_iA_j \rightarrow A_ja_i, bA_i \rightarrow a_ib\}, i, j = 1 \dots k.$$

Để minh họa ta xét trường hợp đơn giản khi $k = 2$. Ta có

$$\Sigma = \{a_1, a_2, b\},$$

$$\Delta = \{I, A_1, A_2\}, R = \{I \rightarrow IA_1a_1, I \rightarrow IA_2a_2, I \rightarrow b, a_1A_1 \rightarrow A_1a_1, a_1A_2 \rightarrow A_2a_1, a_2A_1 \rightarrow A_1a_2, a_2A_2 \rightarrow A_2a_2, bA_1 \rightarrow a_1b, bA_2 \rightarrow a_2b\}.$$

Giả sử với $\omega = a_2a_1$ và $P = \omega b\omega$, khi đó ta có dẫn xuất đầy đủ trong G

$$D = (I, IA_1a_1, IA_2a_2A_1a_1, bA_2a_2A_1a_1, a_2ba_2A_1a_1, a_2bA_1a_2a_1, a_2a_1ba_2a_1 = \omega b\omega).$$

Ví dụ 10: Cho văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, ở đây $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta = \{I, A, B, C, D\}$, $R = \{I \rightarrow ABC, AB \rightarrow iADi, Di \rightarrow jDi, DiC \rightarrow BiC, iB \rightarrow Bi, AB \rightarrow \wedge, C \rightarrow \wedge\}$ với $i, j \in \{a, b\}$. Ta sẽ chỉ ra rằng $L(G) = \{\omega\omega / \omega \in \Sigma^*\}$.

Thật vậy $\wedge = \wedge\wedge \in L(G)$, vì $\wedge\wedge$ đã có dẫn xuất đầy đủ là

$$D = (I, ABC, \wedge C, \wedge\wedge). \text{ Vậy } \omega\omega \in L(G) \text{ với } \omega = \wedge$$

Trường hợp khi $\omega = a$. Ta chỉ ra $\omega\omega = aa \in L(G)$.

Thật vậy, $D = (I, ABC, aADaC, aABaC, a^{\wedge}aC, a^{\wedge}a^{\wedge} = aa = \omega\omega)$ là dẫn xuất đầy đủ của $\omega\omega = aa$ trong G .

Trường hợp $\omega = b$, khi đó $\omega\omega = bb$ có dẫn xuất đầy đủ trong G là:

$$D = (I, ABC, bADbC, bABbc, b^{\wedge}bC, b^{\wedge}b^{\wedge} = bb).$$

Một cách tổng quát nếu có $\omega \in \Sigma^*$ thì sẽ có một dẫn xuất đầy đủ cho $\omega\omega$ là

$$D = (I, ABC, \dots, \omega AB\omega C, \omega^{\wedge}\omega C, \omega^{\wedge}\omega^{\wedge} = \omega\omega).$$

Ví dụ 11: Xây dựng một văn phạm sinh ra tập các số chính phương $\{n^2 | n = 1, 2, \dots\}$.

Vì $n = |^n$ nên văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, sinh ra tập $\{n^2 | n = 1, 2, \dots\}$ được cho dưới dạng sau:

$$\Sigma = \{|\}, \Delta = \{I, A, B, C, D, E, F\},$$

$$R = \{ I \rightarrow AB B D F \quad (1)$$

$$BD \rightarrow DCB \quad (2)$$

$$BC \rightarrow CB \quad (3)$$

$$AD \rightarrow AAE \quad (4)$$

$$EC \rightarrow AE \quad (5)$$

$$EB \rightarrow BE \quad (6)$$

$$EF \rightarrow BB D F \quad (7)$$

$$DF \rightarrow | \quad (8)$$

$$B \rightarrow | \quad (9)$$

$$A \rightarrow | \quad (10)$$

$$I \rightarrow | \quad (11)$$

}

Ta chỉ ra $L(G) = \{n^2 \mid n = 1, 2, \dots\}$. Khi $n = 1 : 1^2 = 1, \omega = |$.

Dẫn xuất đầy đủ của ω là $D = (I, |)$.

$$\text{với } n = 2 : 2^2 = 4, \omega = |^4$$

Dẫn xuất đầy đủ của ω là :

$$D = (I, ABBDF, ABB|, AB| |, A| | |, | | | |)$$

$$\text{với } n = 3 : 3^2 = 9, \omega = |^9$$

Dẫn xuất đầy đủ của ω là :

$$D = (I, ABBDF, ABDCBF, ADCBCBF, AAECBCBF, AAECBBBF,$$

$$AAECBBF, AAAAEBBF, A^4BEBF, A^4BBEF, A^4BBBBDF,$$

$$A^4B^4|, A^4|^4|, |^4|^4| = |^9).$$

$$\text{Một cách tổng quát với } \omega = \underbrace{| \dots |}_{n^2 \text{ lần}} = |^{n^2}.$$

Ta có dẫn xuất đầy đủ cho ω là:

$$D = (I, ABBDF, A^{(n-1)^2} B^{2(n-1)} DF, A^{(n-1)^2} B^{2(n-1)} |, A^{(n-1)^2} |^{2(n-1)} |, |^{(n-1)^2} |^{2(n-1)} | = |^{(n-1)^2 + 2(n-1) + 1} = |^{n^2}).$$

§5. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA VĂN PHẠM

Định nghĩa 10: (Đồng lực của dẫn xuất)

Cho văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ và hai dãy dẫn xuất $D = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k)$ và $D' = (\omega'_0, \omega'_1, \dots, \omega'_m)$ trong văn phạm G . Hai dẫn xuất trên được gọi là đồng lực nếu $\omega_0 = \omega'_0$ và $\omega_k = \omega'_m$.

Định nghĩa 11: (Dẫn xuất không lặp)

Cho văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ và dẫn xuất $D = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$. Dẫn xuất D được gọi là dẫn xuất không lặp nếu không tồn tại cặp ω_i, ω_j ($i \neq j$) mà $\omega_i = \omega_j$.

Định lý 1: Đối với một dẫn xuất bất kỳ trong văn phạm tùy ý, tồn tại một dẫn xuất không lặp đồng lực với nó.

Chứng minh: Giả sử $D = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_k)$. Rõ ràng đây là một dẫn xuất đồng lực với chính nó. Xét các trường hợp sau:

a) Trong D không có cặp ω_i, ω_j với $i \neq j$ mà $\omega_i = \omega_j$. Khi đó D chính là dẫn xuất không lặp đồng lực với nó.

b) Trong D có một cặp $\omega_i = \omega_j$ và $i \neq j$. Khi đó ta xét dẫn xuất :

$D' = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_j, \omega_{j+1}, \dots, \omega_k)$. Rõ ràng đây là một dẫn xuất đồng lực với D vì D' nhận được từ D bằng cách bỏ đi $\omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_{j-1}$ còn ω_0, ω_k vẫn giữ nguyên.

Nếu trong D' vẫn còn cặp $\omega_h = \omega_p$ ($h \neq p$) thì lại lặp lại quá trình trên cho tới khi trong D' gồm các xâu khác nhau từng đôi một. Lúc đó ta được một dẫn xuất không lặp với dẫn xuất D .

Định lý 2: Đối với văn phạm G bất kỳ bao giờ cũng xây dựng được một văn phạm G' tương đương với G , tức là $L(G) = L(G')$.

Chứng minh: Giả sử $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ là một văn phạm nào đó.

Với mỗi $a \in \Sigma$ ta lập ký hiệu mới $\bar{a} \notin \Sigma \cup \Delta$.

Đặt $\Sigma_1 = \{\bar{a} \mid a \in \Sigma\}$ và $R_1 = \{\bar{a} \rightarrow a \mid a \in \Sigma\}$

Còn R_2 là tập các quy tắc nhận được từ R bằng cách thay thế các ký hiệu cơ bản a có trong quy tắc của R bởi các ký hiệu mới tương ứng $\bar{a} \in \Sigma \cup \Delta$.

Khi đó ta xây dựng văn phạm $G' = \langle \Sigma', \Delta', I', R' \rangle$ như sau :

$\Sigma' = \Sigma, \Delta' = \Sigma_1 \cup \Delta, I' = I, R' = R_1 \cup R_2$. Khi đó ta có $L(G) = L(G')$.

Thật vậy, trước hết chứng minh bao hàm thức $L(G) \subseteq L(G')$.

Xét bất kỳ $P \in L(G)$. Khi đó tồn tại dẫn xuất đầy đủ

$$D = (I, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k = P) \text{ trong } G.$$

Nếu trong D ta thay đổi mỗi quy tắc thuộc R mà nó được áp dụng bởi quy tắc tương ứng trong R_2 thì ta được $D' = (I, \omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_k = P')$ là một dẫn xuất trong G' . Tiếp tục ta áp dụng các quy tắc trong R_1 của G' đối với P' ta có được dẫn xuất $D'' = (I, \omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_k = P', \dots, \omega_{k+m}' = P)$. Nhận thấy D'' là một dẫn xuất đầy đủ trong G' , do đó $P \in L(G')$. Vì P là tùy ý trong $L(G)$ suy ra $L(G) \subseteq L(G')$.

Ta cần chứng minh bao hàm thức ngược lại $L(G') \subseteq L(G)$. Giả sử $P \in L(G')$. Khi đó tồn tại trong G' một dẫn xuất đầy đủ

$$D' = (I, \omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_k = P), \text{ ở đây } P \in \Sigma^*.$$

Trong D' ta thay mọi ký hiệu $\bar{a} \in \Sigma_1$ bởi $a \in \Sigma$. Khi đó sẽ nhận được $D = (I, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k = P)$ là dẫn xuất của P trong G , tức là $P \in L(G)$. Từ đó suy ra $L(G) \subseteq L(G')$. Vậy ta đã chứng minh được $L(G) = L(G')$, có nghĩa là G tương đương với G' .

Giả sử Σ là bảng chữ cái nào đó. Như đã định nghĩa, một ngôn ngữ trên bảng chữ cái Σ là một tập nào đó các xâu trên Σ , tức là một tập con bất kỳ của Σ^* là một ngôn ngữ trên Σ .

Trên lớp các ngôn ngữ ta có thể định nghĩa phép hợp các ngôn ngữ và phép giao các ngôn ngữ tương tự như trong lý thuyết tập hợp. Nghĩa là nếu L_1, L_2 là các ngôn ngữ trên Σ thì phép hợp của chúng được ký hiệu là $L_1 \cup L_2$ và được xác định bởi :

$$L_1 \cup L_2 = \{\omega \mid \omega \in L_1 \text{ hoặc } \omega \in L_2\}$$

và giao của chúng được ký hiệu là $L_1 \cap L_2$ và được xác định bởi :

$$L_1 \cap L_2 = \{\omega \mid \omega \in L_1 \text{ và } \omega \in L_2\}$$

Bây giờ ta định nghĩa phép nhân ngôn ngữ L_1 với ngôn ngữ L_2 là ngôn ngữ, được ký hiệu bởi $L_1.L_2$ và được định nghĩa như sau:

$L_1.L_2 = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L_1 \text{ và } \beta \in L_2\}$ trong đó $\alpha\beta$ là kết quả nối ghép của hai xâu α và β .

Chú ý: Nói chung $L_1.L_2 \neq L_2.L_1$, hay phép nhân không có tính giao hoán nhưng nó có tính kết hợp, tức là $L_1.(L_2.L_3) = (L_1.L_2).L_3$ và có tính phân bố với phép hợp và phép giao hay

$$L_1.(L_2 \cup L_3) = L_1.L_2 \cup L_1.L_3$$

$$(L_1 \cup L_2).L_3 = L_1.L_3 \cup L_2.L_3$$

$$L_1.(L_2 \cap L_3) = (L_1.L_2) \cap (L_1.L_3)$$

$$(L_1 \cap L_2).L_3 = (L_1.L_3) \cap (L_2.L_3).$$

Định nghĩa 12. (Tính đóng đối với phép $\cup, \cap, .$).

Giả sử L_1, L_2 là hai ngôn ngữ bất kỳ được sinh bởi văn phạm và θ là một phép tính nào đó trên lớp các ngôn ngữ. Nếu thực hiện các phép tính θ đối với hai ngôn ngữ L_1, L_2 ta thu được một ngôn ngữ mới, ký hiệu là $L_1 \theta L_2$ mà ngôn ngữ mới này cũng được sinh ra bởi văn phạm nào đó thì ta nói phép tính θ là đóng đối với lớp ngôn ngữ do văn phạm sinh ra.

Định lý 3: Lớp ngôn ngữ sinh ra bởi văn phạm là đóng đối với các phép hợp, phép giao và phép nhân ngôn ngữ.

Chứng minh: Giả sử rằng L_1, L_2 là các ngôn ngữ được sinh ra bởi văn phạm G_1, G_2 , hay $L_1 = L(G_1)$ và $L_2 = L(G_2)$. Ta cần chỉ ra là có các văn phạm G_3, G_4, G_5 sao cho:

$$L(G_3) = L_1 \cup L_2, L(G_4) = L_1 \cap L_2, L(G_5) = L_1.L_2$$

$$\text{Giả sử } G_1 = \langle \Sigma_1, \Delta_1, I_1, R_1 \rangle \text{ và } G_2 = \langle \Sigma_2, \Delta_2, I_2, R_2 \rangle$$

a) Ta xây dựng văn phạm G_3 sinh ra ngôn ngữ $L_1 \cup L_2$ như sau:

$$G_3 = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle,$$

$$\text{ở đây } \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{I\},$$

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \{I \rightarrow I_1, I \rightarrow I_2\}.$$

Ta chứng minh $L(G_3) = L_1 \cup L_2$.

Thật vậy, trước hết chứng minh bao hàm thức $L(G_3) \subseteq L_1 \cup L_2$.
Giả sử $P \in L(G_3)$. Khi đó tồn tại dẫn xuất đầy đủ $D = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$,

ở đây $\omega_0 = I$, $\omega_k = P \in \Sigma^* = (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$. Từ cách xây dựng văn phạm G_3 ta suy ra $\omega_1 = I_1$ hoặc $\omega_1 = I_2$.

Giả sử $\omega_1 = I_1$. Khi đó dẫn xuất $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k = P)$ có dạng $(I_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k = P)$ là dẫn xuất đầy đủ của P trong văn phạm $G_1 = \langle \Sigma_1, \Delta_1, I_1, R_1 \rangle$, hay $P \in L_1 = L(G_1)$. Vậy $P \in L_1 \cup L_2$, tức là $L(G_3) \subseteq L_1 \cup L_2$.

Trường hợp khi $\omega_1 = I_2$ thì $P \in L_2$ và do đó $P \in L_1 \cup L_2$, ta cũng có $L(G_3) \subseteq L_1 \cup L_2$.

Bây giờ ta chứng minh bao hàm thức ngược lại, $L_1 \cup L_2 \subseteq L(G_3)$.

Thật vậy giả sử $P \in L_1 \cup L_2$. Khi đó $P \in L_1$ hoặc $P \in L_2$.

Chẳng hạn $P \in L_1 = L(G_1)$. Theo định nghĩa ta có dẫn xuất đầy đủ $D = (I_1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k = P)$ với $P \in \Sigma_1^*$. Khi đó dẫn xuất $D' = (I, I_1, \omega_1, \dots, \omega_k = P)$ là dẫn xuất đầy đủ trong văn phạm G_3 vì $P \in \Sigma_1^*$ thì $P \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$. Vậy $L_1 \cup L_2 \subseteq L(G_3)$ hay $L(G_3) = L_1 \cup L_2$ tức là lớp ngôn ngữ sinh ra bởi văn phạm là đóng đối với phép $\cup$.

b) Từ các văn phạm G_1, G_2 ta xây dựng văn phạm G_5 sinh ra lớp ngôn ngữ L_1, L_2 như sau : $G_5 = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$,

ở đây $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{I\}$,

$R = R_1 \cup R_2 \cup \{I \rightarrow I_1 I_2\}$.

Ta sẽ chứng minh $L(G_5) = L_1.L_2$.

Trước hết ta chỉ ra bao hàm thức $L(G_5) \subseteq L_1.L_2$.

Thật vậy, xét bất kỳ $P \in L(G_5)$. Khi đó trong G_5 tồn tại dẫn xuất đầy đủ $D = (I, I_1, I_2, \omega_1 I_2, \omega_2 I_2, \omega_3 I_2, \dots, P_1 I_2, P_1 \omega_1', P_1 \omega_2', \dots, P_1 P_2 = P)$.

Ở đây, đoạn từ I đến $P_1 I_2$ chỉ áp dụng các quy tắc trong R_1 nên $P_1 \in L(G_1) = L_1$. Còn đoạn từ $P_1 \omega_1'$ đến $P_1 P_2 = P$ có được là do áp dụng các quy tắc trong R_2 nên $P_2 \in L(G_2) = L_2$. Vậy $P = P_1 P_2 \in L_1.L_2$.

Vậy bao hàm thức $L(G_5) \subseteq L_1.L_2$ đã được chứng minh.

Tiếp theo ta chứng minh bao hàm thức ngược lại $L_1.L_2 \subseteq L(G_5)$.

Giả sử $P \in L_1.L_2$, do đó tồn tại $P_1 \in L_1, P_2 \in L_2$ sao cho $P = P_1.P_2$. Vì $P_1 \in L_1 = L(G_1)$ nên tồn tại dẫn xuất đầy đủ

$D_1 = (I_1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k = P_1)$ trong G_1 , ở đây $P_1 \in \Sigma_1^*$. Do $P_2 \in L_2 = L(G_2)$ nên cũng tồn tại dẫn xuất đầy đủ $D_2 = (I_2, \omega_1', \dots, \omega_m' = P_2)$ với $P_2 \in \Sigma_2^*$.

Lập dẫn xuất $D = (I, I_1I_2, \omega_1I_2, \omega_2I_2, \dots, P_1I_2, P_1\omega_1', P_1\omega_2', \dots, P_1P_2 = P)$. Đây là dẫn xuất đầy đủ trong văn phạm G_5 và $P = P_1P_2 \in \Sigma^* = (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$ hay $P \in L(G_5)$. Tóm lại ta có $L_1.L_2 \subseteq L(G_5)$. Kết hợp với khẳng định đã có ở trên ta có $L_1.L_2 = L(G_1).L(G_2) = L(G_5)$.

Vậy lớp ngôn ngữ do văn phạm sinh ra đóng đối với phép toán nhân $(.)$.

c) Từ các văn phạm G_1, G_2 ta xây dựng văn phạm G_4 sao cho $L(G_4) = L_1 \cap L_2$ như sau: Ta xây dựng $G_4 = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ với $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$,

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{I\},$$

$$R = R'_1 \cup R'_2 \cup \{I \rightarrow I_1I_2\} \cup R''_1 \cup R''_2$$

$$\text{với } \Gamma_1 = \{\bar{a} \mid a \in \Sigma_1\} \text{ và } \Gamma_2 = \{\bar{b} \mid b \in \Sigma_2\}$$

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

R'_1 là tập các quy tắc nhận được từ tập quy tắc R_1 bằng cách thay các ký hiệu cơ bản trong Σ_1 mà chúng có mặt trong quy tắc của R_1 bởi ký hiệu mới đối ngẫu với nó.

R'_2 là tập các quy tắc nhận được từ tập quy tắc R_2 bằng cách thay các ký hiệu cơ bản trong Σ_2 mà chúng có mặt trong quy tắc của R_2 bởi ký hiệu mới đối ngẫu với nó. Còn các tập quy tắc R'_1, R'_2 được xác định như sau:

$$R'_1 = \{\bar{a}\bar{b} \rightarrow \bar{b}\bar{a} \mid a \in \Sigma_1, b \in \Sigma_2\}$$

$$R'_2 = \{\bar{a}\bar{a} \rightarrow a \mid a \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2\}$$

Kiểm tra lại ta thấy: $L(G_4) = L(G_1) \cap L(G_2) = L_1 \cap L_2$.

Định lý được chứng minh.

Ta minh họa định lý trên bằng ví dụ sau đây:

Ví dụ: Cho văn phạm $G_1 = \langle \Sigma_1, \Delta_1, I_1, R_1 \rangle$

$$\text{với } \Sigma_1 = \{a, b\}, \Delta_1 = \{I_1\},$$

$R_1 = \{I_1 \rightarrow aI_1b, I_1 \rightarrow ab\}$ và $G_2 = \langle \Sigma_2, \Delta_2, I_2, R_2 \rangle$ với $\Sigma_2 = \{c\}$,

$\Delta_2 = \{I_2\}$, $R_1 = \{I_1 \rightarrow cI_2, I_2 \rightarrow c\}$

Xây dựng văn phạm $G_3 = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ sao cho

$L(G_3) = L(G_1) \cup L(G_2)$ và $L(G_3) = L(G_1) \cdot L(G_2)$.

Ta đã biết $L(G_1) = \{a^n b^n \mid a^n b^n \in \Sigma_1^*, n \geq 1\}$

$L(G_2) = \{c^m \mid c^m \in \Sigma_2^*, m \geq 1\}$

a) $L(G_3) = L(G_1) \cup L(G_2) = \{a^n b^n, c^m \mid n, m \geq 1\}$

Ta xây dựng văn phạm G_3 như sau: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, c\}$;

$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{I\}$, $I \notin \Delta_1 \cup \Delta_2$ được gọi là ký hiệu ban đầu của G_3 .

$R = R_1 \cup R_2 \cup \{I \rightarrow I_1, I \rightarrow I_2\} =$

$\{I_1 \rightarrow aI_1b, I_1 \rightarrow ab, I_1 \rightarrow cI_2, I_2 \rightarrow c, I \rightarrow I_1, I \rightarrow I_2\}$

Ta chứng minh $L(G_3) = L(G_1) \cup L(G_2) = \{a^n b^n, c^m \mid n, m \geq 1\}$

Xét bao hàm thức $L(G_3) \subseteq L(G_1) \cup L(G_2)$, giả sử $P \in L(G_3)$, tức tồn tại dẫn xuất đầy đủ $D = (I, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n = P)$ ở đây $\omega_1 = I_1$ hoặc $\omega_1 = I_2$ và $P \in \Sigma^*$. Giả sử $\omega_1 = I_1$, khi đó $D = (I, I_1, \omega_2 = aI_1b, \omega_3 = a^2I_1b^2, \dots, \omega_n = a^{n-1}I_1b^{n-1}, \omega_{n+1} = a^n b^n = P)$ là dẫn xuất đầy đủ của $P = a^n b^n$ trong G_1 , nên $P \in L(G_1)$ hay $P \in L(G_1) \cup L(G_2)$. Trường hợp $\omega_1 = I_2$ ta có $D = (I, I_2, \omega_2 = cI_2, \omega_3 = c^2I_2, \dots, \omega_m = c^{m-1}I_2, \omega_{m+1} = c^m = P)$ là dẫn xuất đầy đủ của P trong G_2 hay $P \in L(G_2)$ tức là $P \in L(G_1) \cup L(G_2)$.

Vậy $L(G_3) \subseteq L(G_1) \cup L(G_2)$ (1).

Xét bao hàm thức ngược lại: $L(G_1) \cup L(G_2) \subseteq L(G_3)$. Giả sử $P \in L(G_1) \cup L(G_2)$. Không giảm tính tổng quát, giả sử $P \in L(G_1)$. Khi đó dẫn xuất đầy đủ của P trong G_1 có dạng

$D' = (I_1, \omega_1 = aI_1b, \omega_2 = a^2I_1b^2, \dots, \omega_n = a^n b^n = P)$

và $P \in \Sigma^*$. Từ D' ta có dẫn xuất đầy đủ của P là D trong G_3

$D = (I, I_1, \omega_1 = aI_1b, \omega_2 = a^2I_1b^2, \dots, \omega_n = a^n b^n = P)$.

Vậy $P \in G_3$. Trường hợp $P \in G_2$ chứng minh tương tự.

Tóm lại ta có $L(G_1) \cup L(G_2) \subseteq L(G_3)$ (2). Từ (1) và (2) ta có $L(G_3) = L(G_1) \cup L(G_2)$.

b) Ta xây dựng $G_5 \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ sao cho

$$L(G_5) = L(G_1).L(G_2) = \{a^m b^n c^m \mid m, n \geq 1\}.$$

Ta xây dựng G_5 như sau:

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, c\}; \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{\bar{I}\},$$

$$I \notin \Delta_1 \cup \Delta_2, R = R_1 \cup R_2 \cup \{I \rightarrow I_1 I_2\}.$$

Ta chứng minh bao hàm thức $L(G_5) \subseteq L(G_1).L(G_2)$. Giả sử $P \in L(G_5)$. Khi đó tồn tại dẫn xuất đầy đủ D của P trong G_5 là

$$D = (I, I_1 I_2, a I_1 b I_2, a^2 I_1 b^2 I_2, \dots, a^n b^n I_2 = P_1 I_2, P_1 c I_2, P_1 c^2 I_2, \dots, P_1 c^m = P_1 P_2)$$

ở đây $P_1 = a^n b^n \in L(G_1)$, $P_2 = c^m \in L(G_2)$ hay $P = P_1 P_2 \in L(G_1).L(G_2)$.

Vậy bao hàm thức $L(G_5) \subseteq L(G_1).L(G_2)$ được chứng minh.

Ta chứng minh bao hàm thức ngược lại: $L(G_1).L(G_2) \subseteq L(G_5)$.

Thật vậy giả sử $P \in L(G_1).L(G_2)$ hay $P = P_1 P_2$ ở đây $P_1 \in L(G_1)$, $P_2 \in L(G_2)$. Vì $P_1 \in L(G_1)$ nên tồn tại dẫn xuất đầy đủ

$$D_1 = (I_1, \omega_1 = a I_1 b, \omega_2 = a^2 I_1 b^2, \dots, \omega_n = a^n b^n = P_1) \text{ trong } G_1$$

ở đây $P_1 \in \Sigma_1^*$, còn $P_2 \in L(G_2)$ nên cũng tồn tại dẫn xuất đầy đủ $D_2 = (I_2, c I_2, c^2 I_2, \dots, c^m = P_2)$ trong G_2 ở đây $P_2 \in \Sigma_2^*$. Lập dẫn xuất $D = (I, I_1 I_2, a I_1 b I_2, a^2 I_1 b^2 I_2, \dots, a^n b^n I_2 = P_1 I_2, P_1 c I_2, P_1 c^2 I_2, \dots, P_1 c^m = P_1 P_2)$ ở đây $P_1 = a^n b^n \in L(G_1)$, $P_2 = c^m \in L(G_2)$ hay $P = P_1 P_2 \in L(G_1).L(G_2)$. Vậy bao hàm thức $L(G_1).L(G_2) \subseteq L(G_5)$ đã được chứng minh hay $L(G_5) = L(G_1).L(G_2)$.

Chú ý: Vì $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ nên ở đây ta không xét văn phạm G_4 trong định lý 3.

CHƯƠNG 6

ÔTÔ MÁT HỮU HẠN ĐOÁN NHẬN NGÔN NGỮ CHÍNH QUY

§1. ÔTÔ MÁT HỮU HẠN (FINITE AUTOMATA - FA)

Ôtô mát hữu hạn có thể xem như “máy trừu tượng” để đoán nhận ngôn ngữ. Chúng ta sẽ thấy rằng lớp ngôn ngữ được đoán nhận bởi ô tô mát hữu hạn là khá đơn giản, đó chính là lớp ngôn ngữ chính quy do các văn phạm chính quy sinh ra.

1. Định nghĩa ô tô mát hữu hạn

Định nghĩa 1:

Ôtô mát hữu hạn là bộ $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, trong đó:

Σ - là tập hợp hữu hạn khác rỗng các ký hiệu vào,

Q - là tập hợp hữu hạn khác rỗng các trạng thái,

Trạng thái $q_0 \in Q$ được gọi là trạng thái ban đầu,

Tập $F \subseteq Q$ được gọi là tập các trạng thái kết thúc,

δ - được gọi là hàm chuyển có dạng:

1. Nếu hàm chuyển là ánh xạ: $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$, khi đó M được gọi là *ô tô mát đơn định* (Deterministic Finite Automata, viết tắt DFA).
2. Nếu hàm chuyển là ánh xạ: $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$, khi đó M được gọi là *ô tô mát không đơn định* (Nondeterministic Finite Automata, viết tắt NFA).

Ta có thể mô tả các bước làm việc của ô tô mát hữu hạn $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ khi cho xâu vào $\omega = x_1 x_2 x_3 \dots x_n \in \Sigma^*$ như sau:

Xâu vào ω x_1 x_2 ... x_{n-1} x_n
 $\uparrow$
 $q_0 \rightarrow \dots\dots\dots$

Khi bắt đầu làm việc máy ở trạng thái đầu q_0 và đầu đọc đang nhìn vào ô có ký hiệu x_1 . Tiếp theo đó máy chuyển từ trạng thái q_0 dưới tác động của ký hiệu vào x_1 về trạng thái mới $\delta(q_0, x_1) = q_1 \in Q$ và đầu đọc chuyển sang phải 1 ô, tức nhìn vào ô có ký hiệu x_2 . Sau đó ô tô máy M lại tiếp tục chuyển từ trạng thái q_1 nhờ hàm chuyển δ về trạng thái mới $q_2 = \delta(q_1, x_2) = \delta(\delta(q_0, x_1), x_2) \in Q$.

Quá trình đó sẽ tiếp tục cho tới khi đầu đọc nhìn vào ký hiệu x_n với trạng thái của máy là $q_{n-1} = \delta(q_0, x_1 x_2 \dots x_{n-1})$.

Hàm chuyển lại đưa máy từ trạng thái q_{n-1} dưới tác động của x_n về trạng thái $q_n = \delta(q_{n-1}, x_n) = \delta(q_0, x_1 x_2 \dots x_n) \in Q$. Khi đó ô tô máy dừng lại. Nếu $q_n \in F$ thì ta nói rằng ô tô máy đã đoán nhận xâu ω . Trong trường hợp ngược lại thì nói rằng ô tô máy không đoán nhận xâu ω .

Tập $L(M) = \{\omega / \omega \in \Sigma^* \text{ mà } \delta(q_0, \omega) \in F\}$ được gọi là *ngôn ngữ được đoán nhận bởi ô tô máy M*. Tập trạng thái Q trong quá trình tính toán được coi như là bộ nhớ của một ô tô máy. Vì Q là hữu hạn nên M được gọi là ô tô máy hữu hạn.

2. Phương pháp biểu diễn ô tô máy hữu hạn

Cho ô tô máy thực chất là cho hàm chuyển của nó. Hàm chuyển có thể cho dưới dạng bảng chuyển, hoặc cho dưới dạng đồ thị.

a. Phương pháp cho bảng chuyển:

Trạng thái	Ký hiệu vào			
	x_1	x_2		x_n
q_1	$\delta(q_1, x_1)$	$\delta(q_1, x_2)$		$\delta(q_1, x_n)$
q_2	$\delta(q_2, x_1)$	$\delta(q_2, x_2)$		$\delta(q_2, x_n)$
q_3	$\delta(q_3, x_1)$	$\delta(q_3, x_2)$		$\delta(q_3, x_n)$
...				
...				
q_k	$\delta(q_k, x_1)$	$\delta(q_k, x_2)$		$\delta(q_k, x_n)$

Nếu $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ là ô tô mát đơn định thì $\delta(q_i, x_i)$ là một trạng thái trong Q , còn nếu nó là ô tô mát không đơn định thì $\delta(q_i, x_i)$ là một tập các trạng thái trong Q .

Ví dụ 1: Cho ô tô mát đơn định $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ với $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F = \{q_0\}$, trạng thái ban đầu là q_0 , còn hàm chuyển cho dưới dạng bảng:

Trạng thái	Ký hiệu vào	
	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

Cho xâu vào $\omega = 110101$.

Quá trình hoạt động của ô tô mát M diễn ra theo quá trình sau:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 1) &= q_1, & \delta(q_1, 1) &= q_0, & \delta(q_0, 0) &= q_2, \\ \delta(q_2, 1) &= q_3, & \delta(q_3, 0) &= q_1, & \delta(q_1, 1) &= q_0 \in F. \end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ ô tô mát M đoán nhận xâu $\omega = 110101$. Dãy trạng thái của M khi cho xâu vào $\omega = 110101$ được biểu diễn như sau:

$$\begin{array}{ccccccccc} \omega & = & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & q_0 & \rightarrow & q_1 & \rightarrow & q_0 & \rightarrow & q_2 & \rightarrow & q_3 & \rightarrow & q_1 & \rightarrow & q_0 \end{array}$$

Hay quá trình trên tương đương với diễn đạt sau:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 110101) &= \delta(\delta(q_0, 1), 10101) = \delta(q_1, 10101) = \\ \delta(\delta(q_1, 1), 0101) &= \delta(q_0, 0101) = \delta(\delta(q_0, 0), 101) = \delta(q_2, 101) = \\ \delta(\delta(q_2, 1), 01) &= \delta(q_3, 01) = \delta(\delta(q_3, 0), 1) = \delta(q_1, 1) = q_0 \in F. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho ô tô mát đơn định $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ với $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, q_0 là trạng thái ban đầu, còn $F = \{q_3\}$ là tập trạng thái kết thúc. Hàm chuyển trạng thái được cho bởi bảng sau:

Trạng thái	Ký hiệu vào	
	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_3	q_3

Giả sử xét các xâu $\omega_1 = 10110$, $\omega_2 = 110$, $\omega_3 = 10011$. Hỏi rằng ô tô mát M có đoán nhận các xâu đó hay không ?

a. Dãy trạng thái của ô tô mát M khi cho ω_1 vào là:

$$\begin{array}{cccccc} \omega_1 = & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & q_0 \rightarrow q_2 \rightarrow q_0 \rightarrow q_2 \rightarrow q_3 \rightarrow q_3 \in F. \end{array}$$

Do đó ô tô mát M đoán nhận xâu $\omega_1 = 10110$.

b. Với xâu vào $\omega_2 = 110$, khi đó dãy trạng thái M đối với xâu vào ω_2 sẽ là:

$$\begin{array}{cccc} \omega_2 = & 1 & 1 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & q_0 \rightarrow q_2 \rightarrow q_3 \rightarrow q_3 \in F \end{array}$$

và ô tô mát cũng đoán nhận xâu $\omega_2 = 110$.

c. Với xâu vào $\omega_3 = 10011$. Ta lập dãy trạng thái của ô tô mát M đối với ω_3 như sau:

$$\begin{array}{cccccc} \omega_3 = & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & q_0 \rightarrow q_2 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_0 \rightarrow q_2 \notin F \end{array}$$

nên máy M không đoán nhận xâu vào $\omega_3 = 10011$.

Từ các ví dụ trên ta thấy quá trình đoán nhận một xâu nào đó đối với ô tô máy M đơn định là quá trình biến đổi trạng thái cuối cùng của ô tô máy có phải là trạng thái kết thúc hay không.

Ta có thể mô tả quá trình đoán nhận xâu vào của ô tô máy đơn định M như sau:

Thuật toán mô phỏng ô tô máy hữu hạn đoán nhận xâu vào:

Đầu vào: - Một xâu ω , kết thúc bởi ký hiệu hết File là eof.
 - Một ô tô máy hữu hạn M với trạng thái ban đầu q_0 và tập trạng thái kết thúc là F.

Đầu ra: "Đúng" nếu M đoán nhận xâu ω .

"Sai" nếu M không đoán nhận xâu ω .

Thuật toán:

Begin

S := q_0 ;

C := ký tự trực tiếp;

While C $\neq$ eof do

begin

S := $\delta(S, C)$;

C := ký tự trực tiếp;

end;

if S in F return (True)

else return (False);

End.

Ví dụ 3: Cho ô tô máy không đơn định $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ với $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, q_0 là trạng thái ban đầu, $F = \{q_2, q_4\}$ là tập hợp trạng thái kết thúc.

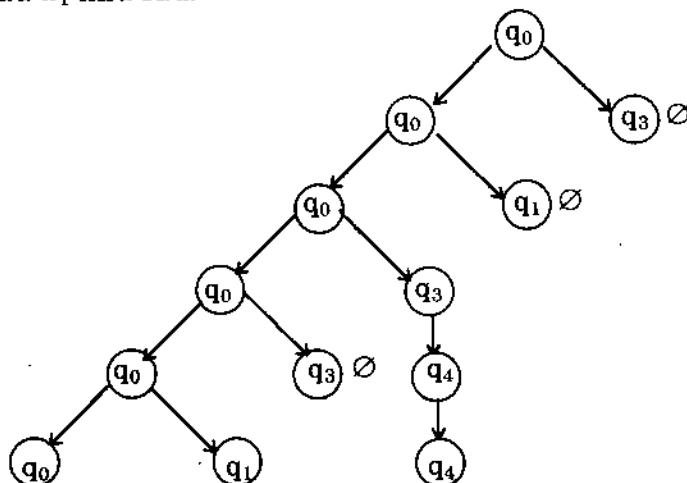
Hàm chuyển $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ được cho ở bảng sau:

Trạng thái	Ký hiệu vào	
	0	1
q_0	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\emptyset$	q_2
q_2	q_2	q_2
q_3	q_4	$\emptyset$
q_4	q_4	q_3

Sau đây là quá trình đoán nhận một xâu vào của máy M.

Vì đối với ô tô mát không đơn định thì hàm chuyển δ khi máy ở trạng thái q và tín hiệu a là $\delta(q, a) \subseteq Q$ nên sẽ xuất hiện tình trạng rẽ nhánh. Để cho tiện ta có thể lập dãy trạng thái của máy ứng với xâu vào dưới dạng cây mà gốc của nó là trạng thái ban đầu q_0 . Trong cây này nếu có một đường đi từ gốc q_0 đến một lá chứa trạng thái kết thúc thì ta nói rằng máy M đoán nhận xâu vào đang xét. Ngược lại, nếu không có một lá nào trong cây chứa trạng thái kết thúc thì ta nói M không đoán nhận xâu vào đó.

Chẳng hạn khi cho xâu vào $\omega_1 = 01001$ đối với máy M thì ta có cây đoán nhận xâu ω_1 như sau:



Trong cây trên có một đường đi từ q_0 đến $q_4 \in F$ nên xâu $\omega_1=01001$ là xâu đoán nhận được bởi máy M.

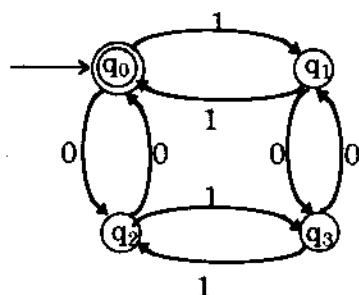
b. Phương pháp cho ô tô mát bằng đồ thị chuyển

Cho ô tô mát hữu hạn $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$. Hàm chuyển δ có thể cho bằng đồ thị chuyển có hướng theo nguyên tắc sau: Mỗi trạng thái $q \in Q$ là một đỉnh của đồ thị. Nếu $a \in \Sigma$ và từ trạng thái q_i chuyển sang trạng thái q_j do đẳng thức $\delta(q_i, a) = q_j$ (đối với DFA) thì sẽ có một cung có hướng từ đỉnh q_i sang đỉnh q_j và trên cung đó được gán nhãn a .

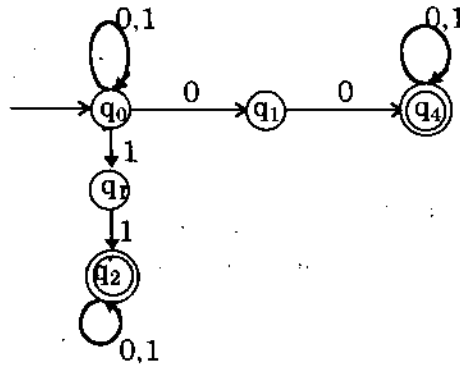
Nếu $\delta(q_i, a) = \{q_{j_1}, q_{j_2}, \dots, q_{j_k}\}$ đối với ô tô mát không đơn định thì từ q_i sang $q_{j_1}, q_{j_2}, \dots, q_{j_k}$ có k cung gán cùng một nhãn a .

Đỉnh vào của đồ thị chuyển là đỉnh ứng với trạng thái ban đầu q_0 . Các đỉnh có các trạng thái kết thúc được khoanh tròn hai lần. Các đỉnh còn lại khoanh bởi một vòng tròn.

Ví dụ 4: Cho ô tô mát đơn định $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F = \{q_0\}$, hàm chuyển $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ được cho dưới dạng đồ thị chuyển như sau:



Ví dụ 5: Cho ô tô mát không đơn định $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F = \{q_2, q_4\}$ còn hàm chuyển $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ cho dưới dạng đồ thị



Đối với ô tô máy M ta đưa vào khái niệm “chuyển dịch $\hat{\cdot}$ ” được định nghĩa như sau:

Hàm $\hat{\cdot}$ - Closure(T) cho tập trạng thái đạt được từ các trạng thái $s \in T$ qua phép chuyển dịch $\hat{\cdot}$ duy nhất. Tập T có thể chỉ gồm một phần tử. Nó được tính như sau:

Đẩy tất cả trạng thái trong T vào Stack,

Đặt $\hat{\cdot}$ - Closure(T) là T

While stack không rỗng do

begin

lấy t là phần tử trên cùng của stack ra;

for mỗi trạng thái mà có đường đi từ t đến u có nhãn $\hat{\cdot}$ do

if u không thuộc $\hat{\cdot}$ - Closure(T) do

begin

Thêm u vào $\hat{\cdot}$ - Closure(T);

Đặt u vào Stack;

end;

end;

Thuật toán mô phỏng ô tô mát không đơn định đoán nhận xâu vào:

Đầu vào: Một xâu vào ω , kết thúc bởi ký hiệu file eof. Một ô tô mát không đơn định N với trạng thái ban đầu q_0 và tập trạng thái kết thúc $F \subseteq Q$.

Đầu ra: Trả lời "True" nếu N đoán nhận xâu ω , "False" trong trường hợp ngược lại:

Thuật toán :

Begin

$S := \hat{\cdot}$ -Closure(q_0);

$C :=$ ký tự tiếp;

While $C \neq \text{eof}$ do

begin

$S := \hat{\cdot}$ -Closure(Move(S, C));

$C :=$ ký tự tiếp;

end;

If $S \cap F \neq \emptyset$ then return True else return False

End;

Chú ý rằng hàm Move(T, a) là tập trạng thái mà N có thể đạt được khi thực hiện dịch chuyển với ký hiệu vào a từ một trạng thái thuộc T .

3. Sự tương đương giữa ô tô mát đơn định và không đơn định

Theo định nghĩa của ô tô mát đơn định M và ô tô mát không đơn định N thì M cũng là N nên lớp các ngôn ngữ đoán nhận được bởi M cũng là lớp ngôn ngữ đoán nhận bởi N . Ký hiệu các lớp ngôn ngữ được đoán nhận bởi M và N tương ứng là $L(M)$ và $L(N)$.

Định lý 1: Lớp ngôn ngữ đoán nhận được bởi ô tô máy đơn định trùng với lớp ngôn ngữ đoán nhận được bởi ô tô máy không đơn định.

Chứng minh:

Theo định nghĩa ô tô máy đơn định và ô tô máy không đơn định thì lớp ngôn ngữ đoán nhận được bởi ô tô máy đơn định nằm trong lớp ngôn ngữ đoán nhận được bởi ô tô máy không đơn định.

Ta chứng minh bao hàm thức ngược lại: Lớp ngôn ngữ đoán nhận được bởi ô tô máy không đơn định nằm trong lớp ngôn ngữ do ô tô máy đơn định đoán nhận. Thật vậy, giả sử $p \in \Sigma^*$ đoán nhận được bởi ô tô máy không đơn định $N = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ hay $p \in L(N)$.

Ta xây dựng ô tô máy đơn định $M = \langle \Sigma', Q', \delta', s_0, F' \rangle$ đoán nhận p như sau: $\Sigma' = \Sigma$; $Q' = 2^Q$; $s_0 = \{q_0\}$; $F' = \{U \subseteq Q / U \cap F \neq \emptyset\}$ còn $\delta': Q' \times \Sigma \rightarrow Q'$ được xác định như sau:

$$\forall U \in Q', \forall x \in \Sigma \text{ thì } \delta'(U, x) = \bigcup_{q \in U} \delta(q, x)$$

Với M định nghĩa như trên thì ta có: $p \in L(M)$ hay $L(N) \subseteq L(M)$.

Ví dụ 6: Cho ô tô máy không đơn định $N = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ với $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{s_0, s_1\}$, $F = \{s_1\}$, còn hàm chuyển $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ được cho bằng bảng chuyển sau:

Trạng thái	Ký hiệu vào	
	a	b
s_0	$\{s_0, s_1\}$	s_1
s_1	$\emptyset$	$\{s_0, s_1\}$

Khi đó ô tô máy đơn định tương ứng với ô tô máy không đơn định N được xây dựng như sau:

$$M = \langle \Sigma', Q', \delta', q_2, F' \rangle \text{ với } \Sigma' = \Sigma = \{a, b\}, Q' = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

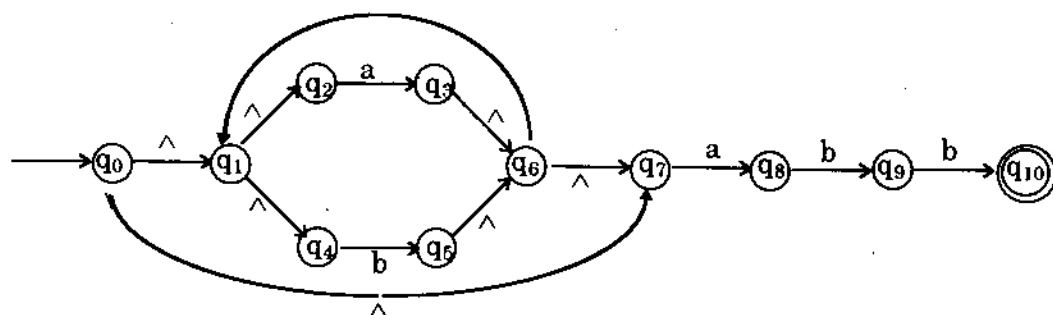
ở đây $q_1 = \emptyset$, $q_2 = \{s_0\}$, $q_3 = \{s_1\}$, $q_4 = \{s_0, s_1\}$ còn $F' = \{q_3, q_4\}$.

Hàm chuyển δ' cho dưới dạng bảng chuyển như sau:

Trạng thái	Ký hiệu vào	
	a	b
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	q_4	q_3
q_3	$\emptyset$	q_4
q_4	q_4	q_4

Ta có $L(N) = L(M)$ hay N tương ứng với M .

Ví dụ 7: Cho ô tô máy không đơn định $N = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ với $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{10}\}$, $F = \{q_{10}\}$.



Trong đồ thị chuyển trên thì $\wedge$ là xâu rỗng. Ta xây dựng ô tô máy đơn định M như sau:

$M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, ở đây

$\Sigma = \{a, b\}$ là bảng ký hiệu vào,

$Q = \{A, B, C, D, E\}$ là tập các trạng thái,

A là trạng thái ban đầu,

$F = \{E\}$ tập trạng thái kết thúc, ở đây.

$A = \{q_0, q_1, q_2, q_4, q_7\}$ (chứa trạng thái ban đầu q_0 của N)

$B = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$

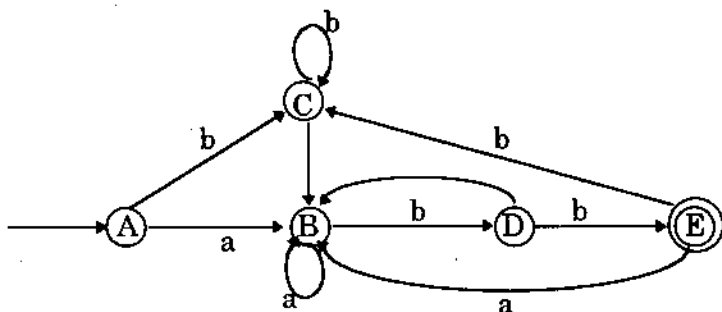
$C = \{q_1, q_2, q_4, q_5, q_6, q_7\}$

$$D = \{q_1, q_2, q_4, q_5, q_6, q_7, q_9\}$$

$E = \{q_1, q_2, q_4, q_5, q_6, q_7, q_{10}\}$ (có chứa trạng thái kết thúc q_{10} của N)
với hàm chuyển cho dưới dạng bảng :

Trạng thái	Ký hiệu vào	
	a	b
A	B	C
B	B	D
C	B	C
D	B	E
E	B	C

hay ô tô máy được biểu diễn dưới dạng đồ thị chuyển như sau:



Ta chỉ ra rằng $L(N) = L(M) = \{(a/b)^* abb\}$.

Thật vậy, giả sử xét xâu vào là $\omega = ababb$

Ta chỉ ra rằng hai ô tô máy N và M cùng đoán nhận xâu $\omega = ababb$.

Thật vậy, đối với ô tô máy M ta xây dựng chuỗi trạng thái ứng với xâu vào ω là:

$$\begin{array}{cccccc}
 \omega = & a & b & a & b & b \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \in F
 \end{array}$$

§2. NGÔN NGỮ CHÍNH QUY VÀ BIỂU THỨC CHÍNH QUY

1. Ngôn ngữ chính quy

Giả sử Σ là bảng chữ hữu hạn không rỗng. Σ^* là tập tất cả các xâu (kể cả xâu rỗng) được xây dựng trên Σ .

Như đã định nghĩa trước đây thì $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\epsilon\}$.

Tập con $E \subseteq \Sigma^+$ được gọi là một ngôn ngữ trên bảng Σ .

Trên tập tất cả các ngôn ngữ ta có thể định nghĩa các phép toán hợp, giao, phần bù, nhân và lập các ngôn ngữ.

Trong các phép toán trên, ta đặc biệt chú ý ba phép toán sau đây:

-a) *Phép hợp*: Cho hai ngôn ngữ E_1, E_2 trên tập Σ , ta định nghĩa phép hợp $E_1 \cup E_2 = \{\omega \mid \omega \in E_1 \text{ hoặc } \omega \in E_2\}$.

b) *Phép nhân*: Cho hai ngôn ngữ E_1, E_2 trên Σ . Phép nhân E_1 với E_2 là $E_1.E_2 = \{\alpha\beta \mid \alpha \in E_1, \beta \in E_2\}$.

c) *Phép lập*: Với ngôn ngữ E trên Σ ta định nghĩa phép lập của E là

$$E^+ = E \cup E^2 \cup E^3 \cup \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^n, \text{ ở đây } E^n = EE\dots E \text{ (n lần).}$$

Giả sử $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Ngôn ngữ $\emptyset$ và ngôn ngữ $\{a_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ta gọi là ngôn ngữ sơ cấp trên Σ .

Định nghĩa 2 :

a) Các ngôn ngữ sơ cấp trên Σ được gọi là ngôn ngữ chính quy trên Σ .

b) Nếu E và F là hai ngôn ngữ chính quy trên Σ thì $E \cup F$, EF và E^+ cũng là ngôn ngữ chính quy trên Σ .

c) Không có ngôn ngữ chính quy nào khác trên Σ ngoài các ngôn ngữ chính quy được định nghĩa trong các bước a) và b) ở trên.

Thông thường để diễn đạt các ngôn ngữ chính quy người ta đưa vào biểu thức chính quy.

2. Biểu thức chính quy

Trên bảng Σ ta định nghĩa biểu thức chính quy theo các bước đệ quy sau đây:

- a. $\emptyset$ là biểu thức chính quy, nó biểu diễn ngôn ngữ rỗng.
- b. Nếu $a \in \Sigma$ thì a là biểu thức chính quy, nó biểu diễn ngôn ngữ $\{a\}$.
- c. Nếu r, s là hai biểu thức chính quy trên Σ biểu diễn hai ngôn ngữ R và S tương ứng. Khi đó:

$(r) \cup (s)$ là biểu thức chính quy biểu diễn ngôn ngữ $R \cup S$.

$(r) \cdot (s)$ là biểu thức chính quy biểu diễn ngôn ngữ $R \cdot S$.

$(r)^+$ là biểu thức chính quy biểu diễn ngôn ngữ R^+ .

Từ định nghĩa về ngôn ngữ chính quy và biểu thức chính quy trên Σ ta có:

Định lý 2: Mọi ngôn ngữ chính quy trên bảng Σ đều nhận được từ các ngôn ngữ hữu hạn bằng cách áp dụng một số hữu hạn lần các phép toán hợp, phép nhân, phép lặp.

Định lý 3 : Một ngôn ngữ trên Σ là chính quy khi và chỉ khi nó biểu diễn được bởi một biểu thức chính quy.

Chú ý: a) Một ngôn ngữ chính quy là vô hạn khi và chỉ khi biểu thức chính quy biểu diễn nó có dấu $+$ (phép lặp).

b) Lớp tất cả các ngôn ngữ chính quy trên Σ là lớp bé nhất chứa các tập hữu hạn và đóng đối với các phép toán hợp, nhân và lặp.

3. Thuật toán Thompson

Bài toán: Cho một biểu thức chính quy. Hãy xây dựng ô tô máy không đơn định N đoán nhận ngôn ngữ chính quy từ biểu thức chính quy đã cho.

Thuật toán:

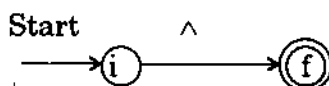
Vào: Một biểu thức chính quy r trên bộ Σ .

Ra: Một ô tô máy N đoán nhận ngôn ngữ $L(r)$.

Sau đây là mô tả thuật toán của Thompson :

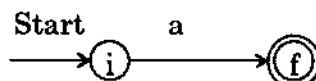
Trước hết tách biểu thức chính quy r thành các biểu thức chính quy thành phần $r_1, r_2, \dots, r_k$. Sau đó áp dụng luật 1, luật 2 để xây dựng các ô tô máy không đơn định $N_1, N_2, \dots, N_k$ tương ứng đoán nhận các ngôn ngữ $L(r_1), L(r_2), \dots, L(r_k)$. Cuối cùng dùng luật 3 để xây dựng ô tô máy không đơn định N đoán nhận ngôn ngữ $L(r)$.

Luật 1: Đối với ký hiệu $\wedge$, xây dựng ô tô máy không đơn định N đoán nhận ngôn ngữ $\{\wedge\}$ như sau:



với i là trạng thái ban đầu còn f là trạng thái kết thúc.

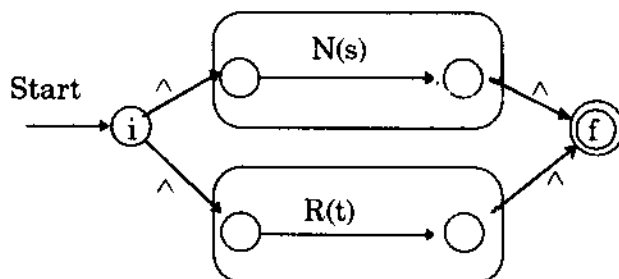
Luật 2: Với $a \in \Sigma$, xây dựng ô tô máy không đơn định đoán nhận $\{a\}$ như sau:



với i là trạng thái ban đầu, f là trạng thái kết thúc.

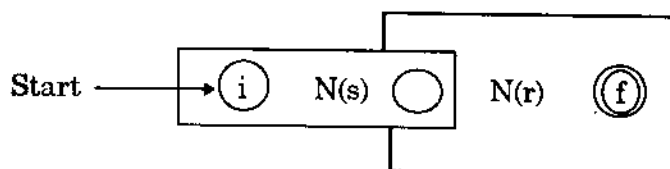
Luật 3: Giả sử $N(s), N(r)$ là các ô tô máy thành phần ứng với các biểu thức chính quy s và r .

a) Đối với biểu thức chính quy $(s) \cup (r)$ ta xây dựng ô tô máy không đơn định N đoán nhận ngôn ngữ $S \cup R$ như sau:



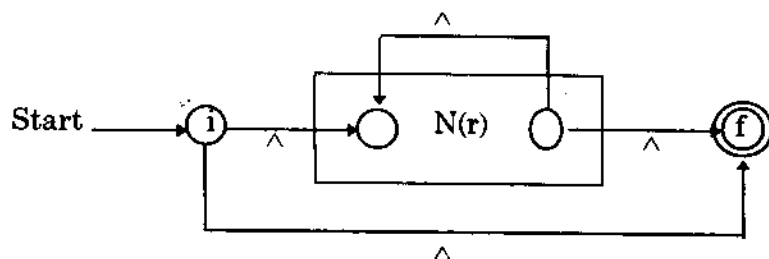
ở đây i là trạng thái ban đầu, f là trạng thái kết thúc của N và N nhận được bằng cách tổ hợp hai ô tô máy thành phần $N(s)$ và $N(r)$ theo sơ đồ bảng chuyển trên.

b) Đối với biểu thức chính quy $(s).(r)$ thì ô tô máy không đơn định N đoán nhận ngôn ngữ chính quy $S.R$ được cho dưới dạng bảng chuyển sau đây:



với i là trạng thái ban đầu, f là trạng thái kết thúc, N nhận được từ $N(s)$ và $N(r)$ bằng cách lấy trạng thái ban đầu của $N(s)$ làm trạng thái ban đầu của N , trạng thái kết thúc của $N(r)$ là trạng thái kết thúc của N và đồng nhất trạng thái kết thúc của $N(s)$ với trạng thái ban đầu của $N(r)$.

c) Đối với biểu thức chính quy $(r)^+$ biểu diễn ngôn ngữ chính quy R^+ ta xây dựng ô tô máy không đơn định N đoán nhận R^+ theo bảng chuyển dưới đây:



ở đây i là trạng thái ban đầu, f là trạng thái kết thúc của N .

4. Tính chất của ngôn ngữ chính quy

Định lý 4 : Lớp tất cả các ngôn ngữ chính quy trên Σ là đóng đối với các phép toán: hợp, nhân, hiệu, lấy phần bù, nhân ghép và lặp.

Chứng minh: Tính đóng đối với các phép toán hợp, nhân ghép và lặp chứng minh theo định nghĩa biểu thức chính quy.

Ta chứng minh tính đóng đối với các phép toán còn lại sau đây:

a) Phép hiệu giữa R_1 và R_2 là 2 ngôn ngữ chính quy trên Σ . Giả sử $R = R_1 \setminus R_2$ ở đây $R_1 = L(M_1)$, $R_2 = L(M_2)$ và M_i là ô tô mát đoán nhận R_i ($i = 1, 2$), với $M_1 = \langle \Sigma, Q_1, \delta_1, q_1, F_1 \rangle$, $M_2 = \langle \Sigma, Q_2, \delta_2, q_2, F_2 \rangle$.

Ta xây dựng ô tô mát M đoán nhận R như sau:

$M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ với $Q = Q_1 \times Q_2$, $q_0 = (q_1, q_2) \in Q$, $F = F_1 \times (Q_2 \setminus F_2)$, còn $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ được xác định như sau:

$\delta((q, q'), x) = \langle \delta_1(q, x), \delta_2(q', x) \rangle$ với $q \in Q_1$, $q' \in Q_2$, $x \in \Sigma$. Kiểm tra lại $L(M) = R$, hay R là ngôn ngữ chính quy trên Σ .

b) Phép lấy phần bù: Nếu R là ngôn ngữ chính quy trên Σ thì ta có $\overline{R}$ cũng ngôn ngữ chính quy trên Σ .

Thật vậy, giả sử $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ là ô tô mát đoán nhận R . Khi đó ô tô mát $M' = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F' \rangle$ với $F' = Q \setminus F$ là ô tô mát đoán nhận ngôn ngữ $\overline{R}$, hay $\overline{R}$ là ngôn ngữ chính quy trên Σ .

c) Phép toán giao giữa hai ngôn ngữ chính quy R_1 và R_2 .

Vì $R_1 \cap R_2 = \overline{\overline{R_1} \cup \overline{R_2}}$ nên tính đóng đối với phép giao được suy ra từ tính đóng đối với phép toán hợp và phép lấy phần bù.

Định lý được chứng minh.

5. Quan hệ giữa ô tô mát hữu hạn và ngôn ngữ chính quy

Định nghĩa 3: Văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ được gọi là văn phạm chính quy suy rộng nếu mọi quy tắc trong R đều có dạng $A \rightarrow aB$, $A \rightarrow a$ hoặc $A \rightarrow \wedge$, ở đây $A, B \in \Delta$, $a \in \Sigma$, $\wedge$ là ký hiệu xâu rỗng.

Rõ ràng nhận thấy rằng:

Định lý 5: Đối với văn phạm chính quy suy rộng G bao giờ cũng xây dựng được văn phạm chính quy G' sao cho $L(G') = L(G) \setminus \{\wedge\}$.

Định nghĩa 4: Văn phạm chính quy suy rộng là văn phạm chính quy mẫu nếu nó không có quy tắc $A \rightarrow a$.

Định lý 6: Đối với văn phạm chính quy suy rộng có thể xây dựng được văn phạm chính quy mẫu tương đương với nó.

Chứng minh: Giả sử $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ là văn phạm chính quy suy rộng. Thêm ký hiệu K vào Δ và đặt $\Delta' = \Delta \cup \{K\}$.

Đối với mỗi quy tắc $A \rightarrow a \in R$ thay bởi cặp quy tắc $A \rightarrow aK$, $K \rightarrow \wedge$ ta được R' . Rõ ràng văn phạm $G' = \langle \Sigma, \Delta', I, R' \rangle$ là văn phạm chính quy mẫu và $L(G) = L(G')$.

Định nghĩa 5: Cho văn phạm chính quy mẫu $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$. Khi đó G có thể biểu diễn qua đồ hình được định nghĩa như sau:

Các đỉnh của đồ hình là các ký hiệu hỗ trợ trong Δ . Đối với cặp đỉnh A, B ($\in \Delta$) số cung đi từ A sang B sẽ bằng số quy tắc có dạng $A \rightarrow aB$ của G . Mỗi một cung được đánh dấu bởi ký hiệu cơ bản $a \in \Sigma$ trong quy tắc tương ứng. Đỉnh ứng với ký hiệu ban đầu I gọi là đỉnh ban đầu, còn đỉnh A ứng với quy tắc $A \rightarrow \wedge$ gọi là đỉnh kết thúc.

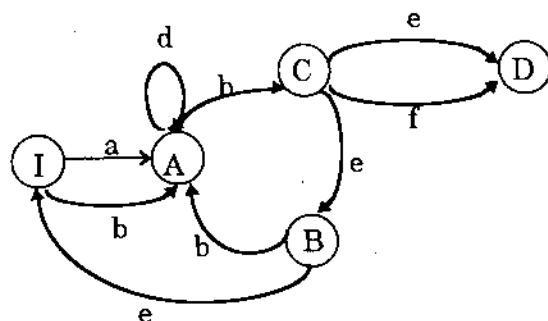
Đa đồ thị vừa được định nghĩa như trên gọi là đồ hình của văn phạm.

Ví dụ: Cho văn phạm chính quy mẫu:

$G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, với $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\Delta = \{I, A, B, C, D\}$

$R = \{I \rightarrow aA, I \rightarrow bA, A \rightarrow dA, A \rightarrow bC, C \rightarrow cB, B \rightarrow bA, C \rightarrow eD, C \rightarrow fD, B \rightarrow eI, I \rightarrow \wedge, B \rightarrow \wedge, D \rightarrow \wedge\}$

Đồ hình của G có dạng như hình dưới:



Đỉnh đầu là I , các đỉnh kết thúc là I, B, D . Nếu $A_0, A_1, \dots, A_n$ là đường trong đa đồ thị của văn phạm chính quy mẫu đã cho sao cho với

mỗi $i = 1, 2, \dots, n$ có cung đi từ A_{i-1} sang A_i được đánh dấu bởi ký hiệu a_i , thì chúng ta nói rằng đường đã cho sinh ra xâu $a_1a_2\dots a_n$.

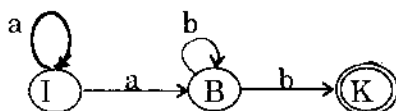
Đường bất kỳ có độ dài 0 theo định nghĩa nó sinh ra xâu $\wedge$. Rõ ràng xâu x sinh ra bởi một đường bắt đầu từ đỉnh A và kết thúc ở đỉnh B khi và chỉ khi $A \models xB$ (ký hiệu $\models$ nghĩa là hoặc dẫn được từ A hoặc trùng với A).

Chúng ta gọi đường $A_0, A_1, \dots, A_n$ là chu trình nếu $A_0 = A_n$ và là đường đầy đủ nếu $A_0 = I$ còn A_n là đỉnh kết thúc (tức $A_n \rightarrow \wedge$ là một quy tắc trong R của G).

Từ các khái niệm trên ta suy ra: tập dẫn xuất đầy đủ trong văn phạm G và tập các đường đầy đủ trong đa đồ thị của G có tương ứng 1-1, đồng thời xâu $x \in L(G)$ khi và chỉ khi x được sinh ra bởi đường đầy đủ trong đa đồ thị của G .

Chú ý: Đối với văn phạm chính quy suy rộng không phải là mẫu thì cũng lý luận như trên ta xây dựng được đồ hình của nó.

Ví dụ: Cho $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ là văn phạm chính quy suy rộng với $R = \{I \rightarrow aI, I \rightarrow aB, B \rightarrow bB, B \rightarrow b\}$. Đồ hình của G được xây dựng như sau: Đưa G về văn phạm mẫu G' bằng cách thay quy tắc $B \rightarrow b$ bởi 2 quy tắc $B \rightarrow bK$ và $K \rightarrow \wedge$. Đồ hình của văn phạm mẫu G' cũng là đồ hình của G có dạng dưới đây:



ở đây I là đỉnh ban đầu, K là đỉnh kết thúc.

Định nghĩa 6: Tương tự như đồ hình của văn phạm chính quy suy rộng, ta có thể định nghĩa đồ hình của ô tô máy hữu hạn theo nguyên tắc sau đây:

Các đỉnh của đồ hình là các trạng thái của ô tô máy.

Nếu trong ô tô máy $M = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ mà $\delta(q, a) = q'$, với $q \in Q$, $a \in \Sigma$ thì trong đồ hình từ đỉnh q đến đỉnh q' có một cung và trên cung đó được gán mã a .

q_0 là đỉnh ban đầu.

Đỉnh q cũng được gọi là đỉnh ban đầu nếu ứng với nó ta có $\delta(q_0, \#) = q$. Các đỉnh đánh dấu bằng các trạng thái kết thúc gọi là các đỉnh kết thúc ($\#$ là ký hiệu biên bên trái).

Khái niệm một xâu sinh ra bởi một đường, khái niệm chu trình, khái niệm đường đầy đủ v.v.. cũng được định nghĩa như trong đồ thị của văn phạm ô tô mát suy rộng.

Chú ý: Từ định nghĩa đồ hình của ô tô mát hữu hạn ta suy ra: một xâu sinh ra bởi đường đầy đủ trong đồ hình của ô tô mát khi và chỉ khi xâu đó được đoán nhận bởi ô tô mát đó. Ngoài ra ô tô mát đoán nhận xâu rỗng khi và chỉ khi giao giữa tập các đỉnh ban đầu và tập các đỉnh kết thúc trong đồ hình là khác rỗng.

Từ khái niệm đồ hình của văn phạm và đồ hình của ô tô mát hữu hạn ta suy ra định lý sau đây:

Định lý 7 :

a) Đối với văn phạm chính quy suy rộng bất kỳ có thể xây dựng được ô tô mát hữu hạn tương đương với nó.

b) Đối với ô tô mát hữu hạn bất kỳ có thể xây dựng được văn phạm chính quy suy rộng tương đương với nó.

Từ các kết quả trên ta có định lý quan trọng sau đây:

Định lý 8 :

a) Lớp các ngôn ngữ chính quy trùng với lớp ngôn ngữ do văn phạm chính quy sinh ra.

b) Ngôn ngữ trên bảng Σ là đoán nhận được bởi ô tô mát hữu hạn khi và chỉ khi ngôn ngữ đó là ngôn ngữ chính quy.

CHƯƠNG 7

MÁY PUSHDOWN ĐOÁN NHẬN NGÔN NGỮ PHI NGỮ CẢNH

Đối với các lớp văn phạm được phân loại theo CHOMSKY lớp văn phạm phi ngữ cảnh (VPPNC) có vai trò quan trọng nhất trong việc ứng dụng để xây dựng các ngôn ngữ lập trình và chương trình dịch.

Trong quá trình dịch từ chương trình nguồn ra chương trình đích, người ta sử dụng cấu trúc cú pháp của văn phạm phi ngữ cảnh để phân tích các câu vào. Cấu trúc cú pháp của một câu vào được xác định từ chuỗi các sản xuất suy từ câu đó. Dựa vào chuỗi các sản xuất đó, bộ phân tích cú pháp của chương trình dịch sẽ cho biết câu vào đang xét đó có thuộc vào câu do văn phạm phi ngữ cảnh sinh ra hay không. Nói cách khác là với xâu vào ω và một VPPNCG. Hỏi rằng $\omega \in L(G)$ hay không? Nếu có thì hãy tìm cách biểu diễn ω bằng văn phạm, tức là tìm các quy tắc sinh của VPPNC để sinh ra xâu ω .

§1. VĂN PHẠM PHI NGỮ CẢNH VÀ CÂY DẪN XUẤT CỦA NÓ

1. Định nghĩa VPPNC và quy ước về ký hiệu

Bộ $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ được gọi là văn phạm phi ngữ cảnh nếu:

Σ là tập các ký hiệu cơ bản, hay tập các ký hiệu chính,

Δ là tập các ký hiệu hỗ trợ hay tập các ký hiệu phụ,

$I \in \Delta$ là ký hiệu phụ và được gọi là ký hiệu ban đầu,

R là tập các quy tắc sinh (gọi tắt là quy tắc) có dạng:

$$R = \{A \rightarrow \theta / A \in \Delta, \theta \in (\Sigma \cup \Delta)^*\}.$$

Để dễ dàng cho sự diễn đạt các phần tiếp theo ta đưa vào một số quy ước sau:

- Mỗi ký hiệu phụ trong bảng tín hiệu hỗ trợ Δ là một chữ cái in hoa nào đó và có thể có cả chỉ số nữa. Ví dụ như $A, B, C, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, C_2, \dots$

- Mỗi ký hiệu chính trong bảng ký hiệu chính Σ của G là một chữ thường a, b, c , đôi khi cả chỉ số nữa như $a_1, a_2, \dots$

- Các chữ in hoa X, Y, Z , có thể cả chỉ số nữa để chỉ các ký hiệu thuộc bảng đầy đủ $V = \Sigma \cup \Delta$. Như vậy X, Y, Z có thể là ký hiệu chính hoặc cũng có thể là ký hiệu phụ.

- Các chữ thường u, v, w, x, y, z dùng để ký hiệu các xâu trong Σ^* .

- Các chữ α, β là các xâu trong bảng đầy đủ $V = \Sigma \cup \Delta$, tức là các xâu có thể chứa cả các ký hiệu chính và các ký hiệu phụ.

2. Cây suy dẫn đầy đủ trong văn phạm phi ngữ cảnh

a. Định nghĩa cây suy dẫn đầy đủ

Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$.

Cây suy dẫn đầy đủ trong văn phạm phi ngữ cảnh là một cây được thành lập từ một dẫn xuất đầy đủ nào đó trong G . Mỗi xâu $x \in \Sigma^*$ mà $I \vdash_G x$ sẽ tương ứng với một cây suy dẫn đầy đủ nào đó. Xâu x được gọi là kết quả của cây suy dẫn đầy đủ, ta có thể định nghĩa cây suy dẫn đầy đủ như sau:

Cây suy dẫn đầy đủ trong văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ là một cây thoả mãn bốn yêu cầu sau:

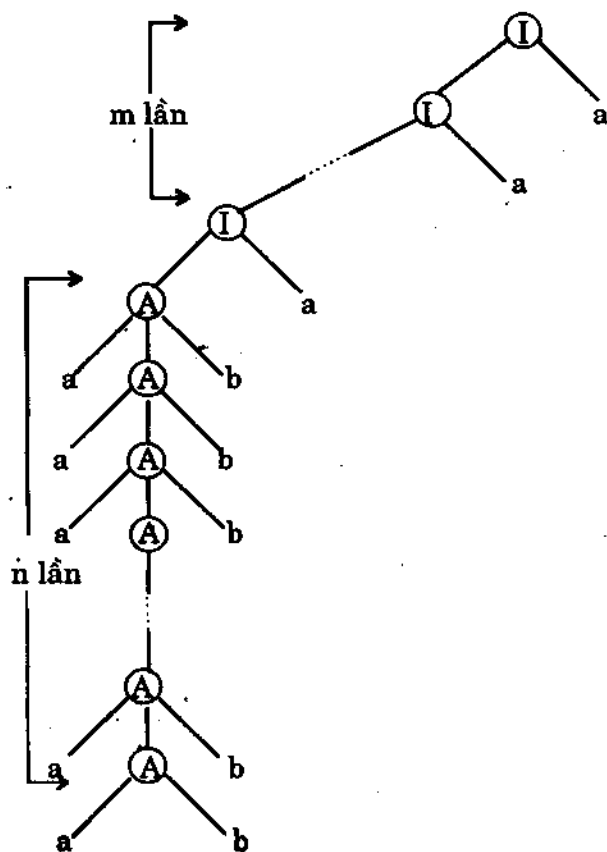
1. Ở mỗi đỉnh được gán một nhãn. Nhãn gán ở đỉnh là các ký hiệu trong tập $\Sigma \cup \Delta \cup \{\}$. Gốc của cây được gán nhãn là I .
2. Mỗi đỉnh trong được gán nhãn là một ký hiệu nào đó trong Δ .
3. Mỗi đỉnh ngoài (lá của cây) được gán nhãn là một ký hiệu trong tập $\Sigma \cup \{\}$.

4. Nếu đỉnh m được gán nhãn là $A \in \Delta$, còn các đỉnh $n_1, n_2, \dots, n_k$ là các con của đỉnh m theo thứ tự từ trái sang phải và được gán nhãn $X_1, X_2, \dots, X_k$ tương ứng thì $A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_k$ là một quy tắc trong R của văn phạm G .

Nếu đọc tất cả nhãn ở các lá (lá được gán nhãn trong tập $\Sigma \cup \{\epsilon\}$) theo thứ tự từ trái qua phải ta sẽ nhận được một xâu nào đó. Xâu đó là một phần tử trong $L(G)$ và được gọi là kết quả suy dẫn đầy đủ của G .

Ví dụ 1: Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta = \{I, A\}$ và $R = \{I \rightarrow Ia, I \rightarrow Aa, I \rightarrow aAb, I \rightarrow ab\}$.

Cây suy dẫn đầy đủ của xâu $a^n b^n a^m$ là cây dưới đây:



Ví dụ 2: Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$,

$$\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

$$\Delta = \{I\} \text{ và } R = \{I \rightarrow a_1 I a_1, I \rightarrow a_2 I a_2\},$$

$$a \in \Sigma.$$

Cho $\omega = a_1 a_2 \dots a_n$, ta ký hiệu

$$\hat{\omega} = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$$

Khi đó xâu

$$\omega \hat{\omega} = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 \in L(G)$$

và cây suy dẫn đầy đủ của nó có dạng (hình bên).

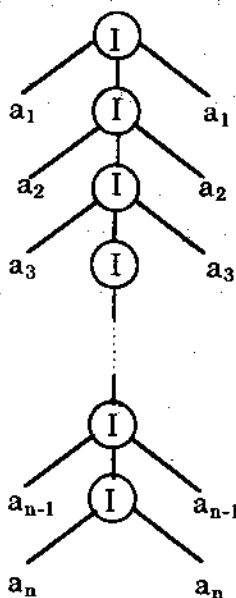
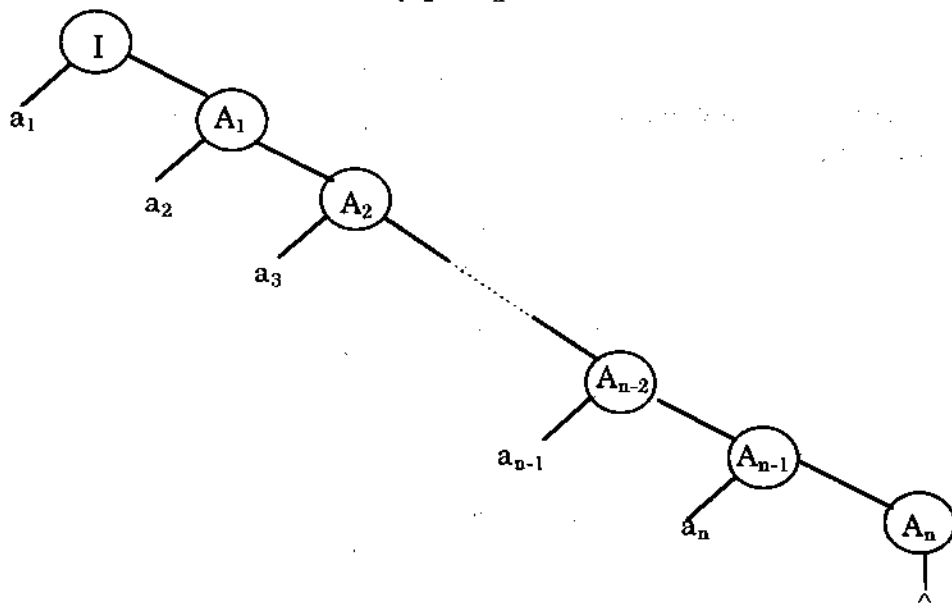
Ví dụ 3: Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, trong đó

$$\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

$$\Delta = \{I, A_1, A_2, \dots, A_n\} \text{ và}$$

$$R = \{I \rightarrow a_1 A_1, A_1 \rightarrow a_2 A_2, \dots, A_{n-1} \rightarrow a_n A_n, A_n \rightarrow \wedge\}, L(G) = \{a_1 a_2 \dots a_n\}.$$

Cây dẫn xuất của $\omega = a_1 a_2 \dots a_n$ là:



3. Sự nhập nhằng trong ngôn ngữ phi ngữ cảnh

Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, ta nói văn phạm G là *nhập nhằng* nếu tồn tại một xâu ω là kết quả của hai cây suy dẫn đầy đủ khác nhau trong G .

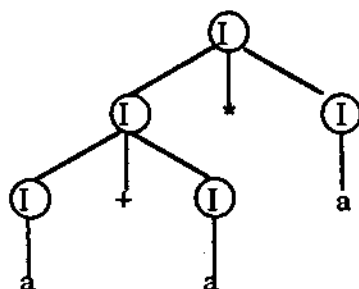
Ngôn ngữ do văn phạm G sinh ra là *ngôn ngữ nhập nhằng* nếu G là văn phạm nhập nhằng.

Ví dụ 4: Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$,

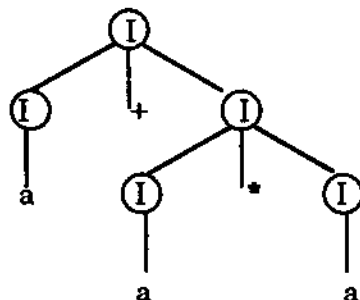
$$\Sigma = \{+, a, *\}, \Delta = \{I\}, R = \{I \rightarrow I+I, I \rightarrow I*I, I \rightarrow a\}.$$

ở đây ký hiệu $+$ là phép cộng, $*$ là phép nhân.

Xâu $a + a * a$ là kết quả của cây suy dẫn đầy đủ (thực hiện phép $*$ trước).



Xâu $a + a * a$ cũng là kết quả của cây suy dẫn đầy đủ (thực hiện phép $+$ trước).



Rõ ràng xâu $a + a * a$ là kết quả của hai cây suy dẫn khác nhau trong cùng một VPPNC. Nếu $\omega \in L(G)$ là kết quả của nhiều cây suy dẫn đầy đủ, thì xâu ω có nhiều cách phân tích cú pháp khác nhau. Mỗi một cây là một cách phân tích cú pháp. Văn phạm trong ví dụ này là văn phạm phi ngữ cảnh nhập nhằng.

§2. GIẢN LƯỢC CÁC VĂN PHẠM PHI NGỮ CẢNH

Trong một văn phạm thì ngữ cảnh có thể có nhiều yếu tố thừa, ví dụ có những ký hiệu không hề tham gia vào quá trình sinh các ngôn ngữ, hoặc có những quy tắc dạng $A \rightarrow B$ chỉ làm mất thời gian trong quá trình hình thành các xâu của ngôn ngữ. Vì lẽ đó cần loại bỏ những yếu tố dư thừa không có ích trong việc sinh ngôn ngữ, sao cho việc loại bỏ đó không làm ảnh hưởng tới quá trình sinh ngôn ngữ. Điều đó có nghĩa là chỉ cần giữ lại các ký hiệu và các quy tắc có ích trong văn phạm G mà chúng thực sự là cần thiết trong quá trình sinh ngôn ngữ mà thôi.

1. Ký hiệu có ích và ký hiệu thừa

Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$. X được gọi là ký hiệu có ích nếu tồn tại suy dẫn $I \vdash \alpha X \beta \vdash w$, ở đây $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup \Delta)^*$, $X \in \Sigma \cup \Delta$ và $w \in \Sigma^*$.

Nếu ký hiệu X không thỏa mãn điều kiện trên thì X được gọi là *ký hiệu thừa*. Như vậy X là ký hiệu thừa nếu từ X không thể dẫn ra một xâu $w \in \Sigma^*$. Ký hiệu X có tính chất như thế còn được gọi là *ký hiệu vô sinh*. Nếu từ ký hiệu ban đầu I không dẫn được một xâu nào có chứa ký hiệu X thì ta nói ký hiệu X là *ký hiệu không đến được*. Như vậy một ký hiệu là thừa nếu nó là ký hiệu vô sinh hoặc là không đến được.

Bổ đề 1. (Loại ký hiệu vô sinh)

Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ với $L(G) \neq \emptyset$. Ta có thể xây dựng được văn phạm phi ngữ cảnh G' tương đương với G , ở đây $G' = \langle \Sigma, \Delta', I, R' \rangle$ sao cho mỗi $A \in \Delta'$ có một xâu $w \in \Sigma^*$ để $A \vdash_G w$.

Chứng minh: Từ tập quy tắc R của G ta xây dựng Δ' như sau:

- Nếu trong R có quy tắc dạng $A \rightarrow w$ với $A \in \Delta$, $w \in \Sigma^*$ thì kết nạp A vào Δ' .

- Nếu $A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_n$ là quy tắc trong R mà $X_i \in \Sigma$ hoặc X_i là biến đã được kết nạp vào Δ' thì đưa A vào Δ' .

Cứ tiếp tục xét các quy tắc trong R ta sẽ xây dựng các ký hiệu cho tập Δ' . Vì R là hữu hạn nên quá trình sẽ được dừng lại sau một số hữu hạn bước. Khi đó ta xây dựng được tập Δ' .

Bây giờ ta xây dựng tiếp tập quy tắc R' gồm các quy tắc trong R mà các ký hiệu có mặt trong đó đều thuộc tập $\Sigma \cup \Delta'$. Rõ ràng $L(G)$ và Δ' chỉ chứa các ký hiệu A sao cho $\exists w \in \Sigma^*$ để $A \vdash w$, hay Δ' gồm các ký hiệu có ích (hữu sinh).

Bổ đề 2: (loại ký hiệu không đến được)

Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, ta có thể xây dựng được văn phạm phi ngữ cảnh G' tương đương với G , ở đây $G' = \langle \Sigma', \Delta', I, R' \rangle$ sao cho với mỗi $X \in \Sigma' \cup \Delta'$ đều tồn tại $\alpha, \beta \in (\Sigma' \cup \Delta')$ để $I \vdash \alpha X \beta$.

Chứng minh: a. Xây dựng tập Σ' và Δ' như sau:

Đưa ký hiệu I vào Δ' . Nếu một biến A đã được kết nạp vào Δ' và $A \rightarrow \alpha$, ở đây $\alpha \in (\Sigma' \cup \Delta')$ thì ta kết nạp các ký hiệu biến trong α vào Δ' , còn các ký hiệu kết thúc trong α thì kết nạp vào Σ' .

Thủ tục kết nạp trên sẽ ngừng khi không còn bổ sung thêm được bất kỳ ký hiệu nào nữa vào các tập Σ' và Δ' .

b. Tập quy tắc R' được xây dựng như sau:

R' bao gồm mọi quy tắc trong R mà các ký hiệu thuộc tập $\Sigma' \cup \Delta'$. Với cách xây dựng đó ta có $L(G) = L(G')$, trong đó G' gồm các ký hiệu đến được. Từ hai bổ đề trên ta có:

Định lý 1: Mọi ngôn ngữ phi ngữ cảnh không rỗng đều có thể được sinh ra từ một văn phạm phi ngữ cảnh không có ký hiệu thừa.

Ví dụ 5: Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, ở đây $\Sigma = \{a\}$, $\Delta = \{I, A, B\}$, $R = \{I \rightarrow AB, I \rightarrow a, A \rightarrow a\}$ văn phạm sinh ra ngôn ngữ $L(G) = \{a\}$ (tập gồm một chữ a).

Văn phạm phi ngữ cảnh G' nhận được từ G bằng cách áp dụng các kết quả trên là văn phạm phi ngữ cảnh không có ký hiệu thừa có dạng như sau:

$G' = \langle \Sigma', \Delta', I, R' \rangle$ với $\Sigma = \{a\}$, $\Delta' = \{\emptyset\}$, $R = \{I \rightarrow a\}$ và rõ ràng

$$L(G') = \{a\} = L(G).$$

2. Các $\wedge$ - quy tắc ($\wedge$ chỉ sâu rộng)

Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$. Nếu trong R có quy tắc $A \rightarrow \wedge$, $A \in \Delta$ thì ta nói trong G có $\wedge$ - quy tắc.

Bây giờ ta tìm cách loại các $\wedge$ - quy tắc khỏi tập quy tắc R của văn phạm G .

Nếu $L(G)$ không chứa từ $\wedge$ thì có thể loại hết $\wedge$ - quy tắc trong R ta được R' và $G' = \langle \Sigma, \Delta, I, R' \rangle$, vẫn tương đương với $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$. Nếu $\wedge \in L(G)$ thì ta không thể loại hết toàn bộ các $\wedge$ - quy tắc.

Định lý 2: Giả sử $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ là văn phạm phi ngữ cảnh và $L = L(G)$ là ngôn ngữ của văn phạm G . Khi đó $L \setminus \{\wedge\}$ được sinh ra bởi văn phạm phi ngữ cảnh $G' = \langle \Sigma', \Delta', I, R' \rangle$ không chứa các ký hiệu thừa và không chứa các $\wedge$ - quy tắc.

Chứng minh: Từ tập Δ ta xây dựng Δ' như sau:

Ký hiệu $A \in \Delta$ được gọi là ký hiệu triệt tiêu nếu tồn tại dẫn xuất $A \vdash \wedge$. Ta có thể xác định các ký hiệu triệt tiêu bằng phương pháp sau:

a. Nếu $A \rightarrow \wedge$ là một quy tắc trong R thì A là ký hiệu triệt tiêu.

b. Nếu $B \rightarrow \alpha$ là một quy tắc trong R mà α gồm các ký hiệu triệt tiêu thì B cũng là ký hiệu triệt tiêu. Lặp lại quá trình trên cho tới khi trong Δ không còn tìm được các ký hiệu triệt tiêu mới. Bằng cách loại tất cả các ký hiệu triệt tiêu tìm được trong Δ ta sẽ nhận được một tập Δ' mà trong nó không còn ký hiệu triệt tiêu.

Tập R' được xác định như sau:

Nếu $A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_n$ là một quy tắc trong R thì ta đưa vào R' quy tắc dạng $A \rightarrow \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$, trong đó:

Nếu X_i là ký hiệu không triệt tiêu thì đặt $\alpha_i = X_i$.

Nếu X_i là ký hiệu triệt tiêu thì đặt $\alpha_i = \wedge$.

Nếu mọi X_i là ký hiệu triệt tiêu thì thay $\alpha_i = \wedge$ mọi $i = 1, \dots, n$.

Khi đó $L(G') = L(G) - \{\wedge\}$.

Ví dụ 6: Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, trong đó

$$\Sigma = \{a, b\}, \Delta = \{I, A, B\}, R = \{I \rightarrow AB, A \rightarrow aA, A \rightarrow B \rightarrow bB, B \rightarrow \wedge\}.$$

Hãy loại bỏ $\wedge$ - quy tắc ra khỏi văn phạm phi ngữ cảnh trên.

Rõ ràng $\wedge \in L(G)$.

Theo định lý trên thì các quy tắc $A \rightarrow \wedge$ và $B \rightarrow \wedge$ có thể được loại trước tiên. Sau đó từ $I \rightarrow AB$ mà $B \rightarrow \wedge$ và $A \rightarrow \wedge$ nên ta có $I \rightarrow A, I \rightarrow B$. Cũng từ $A \rightarrow aA, B \rightarrow bB$, và $A \rightarrow \wedge, B \rightarrow \wedge$, Ta có các quy tắc $A \rightarrow a$ và $B \rightarrow b$. Tóm lại:

$$R' = \{I \rightarrow AB, I \rightarrow A, I \rightarrow B, A \rightarrow aA, A \rightarrow a, B \rightarrow bB, B \rightarrow b\}.$$

Rõ ràng văn phạm $G' = \langle \Sigma, \Delta, I, R' \rangle$ không có $\wedge$ - quy tắc và $L(G') = L(G) - \{\wedge\}$. Muốn $G \approx G'$, do $\wedge \in L(G)$ nên cần bổ sung thêm quy tắc $I \rightarrow \wedge$ vào R' .

3. Các quy tắc đơn

Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$. Nếu quy tắc trong R có dạng $A \rightarrow B$, ở đây $A, B \in \Delta$ thì ta nói $A \rightarrow B$ là quy tắc đơn. Quy tắc đơn có tác dụng làm kéo dài quá trình sinh ra ngôn ngữ, vì vậy ta sẽ tìm cách loại quy tắc đơn mà không làm ảnh hưởng tới quá trình sinh ra ngôn ngữ của văn phạm đã cho.

Chú ý: Quy tắc $A \rightarrow a$ với $A \in \Delta$ và $a \in \Delta$ không phải là quy tắc đơn.

Định lý 3: Mọi ngôn ngữ phi ngữ cảnh không chứa xâu $\wedge$ đều có thể sinh ra từ một văn phạm phi ngữ cảnh không có ký hiệu thừa, không có các $\wedge$ - quy tắc và quy tắc đơn.

Chứng minh: Giả sử cho văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ là văn phạm phi ngữ cảnh và $L = L(G)$ là ngôn ngữ phi ngữ cảnh do G sinh ra. Ta xây dựng văn phạm phi ngữ cảnh $G^* = \langle \Sigma, \Delta^*, I, R^* \rangle$ sinh ra ngôn ngữ $L \setminus \{\wedge\} = L(G^*)$ trong đó G^* không có ký hiệu thừa, không có $\wedge$ - quy tắc và quy tắc đơn.

Theo định lý 2, từ văn phạm G ta xây dựng được văn phạm $G' = \langle \Sigma', \Delta', I, R' \rangle$ là văn phạm phi ngữ cảnh sao cho $L(G') = L \setminus \{\epsilon\}$, trong đó Δ' không có ký hiệu thừa, còn R' không có $\wedge$ quy tắc. Đặt $\Delta' = \Delta^*$. Xây dựng quy tắc R^* như sau:

Đưa tất cả các quy tắc không đơn của R' vào R^* .

Nếu trong R' có $A \rightarrow B$ với $A, B \in \Delta'$, khi đó sẽ tồn tại dẫn xuất $I \vdash \alpha A \beta \vdash \alpha B \beta \vdash \alpha w \beta$, ở đây $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup \Delta)^*$, $w \in \Sigma^*$ do Δ' gồm các ký hiệu không thừa.

Vậy thay cho $A \rightarrow B$ ta đưa vào R^* quy tắc $I \rightarrow \alpha A \beta$ và $A \rightarrow w$ đều là các quy tắc không đơn nhưng chức năng sinh ngôn ngữ tương đương với quy tắc $A \rightarrow B$.

Rõ ràng $L(G^*) = L(G') = L \setminus \{\epsilon\}$.

Ví dụ 7: Cho VPPNC $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, $\Sigma = \{a\}$, $\Delta = \{I, A, B\}$,

$$R = \{I \rightarrow I + A, I \rightarrow A, A \rightarrow A^*B, A \rightarrow B, B \rightarrow a\}$$

Hãy loại các quy tắc đơn trong văn phạm trên. Ta xây dựng $G^* = \langle \Sigma, \Delta, I, R^* \rangle$ với $R^* = \{I \rightarrow I + A, A \rightarrow A^*B, B \rightarrow a, I \rightarrow A^*B, A \rightarrow a, I \rightarrow a\}$

Không còn quy tắc đơn và $G \approx G^*$.

§3. DẠNG CHUẨN CỦA CHOMSKY

Định nghĩa 1: Văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ được gọi là *văn phạm chuẩn của Chomsky* nếu mọi quy tắc trong tập R đều có dạng $A \rightarrow BC$ hoặc $A \rightarrow a$, ở đây $A, B, C \in \Delta$, $a \in \Sigma$.

Định lý 4: Đối với văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ bao giờ cũng tồn tại một văn phạm phi ngữ cảnh dạng chuẩn $G_1 = \langle \Sigma, \Delta_1, I, R_1 \rangle$ tương đương với nó, tức là $L(G) = L(G_1)$.

Chứng minh: Giả sử $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ là văn phạm phi ngữ cảnh nào đó. Theo định lý 3 thì có thể giả thiết trong R không chứa các $\wedge$ - quy tắc và quy tắc đơn $A \rightarrow B$ với $A, B \in \Delta$.

Ta có thể giả thiết trong R chỉ gồm các quy tắc có dạng $A \rightarrow a$, hoặc $A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_n$ (ở đây $a \in \Sigma$, còn $A, B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta$).

Nếu G không thỏa mãn các điều kiện trên thì trong G còn quy tắc dạng $A \rightarrow X$ với X là một xâu gồm cả các ký hiệu chính và các ký hiệu hỗ trợ. Trong trường hợp này, ta xây dựng G' theo G sao cho $L(G) = L(G')$ và G' thỏa mãn điều kiện $R' = \{A \rightarrow a, A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_n\}$ như sau:

1. Với mỗi $a \in \Sigma$ ta đặt tương đương với ký hiệu mới $\bar{a}$. Sau đó đặt $\Delta' = \Delta \cup \{\bar{a} / a \in \Sigma\}$.

2. Trong tất cả các quy tắc của R mà trong đó vế phải của quy tắc có chứa ký hiệu chính $a \in \Sigma$ thì trong quy tắc đó ta thay a bởi $\bar{a}$ ta được $\bar{R}$.

Đặt $R' = \bar{R} \cup \{\bar{a} \rightarrow a / a \in \Sigma\}$.

Khi đó ta nhận được văn phạm $G' = \langle \Sigma', \Delta', I, R' \rangle$ tương đương với G nhưng R' chỉ gồm quy tắc dạng $A \rightarrow a, A \in \Delta', a \in \Sigma, A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_n, A, B_i \in \Delta', i = 1 \dots n$.

Vậy ta có thể giả thiết văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ chỉ chứa các quy tắc dạng $A \rightarrow a$ hoặc $A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_n$. Trong đó $a \in \Sigma, A, B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta$.

Có 2 trường hợp sau xảy ra đối với G :

Trường hợp 1. Nếu tập R gồm các quy tắc dạng:

$$A \rightarrow a, A \rightarrow BC, a \in \Sigma \text{ còn } A, B, C \in \Delta.$$

Khi đó định lý được chứng minh.

Trường hợp 2. Nếu tập R gồm các quy tắc $A \rightarrow a$ hoặc $A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_n$, với $n > 2$ thì $A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_n$ có thể thay bởi các quy tắc $A \rightarrow B_1 K_1, K_1 \rightarrow B_2 K_2, K_2 \rightarrow B_3 K_3, \dots, K_{n-3} \rightarrow B_{n-2} K_{n-2}, K_{n-2} \rightarrow B_{n-1} B_n$, ở đây $K_1, K_2, \dots, K_{n-2}$ là ký hiệu phụ mới.

Đặt $\Delta_1 = \Delta' \cup \{K_1, K_2, \dots, K_{n-2}\}, R_1 = \{A \rightarrow a, A \rightarrow B_1 K_1,$

$$K_1 \rightarrow B_2 K_2, K_2 \rightarrow B_3 K_3, \dots, K_{n-3} \rightarrow B_{n-2} K_{n-2}, K_{n-2} \rightarrow B_{n-1} B_n\}$$

Khi đó $G_1 = \langle \Sigma, \Delta_1, I, R_1 \rangle \approx G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ thỏa mãn điều kiện định lý. Định lý đã được chứng minh.

Ví dụ 8: Cho văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta = \{I, A\}$,

$$R = \{I \rightarrow aAI, I \rightarrow a, A \rightarrow IbA, A \rightarrow II, A \rightarrow ba\}.$$

Ta xây dựng văn phạm $G_1 = \langle \Sigma, \Delta_1, I, R_1 \rangle$ tương đương với văn phạm G sao cho G_1 là dạng chuẩn CHOMSKY. Trước hết ta xây dựng văn phạm $G' = \langle \Sigma, \Delta', I, R' \rangle$, với $\Delta' = \{I, A, \bar{a}, \bar{b}\}$,

$R' = \{I \rightarrow a, I \rightarrow \bar{a}AI, A \rightarrow I\bar{b}A, A \rightarrow II, A \rightarrow \bar{b}\bar{a}, \bar{a} \rightarrow a, \bar{b} \rightarrow b\}$, trong đó R' gồm các quy tắc có dạng $A \rightarrow a$ và $A \rightarrow B_1B_2 \dots B_n$, với $a \in \Sigma$ còn $A, B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta'$.

Tiếp theo ta xây dựng văn phạm chuẩn Chomsky $G_1 = \langle \Sigma, \Delta_1, I, R_1 \rangle$ có $\Sigma = \{a, b\}$, $R_1 = \{I \rightarrow a, I \rightarrow \bar{a}B_1, B_1 \rightarrow AI, A \rightarrow IB_2, B_2 \rightarrow \bar{b}A, A \rightarrow II, A \rightarrow \bar{b}\bar{a}, \bar{a} \rightarrow a, \bar{b} \rightarrow b\}$.

Rõ ràng $L(G') = L(G_1)$. Vì $L(G') = L(G)$, suy ra $L(G) = L(G_1)$ với G_1 là văn phạm ở dạng chuẩn CHOMSKY.

Ví dụ 9: Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ như sau:

$$\Sigma = \{a, b\}, \Delta = \{I, A, B\},$$

$R' = \{I \rightarrow bA, I \rightarrow aB, A \rightarrow bAA, A \rightarrow aI, A \rightarrow a, B \rightarrow aBB, B \rightarrow bI, B \rightarrow b\}$.
Tìm dạng chuẩn.

Xây dựng văn phạm $G' = \langle \Sigma, \Delta', I, R' \rangle$ với

$$\Sigma = \{a, b\}, \Delta' = \Delta \cup \{\bar{a}, \bar{b}\} = \{I, A, B, \bar{a}, \bar{b}\},$$

$$R' = \{I \rightarrow \bar{b}A, I \rightarrow \bar{a}B, A \rightarrow \bar{b}AA, A \rightarrow \bar{a}I, A \rightarrow a, B \rightarrow \bar{a}BB, B \rightarrow \bar{b}I, B \rightarrow b, \bar{a} \rightarrow a, \bar{b} \rightarrow b\}.$$

Rõ ràng $L(G') = L(G)$.

Từ G' ta xây dựng dạng chuẩn Chomsky $G_1 = \langle \Sigma, \Delta_1, I, R_1 \rangle$ như sau:

$$\Sigma = \{a, b\}, \Delta_1 = \{I, A, B, \bar{a}, \bar{b}, F_1, F_2\},$$

$$R_1 = \{I \rightarrow \bar{b}A, I \rightarrow \bar{a}B, A \rightarrow \bar{a}F_1, F_1 \rightarrow AA, A \rightarrow \bar{a}I, A \rightarrow a, B \rightarrow \bar{a}F_2, F_2 \rightarrow BB, B \rightarrow \bar{b}I, B \rightarrow b, \bar{a} \rightarrow a, \bar{b} \rightarrow b\}.$$

Rõ ràng $L(G') = L(G_1)$ hay $L(G) = L(G_1)$.

§4. ÔTÔ MÁT ĐẨY XUỐNG (Pushdown Automata)

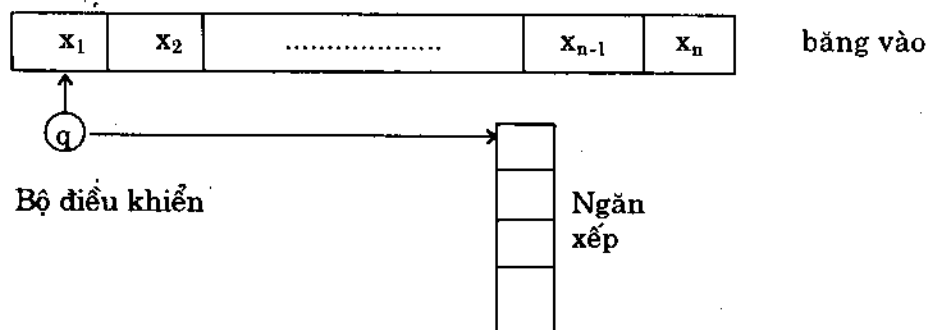
Như ta đã biết, lớp các ngôn ngữ chính quy do văn phạm chính quy sinh ra cũng trùng với lớp các ngôn ngữ được đoán nhận bởi ô tô mát hữu hạn (đơn định hoặc không đơn định).

Tương tự chúng ta sẽ thấy trong chương này là lớp ngôn ngữ phi ngữ cảnh do các văn phạm phi ngữ cảnh sinh ra sẽ trùng với lớp các ngôn ngữ được đoán nhận bởi ô tô mát đẩy xuống không đơn định.

Dáng lưu ý là chỉ có lớp ô tô mát đẩy xuống không đơn định mới có thể đoán nhận hết lớp ngôn ngữ phi ngữ cảnh. Còn ô tô mát đẩy xuống đơn định chỉ có khả năng đoán nhận được lớp con thực sự của lớp ngôn ngữ phi ngữ cảnh mà thôi. Tuy vậy lớp ngôn ngữ được đoán nhận bởi lớp các ô tô mát đẩy xuống đơn định là khá rộng, nó bao gồm phần lớn các ngôn ngữ lập trình hiện nay. Ở đây chúng ta chỉ đề cập tới ô tô mát đẩy xuống không đơn định, gọi tắt là NDPA hay gọn hơn là PA.

1. Ô tô mát đẩy xuống

PA bao gồm một băng vào, một ngăn xếp và một bộ điều khiển như hình dưới đây:



Ô tô mát đẩy xuống cũng như ô tô mát hữu hạn có bộ điều khiển là tập hữu hạn các trạng thái. Đầu đọc của ô tô mát cho phép đọc lần lượt các ký hiệu trên băng vào từ trái sang phải. Ngoài ra PA còn có thêm

bằng làm việc (ngăn xếp) hay Stack, nhờ có nó mà bộ nhớ của PA được tăng lên so với khả năng nhớ của ô tô mát hữu hạn. Ngăn xếp được tổ chức theo nguyên tắc ký hiệu vào sau thì ra trước, giống như ổ nạp đạn. Khi đưa ký hiệu vào ngăn xếp thì ký hiệu đó được trở thành ký hiệu đầu của ngăn xếp. Khi ngăn xếp đọc thì ký hiệu đó là ký hiệu trên cùng và khi ký hiệu đó được đọc xong thì nó sẽ bị loại khỏi ngăn xếp. Một ngăn xếp như vậy còn được gọi là một danh sách đẩy xuống.

Một bước chuyển của PA

Căn cứ vào trạng thái hiện tại của bộ điều khiển, ký hiệu vào mà đầu đọc đang quan sát và ký hiệu đầu của ngăn xếp, ô tô mát đẩy xuống sẽ chuyển sang một trạng thái mới nào đó và đồng thời đầu đọc có thể được chuyển sang ô bên phải. Nếu đầu đọc chuyển sang ô bên phải thì ta gọi quá trình trên là một bước chuyển. Ngược lại, nếu ký hiệu vào không ảnh hưởng tới bước chuyển thì ta gọi đó là bước chuyển “nhắm mắt” và trong bước chuyển đó đầu đọc vẫn đứng yên tại chỗ. Thực chất của bước chuyển “nhắm mắt” là sự tạm ngừng quan sát bằng vào để chấn chỉnh lại ngăn xếp. Có 2 cách đoán nhận xâu vào của PA:

Cách 1: Xâu vào được đọc xong và PA chuyển được về một trạng thái kết thúc nào đó.

Cách 2: Xâu vào được đọc xong và ngăn xếp trở thành rỗng. Sau này ta sẽ chỉ ra hai cách thừa nhận trên là tương đương.

Ví dụ 10: Cho văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$,

với $\Sigma = \{0, 1, c\}$,

$\Delta = \{I\}$, $R = \{I \rightarrow 0I0, I \rightarrow 1I1, I \rightarrow c\}$.

Để nhận thấy rằng các xâu có dạng $w c \bar{w}$ (với $w \in \{0, 1\}^*$, $\bar{w}$ là xâu viết các ký hiệu của xâu w theo một thứ tự ngược lại) được sinh ra bởi văn phạm G . Chẳng hạn đối với xâu $w = 010011$ thì xâu $w c \bar{w} = 010011c110010$ sẽ có dẫn xuất đầy đủ sau đây:

$D = (I, 0I0, 01I10, 010I010, 0100I0010, 01001I10010,$
 $010011I110010, 010011c110010)$ hay $w c \bar{w} \in L(G)$.

Mặt khác xâu $w c \bar{w}$ có thể được đoán nhận bởi PA như sau:

Trước hết đặt $x = wc\bar{w}$ lên băng vào. Đầu đọc dịch chuyển từ trái sang phải. Ban đầu ngăn xếp rỗng. PA có hai trạng thái p, q trong đó p là trạng thái ban đầu. Khi ở trạng thái ban đầu p , đầu đọc đọc ký hiệu trên băng vào là 0 hoặc 1 và nó đưa ký hiệu đó vào ngăn xếp. Trạng thái của PA lúc đó vẫn là p . Đầu đọc dịch chuyển sang bên phải 1 ô và đọc ký hiệu trên ô mới này. Nếu ký hiệu này là 0 hoặc 1 thì PA đưa ký hiệu đó vào ngăn xếp, trạng thái của ô tô mát vẫn là p và đầu đọc lại được chuyển sang phía phải 1 ô.

Quá trình đó vẫn tiếp tục cho tới khi đầu đọc gặp ký hiệu c . Khi đó ô tô mát sẽ chuyển trạng thái p sang trạng thái q và đầu đọc chuyển sang phải một ô. Tại thời điểm này ngăn xếp xuất hiện x . Ký hiệu bên phải nhất của w nằm trên cùng của ngăn xếp, còn trạng thái của ô tô mát là q . Đầu đọc đang chỉ ô bên phải ký hiệu c . Nếu ký hiệu của ô này là ký hiệu ở ô trên cùng của ngăn xếp thì PA loại ký hiệu trên cùng ra khỏi ngăn xếp, ký hiệu dưới nó lại lên vị trí đầu của ngăn xếp. PA chuyển đầu đọc sang phải 1 ô, còn trạng thái vẫn là q . Quá trình đó cứ tiếp tục và có hai khả năng xảy ra :

1) PA đọc hết x và ngăn xếp trở thành rỗng thì PA dừng lại và đoán nhận được $x = wc\bar{w}$.

2) Các ký hiệu ở ngăn xếp chưa bị loại hết thì đầu đọc gặp ký hiệu trên x vào khác ký hiệu trên cùng của ngăn xếp. Trong trường hợp này PA không đoán nhận x .

Tóm lại ta đã xây dựng được ô tô mát đẩy xuống đoán nhận NNPNC gồm và chỉ gồm các x có dạng $wc\bar{w}$.

Nhận xét: Nhờ có ngăn xếp mà PA có khả năng nhớ được nửa đầu của $x = wc\bar{w}$ với w có độ dài tùy ý và sau đó nó so sánh dần với nửa cuối $\bar{w}$ của x . Ô tô mát hữu hạn không có khả năng này.

Bây giờ ta định nghĩa một cách hình thức ô tô mát đẩy xuống như sau:

Định nghĩa 2: Một ô tô mát đẩy xuống PA là một bộ sắp thứ tự $M = \langle \Sigma, Q, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$, ở đây:

Σ - là tập hữu hạn, khác rỗng các ký hiệu vào;

Q - tập hữu hạn, khác rỗng các trạng thái sao cho $\Sigma \cap Q = \emptyset$,

Γ - tập hữu hạn, khác rỗng các ký hiệu mà ta gọi là các ký hiệu của ngăn xếp;

$Z_0 \in \Gamma$ là ký hiệu đặc biệt, gọi là ký hiệu đáy của ngăn xếp (còn gọi là ký hiệu đầu của danh sách đẩy xuống);

$q_0 \in Q$ - gọi là trạng thái ban đầu;

$F \subseteq Q$ - tập trạng thái kết thúc;

$\delta: \Sigma \cup \{\epsilon\} \times Q \times \Gamma^* \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$ là hàm chuyển của M .

Bước chuyển của PA

a. Một đẳng thức dạng: $\delta(a, q, Z) = \{(q_1, \gamma_1), (q_2, \gamma_2), \dots, (q_m, \gamma_m)\}$, trong đó $Z \in \Gamma$, $a \in \Sigma$, $q_i \in Q$, $\gamma_i \in \Gamma^*$, $i = 1 \dots m$ được gọi là một bước chuyển của PA. Nó đang ở trạng thái q , đọc ký hiệu a ở băng vào và Z là ký hiệu ở đỉnh ngăn xếp. Khi đó nó chuyển sang trạng thái q_i , thay ký hiệu Z ở đỉnh ngăn xếp bằng xâu γ_i , $i=1\dots m$, đồng thời chuyển đầu đọc sang bên phải một ô. Quy ước rằng khi đưa γ_i vào ngăn xếp, ký hiệu bên trái nhất của γ_i sẽ nằm ở phần dưới, còn ký hiệu bên phải nhất của γ_i sẽ nằm ở ô đầu ngăn xếp.

b. Một đẳng thức có dạng: $\delta(\wedge, q, Z) = \{(q_1, \gamma_1), (q_2, \gamma_2), \dots, (q_m, \gamma_m)\}$

Diễn tả một bước chuyển “nhắm mắt” của PA: Ô tô máy ở trạng thái q , ký hiệu Z ở đỉnh ngăn xếp. Khi đó PA chuyển trạng thái q về q_i và thay $Z \in \Gamma$ ở đỉnh ngăn xếp bởi xâu γ_i ($1 \leq i \leq m$), còn đầu đọc thì không dịch chuyển.

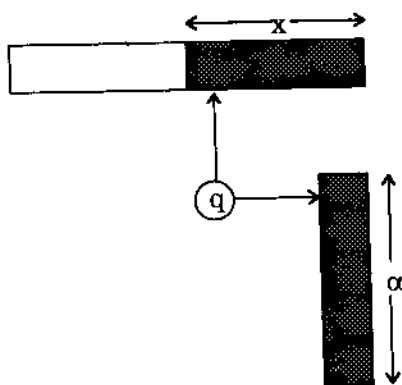
2. Ngôn ngữ đoán nhận của PA

Ở một thời điểm, tình huống tức thời của PA xác định bởi 3 yếu tố:

- Xâu $\alpha \in \Gamma^*$ trong ngăn xếp (với quy ước là ký hiệu bên trái nhất (bên phải nhất) của α nằm ở đáy (ở đỉnh) ngăn xếp).

- Trạng thái $q \in Q$.

- Phần xâu vào $x \in \Sigma^*$ chưa được đọc đến trên băng vào (với quy ước: ký hiệu bên trái nhất của x là ký hiệu sẽ được đọc tiếp). Hình trạng hiện thời của PA có thể mô tả như ở hình dưới đây:



Hình trạng tức thời của PA ta ký hiệu là K thì $K = (x, q, \alpha)$. Quá trình đoán nhận xâu vào $\omega \in \Sigma^*$ của PA là quá trình biến đổi hình trạng bắt đầu từ hình trạng ban đầu (ω, q_0, z_0) thông qua các suy dẫn trực tiếp $\vdash$, và suy dẫn gián tiếp $\vdash^*$ được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 3: Giả sử có hai hình trạng $K = (\omega, q, v)$ và $K' = (\omega', q', v')$.

1. Ta nói hình trạng K' suy dẫn trực tiếp từ hình trạng K (ký hiệu $K \vdash K'$), nếu có $\omega = x\omega_0$, $v = v_0k$, $v' = v_0m$ thỏa mãn:

$$x \in \Sigma \cup \{\wedge\}, \omega' = \omega_0 \text{ đồng thời } (q', m) \in \delta(x, q, k).$$

2. Ta nói hình trạng K' suy dẫn gián tiếp từ hình trạng K (ký hiệu $K \vdash^* K'$), nếu có một dãy các suy dẫn trực tiếp $K = K_0, K_1, \dots, K_t$, ở đây $K_i \vdash K_{i+1}$ ($i=0, 1, \dots, t-1$).

Sự đoán nhận ngôn ngữ của PA có thể thực hiện được theo hai cách. Giả sử M là một PA. Ký hiệu $T(M)$ là tập các ngôn ngữ đoán nhận được bởi M theo tập trạng thái kết thúc. $\text{Null}(M)$ là các ngôn ngữ đoán nhận được bởi M theo kiểu ngăn xếp (Stack) rỗng. Ta có thể định nghĩa $T(M)$ và $\text{Null}(M)$ như sau:

$$T(M) = \{\omega / \omega \in \Sigma^* \text{ sao cho } (\omega, q_0, Z_0) \vdash (\wedge, q, v) \text{ với } q \in F, v \in \Gamma^*\}.$$

$$\text{Null}(M) = \{\omega / \omega \in \Sigma^*, (\omega, q_0, Z_0) \vdash (\wedge, q, \wedge) \text{ với } q \in Q\}$$

lưu ý rằng nếu đoán nhận ngôn ngữ theo ngăn xếp rỗng thì trong $M = \langle \Sigma, Q, \Gamma, \delta, q_0, Z_0 \rangle$ cho $F = \emptyset$.

Bây giờ ta phát biểu và chứng minh định lý trọng tâm sau:

Định lý 5 : Đối với mọi ngôn ngữ phi ngữ cảnh L có tồn tại một ô tô mát đẩy xuống không đơn định M đoán nhận L .

Chứng minh : Giả sử $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ là một văn phạm phi ngữ cảnh sinh ra ngôn ngữ phi ngữ cảnh L hay $L(G) = L$.

Ta xây dựng ô tô mát đẩy xuống không đơn định

$M = \langle \Sigma, Q, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ đoán nhận L với:

Σ là bảng các ký hiệu vào (chính là Σ của G),

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ là tập các trạng thái,

$\Gamma = \Sigma \cup \Delta \cup \{\%\}$ là tập các ký hiệu ngăn xếp,

$Z_0 = I$ là ký hiệu đầu của ngăn xếp,

$q_0 \in Q$ là trạng thái ban đầu,

$F = \{q_2\}$ là tập trạng thái kết thúc,

Hàm chuyển $\delta: \Sigma \cup \{\wedge\} \times Q \times \Gamma^* \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$ định nghĩa qua các biểu thức sau:

1. $\delta(\wedge, q_1, \xi) = \{(q_1, \bar{w}) / \xi \rightarrow w \in R, \xi \in \Delta, w \in \Gamma^*\}$ ($\bar{w}$ là ký hiệu xâu được thành lập từ xâu w với thứ tự ngược lại).

2. $\delta(a, q_1, a) = \{(q_1, \wedge)\}$ đối với mọi $a \in \Sigma$.

3. $\delta(\wedge, q_1, \%) = \{(q_2, \%)\}$.

4. $\delta(\wedge, q_0, I) = \{(q_1, \%I)\}$.

Ký hiệu $\%$ là ký hiệu đáy ngăn xếp đặc biệt không thuộc tập $\Sigma \cup \Delta$.

Giả sử $w \in L = L(G)$. Khi đó với w có tồn tại dẫn xuất đầy đủ trong G là $D = (I, u_1\xi_1v_1, u_1u_2\xi_2v_2, \dots, u_1 \dots u_{n-1}\xi_{n-1}v_{n-1}, u_1, u_2, \dots, u_n = w)$, ở đây $\xi_i \in \Delta, u_i \in \Sigma, v_i \in \Sigma \cup \Delta$ ($1 \leq i \leq n-1$) và $u_n \in \Sigma^*$.

Dựa vào các quy tắc của G sử dụng trong dẫn xuất đầy đủ D của xâu $w = u_1u_2 \dots u_n$, ô tô mát đẩy xuống M đoán nhận w theo nguyên tắc sau:

Trên băng vào của M ta đặt xâu $w = u_1u_2 \dots u_n$.

Dựa trên M áp dụng hàm chuyển trong các biểu thức 4, 1, 2 ta có $(w, q_0, Z_0) = (w, q_0, I) \vdash^4 (w, \underline{q_1}, \%I) = (u_1 u_2 \dots u_n, q_1, \%I) \vdash^1 (u_1 u_2 \dots u_n, q_1, \% \overline{v_1 \xi_1 u_1}) \vdash^2 (u_2 u_3 \dots u_n, q_1, \% \overline{v_1 \xi_1})$, chú ý $u_1, \overline{v_1}$ là xâu thành lập từ xâu u_1, v_1 theo thứ tự ngược lại.

Giả sử các quy tắc tiếp theo (sau quy tắc $I \rightarrow u_1 \xi_1 v_1$) trong D là $\xi_i \rightarrow Z_i \in R$ ($i = 1, 2, \dots, n-2$) với $\xi_i \in \Delta, Z_i \in \Sigma \cup \Delta$ sao cho $Z_i v_i = u_{i+1} \xi_{i+1} v_{i+1}$. Khi đó M sau thời điểm thực hiện quy tắc $I \rightarrow u_1 \xi_1 v_1$ nó có hình trạng $(u_2 u_3 \dots u_n, q_1, \% \overline{v_1 \xi_1})$. Hình trạng của M khi áp dụng quy tắc $\xi_i \rightarrow Z_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-2$) biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} (u_2 u_3 \dots u_n, q_1, \% \overline{v_1 \xi_1}) &\vdash^1 (u_3 \dots u_n, q_1, \% \overline{v_1 \overline{Z_1}}) = \\ &= (u_2 u_3 \dots u_n, q_1, \% \overline{v_2 \xi_2 u_2}) \vdash^2 (u_3 \dots u_n, q_1, \% \overline{v_2 \xi_2}) \vdash \dots \\ &\vdash (u_n, q_1, \% \overline{v_{n-1} \xi_{n-1}}) \quad (*). \end{aligned}$$

Trong D ta sử dụng quy tắc $\xi_{n-1} \rightarrow Z_{n-1} \in R$ với $Z_{n-1} v_{n-1} = u_n$ ta có hình trạng của M là: $(u_n, q_1, \% \overline{v_{n-1} \xi_{n-1}}) \vdash (u_n, q_1, \% \overline{v_{n-1} \overline{Z_{n-1}}}) = (u_n, q_1, \% \overline{u_n}) \vdash^2 (\wedge, q_1, \%) \vdash^3 (\wedge, q_2, \%) \quad (**).$

Từ (*) và (**) ta có suy dẫn gián tiếp của w trong M là $(w, q_0, Z_0) \vdash (\wedge, q_2, \%)$ mà $q_2 \in F$ nên đoán nhận được xâu w . Định lý đã được chứng minh.

Bây giờ ta chỉ ra sự đoán nhận của ô tô máy đẩy xuống M theo tập trạng thái kết thúc và theo ngăn xếp rỗng là tương đương nhau.

Định lý 6 : Đối với mỗi ô tô máy đẩy xuống M_1 đều tồn tại một ô tô máy đẩy xuống M_2 sao cho $\text{Null}(M_2) = T(M_1)$.

Chứng minh : Giả sử $M_1 = \langle \Sigma_1, Q_1, \Gamma_1, \delta_1, q_1^0, Z_1^0, F_1 \rangle$ là ô tô máy đẩy xuống nào đó.

Ta xây dựng ô tô máy đẩy xuống $M_2 = \langle \Sigma_2, Q_2, \Gamma_2, \delta_2, q_2^0, Z_2^0, F_2 \rangle$ sao cho $\text{Null}(M_2) = T(M_1)$.

Muốn vậy ta đưa thêm vào ký hiệu trạng thái mới $q_1^1, q_1^2 \notin Q_1$ và ký hiệu ngăn kéo mới $\% \notin \Gamma_1$ và đặt

$$\Sigma_2 = \Sigma_1,$$

$$Q_2 = Q_1 \cup \{q_1^1, q_1^2\},$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\%\},$$

$$q_0^2 = q_1^1,$$

$$Z_0^2 = \%,$$

$$F_2 = \emptyset$$

$\delta_2: \Sigma \cup \{\wedge\} \times Q_2 \times \Gamma_2^* \rightarrow 2^{Q_2 \times \Gamma_2^*}$ được định nghĩa như sau:

$$\delta_2(\wedge, q_1^1, \%) = \{(q_0^1, \%, Z_0^1)\},$$

$$\delta_2(x, q, \alpha) = \delta_1(x, q, \alpha) \text{ với } x \in \Sigma_1, q \in Q, \alpha \in \Gamma_1.$$

$$\delta_2(\wedge, q, \alpha) = \begin{cases} \delta(\wedge, q, \alpha) & \text{nếu } q \in Q_1 \setminus F_1, \alpha \in \Gamma_1. \\ \delta(\wedge, q, \alpha) \cup \{(q_2^1, \wedge)\} & \text{nếu } q \in F_1, \alpha \in \Gamma_1. \end{cases}$$

$$\delta_2(\wedge, q, \%) = \{(q_2^1, \wedge)\} \text{ với } q \in F_1$$

$$\delta_2(\wedge, q_1^2, \alpha) = \{(q_2^1, \wedge)\} \text{ với } \alpha \in \Gamma_1 \cup \{\%\}.$$

Bây giờ ta chỉ ra $\text{Null}(M_2) = T(M_1)$.

Giả sử $w \in \text{Null}(M_2)$ khi đó theo cách làm việc của M_2 thì ta có một dãy các hình trạng sau:

$$(w, q_0^2, Z_0^2) = (w, q_1^1, \%) \vdash^{M_2} K_1 \vdash^{M_2} K_2 \vdash^{M_2} \dots \vdash^{M_2} K_t = (\wedge, q, \wedge) \text{ với}$$

$$t \geq 2, K_i = (w_i, q_i, v_i), w_i \in \Sigma_1^*, q_i \in Q_2, v_i \in \Gamma_2^* (i=1, 2, \dots, t).$$

Theo cách xây dựng của M_2 thì

$K_1(w, q_0^1, \%Z_0^1)$, $K_t = (\wedge, q_1^2, \wedge)$ và $w \in \text{Null}(M_2)$. Từ đó $\exists i < t$ sao cho:

$$K_i = (\wedge, q_i, \%v_i') \vdash^{M_2} (q_1^2, \%v_{i+1}'), \text{ ở đây } q_i \in F_1, v_i', v_{i+1}' \in \Gamma_1^* \text{ và}$$

$$K_j = (w_j, q_j, \%v_j') \vdash^{M_2} (w_{j+1}, q_{j+1}, \%v_{j+1}'), \text{ ở đây } w_j \in \Sigma_1^*, q_j \in Q_1,$$

$$v_j' \in \Gamma_1^* (1 \leq j \leq i).$$

Cũng như $K_j = (\wedge, q_1^2, \%v_j')$, ở đây $v_j' \in \Gamma_1^* (i < j < t)$.

Từ đó $(w, q_0^1, Z_0^1) \vdash (\wedge, q_i, \%v_i)$ và do $q_i \in F_1$ suy ra $w \in T(M_1)$.

Tóm lại ta có bao hàm thức $\text{Null}(M_2) \subseteq T(M_1)$.

Bao hàm thức ngược lại $T(M_1) \subseteq \text{Null}(M_2)$ được suy trực tiếp từ cách xây dựng M_2 từ M_1 .

Để kết thúc phần này ta chứng minh định lý sau đây:

Định lý 7 : Đối với mỗi ô tô mát đẩy xuống M bao giờ cũng xây dựng được một văn phạm phi ngữ cảnh G sao cho $\text{Null}(M) = L(G)$.

Chứng minh : Giả sử $M = \langle \Sigma, Q, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ là một ô tô mát đẩy xuống. Theo định lý 6 ta cần chỉ ra có văn phạm phi ngữ cảnh $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ sao cho $\text{Null}(M) = L(G)$. Không giảm tính tổng quát giả sử $\epsilon \notin \text{Null}(M)$. Ta xây dựng văn phạm G ở trên như sau:

Σ là Σ của M ,

$\Delta = \{I\} \cup \{[q_1, \alpha, q_2] / q_1, q_2 \in Q, \alpha \in \Gamma \cup \Sigma\}$,

I là ký hiệu hỗ trợ ban đầu của G .

$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$, ở đây:

$R_1 = \{I \rightarrow [q_0, \alpha, q] / q \in Q, \alpha \in \Gamma\}$,

$R_2 = \{[t_1, \alpha, t_2] \rightarrow x[t_3, \alpha_n, q_{n-1}][q_{n-1}, \alpha_{n-1}, q_{n-2}] \dots [q_2, \alpha_2, q_1][q_1, \alpha_1, t_2] /$
với $n \in \{1, 2, \dots\}$, $q_i \in Q$ ($1 \leq i \leq n$), $t_1, t_2, t_3 \in Q$, $x \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, và
 $(t_3, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \in \delta(x, t_1, \alpha)\}$.

$R_3 = \{[t_1, \alpha, t_2] \rightarrow x / (t_2, \wedge) \in \delta(x, t_1, \alpha) \text{ với } \alpha \in \Gamma, t_1, t_2 \in Q, x \in \Sigma \cup \{\epsilon\}\}$.

Người ta đã chỉ ra được với G định nghĩa như trên là văn phạm phi ngữ cảnh mà $L(G) = \text{Null}(M)$, tức là lớp ngôn ngữ do G sinh ra đoán nhận bởi ô tô mát đẩy xuống M .

§5. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TẮT ĐỊNH TRÊN LỚP NGÔN NGỮ PHI NGỮ CẢNH

Trong lý thuyết ngôn ngữ, một trong những vấn đề người ta quan tâm là: Cho L là một ngôn ngữ, ω là một xâu nào đó trên bảng ký tự Σ . Làm thế nào để biết được $\omega \in L$ hay không? Dưới đây ta xem xét bài toán trên trong khuôn khổ văn phạm phi ngữ cảnh và người ta đã dùng

các phương pháp phân tích Top-Down, Bottom-Up và phương pháp phân tích tất định.

Phân tích Top-Down và Bottom-Up có nhược điểm là khi đưa xâu vào độ dài n thì số bước mà thuật toán cần phải phân tích là C^n (C - hằng số nào đó).

Nói cách khác, khi chiều dài của xâu vào tăng thì thời gian phân tích của thuật toán tăng rất nhanh. Vì vậy, trong phần này chúng ta đề cập tới bộ phân tích làm việc hiệu quả hơn, cụ thể thời gian phân tích tối đa là $C.n$ (n - độ dài xâu vào, C - hằng số). Nhưng cách phân tích này chỉ làm việc được với một lớp con các văn phạm phi ngữ cảnh (tuy nhiên lớp con VPPNC đó cũng chứa khá nhiều ngôn ngữ lập trình). Lớp ngôn ngữ có thể dùng phân tích tất định là lớp các văn phạm phi ngữ cảnh không nhập nhằng và không có quy tắc lặp trái.

1. Phân tích tất định

Cơ sở của phương pháp này là phân tích Top-Down và Ôtô mát đẩy xuống.

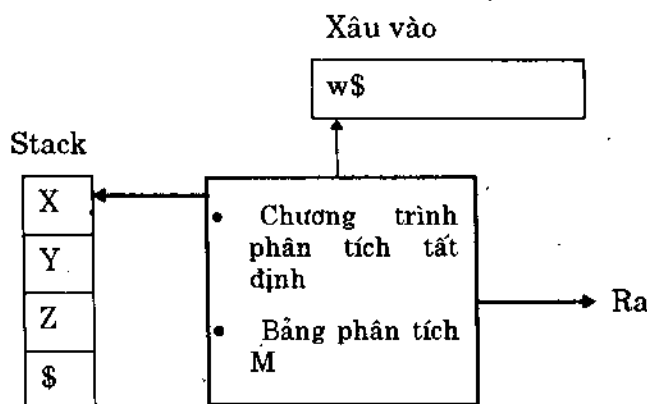
Mô hình của phân tích tất định bao gồm:

Một băng vào, chứa xâu cần phân tích với ký hiệu kết thúc của xâu là \$.

Một Stack (hay một danh sách đẩy xuống), chứa các ký hiệu của văn phạm và đáy được đánh dấu bởi \$.

Một bộ phận điều khiển chứa chương trình phân tích và bảng phân tích M , ở đây M là mảng hai chiều $M[A,a]$ với A - ký hiệu không kết thúc, a ký hiệu kết thúc.

Một đầu ra (Xem hình dưới đây).



Hoạt động của bộ phân tích tất định H

Hoạt động của bộ phân tích tất định H được xác định từ ký hiệu X trên đỉnh Stack và ký hiệu vào a của xâu vào. Các khả năng sau có thể xảy ra:

Nếu X là ký hiệu kết thúc:

1. $X = a = \$$, bộ phân tích dừng, tuyên bố phân tích thành công.
2. $X = a \neq \$$, bộ phân tích lấy X ra khỏi Stack và dịch con trỏ xâu vào sang phải 1 ô.

Nếu X là ký hiệu không kết thúc: bộ điều khiển sẽ xét vị trí $M[X, a]$ của bảng phân tích M. Vị trí này có thể là

+ Một quy tắc dạng: $M[X, a] = X \rightarrow uvw$. Trong trường hợp này lấy X ra khỏi Stack, và thay vào đó là wvu (u nằm trên cùng của Stack), bộ phân tích thực hiện chức năng mở rộng cây và in ra quy tắc vừa được sử dụng là $X \rightarrow uvw$.

+ Nếu $M[X, a] = \text{error}$ (vị trí lỗi), bộ phân tích sẽ gọi hàm khôi phục lỗi.

Ta có thể mô tả thuật toán tất định như sau:

Thuật toán:

Vào: Xâu vào w và bảng phân tích M của văn phạm G.

Ra: Nếu $w \in L(G)$ thì đưa ra suy dẫn trái nhất của w, nếu không sẽ thông báo lỗi.

Ở trạng thái đầu, Stack được đặt ký hiệu $\$$ còn xâu vào là $w\$$.

Repeat

đặt X là ký hiệu của đỉnh Stack và a là ký hiệu tiếp theo;

if $X = \$$ then X là ký hiệu kết thúc

if $X = a$ then

lấy X từ đỉnh Stack và loại a ra khỏi w

```

    else error();
else {X không phải là ký hiệu kết thúc}
    if  $M[X,a] = X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_k$  then
        Begin
            lấy X từ Stack;
            đưa  $Y_k Y_{k-1} \dots Y_1$  vào Stack; { $Y_1$  ở đỉnh}
        End
    else error();
Until  $X = \$$ ; {Stack rỗng}

```

Ta xét ví dụ minh hoạ sau đây:

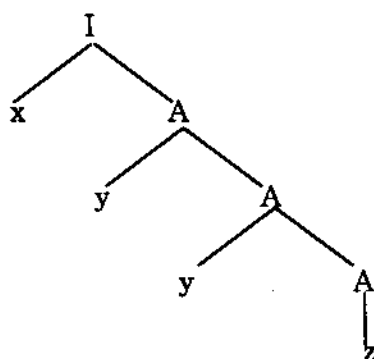
Ví dụ: Cho VPPNC $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$,

$$\Sigma = \{x, y, z\}, \Delta = \{I, A\}, R = \{I \rightarrow xA, A \rightarrow z \mid yA\}.$$

G có đoán nhận xâu vào $xyyz \in L(G)$?

Stack	input	output
\$I	xyyz\$	
\$Ax	xyyz\$	$I \rightarrow xA$
\$A	yyz\$	
\$Ay	yyz\$	$A \rightarrow yA$
\$A	yz\$	
\$Ay	yz\$	$A \rightarrow yA$
\$A	z\$	
\$z	z\$	$A \rightarrow z$
\$	\$	

Vậy $xyyz \in L(G)$ và cây phân tích trái (Top-Down) có dạng



Xâu $xyyz \in L(G)$ đoán nhận được bởi phương pháp phân tích tất định.

2. Các hàm FIRST, FOLLOW

Phân tích Top-Down đòi hỏi văn phạm không có đệ quy trái (vì nếu có thì ta có thể dùng thuật toán để xóa đệ quy trái, tức là thay quy tắc đệ quy trái bằng quy tắc không đệ quy trái, nhưng văn phạm vẫn tương đương).

Đối với phân tích tất định người ta chỉ sử dụng văn phạm *không đệ quy trái và không nhập nhằng*. Thế nào là văn phạm không nhập nhằng.

Ta xét ví dụ về văn phạm sau đây:

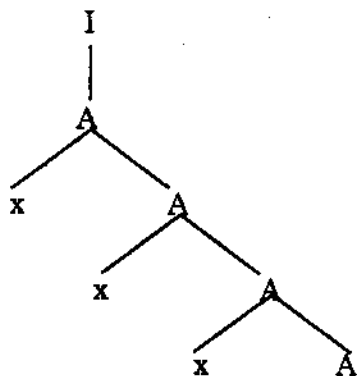
Ví dụ: Cho $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$,

$$\Sigma = \{x, y, z\}, \Delta = \{I, A, B\},$$

$$R = \{I \rightarrow A|B, A \rightarrow xA|y, B \rightarrow xB|z\}$$

Đ đoán nhận xâu vào $xxxz \in L(G)$?

Stack	input	output
\$I	xxxz\$	
\$A	xxxz\$	$I \rightarrow A$
\$Ax	xxxz\$	$A \rightarrow xA$
\$A	xxz\$	
\$Ax	xxz\$	$A \rightarrow xA$
\$A	xz\$	
\$Ax	xz\$	$A \rightarrow xA$
\$A	z\$	

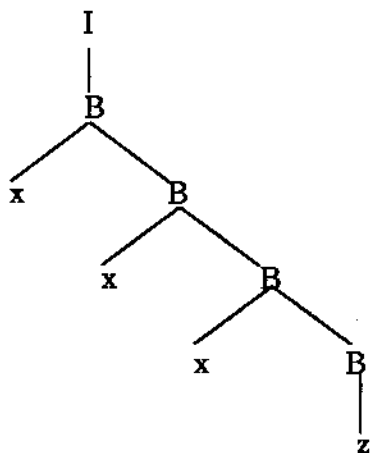


Không phải là cây phân tích Top-Down (vì lá có chứa $A \in \Delta$) của xâu xxxz.

Vì không có quy tắc $A \rightarrow z$, nên việc đoán nhận bị tắc và thuật toán dừng lại không cho kết quả.

Tuy nhiên nếu ta đoán nhận theo trình tự sau đây thì lại được:

Stack	input	output
\$I	xxxz\$	
\$B	xxxz\$	$I \rightarrow B$
\$Bx	xxxz\$	$B \rightarrow xB$
\$B	xxz\$	
\$Bx	xxz\$	$B \rightarrow xB$
\$B	xz\$	
\$Bx	xz\$	$B \rightarrow xB$
\$B	z\$	
\$z	z\$	$B \rightarrow z$
\$	\$	



là cây phân tích Top-Down của xâu xxxz.

Hiện tượng trên gọi là hiện tượng quay lui (Back-tracking). Văn phạm có hiện tượng quay lui khi áp dụng phương pháp Top-Down cũng gọi là văn phạm nhập nhằng.

Làm thế nào để biết được một VPPNC là không nhập nhằng. Muốn giải quyết điều đó, ta cần đưa vào khái niệm hàm FIRST và FOLLOW.

Định nghĩa hàm FIRST và FOLLOW

Định nghĩa hàm FIRST:

Giả sử trong văn phạm có quy tắc dạng $A \rightarrow \xi_1 | \xi_2 | \dots | \xi_k$. Khi đó ta định nghĩa:

$\text{First}(A)$ = tập các ký hiệu kết thúc ở vị trí đầu tiên của xâu có thể suy dẫn được từ ξ_i ($i = \overline{1, k}$). Nếu $A \rightarrow \wedge$ thì $\wedge \in \text{First}(A)$.

Cách tính hàm First:

1. Nếu $a \in \Sigma$, $\xi \in (\Sigma \cup \Delta)^*$ thì $\text{First}(a\xi) = \{a\}$.

2. Nếu $A \rightarrow \xi_1 | \xi_2 | \dots | \xi_k$ thì $\text{First}(A) = \bigcup_{i=1}^k \text{First}(\xi_i)$.

3. Giả sử $A \rightarrow \alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_k$, $A \in \Delta$.

Khi đó $\text{First}(A) = \bigcup_{i=1}^k \text{First}(\alpha_i)$

Định nghĩa hàm Follow:

$\text{Follow}(A)$ = tập các ký hiệu kết thúc a mà chúng có thể xuất hiện ngay bên phải A ở trong một số dạng câu, tức là tập các ký hiệu kết thúc a sao cho tại suy dẫn dạng $I \rightarrow^* \alpha A \beta$ đối với α, β là các xâu bất kỳ. Nếu A là bên phải nhất trong dạng câu thì thêm $\$$ (ký hiệu kết thúc) vào $\text{Follow}(A)$.

Cách tính hàm Follow:

Nếu các quy tắc của văn phạm có dạng $X_i \rightarrow \xi_i A \eta_i$ ($i = \overline{1, k}$) thì

$$\text{Follow}(A) = \bigcup_{i=1}^k \text{First}(\eta_i).$$

3. Điều kiện để VPPNC không nhập nhằng và không đệ quy trái

Giả sử văn phạm $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ có các quy tắc $A \rightarrow \alpha | \beta$. Văn phạm G là không nhập nhằng và không đệ quy trái nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau đây:

$$a) \text{First}(\alpha) \cap \text{First}(\beta) = \emptyset$$

$$a) \text{First}(A) \cap \text{Follow}(A) = \emptyset$$

Xét một số ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$,

$$\Sigma = \{x, y, z\}, \Delta = \{I, A\}, R = \{I \rightarrow xA, A \rightarrow z | yA\}.$$

Trong văn phạm này có quy tắc dạng: $A \rightarrow z | yA$.

Ta có: $\text{First}(A) = \text{First}(z) \cup \text{First}(yA) = \{z\} \cup \{y\} = \{z, y\}$, ở đây $\text{First}(z) \cap \text{First}(yA) = \{z\} \cap \{y\} = \emptyset$ thỏa mãn điều kiện a).

Ta lại có $\text{First}(A) = \{y, z\}$ và $\text{Follow}(A) = \{\wedge\}$.

Vậy $\text{First}(A) \cap \text{Follow}(A) = \{y, z\} \cap \{\wedge\} = \emptyset$ thỏa mãn điều kiện b).

Văn phạm trên là văn phạm không nhập nhằng và không đệ quy trái. Do đó có thể đoán nhận được chuỗi $xyyz \in L(G)$ bởi phân tích tất định (xem bảng phân tích ở ví dụ trên).

Ví dụ 2: Cho $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$,

$$\Sigma = \{x, y, z\}, \Delta = \{I, A, B\}, R = \{I \rightarrow A | B, A \rightarrow xA | y, B \rightarrow xB | z\}$$

Trong R có chứa quy tắc $I \rightarrow A | B$.

Ta tính $\text{First}(I) = \text{First}(A) \cup \text{First}(B)$

$$= \{\text{First}(xA) \cup \text{First}(y)\} \cup \{\text{First}(xB) \cup \text{First}(z)\}$$

$$= \{x\} \cup \{y\} \cup \{x\} \cup \{z\} = \{x, y, z\}.$$

Tuy nhiên $\text{First}(A) = \{x, y\}$, $\text{First}(B) = \{x, z\}$

$\text{First}(A) \cap \text{First}(B) = \{x, y\} \cap \{x, z\} = \{x\} \neq \emptyset$ (vi phạm điều kiện a)

Ta tính $\text{Follow}(I) = \{\wedge\}$. Vậy $\text{First}(I) \cap \text{Follow}(I) = \emptyset$ (thỏa mãn điều kiện b).

Vấn phạm trên là nhập nhằng. Sự nhập nhằng ở đây là do suy dẫn từ $I \rightarrow A$ hay $I \rightarrow B$ là không rõ ràng.

Ta có thể xây dựng một văn phạm $G' \approx G$ nhưng G' không nhập nhằng trong ví dụ sau:

Ví dụ 3: Cho $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ như trong ví dụ ở mục 2. Hãy xây dựng $G' \approx G$ mà G' không nhập nhằng.

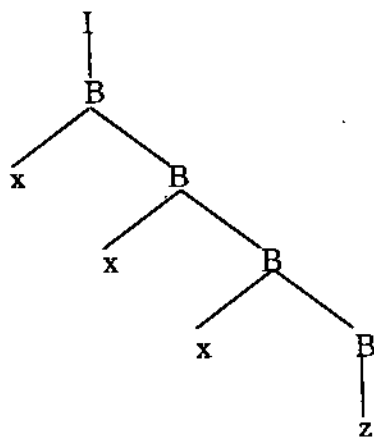
$G' = \langle \Sigma', \Delta', I, R' \rangle$, $\Sigma' = \{x, y, z\} = \Sigma$,

$\Delta' = \{I, C\}$, $R' = \{I \rightarrow C \mid xI, C \rightarrow y \mid z\}$.

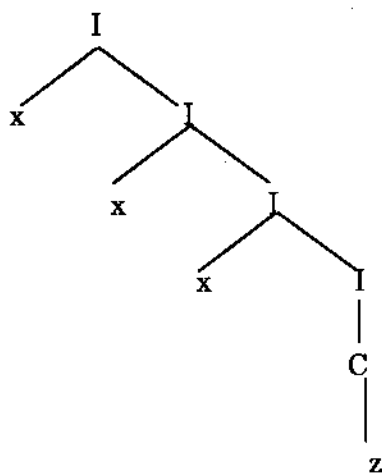
Ta chứng minh $G' \approx G$.

Thật vậy ta đã biết trong ví dụ trước đây là xâu $xxxz \in L(G)$ với cây phân tích trái (Top-Down) (hình bên).

Ta chỉ ra $xxxz \in L(G')$.



Stack	input	output
\$I	xxxz\$	
\$Ix	xxxz\$	$I \rightarrow xI$
\$I	xxz\$	
\$Ix	xxz\$	$I \rightarrow xI$
\$I	xz\$	
\$Ix	xz\$	$I \rightarrow xI$
\$I	z\$	
\$C	z\$	$I \rightarrow C$
\$z	z\$	$C \rightarrow z$
\$	\$	



Chúng tỏ $xxxxz \in L(G')$. Rõ ràng chỉ ra điều ngược lại.

Ta chứng minh G' là văn phạm không nhập nhằng. Trong G' có các nhóm lệnh:

$$I \rightarrow C \mid xI: \begin{cases} \text{First}(I) \cap \text{Follow}(I) = \emptyset \\ \text{First}(C) \cap \text{First}(xI) = \emptyset \end{cases}$$

$$C \rightarrow y \mid z: \begin{cases} \text{First}(y) \cap \text{First}(z) = \emptyset \\ \text{First}(C) \cap \text{Follow}(C) = \emptyset \end{cases}$$

$$\text{First}(I) = \text{First}(C) \cup \text{First}(xI) = \{y, z\} \cup \{x\} = \{x, y, z\}.$$

$$\text{First}(C) \cap \text{First}(xI) = \{y, z\} \cap \{x\} = \emptyset \text{ (thoả mãn điều kiện a).}$$

$\text{Follow}(I) = \{\wedge\}$. Vậy $\text{First}(I) \cap \text{Follow}(I) = \{x, y, z\} \cap \{\wedge\} = \emptyset$ (thoả mãn điều kiện b).

$$\text{Ta lại có: } \text{First}(y) = \{y\}, \text{First}(z) = \{z\}.$$

$$\text{Vậy } \text{First}(y) \cap \text{First}(z) = \emptyset \text{ (thoả mãn a).}$$

$$\text{First}(C) = \{y, z\}$$

$$\text{Follow}(C) = \{\wedge\}. \text{ Vậy } \text{First}(C) \cap \text{Follow}(C) = \emptyset \text{ (thoả mãn b).}$$

Suy ra G' là không nhập nhằng. Để phân tích cú pháp trong văn phạm ta nên và chỉ nên sử dụng G' .

CHƯƠNG 8

MÁY TURING KHÔNG ĐƠN ĐỊNH ĐÀN HỒI ĐOÁN NHẬN NGÔN NGỮ VĂN PHẠM

§1 . ĐỊNH NGHĨA MÁY TURING KHÔNG ĐƠN ĐỊNH ĐÀN HỒI

1. Mô tả sự hoạt động của máy Turing đơn định không đàn hồi

Máy Turing đơn định là máy mà trong các lệnh của nó không chứa dạng:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \rightarrow \gamma \end{array} \right\} \quad (\beta \neq \gamma)$$

Máy Turing đơn định dùng để biểu diễn thuật toán và sự làm việc của thuật toán là quá trình tiền định, tức là bước sau của nó được xác định hoàn toàn nhờ vào bước trước, đặc biệt kết quả của toàn bộ thuật toán được xác định dựa vào điều kiện ban đầu.

Trong mục này ta xây dựng máy Turing không đơn định với băng làm việc đàn hồi mà máy Turing đơn định chỉ là trường hợp riêng của nó.

Sự khác nhau giữa máy Turing đơn định và máy Turing không đơn định với băng làm việc đàn hồi (gọi tắt là máy Turing không đơn định đàn hồi) thể hiện qua các điểm sau đây:

1) Trong máy Turing đơn định không chứa các lệnh $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \rightarrow \gamma$ với $\beta \neq \gamma$, còn trong máy Turing không đơn định thì có thể chứa các lệnh dạng trên. Dĩ nhiên tại một thời điểm nó chỉ được phép chọn một trong các lệnh để làm việc.

2) Máy Turing đơn định chỉ có một băng vào, còn máy Turing không đơn định lại làm việc trên hai băng: một băng gọi là băng vào, còn một băng gọi là băng làm việc.

Trên băng vào ghi từ xuất phát mà trong quá trình làm việc nó không thay đổi, hơn nữa một ký hiệu chỉ đọc một lần. Toàn bộ công việc còn lại máy làm việc trên băng thứ hai.

3) Tính đàn hồi của băng làm việc (băng thứ 2)

a) “Tính co lại của băng làm việc”:

Trong khi xóa ký hiệu ở ô làm việc, máy hủy bỏ luôn chính ô này, sao cho hai ô cạnh nó lại trở thành hai ô kề nhau.

b) “Tính dãn ra của băng làm việc”: Giữa hai ô bất kỳ thuộc băng làm việc, máy có thể lập thêm ô mới và có thể ghi ngay trên ô này ký hiệu cần dùng.

Ích lợi của “tính đàn hồi” là ở chỗ nó cho phép trong khi mô hình hoá các văn phạm bằng máy có thể thực hiện vòng quanh mà không cần chuyển dịch toàn bộ nội dung của băng.

Để hiểu sâu sắc hơn lý thuyết văn phạm người ta phải thông qua lý thuyết máy Turing, đồng thời khi nghiên cứu văn phạm thì máy Turing là phương tiện kỹ thuật rất tiện lợi.

Vì lý do đó ta cần xây dựng máy Turing không đơn định với băng làm việc đàn hồi.

Định nghĩa 1 : Máy Turing không đơn định với băng làm việc đàn hồi gồm có:

a. Hai băng hữu hạn được chia thành từng ô. Một băng gọi là “băng vào” và một băng gọi là “băng làm việc”.

b. Hai băng chữ cái V, W và được gọi tương ứng là băng chữ vào và băng chữ làm việc. Các phần tử của chúng cũng được gọi một cách tương ứng là các ký hiệu vào và các ký hiệu làm việc.

c. Các ký hiệu $\#, \neq \in V \cup W$, $\#$ gọi là ký hiệu biên trái, còn $\neq$ gọi là ký hiệu biên phải.

Đặt $V' = V \cup \{\#, \neq\}$ và $W' = W \cup \{\#\}$.

d. Đầu đọc vào và đầu đọc làm việc được chuyển dịch trên băng vào và băng làm việc tương ứng.

e. Tập hữu hạn các trạng thái trong $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$, trong đó lấy ra phần tử q_1 - gọi là trạng thái ban đầu, và tập $Q_0 \subseteq Q$ - gọi là tập trạng thái kết thúc.

f. Chương trình làm việc của máy gồm các lệnh là các từ trong bảng $V' \cup W' \cup Q \cup \{T, P, \rightarrow\}$. Cụ thể gồm năm lệnh dạng sau đây:

- (i) $q_\alpha a \rightarrow q_\beta$; (ii) $Aq_\alpha \rightarrow q_\beta$;
 (iii) $q_\alpha \rightarrow Aq_\beta$; (iv) $q_\alpha \rightarrow q_\beta T$;
 (v) $q_\alpha \rightarrow q_\beta P$, ở đây $a \in V'$, $A \in W'$, q_α và $q_\beta \in Q$.

Giải thích nội dung năm lệnh trên :

Mỗi lệnh thực hiện một số hoạt động và nó phụ thuộc vào các yếu tố sau đây:

1. Trạng thái của máy khi bắt đầu thực hiện lệnh;
2. Các ký hiệu được đọc bởi đầu đọc;
3. Vị trí của đầu đọc làm việc.

Cụ thể nếu vế trái của lệnh có ký hiệu q_α , vế phải có ký hiệu q_β thì chuyển từ trạng thái q_α sang trạng thái q_β , đồng thời với sự làm việc ở một trong các trường hợp sau đây:

Trường hợp lệnh dạng (i): $q_\alpha a \rightarrow q_\beta$

Nếu a không phải là $\neq$ thì chuyển đầu đọc sang phải một ô, nếu như ô đang đọc có ghi ký hiệu là a .

Nếu a là $\neq$ thì đầu đọc vào và đầu đọc làm việc giữ nguyên tại chỗ.

Trong trường hợp (ii): $Aq_\alpha \rightarrow q_\beta$

Nếu trên ô làm việc đang đọc có ghi ký hiệu A thì hủy bỏ ô này và chuyển đầu đọc sang ô nằm sát bên trái ô vừa bị hủy bỏ (tính co lại của băng làm việc).

Trong trường hợp (iii): $q_\alpha \rightarrow Aq_\beta$

Lập thêm ô mới ở sát ngay bên phải ô làm việc đang được đọc và ghi trên ô này ký hiệu A, đầu đọc chuyển đến ô này (tính dân ra của băng làm việc).

Trường hợp (iv): $q_\alpha \rightarrow q_\beta T$

Chuyển đầu đọc làm việc về phía trái một ô, nếu nó không ở biên trái #.

Trường hợp (v): $q_\alpha \rightarrow q_\beta P$

Chuyển đầu đọc làm việc về phía phải một ô, nếu nó không ở biên phải #.

Chúng ta gọi tập hợp các hoạt động được chỉ ra ở trên là một bước làm việc của máy.

Do tính không đơn định mà tại một thời điểm nào đó máy có thể được ứng dụng nhiều lệnh khác nhau, nhưng nó chỉ được thực hiện một lệnh, do đó nó phải chọn trong số các lệnh, lấy một lệnh để làm việc.

Định nghĩa 2 (Trạng thái toàn phần)

Trạng thái toàn phần của máy Turing không tiến định với băng làm việc đàn hồi là bộ sắp thứ tự $(q_\alpha, x', x'', X', X'')$, ở đây $q_\alpha \in Q$, $x' \in (V^*)^+$, $x'' \in (V^*)^+$, $X' \in (W^*)^+$, $X'' \in (W^*)^+$, $x'x''$ là một từ trên băng vào với x' là phần nằm bên trái đầu đọc vào và x'' nằm bên phải đầu đọc vào. XX'' là từ viết trên băng làm việc, X' là phần nằm bên trái đầu đọc làm việc, còn X'' nằm bên phải đầu đọc làm việc.

Định nghĩa 3 (Trạng thái toàn phần ban đầu và kết thúc)

Trạng thái toàn phần có dạng $(q_1, \wedge, \#x\neq, \wedge, \#)$ với $x \in V^*$ được gọi là trạng thái toàn phần ban đầu, ở đây q_1 là ký hiệu trạng thái ban đầu của máy (gọi tắt là x-trạng thái toàn phần ban đầu).

Trạng thái toàn phần có dạng $(q_f, \#x, \neq, \#, \wedge)$ với $q_f \in Q_0$, $x \in V^*$ gọi là trạng thái toàn phần kết thúc (x-trạng thái toàn phần kết thúc).

Định nghĩa 4: Nếu trạng thái toàn phần S' nhận được từ trạng thái toàn phần S bằng cách áp dụng một lệnh nào đó của máy thì ta nói

rằng S' đạt được trực tiếp từ S trong máy M (ký hiệu $S \vdash_M S'$, hay gọn hơn là $S \vdash S'$).

Định nghĩa 5:

1) Dây các trạng thái toàn phần $C = (S_0, S_1, \dots, S_n)$ ($n \geq 1$) được gọi là một tính toán của máy M nếu với mỗi i ($i = 1, n$) ta có $S_{i-1} \vdash S_i$. Số n gọi là độ dài của tính toán C .

2) Trong tính toán C thì trạng thái toàn phần S_n đạt được từ trạng thái toàn phần S_0 nên ta viết $S_0 \vdash S_n$.

Nói cách khác nếu trong tính toán $C = (S_0, S_1, \dots, S_n)$ mà $S_{i-1} \vdash S_i$ $\forall i=1, 2, \dots, n$ thì ta nói $S_0 \vdash S_n$.

3) Nếu một tính toán bắt đầu bởi x -trạng thái toàn phần ban đầu thì ta nói tính toán đó là x -tính toán.

4) Nếu một tính toán bắt đầu bởi x -trạng thái toàn phần ban đầu và kết thúc bằng x -trạng thái toàn phần kết thúc thì tính toán đó gọi là x -tính toán đầy đủ.

5) $[x, y]$ -tính toán là một tính toán bắt đầu bằng x -trạng thái toàn phần ban đầu và kết thúc bởi trạng thái toàn phần có dạng $(q_f, \#x, \cdot, \wedge, y)$.

Chú ý: Từ cách định nghĩa trên ta có x -tính toán đầy đủ chính là $[x, \wedge]$ -tính toán.

Định nghĩa 6: Nếu tồn tại x -tính toán đầy đủ của máy M thì ta nói rằng máy M đoán nhận từ x .

Tập các từ mà máy M đoán nhận được gọi là ngôn ngữ của máy M và ký hiệu là $L(M)$.

Chú ý: a) Trong quá trình x -tính toán các biên được ghi bên trái của ô làm việc không bao giờ bị triệt tiêu và nó cũng không xuất hiện ở ô làm việc nào khác.

Vì lý do đó, khi nói “trên băng làm việc ghi ký hiệu A ” và “băng làm việc triệt tiêu” có nghĩa là trên băng làm việc ghi từ $\#A$ và trên băng làm việc tất cả các ô đều bị triệt tiêu, trừ ô có ghi ký hiệu $\#$.

b) Một tính toán đầy đủ bắt đầu và kết thúc không có băng làm việc thì toàn bộ từ vào phải được đọc cho tới tận cùng của tính toán đầy đủ.

Định nghĩa 7: (Mã của tính toán)

Nếu một lệnh của máy đàn hồi M được đặt tương ứng 1-1 với ký hiệu C_i nào đó. Lập từ $C_{j1} \dots C_{j2} \dots C_{jn}$, ở đây C_{ji} ($i = \overline{1, n}$) là ký hiệu được đặt tương ứng với lệnh thực hiện ở bước thứ i của tính toán $C = (S_0, S_1, \dots, S_n)$. Khi đó từ $C_{j1} \dots C_{j2} \dots C_{jn}$ được gọi là mã của tính toán C .

Chú ý: Mỗi tính toán C có đúng duy nhất một mã và C khôi phục lại được nhờ vào mã của nó và trạng thái ban đầu của C .

2. Mô hình máy một băng

Định nghĩa 8: (Mô hình máy một băng)

Giả sử M là máy Turing không đơn định đàn hồi với băng vào V , băng làm việc W .

Ta sẽ gọi máy Turing đàn hồi $\tilde{M}$ với băng làm việc $W' \supseteq V \cup W \cup \{d\}$ ($d \notin V \cup W$) là mô hình một băng trực tiếp của M nếu $[x, y]$ - tính toán của máy M tồn tại khi và chỉ khi trạng thái toàn phần $(q_f, \wedge, \# \neq, \#x, dy)$ với $q_f \in Q_0$ đạt được từ trạng thái toàn phần $(q_1, \wedge, \# \neq, \wedge, \#xd)$ trong $\tilde{M}$.

Định lý 1: Đối với bất kỳ máy Turing không đơn định đàn hồi bao giờ cũng xây dựng được mô hình một băng trực tiếp của nó.

Chứng minh: Ta mô tả cách làm việc của mô hình một băng trực tiếp $\tilde{M}$ của M như sau: Trong “khu vào” (bên trái d) và “khu làm việc” (bên phải d) của băng làm việc, máy $\tilde{M}$ làm việc hoàn toàn như máy M trong băng làm việc. Nhưng mỗi lần khi $\tilde{M}$ chuyển từ “bước vào” sang “bước làm việc” hoặc ngược lại thì đầu đọc của $\tilde{M}$ sẽ chuyển từ khu này sang khu khác, đồng thời nó đánh dấu ô vừa được đọc để có thể tìm được ô này khi quay trở lại. Với cách làm việc của $\tilde{M}$ như trên ta thấy ngay $[x, y]$ - tính toán của M suy ra $(q_1, \wedge, \# \neq, \wedge, \#xd) \vdash (q_f, \wedge, \# \neq, \#x, dy)$ trong $\tilde{M}$ và ngược lại.

Ví dụ: Nếu $[x, y]$ - tính toán của M có dạng:

$C = (S_0, S_1, \dots, S_n)$, trong đó $S_0 = (q_1, \wedge, \#x\neq, \wedge, \neq)$.

$S_1 = (q_2, \#x', x''\neq, \wedge, \#y')$, ..., $S_n = (q_f, \#x, \neq, \wedge, \neq y)$

với $x = x'x''$. Ứng với S_0 của M ta có $\tilde{S}_0$ của $\tilde{M}$ là:

$\tilde{S}_0 = (q_1, \wedge, \# \neq, \wedge, \#xd)$.

Theo cách làm việc của M thì $S_0 \vdash S_1$ ta có trong $\tilde{M}$ là $\tilde{S}_0 \vdash \tilde{S}_1$, với $\tilde{S}_1 = (q_2, \wedge, \# \neq, \#x', x''dy')$. Nếu trong M có $S_1 \vdash S_2$ thì trong $\tilde{M}$ có $\tilde{S}_1 \vdash \tilde{S}_2$, trong đó $S_2 = (q_3, \#x'x_1'', x_2''\neq, \wedge, y'y'')$ với $x'x_1''x_2'' = x$. Khi đó $\tilde{S}_2 = (q_3, \wedge, \# \neq, \#x'x_1'', x_2''dy'y'')$, ...

Cuối cùng nếu trong M có $S_{n-1} \vdash S_n$, mà $S_n = (q_f, \#x, \neq, \wedge, \#y)$ thì trong $\tilde{M}$ ta cũng có $\tilde{S}_{n-1} \vdash \tilde{S}_n$, với $\tilde{S}_n = (q_f, \wedge, \# \neq, \#x, dy)$.

Tóm lại $\tilde{M}$ là mô hình một băng trực tiếp của M .

§2. SỰ TƯƠNG ĐƯƠNG GIỮA MÁY TURING KHÔNG ĐƠN ĐỊNH ĐÀN HỒI VÀ VĂN PHẠM CHOMSKY

Định nghĩa 9: Ta nói máy Turing không đơn định đàn hồi M và văn phạm G là tương đương nhau nếu $L(M) = L(G)$.

Định lý 2 :

a) Đối với máy Turing không đơn định đàn hồi có thể xây dựng được văn phạm tương đương với nó.

b) Đối với văn phạm bất kỳ có thể xây dựng được máy Turing không đơn định đàn hồi tương đương với nó.

Chứng minh: a) Giả sử M là máy không đơn định đàn hồi với băng vào V và M_1 là mô hình một băng trực tiếp của M . Ta xây dựng M_2 có hai trạng thái q', q'' sao cho với mọi từ $x \in V^*$ thì trạng thái toàn phần $(q'', \wedge, \# \neq, \wedge, \#)$ đạt được từ trạng thái toàn phần $(q', \wedge, \# \neq, \wedge, \#x)$, tức là $(q', \wedge, \# \neq, \wedge, \#x) \vdash (q'', \wedge, \# \neq, \wedge, \#)$ khi và chỉ khi $x \in L(M)$.

Xây dựng văn phạm $G = \langle V, W, I, R \rangle$, ở đây $V = V$ - bảng vào của M , $W = (W - V) \cup Q \cup \{I\}$, với W, Q tương ứng là bảng làm việc, tập trạng thái trong của M_2 còn $I \notin V \cup W \cup Q$.

R gồm các quy tắc $I \rightarrow \#q, \#q' \rightarrow \wedge$ và các quy tắc được xác định ứng với các lệnh của máy M_2 , cụ thể nếu M_2 có lệnh dạng $\delta q_\alpha \rightarrow q_\beta$ (ii) thì cho tương ứng với quy tắc $q_\beta \rightarrow q_\alpha \delta$, lệnh $q_\alpha \rightarrow \delta q_\beta$ (iii) cho ứng với quy tắc $\delta q_\beta \rightarrow q_\alpha$, lệnh $q_\alpha \rightarrow q_\beta T$ (iv) cho ứng với quy tắc $q_\beta \gamma \rightarrow \gamma q_\alpha, \gamma \in W$ còn lệnh $q_\alpha \rightarrow q_\beta P$ cho ứng với quy tắc $\gamma q_\beta \rightarrow q_\alpha \gamma, \gamma \in W$. Như vậy R của G gồm các lệnh của M_2 nhưng ở dạng ngược lại.

Rõ ràng với $x \in V^*$ và $D = (I, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, x)$ là dẫn xuất đầy đủ của x trong G khi và chỉ khi trong M_2 từ trạng thái toàn phần $(q', \wedge, \#x)$ đạt được từ trạng thái toàn phần $(q'', \wedge, \#x)$ (sở dĩ như vậy vì các quy tắc của G là các lệnh ngược trong M_2 , do đó nếu trong G mà x dẫn được từ I thì trong M_2 x sẽ lại triệt tiêu trong quá trình làm việc trên).

Nhưng trong M_2 thì $(q', \wedge, \#x) \vdash (q'', \wedge, \#x)$ khi và chỉ khi $x \in L(M)$. Vậy $L(M) = L(G)$.

b. Giả sử $G = \langle V, W, I, R \rangle$ là một văn phạm tùy ý nào đó. Ta xây dựng máy Turing M như sau:

Bảng vào của M là V của G .

Bảng làm việc của M là $V \cup W$.

M làm việc như sau: Nó ghi lên bảng làm việc từ vào, sau đó trên bảng làm việc nó thực hiện dẫn xuất tùy ý của văn phạm G với thứ tự ngược lại. Nếu kết quả dẫn xuất ngược lại đó dừng lại ở ký hiệu cuối cùng là I thì máy M tự tiêu diệt bảng làm việc và chuyển vào trạng thái kết thúc. Trường hợp ngược lại cho máy M không bao giờ gặp trạng thái kết thúc. Từ quá trình làm việc trên ta suy ra $L(M) = L(G)$. Định lý được chứng minh.

Chú ý: Từ định lý trên ta thấy lớp các ngôn ngữ do máy Turing không đơn định dàn hồi sinh ra trùng với lớp ngôn ngữ do văn phạm sinh ra.

CHƯƠNG 9

HÀM ĐỆ QUY

§1. HÀM ĐỆ QUY NGUYÊN THỦY

Trong phần này chúng ta chỉ xét hàm, mà miền xác định cũng như miền giá trị của nó chỉ nhận giá trị trên tập hợp số tự nhiên $N = \{0, 1, 2, \dots\}$.

I. ĐỊNH NGHĨA HÀM ĐỆ QUY NGUYÊN THỦY

1. Phép thế các hàm

Giả sử ta có hàm k đối số $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, ta ký hiệu hàm k đối số là $f^{(k)}$.

Cho các hàm tương ứng sau đây : $f^{(m)}, f_1^{(r)}, f_2^{(r)}, \dots, f_m^{(r)}$. Khi đó ta nói rằng hàm $g^{(r)}(x_1, x_2, \dots, x_r) = f(f_1^{(r)}, f_2^{(r)}, \dots, f_m^{(r)})$ là kết quả của phép thế các hàm $f_1^{(r)}, \dots, f_m^{(r)}$ vào hàm $f^{(m)}$. Ký hiệu kết quả đó là:

$$g^{(r)} = S(f^{(m)}, f_1^{(r)}, f_2^{(r)}, \dots, f_m^{(r)})$$

Chú ý: dấu “=” hiểu theo nghĩa một hàm xác định thì hàm kia cũng xác định và giá trị của hai hàm là bằng nhau.

2. Phép đệ quy nguyên thủy

Giả sử cho hai hàm $f_1^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $f_2^{(n+2)}(x_1, x_2, \dots, x_n, y, z)$. Ta thành lập hàm $h^{(n+1)}(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ bằng lược đồ sau đây:

$$(1) \quad \begin{cases} h(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ h(x_1, x_2, \dots, x_n, y+1) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y, h(x_1, x_2, \dots, x_n, y)) \end{cases}$$

Phép toán cho hàm h từ các hàm f_1, f_2 như trên gọi là *phép đệ quy nguyên thủy*. Ta ký hiệu phép đệ quy nguyên thủy là: $h = R(f_1, f_2)$ (1) gọi là lược đồ đệ quy nguyên thủy và f_1, f_2 gọi là các hàm ban đầu.

3. Các hàm cơ sở

Trong số các hàm đơn giản, ta chọn ba hàm đơn giản nhất làm các hàm cơ sở :

- Hàm đơn giản thứ nhất là hàm: $0^{(0)} = 0$ (hàm 0 đối số luôn nhận giá trị 0).
- Hàm đơn giản thứ hai là hàm: $\lambda(x) = x+1$, tức là hàm một biến x mà giá trị của nó là $x+1$.
- Hàm đơn giản thứ ba là hàm: $I_k^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_k$ ($1 \leq k \leq n$), là hàm chọn đối số thứ k trong n đối số.

4. Hàm đệ quy nguyên thủy

Bây giờ ta thiết lập hàm mới từ các hàm cơ sở, các phép thế và phép đệ quy nguyên thủy.

Định nghĩa 1: Hàm f gọi là *hàm đệ quy nguyên thủy* nếu nó có thể nhận được từ các hàm cơ sở $0^{(0)}, \lambda(x), I_k^{(n)}$ bằng cách áp dụng một số hữu hạn lần các phép thế và phép đệ quy nguyên thủy.

Nói cách khác: f gọi là *đệ quy nguyên thủy*, nếu tồn tại một dãy các hàm $f_1, f_2, \dots, f_m = f$ sao cho các hàm f_i ($i = 1, \dots, m$) hoặc là các hàm cơ sở, hoặc nhận được từ các hàm đứng trước nó bằng cách áp dụng một số hữu hạn lần các phép thế và phép đệ quy nguyên thủy. Ký hiệu lớp các hàm đệ quy nguyên thủy là π . Lớp các hàm đệ quy nguyên thủy rất rộng, rất nhiều hàm thông thường thuộc lớp này mà sau này ta sẽ đưa ra một số ví dụ về hàm đệ quy nguyên thủy để minh họa cho định nghĩa về hàm đệ quy nguyên thủy.

5. Các ví dụ về hàm đệ quy nguyên thủy

Trước tiên ta chứng minh hàm $C^{(0)} = C$ là hàm đệ quy nguyên thủy.

Thật vậy ta có: $C^{(0)} = S(\lambda(x), (C-1)^{(0)})$

Xuất phát từ công thức này ta có:

Với $C=1$ thì $1^{(0)} = S(\lambda(x), 0^{(0)}) \in \pi$.

Với $C=2$ thì $2^{(0)} = S(\lambda(x), 1^{(0)}) \in \pi$.

.....

Hay $C^{(0)} \in \pi$.

Ta chứng minh $C^{(1)}(x) \in \pi$.

Vì $C^{(1)}(x) = C = \underbrace{\lambda(\lambda \dots (\lambda(O^{(0)})) \dots)}_{C \text{ lần}} \in \pi$.

Bây giờ ta chứng minh $C^{(k)} = C$ cũng là hàm đệ quy nguyên thủy.

$C^{(k)} = S(C^{(1)}, I_1^{(k)})$, mà $C^{(1)}, I_1^{(k)} \in \pi$ nên $C^{(k)} \in \pi$.

Ví dụ 1: Xét hàm $\lambda_k^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_k + 1$

Vì $\lambda_k^{(n)} = x_k + 1 = S(\lambda(x), I_1^{(k)})$ mà $\lambda(x), I_1^{(k)}$ là hàm cơ sở nên $\lambda_k^{(n)} \in \pi$.

Ví dụ 2: Ta ký hiệu “+” là phép cộng thông thường các số tự nhiên.

Khi đó ta có hàm $x + y$ là đệ quy nguyên thủy.

Thật vậy: $x + 0 = I_1^{(1)}(x) = f_1(x)$

$$x + (y + 1) = (x + y) + 1 = f_2(x, y, z) = z + 1 = \lambda(I_3^{(3)}(x, y, z)).$$

Vậy hàm $x + y$ thỏa mãn lược đồ đệ quy nguyên thủy.

Với các hàm ban đầu $f_1(x) = I_1^{(1)}(x)$, $f_2(x, y, z) = \lambda(I_3^{(3)}(x, y, z))$ là đệ quy nguyên thủy. Vậy hàm $x + y \in \pi$.

Ví dụ 3: Chứng minh hàm $xy \in \pi$.

Ta có: $x.0 = 0$

$$x(y+1) = xy + x.$$

hàm $x.y$ thỏa mãn lược đồ đệ quy nguyên thủy, với các hàm ban đầu cũng là hàm đệ quy nguyên thủy sau đây:

$$f_1(x) = 0 = 0^{(0)}.$$

$$f_2(x, y, z) = x.y + x = x+z \in \pi \text{ (ví dụ 2).}$$

Vậy $x.y \in \pi$.

Ví dụ 4: Vì ta chỉ xét những hàm mà miền xác định và miền giá trị chỉ nhận các số tự nhiên 0, 1, 2, ... nên ta cần định nghĩa phép trừ như sau:

$$x \dot{-} 1 = \begin{cases} x - 1, & \text{nếu } x \geq 1 \\ 0, & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$

Ta chứng minh hàm $x \dot{-} 1$ là đệ quy nguyên thủy.

Thật vậy: $0 \dot{-} 1 = 0$

$$(x+1) \dot{-} 1 = x = I_1^{(1)}(x)$$

Vậy hàm $x \dot{-} 1$ thoả mãn lược đồ đệ quy nguyên thủy với các hàm ban đầu $f_1 = 0$, $f_2 = I_1^{(1)}(x)$ cũng là hàm đệ quy nguyên thủy nên $x \dot{-} 1$ là hàm đệ quy nguyên thủy.

Ta chứng minh $x \dot{-} y \in \pi$, với định nghĩa:

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{nếu } x \geq y \\ 0, & \text{nếu } x < y \end{cases}$$

$$x \dot{-} 0 = x$$

$$x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1$$

Vậy hàm $x \dot{-} y$ thoả mãn lược đồ đệ quy nguyên thủy với các hàm ban đầu $f_1(x) = x = I_1^{(0)}(x)$, $f_2(x, y, z) = z \dot{-} 1$.

Vì $x \dot{-} 1 \in \pi$ nên $x \dot{-} y \in \pi$.

Ví dụ 5: x^y (với chú ý $x^0 = 1$)

Cũng là hàm đệ quy nguyên thủy. Thật vậy:

$$x^0 = 1$$

$$x^{y+1} = x^y \cdot x$$

là lược đồ đệ quy nguyên thủy của hàm x^y với hai hàm ban đầu đệ quy nguyên thủy: $f_1(x) = 1 = \lambda(0^{(0)})$, $f_2(x, y, z) = x^y \cdot x = z \cdot x$

Vậy $x^y \in \pi$.

Ví dụ 6: Vì $|x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$ nên theo ví dụ 2, 4 suy ra $|x-y| \in \pi$.

Ví dụ 7: Hàm $x!$ $\in \pi$.

$$\text{Vì } 0! = 1 = \lambda(0^{(0)}) = f_1$$

$$(x+1)! = x!(x+1) = y(x+1) = f_2(x, y).$$

Vậy hàm $x!$ thoả mãn lược đồ đệ quy nguyên thủy với các hàm ban đầu là hàm đệ quy nguyên thủy.

$f_1 \in \pi$ là rõ ràng, còn $f_2 \in \pi$ vì $x+1 \in \pi$, nên $y \cdot (x+1) \in \pi$.

Ví dụ 8: Ta định nghĩa $\min(x, y) = y \dot{-} (y \dot{-} x)$. Do các ví dụ trên ta có $\min(x, y) \in \pi$.

Ví dụ 9: Ta định nghĩa $\max(x, y) = x + y \dot{-} \min(x, y)$ và vì vậy $\max(x, y) \in \pi$.

$$\text{Ví dụ 10: } Sgx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } Sg0 = 0 = \lambda(0^{(0)}) \dot{-} 1 \in \pi.$$

$$Sg(x+1) = 1 = \lambda(0^{(0)}) \in \pi.$$

$$\text{Suy ra } Sgx \in \pi. \text{ Tương tự ta có: } \overline{Sg}x = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ cũng } \in \pi.$$

6. Tập đệ quy nguyên thủy

Giả sử $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Ta ký hiệu

$$N^k = \underbrace{N \times N \times \dots \times N}_{k \text{ lần}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) / x_1, x_2, \dots, x_k \in N\}$$

$$\text{Ta đặt } N^\infty = \bigcup_{k \in N} N^k, \text{ và } N^0 = \emptyset.$$

Định nghĩa 2: Tập $M \subset N^k$ gọi là tập đệ quy nguyên thủy nếu hàm đặc trưng của nó là đệ quy nguyên thủy, ở đây hàm đặc trưng của tập M ta ký hiệu $\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in M \\ 0, & \text{nếu } x \notin M \end{cases}$

Ký hiệu lớp các tập đệ quy nguyên thủy là Π .

II. MỘT SỐ TÍNH CHẤT VỀ HÀM ĐỆ QUY NGUYÊN THỦY

Định nghĩa 3: Giả sử $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ là một hàm s biến. Ta định nghĩa đồ thị của hàm trên là tập sau đây:

$$G_f = \{(x_1, x_2, \dots, x_s, f(x_1, x_2, \dots, x_s)) / f(x_1, x_2, \dots, x_s) \text{ xác định}\}.$$

Định lý 1: Nếu $f^{(s)}$ là hàm đệ quy nguyên thủy thì đồ thị của nó sẽ là tập đệ quy nguyên thủy.

Chứng minh: Giả sử $f^{(s)} \in \pi$. Ta chứng minh rằng:

$G_f = \{(x_1, \dots, x_s, f(x_1, \dots, x_s)) / f \text{ xác định trên } (x_1, \dots, x_s)\}$ là tập đệ quy nguyên thủy hay $\chi_{G_f} \in \pi$. Trước hết ta có: $(x_1, x_2, \dots, x_s, y) \in G_f$ khi và chỉ khi $y = f(x_1, \dots, x_s)$. Theo định nghĩa thì

$$\begin{aligned} \chi_{G_f}(x_1, x_2, \dots, x_s, y) &= \begin{cases} 1, & \text{nếu } (x_1, x_2, \dots, x_s, y) \in G_f \\ 0, & \text{nếu } (x_1, x_2, \dots, x_s, y) \notin G_f \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{nếu } y = f(x_1, x_2, \dots, x_s) \\ 0, & \text{nếu } y \neq f(x_1, x_2, \dots, x_s) \end{cases} = \overline{\text{Sg}} \mid y \neq f \mid \end{aligned}$$

Vì $\mid y \neq f \mid \in \pi$, $\overline{\text{Sg}} \in \pi$ nên $\chi_{G_f} \in \pi$, hay $G_f \in \Pi$.

Định nghĩa 4: Tập $\mathcal{M}$ các hàm đệ quy nguyên thủy được gọi là tập đệ quy nguyên thủy đóng nếu nó chứa các hàm cơ sở $0^{(s)}$, $\lambda(x)$, $I_k^{(n)}$ và $\mathcal{M}$ đóng đối với phép thế và phép đệ quy nguyên thủy.

Định lý 2: Giả sử các hàm $f_1^{(s)}, f_2^{(s)}, \dots, f_n^{(s)} \in \mathcal{M}$ là lớp hàm đệ quy nguyên thủy đóng. Các tập $M_1, M_2, \dots, M_n$ làm thành một phân hoạch đối với không gian $N^{(s)}$.

Khi đó ta có $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_s) = a_k \overline{\text{Sg}} \chi_i(x_1, \dots, x_s) + x_k \text{Sg} \chi_i(x_1, \dots, x_s)$ (2)
 $(1 \leq k \leq s)$.

Từ (2) ta có $\varphi_k \in \mathcal{M}$. Trong trường hợp này hàm f_i' được xây dựng như sau: $f_i' = S(f_i, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s)$ và dễ dàng kiểm tra f_i' thoả mãn các điều kiện đặt ra.

Thật vậy, xét $(x_1, x_2, \dots, x_s) \notin M_i$. Khi đó $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_s) = a_k$ ($1 \leq k \leq s$). Vậy $f_i'(x_1, x_2, \dots, x_s) = f_i(a_1, a_2, \dots, a_s)$ xác định khắp nơi trên tập $N^{(s)} \setminus M_i$.

Xét $(x_1, x_2, \dots, x_s) \in M_i$ khi đó $\varphi_k = x_k$ ($1 \leq k \leq s$) và $f_i'(x_1, x_2, \dots, x_s) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_s)$, hay f_i' trùng với f_i trên tập M_i .

b) Trường hợp $f_i^{(s)}$ không xác định khắp nơi.

Ta thành lập hàm $\eta_i^{(s+1)}$ không xác định tại mọi điểm như sau:
 $\eta_i^{(s+1)} = S(f_i^{(s)}, I_1^{(s+1)}, I_2^{(s+1)}, \dots, I_s^{(s+1)})$. Tiếp theo xây dựng hàm $g_i(x_1, \dots, x_s)$ có tính chất sau:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, 0) = 0^{(s-1)}.$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, y+1) = \eta_i(x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, y, g_i(x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, y)) \quad (3)$$

Nói cách khác hàm $g_i = R(0^{(s-1)}, \eta_i^{(s+1)})$. Vì $0^{(s-1)} \in \mathcal{M}$ và $\eta_i^{(s+1)}$ cũng $\in \mathcal{M}$ nên $g_i(x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathcal{M}$. Lập hàm $f_i = S(g_i, \chi_i, \chi_i, \dots, \chi_i)$ (4). Ta chỉ ra f_i' thoả mãn điều kiện đặt ra. Xét $(x_1, x_2, \dots, x_s) \notin M_i$. Khi đó $\chi_i = 0$ ($i = \overline{1, n}$) và $f_i'(x_1, x_2, \dots, x_s) = S(g_i, 0, 0, \dots, 0) = g_i(0, 0, \dots, 0) = 0$, tức là f_i' xác định với mọi $(x_1, x_2, \dots, x_s) \notin M_i$, tức là f_i' xác định khắp nơi trên $N^s \setminus M_i$.

Xét $(x_1, x_2, \dots, x_s) \in M_i$, khi đó $\chi_i(x_1, x_2, \dots, x_s) = 1$ ($i = \overline{1, n}$) và $f_i'(x_1, x_2, \dots, x_s) = S(g_i, 1, 1, \dots, 1) = g_i(1, 1, \dots, 1)$ không xác định trên tập M_i và do giả thiết f_i cũng không xác định trên M_i nên ta không đòi hỏi f_i' trùng với f_i trên M_i . Mặt khác theo (4) thì $f_i \in \mathcal{M}$ nên $f = \sum_{i=1}^n f_i \chi_i \in \mathcal{M}$.

Định lý được chứng minh.

Định nghĩa 5: Giả sử $f(x_1, \dots, x_n)$ là một hàm n biến tùy ý. Ta đưa vào ký hiệu $\sum_{i=x}^y$ như sau:

$$\sum_{i=x}^y f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, i) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x > y. \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}, x) + f(x_1, \dots, x_{n-1}, x+1) + \dots + f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) & \text{nếu } x < y. \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}, x), & \text{nếu } x = y. \end{cases}$$

Nếu ta xem x, y là biến phụ thì hàm

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}, x, y) = \sum_{i=x}^y f(x_1, \dots, x_{n-1}, i) \quad (1)$$

là hàm $n+1$ biến.

Định lý 3 : Nếu $f(x_1, \dots, x_n)$ đệ quy nguyên thủy thì hàm $F(x_1, \dots, x_{n-1}, x, y)$ cũng đệ quy nguyên thủy.

Chứng minh: Từ định nghĩa của ký hiệu $\sum_{i=x}^y$ ta trực tiếp suy ra rằng:

$$\begin{aligned} \sum_{i=x}^y f(x_1, \dots, x_{n-1}, i) &= \sum_{i=0}^y f(x_1, \dots, x_{n-1}, i) - \sum_{i=0}^{x-1} f(x_1, \dots, x_{n-1}, i) \\ &\quad + f(x_1, \dots, x_{n-1}, x). \overline{\text{Sg}}(x \dot{=} y) \end{aligned} \quad (2)$$

lập hàm phụ $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y) = \sum_{i=0}^y f(x_1, \dots, x_{n-1}, i)$. Khi đó từ (2) ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{i=x}^y f(x_1, \dots, x_{n-1}, i) &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y) - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x) \\ &\quad + f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x). \overline{\text{Sg}}(x \dot{=} y) \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (3) để chứng minh $F(x_1, \dots, x_{n-1}, x, y) = \sum_{i=x}^y f(x_1, \dots, x_{n-1}, i)$ đệ quy nguyên thủy ta cần chứng minh rằng:

Hàm phụ φ là đệ quy nguyên thủy. Thật vậy φ thỏa mãn lược đồ đệ quy nguyên thủy sau:

$$\begin{cases} \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \\ \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, y+1) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, y) + f(x_1, \dots, x_{n-1}, y+1) \end{cases}$$

$$= h(x_1, \dots, x_{n-1}, y, z) = z + f(x_1, \dots, x_{n-1}, y+1)$$

với các hàm ban đầu f, h đệ quy nguyên thủy.

Vậy hàm $F(x_1, \dots, x_{n-1}, x, y) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \stackrel{\Delta}{=} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x) + f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x) \cdot \overline{\text{Sg}(x \stackrel{\Delta}{=} y)}$ đệ quy nguyên thủy.

Ví dụ áp dụng Định lý 3:

Ví dụ 1: Xét hàm $[\sqrt{x}]$, trong đó $[a]$ = số tự nhiên lớn nhất không vượt quá a hay $[a]$ được gọi là phần nguyên của a .

Như vậy đẳng thức $n = [\sqrt{x}]$ tương đương với hệ thức

$$n \leq \sqrt{x} \leq n+1 \text{ hay bình phương ta được: } n^2 \leq x \leq (n+1)^2 \quad (1)$$

Từ (1) ta suy ra số số 0 trong dãy:

$$1^2 \stackrel{\Delta}{=} x; 2^2 \stackrel{\Delta}{=} x; \dots; n^2 \stackrel{\Delta}{=} x; \dots; x^2 \stackrel{\Delta}{=} x \text{ đúng bằng } n.$$

Vậy ta có thể viết:
$$[\sqrt{x}] = \sum_{i=1}^x \text{Sg}(i^2 \stackrel{\Delta}{=} x)$$

Vì hàm $\text{Sg}(i^2 \stackrel{\Delta}{=} x)$ đệ quy nguyên thủy theo định lý 3 thì $[\sqrt{x}]$ đệ quy nguyên thủy.

Ví dụ 2: Cho hàm $x \stackrel{\Delta}{=} [\sqrt{x}]^2$. Hàm này bằng khoảng cách từ x đến số chính phương gần nhất bên trái của x . Đặt $H(x) = x \stackrel{\Delta}{=} [\sqrt{x}]^2$. Ta chỉ ra hàm $H(x) \in \pi$.

Thật vậy vì $x \stackrel{\Delta}{=} y \in \pi, x \cdot x = x^2 \in \pi, \sqrt{x} \in \pi$ nên $x \stackrel{\Delta}{=} [\sqrt{x}]^2 \in \pi$.

Ví dụ 3: Nếu x, y là các số tự nhiên, $y \neq 0$ thì ta ký hiệu $\lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ là thương không đúng của phép chia x cho y . Còn biểu thức $x \div y \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ ký hiệu phần dư của phép chia x cho y .

Để hàm xác định khắp nơi ta đặt $\lfloor \frac{x}{0} \rfloor = x$ đối với mọi x . Ta đặt $\text{Rest}(x, y) = x \div y \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ và chứng minh hàm $\text{Rest}(x, y) \in \pi$.

Thật vậy đặt $n = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ ta có: $n \leq \frac{x}{y} \leq n+1$ hay $yn \leq x \leq y(n+1)$ (1)

với $y \neq 0$.

Từ (1) ta suy ra số số 0 trong dãy:

$1.y \div x; 2.y \div x; \dots; n.y \div x; (n+1)y \div x; \dots; x.y \div x$ đúng bằng n .

Từ đó ta có: $\lfloor \frac{x}{y} \rfloor = \sum_{i=1}^x \overline{\text{Sg}}(iy \div x)$ (2)

Với $y = 0$ thì đẳng thức này cũng đúng. Cụ thể hai vế cùng bằng x .

Vì $\overline{\text{Sg}}(iy \div x)$ đệ quy nguyên thủy nên theo Định lý 3 có $\lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ cũng

là đệ quy nguyên thủy.

Từ đó ta suy ra hàm $\text{Rest}(x, y)$ cũng đệ quy nguyên thủy.

Định nghĩa 6 : Giả sử $f(x_1, \dots, x_n)$ là hàm n biến. Ta định nghĩa ký hiệu nhân $\prod_{i=x}^y$ như sau:

$$\prod_{i=x}^y f(x_1, \dots, x_{n-1}, i) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x > y \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}, x), & \text{nếu } x = y \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}, x).f(x_1, \dots, x_{n-1}, x+1) \dots \\ \dots f(x_1, \dots, x_{n-1}, y), & \text{nếu } x < y. \end{cases}$$

Cũng chứng minh tương tự như Định lý 3, ta có định lý sau:

Định lý 4 : Nếu $f(x_1, \dots, x_n)$ là hàm đệ quy nguyên thủy, thì hàm $(n+1)$ biến $T(x_1, \dots, x_{n-1}, x, y) = \prod_{i=x}^y f(x_1, \dots, x_{n-1}, i)$ cũng là hàm đệ quy nguyên thủy.

III. TƯƠNG ỨNG GIỮA KHÔNG GIAN N VÀ N^s

Định nghĩa 7: Giả sử có một tương ứng K giữa N và N^s , tương ứng đó ký hiệu là $K^{[s]}$, nghĩa là $(x_1, x_2, \dots, x_s) \leftrightarrow t$, ở đây $(x_1, x_2, \dots, x_s) \in N^s$, $t \in N$ và tương ứng trên là 1-1.

Ứng với tương ứng $K^{[s]}$ giữa N và N^s tạo nên $(s+1)$ hàm $K^{[s]}_0, K^{[s]}_1, K^{[s]}_2, \dots, K^{[s]}_s$, ở đây $K^{[s]}_0(x_1, \dots, x_s) = t$; $K^{[s]}_1(t) = x_1$; $K^{[s]}_2(t) = x_2$; ...; $K^{[s]}_s(t) = x_s$. Ta nói các hàm này thực hiện tương ứng $K^{[s]}$. Nếu các hàm $K^{[s]}_0, K^{[s]}_1, K^{[s]}_2, \dots, K^{[s]}_s$ là đệ quy nguyên thủy thì tương ứng $K^{[s]}$ gọi là tương ứng đệ quy nguyên thủy giữa không gian N và N^s .

Định lý 5 : Với mỗi $s > 0$, bao giờ cũng tồn tại tương ứng $K^{[s]}$ đệ quy nguyên thủy.

Chứng minh: Với $s = 1$. Ta lấy tương ứng $K^{[1]}$ chính là tương ứng đồng nhất giữa N vào N . Cụ thể là $K^{[1]}_0(x) = t$, $x \in N^1 = N$, $t \in N$, $K^{[1]}_1(t) = x$. Vì $K^{[1]}_0, K^{[1]}_1 \in \pi$ nên $K^{[1]}$ đệ quy nguyên thủy.

Giả sử định lý đã đúng cho $s > 1$. Nghĩa là $K^{[s]}$ là tương ứng đệ quy nguyên thủy.

Ta đưa vào khái niệm hàm $\exp_i(t)$ và được định nghĩa như sau:

Trong lý thuyết số người ta đã chứng minh: bất kỳ số tự nhiên nào cũng phân tích được dưới dạng tích các lũy thừa của các số nguyên tố liên tiếp nhau và dạng phân tích đó là duy nhất $t = P_0^{\alpha_0} P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n}$, trong đó $P_0 = 2$, $P_1 = 3$, $P_2 = 5$, ... còn P_n là số nguyên tố thứ $n+1$ trong dãy các số nguyên tố liên tiếp lớn dần. Khi đó ta định nghĩa $\exp_i(t) = \alpha_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Sau này ta sẽ chứng minh hàm $\exp_i(t)$ là hàm đệ quy nguyên thủy.

Ta đã biết hàm
$$\left[\frac{x}{y} \right] = \begin{cases} \text{phần nguyên của } \frac{x}{y} & \text{nếu } y \neq 0 \\ x, & \text{nếu } y = 0 \end{cases}$$

và $\left[\frac{x}{y}\right]$ là hàm đệ quy nguyên thủy.

Dựa vào hai hàm $\exp_i(t)$ và $\left[\frac{x}{y}\right]$ ta xây dựng tương ứng $K^{[2]}$ giữa N và N^2 như sau:

Với $t \in N$ ta đặt tương ứng với $(x_1, x_2) \in N^2$ theo công thức

$$t = 2^{x_1}(2x_2 + 1) - 1 \quad (1)$$

Đây là tương ứng 1-1. Vì với mỗi t cho ta cặp (x_1, x_2) thoả mãn (1) và ngược lại.

Chẳng hạn $t = 0$ ta có $x_1 = x_2 = 0$, cặp $(0, 0)$

$t = 1$ ta có $x_1 = 1, x_2 = 0$, cặp $(1, 0)$

$t = 2$ ta có $x_1 = 0, x_2 = 1$, cặp $(0, 1)$

Bây giờ ta chứng minh $K^{[2]}$ là đệ quy nguyên thủy, hay chỉ ra các hàm $K^{[2]}_0, K^{[2]}_1, K^{[2]}_2$ là các hàm đệ quy nguyên thủy.

Thật vậy $K^{[2]}_0(x_1, x_2) = t = 2^{x_1}(2x_2 + 1) - 1 \in \pi$.

$$K^{[2]}_1(t) = x_1 = \exp_0(t+1) \in \pi$$

$$K^{[2]}_2(t) = x_2 = \left[\frac{\left[\frac{t+1}{2^{x_1}} \right] \cdot 1}{2} \right] \in \pi$$

Vậy $K^{[2]}$ là tương ứng đệ quy nguyên thủy. Giả sử $K^{[s]}$ là tương ứng đệ quy nguyên thủy giữa N và N^s . Ta chỉ ra có tồn tại $K^{[s+1]}$ là tương ứng đệ quy nguyên thủy giữa không gian N và N^{s+1} như sau:

Từ $K^{[2]}$ ta có tương ứng $(x_s, x_{s+1}) \leftrightarrow t' \quad (2)$. Từ tương ứng đệ quy nguyên thủy $K^{[s]}$ ta có $(x_1, \dots, x_{s-1}, t') \leftrightarrow t \quad (3)$. Từ (2) và (3) ta lập tương ứng $K^{[s+1]}$ như sau: $(x_1, \dots, x_{s-1}, x_s, x_{s+1}) \leftrightarrow t \quad (4)$. Rõ ràng (4) là tương

ứng 1-1 vì $K^{[s]}, K^{[2]}$ là tương ứng 1-1.

Ta chỉ ra tương ứng (4) hay tương ứng $K^{[s+1]}$ là tương ứng đệ quy nguyên thủy.

Thật vậy ta có:

$$K^{[s+1]}_0(x_1, \dots, x_{s-1}, x_s, x_{s+1}) = t = K^{[s]}_0(x_1, \dots, x_{s-1}, t') \text{ (do 3)}$$

$$= K^{[s]}_0(x_1, \dots, x_{s-1}, K^{[2]}_0(x_s, x_{s+1})) \in \pi. \text{ (do 2)}$$

$$K^{[s+1]}_1(t) = x_1 = K^{[s]}_1(t) \in \pi.$$

$$K^{[s+1]}_2(t) = x_2 = K^{[s]}_2(t) \in \pi.$$

$$\dots\dots\dots$$

$$K^{[s+1]}_{s-1}(t) = x_{s-1} = K^{[s]}_{s-1}(t) \in \pi.$$

$$K^{[s+1]}_s(t) = x_s = K^{[2]}_1(t') \in \pi.$$

$$K^{[s+1]}_{s+1}(t) = x_{s+1} = K^{[2]}_2(t') \in \pi.$$

Hay $K^{[s+1]}$ đệ quy nguyên thủy. Định lý được chứng minh.

§2. HÀM ĐỆ QUY TỪNG PHẦN

1. ĐỊNH NGHĨA HÀM ĐỆ QUY TỪNG PHẦN

Ký hiệu hàm $g^{(s+1)}(x_1, x_2, \dots, x_s, y) = g(x_1, x_2, \dots, x_s, y)$ là hàm (s+1) biến. Khi đó hàm

$$f(x_1, \dots, x_s) = (\mu y)[g(x_1, x_2, \dots, x_s, y) = 0] \quad (1)$$

Với hàm $f(x_1, \dots, x_s)$ xác định như sau:

Nếu $g(x_1, x_2, \dots, x_s, 0)$ không xác định, thì hàm $f(x_1, \dots, x_s)$ cũng không xác định, còn nếu $g(x_1, x_2, \dots, x_s, 0)$ xác định và $= 0$ thì $f(x_1, \dots, x_s) = 0$, nhưng nếu $g(x_1, x_2, \dots, x_s, 0)$ xác định và $\neq 0$ thì xét tiếp $g(x_1, \dots, x_s, 1)$.

Nếu $g(x_1, x_2, \dots, x_s, 1)$ không xác định thì $f(x_1, \dots, x_s)$ cũng không xác định, còn nếu $g(x_1, x_2, \dots, x_s, 1)$ xác định và $= 0$ thì $f(x_1, \dots, x_s) = 1$, nhưng nếu $g(x_1, x_2, \dots, x_s, 1)$ xác định và $\neq 0$ thì xét tiếp $g(x_1, \dots, x_s, 2)$.

.....

Như vậy $f(x_1, \dots, x_s)$ xác định và bằng y khi và chỉ khi các hàm $g(x_1, x_2, \dots, x_s, 0), g(x_1, x_2, \dots, x_s, 1), \dots, g(x_1, x_2, \dots, x_s, y-1)$ xác định $\neq 0$. Còn $g(x_1, x_2, \dots, x_s, y)$ xác định và $= 0$. Như vậy giá trị của hàm $f(x_1, \dots, x_s)$ chính là giá trị nhỏ nhất y thoả mãn (1).

Vì lẽ đó ta gọi μ là phép toán tử cực tiểu, còn hàm $g(x_1, \dots, x_s, y)$ gọi là hàm gốc của phép toán tử cực tiểu μ .

Định nghĩa 8: Hàm $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ gọi là hàm đệ quy từng phần nếu nó nhận được từ các hàm cơ sở $0^{(0)}, \lambda(x), I_k^{(n)}$ bằng cách áp dụng một số hữu hạn lần các phép thế, phép đệ quy nguyên thủy và phép toán tử cực tiểu μ .

Nói cách khác hàm f gọi là hàm đệ quy từng phần nếu tồn tại dãy các hàm $f_1, f_2, \dots, f_n = f$, trong đó $f_i (i = 1, n)$ hoặc là các hàm cơ sở, hoặc suy từ các hàm đứng trước nó bằng cách áp dụng hữu hạn lần phép thế, phép đệ quy nguyên thủy và phép toán tử cực tiểu.

Từ định nghĩa ta suy ra các kết quả sau đây:

a) Các hàm đệ quy nguyên thủy đều là các hàm đệ quy từng phần.

Điều ngược lại nói chung không đúng, vì mọi hàm đệ quy nguyên thủy đều xác định khắp nơi, còn các hàm đệ quy từng phần không nhất thiết xác định khắp nơi.

Ví dụ hàm $f(x_1, \dots, x_s) = (\mu y)[1(x_1, \dots, x_s, y) = 0]$, theo định nghĩa là hàm đệ quy từng phần, nhưng không phải là hàm đệ quy nguyên thủy, vì hàm này không xác định khắp nơi.

b) Từ hàm đệ quy từng phần nếu áp dụng phép thế, phép đệ quy nguyên thủy và phép toán tử cực tiểu, thì hàm nhận được cũng là đệ quy từng phần.

c) Các hàm đệ quy từng phần đều là hàm tính được. Để chứng tỏ điều này, ta chỉ ra rằng trong trường hợp hàm gốc được xác định khắp nơi mà tính được thì hàm nhận được qua hàm gốc bởi phép toán tử cực tiểu cũng tính được. Giả sử $f(x_1, \dots, x_s) = (\mu y)[g(x_1, \dots, x_s, y) = 0]$, và hàm $g(x_1, \dots, x_s, y)$ xác định khắp nơi là tính được, ta hãy chứng tỏ f cũng là hàm tính được.

Thật vậy vì g tính được nên tồn tại thuật toán lần lượt cho các kết quả sau đây:

$$b_0 = g(x_1, \dots, x_s, 0)$$

$$b_1 = g(x_1, \dots, x_s, 1)$$

.....

$$b_m = g(x_1, \dots, x_s, m)$$

Sau đó cho thuật toán so sánh các kết quả nhận được $b_0, b_1, \dots$ với 0. Thuật toán sẽ dừng lại nếu $b_i = 0$, và cho kết quả i chính là giá trị của hàm $f(x_1, \dots, x_s)$, còn nếu $b_i \neq 0$ thì thuật toán chuyển sang tính giá trị b_{i+1} và lặp lại như trên. Chúng ta gọi $f(x_1, \dots, x_s)$ là hàm tính được.

Vấn đề ngược lại: nếu $f(x_1, \dots, x_s)$ là hàm tính được thì người ta đã chỉ ra f cũng là hàm đệ quy từng phần không.

Định lý 6: Giả sử $g(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ và $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ là hàm đệ quy nguyên thủy sao cho phương trình $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ (1) có ít nhất một nghiệm y đối với mỗi bộ $(x_1, \dots, x_n)$ và $(\mu y)[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0] \leq \alpha(x_1, \dots, x_n)$. Khi đó hàm $f(x_1, \dots, x_n) = (\mu y)[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$ cũng là hàm đệ quy nguyên thủy.

Chứng minh: Cố định bộ $(x_1, \dots, x_n)$ và đặt hàm

$$f(x_1, \dots, x_n) = (\mu y)[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0] = y.$$

Xét dãy tích với số các nhân tử tăng dần sau đây:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n, 0),$$

$$g(x_1, \dots, x_n, 0) \cdot g(x_1, \dots, x_n, 1),$$

$$g(x_1, \dots, x_n, 0) \cdot g(x_1, \dots, x_n, 1) \cdot g(x_1, \dots, x_n, 2),$$

.....

$$g(x_1, \dots, x_n, 0) \cdot g(x_1, \dots, x_n, 1) \dots g(x_1, \dots, x_n, i) \quad (2)$$

$$(i = 0, 1, \dots)$$

Theo giả thiết thì do y là nghiệm nhỏ nhất của phương trình (1), nên y thành phần đầu tiên trong dãy (2) khác 0, còn các thành phần còn lại thì bằng 0. Vì vậy ta có thể viết:

$$y = \sum_{i=0}^{\alpha} \text{Sg}(g(x_1, \dots, x_n, 0) \cdot g(x_1, \dots, x_n, 1) \dots g(x_1, \dots, x_n, i)) \quad (3)$$

trong đó $\alpha = \alpha(x_1, \dots, x_n) \geq y$.

Ta đưa vào hàm phụ:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, z) = \prod_{i=0}^z g(x_1, \dots, x_n, i) \quad (4)$$

Theo định lý 4 thì $\varphi(x_1, \dots, x_n, z)$ là hàm đệ quy nguyên thủy.

Từ (4) ta có thể viết lại (3) như sau:

$$y = \sum_{i=0}^{\alpha} \text{Sg}\varphi(x_1, \dots, x_n, i).$$

Vì $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ đệ quy nguyên thủy nên $\text{Sg}\varphi$ đệ quy nguyên thủy, tức là hàm $y = \sum_{i=0}^{\alpha} \text{Sg}\varphi(x_1, \dots, x_n, i)$ đệ quy nguyên thủy, hay $f(x_1, \dots, x_n) = (\mu y)[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$ đệ quy nguyên thủy. Định lý được chứng minh.

Nhận xét: Ta biết rằng mọi hàm đệ quy nguyên thủy là đệ quy từng phần. Điều ngược lại nói chung không đúng. Tuy nhiên định lý 6 cho ta điều kiện để một hàm đệ quy từng phần là đệ quy nguyên thủy.

II. CÁC HÀM CÓ LIÊN QUAN TỚI CÁC SỐ NGUYÊN TỐ

1. Ta ký hiệu hàm đặc trưng của quan hệ x/y bởi $\text{div}(x, y)$ xác định như sau:

$$\text{div}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } \text{Rest}(x, y) = 0 \\ 0, & \text{nếu } \text{Rest}(x, y) \neq 0. \end{cases}$$

Khi đó ta có hệ thức sau đây:

$$\text{div}(x, y) = \overline{\text{Sg}(\text{Rest}(x, y))}$$

Vậy hàm $\text{div}(x, y)$ là hàm đệ quy nguyên thủy.

2. Bây giờ ta ký hiệu $\tau(x)$ là các ước khác nhau của số tự nhiên x . Vì số ước của x không thể lớn hơn x nên ta có hệ thức sau:

$$\tau(x) = \sum_{i=0}^x \text{div}(x,i)$$

Vì hàm $\text{div}(x,i)$ là hàm đệ quy nguyên thủy, và do định lý 3 ta suy ra hàm $\tau(x)$ là đệ quy nguyên thủy.

3. Theo định nghĩa thông thường thì một số tự nhiên được gọi là nguyên tố nếu nó có đúng hai ước khác nhau là 1 và chính nó.

Giả sử ta có dãy các số nguyên tố là 2, 3, 5, 7, 11, ... ta ký hiệu lần lượt các số nguyên tố trong dãy $P_0, P_1, P_2, \dots$, nói cách khác $P_0 = 2, P_1 = 3, P_2 = 5, \dots$

Như vậy P_n chính là số nguyên tố thứ $n+1$ trong dãy số nguyên tố theo thứ tự tăng dần.

Gọi $P(x)$ là hàm đặc trưng cho số nguyên tố x định nghĩa như sau:

$$P(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \text{ là số nguyên tố} \\ 0, & \text{nếu } x \text{ không phải là số nguyên tố} \end{cases}$$

Và chỉ có số nguyên tố mới có đúng hai ước khác nhau nên ta có hệ thức sau: $P(x) = \overline{\text{Sg } x} \mid \tau(x) - 2 \mid$

Vì các hàm $\overline{\text{Sg } x}, \tau(x)$ là đệ quy nguyên thủy nên hàm $P(x)$ cũng là hàm đệ quy nguyên thủy.

4. Một trong những hàm nổi tiếng nhất của lý thuyết số đó là hàm: số các số nguyên tố không vượt quá x mà ta ký hiệu là $\pi(x)$.

$$\text{Rõ ràng ta có hệ thức } \pi(x) = \sum_{i=0}^x P(i)$$

Trong đó $P(x)$ là hàm đặc trưng cho tính nguyên tố của x , và như trong 3 thì $P(x)$ đệ quy nguyên thủy, vậy $\pi(x)$ cũng là hàm đệ quy nguyên thủy.

Từ định nghĩa ta suy ra rằng $\pi(P_n) = n + 1$ và $\pi(x) < n + 1$ nếu $x < P_n$. Điều này có nghĩa là $x = P_n$ là nghiệm cực tiểu các phương trình $\pi(x) - (n+1) = 0$ hay $P_n = (\mu x)[(\pi(x) - n - 1) = 0]$. Ta chứng minh $P_n \in \pi$.

Vì hàm gốc $(\pi(x) - n - 1)$ đệ quy nguyên thủy nên theo định lý 6 để chứng minh hàm P_n đệ quy nguyên thủy ta cần chỉ ra hàm $\alpha(n)$ đệ quy nguyên thủy sao cho $P_n \leq \alpha(n)$ với mọi $n \geq 0$.

Ta lấy ngay hàm $\alpha(n) = 2^{2^n}$ rõ ràng đây là hàm đệ quy nguyên thủy. Ta chứng minh bằng quy nạp bất đẳng thức $P_n \leq 2^{2^n}$ theo $n \geq 0$.

Với $n = 0$ ta có $P_0 = 2 \leq 2^{2^0} = 2$ đúng với $n=0$.

Giả sử công thức đã đúng cho mọi n , tức là $P_n \leq 2^{2^n}$. Ta chứng minh nó cũng đúng cho $n + 1$, hay chứng minh $P_{n+1} \leq 2^{2^{n+1}}$.

Theo giả thiết quy nạp ta có $1 + P_0 P_1 \dots P_n \leq 1 + 2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \dots 2^{2^n}$
 hay $1 + P_0 P_1 \dots P_n \leq 1 + 2^{1+2+2^2+\dots+2^n} = 1 + 2^{2^{n+1}-1} = 1 + \frac{1}{2} 2^{2^{n+1}} \leq 2^{2^{n+1}}$.

Đặt $N = 1 + P_0 P_1 \dots P_n$ do $N > 1$ nên N phải có ít nhất một ước nguyên tố P_i nào đó. Ước P_i này không thể là $P_0, P_1, \dots, P_n$, vì nếu điều đó xảy ra thì N vừa chia hết cho P_i (vì P_i là ước của N) lại vừa không chia cho P_i nên $P_i > P_n$, hay $P_i \geq P_{n+1}$. Do $N > P_i$ nên $N \geq P_{n+1}$ (1)

Mặt khác ta có $N \leq 2^{2^{n+1}}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P_{n+1} \leq 2^{2^{n+1}}$, hay bất đẳng thức đúng với $n+1$.

Tóm lại ta có: $P_n \leq 2^{2^n} \forall n \geq 0$. Theo định lý 6b thì

$P_n = (\mu x)[|\pi(x) - n - 1| = 0]$ là hàm đệ quy nguyên thủy.

5. Chứng minh hàm $\exp_i(t)$ là đệ quy nguyên thủy

Để hàm $\exp_i(t)$ xác định khắp nơi ta đặt thêm điều kiện $\exp_i(0) = 0$ với $t=0$. Theo định nghĩa thì hàm $\exp_i(t)$ là giá trị lớn nhất của số α để P_i^α là ước của t . Bởi vậy ta cũng có thể nói $\exp_i(t)$ là giá trị bé nhất của số α để cho t không chia hết cho $P_i^{\alpha+1}$. Vì vậy ta có $\exp_i(t) = (\mu \alpha)[\text{div}(P_i^{\alpha+1}, t) = 0]$. Vì $\text{div}(P_i^{\alpha+1}, t)$ đệ quy nguyên thủy nên theo định lý 6 để chứng minh

hàm $\exp_i(t)$ đệ quy nguyên thủy ta chỉ ra hàm $\beta(n)$ đệ quy nguyên thủy sao cho $\exp_i(t) \leq \beta(n)$. Ta đặt $\beta(n) = P_0^{\alpha_1} P_1^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_{n+1}}$. Rõ ràng $\beta(n)$ là hàm đệ quy nguyên thủy và hàm $\exp_i(t) \leq \beta(n)$. Vậy $\exp_i(t)$ là hàm đệ quy nguyên thủy.

III. TÍNH CHẤT CỦA HÀM ĐỆ QUY TỪNG PHẦN VÀ TẬP ĐỆ QUY KỂ ĐƯỢC

Định nghĩa 9: Tập $M \subset \mathbb{N}^s$ gọi là tập đệ quy kể được nếu nó hoặc là rỗng, hoặc là tồn tại các hàm đệ quy nguyên thủy $f_1(t), \dots, f_s(t)$ sao cho $M = \{(f_1(t), \dots, f_s(t)) / t \in \mathbb{N}\}$.

Định lý 7: Giả sử $K^{[s]}$ là một tương ứng đệ quy nguyên thủy giữa $\mathbb{N}$ và $\mathbb{N}^s$.

1. Nếu $L \subset \mathbb{N}$ là tập đệ quy kể được thì ảnh của nó qua phép tương ứng $K^{[s]}$ cũng là tập đệ quy kể được.

2. Nếu $M \subset \mathbb{N}^s$ là tập đệ quy kể được thì ảnh của nó qua phép tương ứng $K^{[s]}$ cũng là tập đệ quy kể được.

Chứng minh:

1) Theo giả thiết $L \subset \mathbb{N}$ là tập đệ quy kể được, nên theo định nghĩa thì tồn tại hàm đệ quy nguyên thủy $f(t)$ sao cho $L = \{f(t) / t \in \mathbb{N}\}$. Xét ảnh của tập L qua K^s :

$$K^{[s]}(L) = \{(K_1^{[s]}(x), K_2^{[s]}(x), \dots, K_s^{[s]}(x)) / x \in L\}.$$

Nhưng $x \in L$ khi và chỉ khi $\exists t$ để $f(t) = x$. Nên ta có thể viết:

$$K^{[s]}(L) = \{(K_1^{[s]}(f(t)), K_2^{[s]}(f(t)), \dots, K_s^{[s]}(f(t))) / t \in \mathbb{N}\}.$$

Đặt $K_i^{[s]}(f(t)) = f_i(t)$, khi đó vì $K_i^{[s]}, f(t)$ đệ quy nguyên thủy nên $f_i(t)$ là đệ quy nguyên thủy. Vậy $K^{[s]}(L) = \{(f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t)) / t \in \mathbb{N}\}$ là tập đệ quy kể được.

2). Vì $M \subset \mathbb{N}^s$ là tập đệ quy kể được, nên theo định nghĩa ta có tồn tại các hàm đệ quy nguyên thủy $f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t)$ với $t \in \mathbb{N}$, và $M = \{(f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t)) / t \in \mathbb{N}\}$. Ảnh của M qua $K^{[s]}$ là

$$K^{[s]}(M) = \{K_0^{[s]}(x_1, x_2, \dots, x_s) / (x_1, x_2, \dots, x_s) \in M\}.$$

Nhưng $(x_1, x_2, \dots, x_s) \in M$ khi và chỉ khi tồn tại các hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t)$ với $t \in N$ sao cho $f_i(t) = x_i$ ($i = \overline{1, s}$) nên ta có thể viết lại:

$$K^{[s]}(M) = \{K_0^{[s]}(f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t)) / t \in N\}.$$

$f_i(t) = K_0^{[s]}(f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t))$ là hàm đệ quy nguyên thủy. Vì $K_0^{[s]}, f_i(t)$ đệ quy nguyên thủy nên tập $K^{[s]}(M)$ là tập đệ quy kể được.

Định lý 8 : Hình chiếu của tập đệ quy kể được là một tập đệ quy kể được.

Chứng minh: Giả sử $M \subset N^s$ là một tập đệ quy kể được.

Nghĩa là tồn tại các hàm đệ quy nguyên thủy $f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t), t \in N$ sao cho $M = \{(f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t)) / t \in N\}$.

Ta gọi hình chiếu của tập M là tập mà ta ký hiệu là:

hay $M = L = \{(f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)) / t \in N\}$. Trong đó $f_{ij}(t) \in \{f_1(t), \dots, f_s(t)\}$ suy ra L là đệ quy kể được.

Định lý 9 : Mỗi tập đệ quy nguyên thủy đều là tập đệ quy kể được.

Chứng minh: Giả sử M là tập đệ quy nguyên thủy nào đó. Ta chứng minh M cũng là tập đệ quy kể được.

Nếu $M = \emptyset$ thì theo định nghĩa M là đệ quy kể được.

Nếu $M \neq \emptyset$, nghĩa là có ít nhất là một phần tử chẳng hạn đó là phần tử $a \in M$. Gọi $\chi_M(x)$ là hàm đặc trưng của M , nghĩa là

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in M \\ 0, & \text{nếu } x \notin M \end{cases}$$

Gọi $f(x) = x \cdot \chi_M(x) + a \cdot \overline{\text{Sg}} \chi_M(x)$ và đây là hàm đệ quy nguyên thủy.

Ta chỉ ra $M = \{f(x) / x \in N\}$. Thật vậy nếu $x \in M$ thì ta có

$$f(x) = x \in M.$$

Nếu $x \notin M$ thì $f(x) = a \in M$. Theo định nghĩa tập M là tập đệ quy kể được.

Định nghĩa 10: Tập $M \subset \mathbb{N}$ được gọi là tập đệ quy, nếu hàm đặc trưng của nó là hàm đệ quy từng phần.

Từ định nghĩa trên ta có một số kết quả sau đây:

a) Mọi tập đệ quy nguyên thủy đều là tập đệ quy.

Vì mọi hàm đệ quy nguyên thủy đều là hàm đệ quy từng phần.

b) Tập rỗng và tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên là tập đệ .

Vì các hàm đặc trưng tương ứng của tập rỗng và tập các số tự nhiên là 0 và 1.

c) Tập hữu hạn các số tự nhiên $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là tập đệ quy.

Thật vậy, hàm đặc trưng của M là

$$\chi_M(x) = \overline{\text{Sg}}|x-a_1| + \overline{\text{Sg}}|x-a_2| + \dots + \overline{\text{Sg}}|x-a_n|$$

đệ quy nguyên thủy nên cũng là hàm đệ quy từng phần.

d) Tập các số tự nhiên chẵn, tập các số nguyên tố và tập các số chính phương đều là các tập đệ quy nguyên thủy và do đó đều là các tập đệ quy.

Thật vậy, đặt $M_1 = \{\text{các số chẵn}\}$, $M_2 = \{\text{các số nguyên tố}\}$,

$M_3 = \{\text{các số chính phương}\}$, ta có:

$$\chi_{M_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x - \text{chẵn} \\ 0, & \text{nếu } x - \text{lẻ} \end{cases}$$

suy ra $\chi_{M_1}(x) = \text{Sg}(\text{div}(x, 2))$

$$\chi_{M_2}(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x - \text{nguyên tố} \\ 0, & \text{nếu } x - \text{không nguyên tố} \end{cases}$$

suy ra $\chi_{M_2}(x) = \overline{\text{Sg}}(\tau(x) - 2)$.

$$\chi_{M_3}(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x - \text{chính phương} \\ 0, & \text{nếu } x - \text{không chính phương} \end{cases}$$

Suy ra $\chi_{M_3}(x) = \overline{\text{Sg}}(x \div [\sqrt{x}]^2)$ đều đệ quy nguyên thủy.

Chú ý: Mọi tập đệ quy nguyên thủy đều là tập đệ quy nhưng ngược lại không đúng, người ta đã chỉ ra phản ví dụ trong lý thuyết hàm toàn năng.

Sau này ta sẽ chứng minh định lý sau đây:

Định lý 10: Mọi tập đệ quy đều là tập đệ quy kể được.

Định lý 11: Lớp các tập đệ quy đóng đối với phép hợp ($\cup$), giao ($\cap$), phủ định ($\neg$).

Chứng minh: Giả sử M, M_1, M_2 là các tập đệ quy. Ký hiệu các hàm đặc trưng tương ứng là $\chi_M, \chi_{M_1}, \chi_{M_2}$.

Khi đó hàm đặc trưng của các tập $\overline{M}, M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2$ tương ứng là:

$$\chi_{\overline{M}}(x) = \overline{\text{Sg}} \chi_M(x)$$

$$\chi_{M_1 \cup M_2} = \text{Sg}(\chi_{M_1} + \chi_{M_2})$$

$$\chi_{M_1 \cap M_2} = \chi_{M_1} \cdot \chi_{M_2}$$

Vì các hàm $\chi_M, \chi_{M_1}, \chi_{M_2}$ đệ quy từng phần, nên theo định nghĩa ta cũng suy ra các hàm $\chi_{\overline{M}}, \chi_{M_1 \cup M_2}, \chi_{M_1 \cap M_2}$ đệ quy từng phần. Hay các tập $\overline{M}, M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2$ là các tập đệ quy. Định lý được chứng minh.

Định lý 12 : Tập $L \subset \mathbb{N}^s$ là tập đệ quy kể được khi và chỉ khi với mọi số tự nhiên $m > 0$ tồn tại tập $M \subset \mathbb{N}^{s+m}$ là tập đệ quy nguyên thủy, đồng thời $L = \text{hc}_{1...s} M$.

Chứng minh:

Điều kiện đủ: Giả sử $\forall m > 0$, tồn tại tập $M \subset \mathbb{N}^{s+m}$ là tập đệ quy nguyên thủy với $L = \text{hc}_{1...s} M$. Ta chứng minh L là tập đệ quy kể được. Thật vậy từ kết quả a) ta có M là tập đệ quy. Theo định lý 10 thì M là tập đệ quy kể được. Theo Định lý 8 thì $L = \text{hc}_{1...s} M$ là tập đệ quy kể được.

Điều kiện cần: Giả sử $L \subset \mathbb{N}^s$ là tập đệ quy kể được. Theo định nghĩa thì tồn tại các hàm đệ quy nguyên thủy $f_1(t), \dots, f_s(t)$ sao cho $L = \{(f_1(t), \dots, f_s(t)) / t \in \mathbb{N}\}$.

Với mọi $m > 0$ đặt $M = \{(f_1(t), \dots, f_s(t), \underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ lần}})\}, t \in N$.

Khi đó ta có $M \subset N^{s+m}$ và $L = hc_{1\dots s}M$.

Để kết thúc chứng minh ta cần chỉ ra rằng tập M là đệ quy nguyên thủy.

Thật vậy $(x_1, \dots, x_s, z_1, \dots, z_m) \in M$ khi và chỉ khi $f_1(t) = x_1, \dots, f_s(t) = x_s, z_1 = z_2 = \dots = z_m = 0$. Vì vậy nếu gọi $\chi_M(x_1, \dots, x_s, z_1, \dots, z_m)$ là hàm đặc trưng của M thì ta có:

$$\chi_M(x_1, \dots, x_s, z_1, \dots, z_m) = \overline{\text{Sg}} \left[\sum_{i=1}^s |(f_i(t) - x_i)| + \sum_{i=1}^m z_i \right]$$

là đệ quy nguyên thủy. Hay M là tập đệ quy nguyên thủy.

Định lý 13 : Tập $L \subset N^s$ là đệ quy kể được khi và chỉ khi với mọi $m > 0$, tồn tại hàm đệ quy nguyên thủy $F^{(s+m)}$ sao cho:

$$L = \{(x_1, \dots, x_s) / \exists y_1, \dots, y_m \text{ để } F^{(s+m)}(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) = 0\}.$$

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả sử $L \subset N^s$ là tập đệ quy kể được. Theo Định lý 12 thì $\forall m > 0, \exists$ tập $M \subset N^{s+m}$ đệ quy nguyên thủy, đồng thời $L = hc_{1\dots s}M$. Gọi χ_M là hàm đặc trưng của M .

$$\text{Đặt hàm } F^{(s+m)}(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) = \overline{\text{Sg}} \chi_M(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m)$$

Rõ ràng $F^{(s+m)}$ như trên là hàm cần tìm. Thật vậy $F^{(s+m)}$ là hàm đệ quy nguyên thủy $(s+m)$ biến, do χ_M và hàm $\overline{\text{Sg}}$ là đệ quy nguyên thủy.

Theo định nghĩa hình chiếu ta có $(x_1, \dots, x_s) \in L$ khi và chỉ khi $\exists (y_1, \dots, y_m)$ sao cho $(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) \in M$.

Nhưng $(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) \in M$ khi và chỉ khi

$$\chi_M(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) = 1 \text{ hay } \overline{\text{Sg}} \chi_M(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) = 0.$$

Nói cách khác $(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) \in M$ khi và chỉ khi $F(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) = 0$. Hay $L = \{(x_1, \dots, x_s) / \exists (y_1, \dots, y_m) \text{ sao cho } F(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) = 0\}$.

Điều kiện đủ: Giả sử $m > 0$, ta có hàm đệ quy nguyên thủy $F^{(s+m)}$ sao cho $L = \{(x_1, \dots, x_s) / \exists y_1, \dots, y_m \text{ để } F^{(s+m)}(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) = 0\}$.

Ta chứng minh L theo đệ quy kế được.

Xét tập $M = \{(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) / F(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) = 0\}$ với hàm đặc trưng của nó là χ_M . Khi đó ta có:

$\chi_M(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m) = \overline{\text{Sg}} F(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_m)$ là đệ quy nguyên thủy. Suy ra M là đệ quy nguyên thủy. Hay M là tập đệ quy (do a). Theo Định lý 10 thì M là tập đệ quy kế được. Ta lại có $L = \text{hc}_{1..m} M$ vì M là tập đệ quy kế được nên theo định lý 8, L là tập đệ quy kế được. Định lý được chứng minh.

Định lý 14 : Nếu M_1, M_2 là hai tập đệ quy kế được trong N^s , thì $M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2$ cũng là hai tập đệ quy kế được.

Chứng minh: Theo giả thiết M_i ($i = 1, 2$) đệ quy kế được nên theo Định lý 13 tồn tại các hàm đệ quy nguyên thủy $F_i^{(s+1)}(x_1, \dots, x_s, y_i)$ sao cho $M_i = \{(x_1, \dots, x_s) / \exists y_i \text{ để } F_i^{(s+1)}(x_1, \dots, x_s, y_i) = 0\}$ ($i = 1, 2$).

a) Trước hết ta chứng minh tập $M_1 \cup M_2$ là đệ quy kế được.

Xét hàm sau:

$F^{(s+2)}(x_1, \dots, x_s, y_1, y_2) = F_1^{(s+1)}(x_1, \dots, x_s, y_1) \cdot F_2^{(s+1)}(x_1, \dots, x_s, y_2)$ rõ ràng hàm này đệ quy nguyên thủy.

Mặt khác $F^{(s+2)}(x_1, \dots, x_s, y_1, y_2) = 0$ khi và chỉ khi ít nhất hoặc $F_1^{(s+1)} = 0$ hoặc $F_2^{(s+1)} = 0$.

Xét $(x_1, \dots, x_s) \in M_1 \cup M_2$ khi và chỉ khi hoặc $(x_1, \dots, x_s) \in M_1$ hoặc $(x_1, \dots, x_s) \in M_2$ khi và chỉ khi $\exists y_1$ để $F_1^{(s+1)}(x_1, \dots, x_s, y_1) = 0$ hoặc $\exists y_2$ để $F_2^{(s+1)}(x_1, \dots, x_s, y_2) = 0$ khi và chỉ khi $\exists y_1, y_2$ để $F^{(s+2)}(x_1, \dots, x_s, y_1, y_2) = 0$. Tóm lại $(x_1, \dots, x_s) \in M_1 \cup M_2$ khi và chỉ khi $\exists y_1, y_2$ để hàm đệ quy nguyên thủy $F^{(s+2)}(x_1, \dots, x_s, y_1, y_2) = 0$.

Hay $M_1 \cup M_2 = \{(x_1, \dots, x_s) / \exists y_1, y_2 \text{ để } F^{(s+2)}(x_1, \dots, x_s, y_1, y_2) = 0\}$. Theo Định lý 13 ta có tập $M_1 \cup M_2$ là đệ quy kế được.

b) Ta chứng minh tập $M_1 \cap M_2$ là đệ quy kế được. Xét hàm

$F^{(s+2)}(x_1, \dots, x_s, y_1, y_2) = F_1^{(s+1)}(x_1, \dots, x_s, y_1) + F_2^{(s+1)}(x_1, \dots, x_s, y_2)$ và là đệ quy nguyên thủy.

$F^{(s+2)}(x_1, \dots, x_s, y_1, y_2) = 0$ khi và chỉ khi khi

$$F_1^{(s+1)}(x_1, \dots, x_s, y_1) = F_2^{(s+1)}(x_1, \dots, x_s, y_2) = 0$$

Xét $(x_1, \dots, x_s) \in M_1 \cap M_2$ khi và chỉ khi $(x_1, \dots, x_s) \in M_1$ và $(x_1, \dots, x_s) \in M_2$ khi và chỉ khi tồn tại y_1 để $F_1^{(s+1)}(x_1, \dots, x_s, y_1) = 0$ và tồn tại y_2 để $F_2^{(s+1)}(x_1, \dots, x_s, y_2) = 0$ khi và chỉ khi tồn tại y_1, y_2 để $F^{(s+2)}(x_1, \dots, x_s, y_1, y_2) = 0$.

Vậy $M_1 \cap M_2 = \{(x_1, \dots, x_s) / \exists y_1, y_2 \text{ để } F^{(s+2)}(x_1, \dots, x_s, y_1, y_2) = 0\}$.

Theo Định lý 13 thì $M_1 \cap M_2$ là tập đệ quy kể được.

Định lý 15: Hàm $f^{(s)}$ là đệ quy từng phần khi và chỉ khi đồ thị G_f của nó là tập đệ quy kể được.

Chứng minh:

Điều kiện đủ: Giả sử G_f là tập đệ quy kể được. Ta chứng minh rằng f là hàm đệ quy từng phần.

Theo giả thiết do G_f đệ quy kể được nên tồn tại các hàm đệ quy nguyên thủy $f_1^{(t)}, f_2^{(t)}, \dots, f_s^{(t)}, f_{s+1}^{(t)}$ sao cho

$$G_f = \{(f_1^{(t)}, f_2^{(t)}, \dots, f_s^{(t)}, f_{s+1}^{(t)}) / t \in \mathbb{N} \text{ và } f_{s+1}^{(t)} = f(f_1^{(t)}, \dots, f_s^{(t)})\} \quad (1)$$

$$\text{Ta chứng minh } f(x_1, \dots, x_s) = f_{s+1}(\mu t) \left(\sum_{i=1}^s |f_i(t) - x_i| = 0 \right) \quad (2)$$

Nếu chứng minh được (2) thì $f(x_1, \dots, x_s)$ là hàm đệ quy từng phần (vì chính hàm gốc $\sum_{i=1}^s |f_i(t) - x_i|$ là đệ quy nguyên thủy). Trước tiên ta

nhận thấy nếu $f(x_1, \dots, x_s)$ không xác định thì vế phải cũng không xác định. Thật vậy nếu $f(x_1, \dots, x_s)$ không xác định thì không thể tồn tại t để $f_i(t) = x_i$. Vì nếu tồn tại t để $f_i(t) = x_i$ thì khi đó bộ $(x_1, \dots, x_s, f_{s+1}(t)) \in G_f$. Vì vậy $f_{s+1}(t)$ xác định trên bộ $(f_1(t), \dots, f_s(t))$, hay $f_{s+1}(f_1(t), \dots, f_s(t))$ xác định.

Theo (1) có $f(x_1, \dots, x_s)$ xác định. Trái với giả thiết $f(x_1, \dots, x_s)$ không xác định.

Như vậy nếu $f(x_1, \dots, x_s)$ không xác định thì không thể tồn tại t để $f_i(t) = x_i$. Vì vậy $(\mu t)(\sum_{i=1}^s |f_i(t) - x_i| = 0)$ không xác định hay hàm $f_{s+1}[(\mu t)(\sum_{i=1}^s |f_i(t) - x_i| = 0)]$ cũng không xác định.

Bây giờ ta chứng minh nếu một trong hai vế trong (2) xác định thì vế kia cũng xác định và cho kết quả như nhau:

Giả sử $f(x_1, \dots, x_s)$ xác định và bằng y ta chứng minh vế phải trong (2) cũng xác định và bằng y . Vì $f(x_1, \dots, x_s) = y$ nên $(x_1, \dots, x_s, y) \in G_f$, tức là tồn tại t sao cho $f_i(t) = x_i$ ($i = 1, \dots, s$) (3) và $y = f_{s+1}(f_1(t), \dots, f_s(t))$. Theo (1) ta có thể viết

$$y = f_{s+1}(f_1(t), \dots, f_s(t)) = f_{s+1}(t) \quad (4)$$

Xét vế phải trong (2) ta có:

$$f_{s+1}[(\mu t)(\sum_{i=1}^s |f_i(t) - x_i| = 0)] = f_{s+1}(t) \quad (5)$$

Từ (4), (5) ta có vế phải cũng xác định và:

$$f(x_1, \dots, x_s) = f_{s+1}[(\mu t)(\sum_{i=1}^s |f_i(t) - x_i| = 0)] = y.$$

Vậy điều kiện đủ được chứng minh.

Trước khi chứng minh điều kiện cần ta chứng minh ba bổ đề sau đây:

Bổ đề 1: Giả sử $f(x_1, \dots, x_n, y)$ nhận được từ các hàm $g^{(n)}, h^{(n+2)}$ bởi phép đệ quy nguyên thủy. Khi đó hàm f cũng nhận được từ các hàm $g^{(n)}, h^{(n+2)}$ và các hàm đệ quy nguyên thủy khác bằng phép thế và phép đệ quy nguyên thủy dạng đặc biệt:

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = x \\ \varphi(x, y+1) = \Phi(\varphi(x, y)) \end{cases}$$

Chứng minh: Theo giả thiết vì f nhận được từ $g^{(n)}, h^{(n+2)}$ bởi phép đệ quy nguyên thủy nên ta có lược đồ đệ quy nguyên thủy sau đây:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n) \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, x_2, \dots, x_n, y, f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)) \end{cases}$$

Giả sử: $K^{[n]}$ và $K^{[n+2]}$ là những tương ứng đệ quy nguyên thủy giữa N và N^n , N và N^{n+2} tương ứng. Như vậy tương ứng $K^{[n]}$ được biểu diễn bởi $t \leftrightarrow (x_1, \dots, x_n)$. Hay $K^{[n]}$ được thực hiện bởi các hàm :

$$K_0^{[n]}(x_1, \dots, x_n) = t ;$$

$$K_1^{[n]}(t) = x_1 ;$$

.....

$$K_n^{[n]}(t) = x_n .$$

Đặt hàm $\psi(t, y) = K_0^{[n+2]}(K_1^{[n]}(t), \dots, K_n^{[n]}(t), y, f(K_1^{[n]}(t), \dots, K_n^{[n]}(t), y))$ hay để cho gọn ta viết lại hàm $\psi(t, y)$ như sau:

$$\psi(t, y) = K_0^{[n+2]}(\tilde{x}, y, f(\tilde{x}, y)) \text{ (ở đây } \tilde{x} = (K_1^{[n]}(t), \dots, K_n^{[n]}(t))) \quad (1)$$

Khi đó ta có:

$$\psi(t, 0) = K_0^{[n+2]}(\tilde{x}, 0, f(\tilde{x}, 0)) = K_0^{[n+2]}(\tilde{x}, 0, g(\tilde{x})) =: G(t) \quad (2)$$

$$\psi(t, y+1) = K_0^{[n+2]}(\tilde{x}, y+1, f(\tilde{x}, y+1)) = K_0^{[n+2]}(\tilde{x}, y+1, h(\tilde{x}, y, f(\tilde{x}, y))) \quad (3)$$

$$\text{Đặt } \phi(u) = K_0^{[n+2]}(K_1^{[n+2]}(u), \dots, K_n^{[n+2]}(u), K_{n+1}^{[n+2]}(u)+1, h(K_1^{[n+2]}(u), \dots, K_n^{[n+2]}(u), K_{n+1}^{[n+2]}(u), K_{n+2}^{[n+2]}(u))) \quad (4)$$

Từ (1) ta nhận thấy $f(\tilde{x}, y)$ là thành phần thứ $n+2$ của bộ $\psi(t, y)$ cho nên ta có:

$$K_{n+2}^{[n+2]}(\psi(t, y)) = f(\tilde{x}, y) \quad (5)$$

Cũng từ (1) ta thấy $\psi(t, y)$ là hàm đệ quy nguyên thủy nhận được từ hàm f , mà f nhận được từ $g^{(n)}$, $h^{(n+2)}$ bởi phép đệ quy nguyên thủy nên $\psi(t, y)$ cũng nhận được từ $g^{(n)}$, $h^{(n+2)}$ bởi phép thế và phép đệ quy nguyên thủy. Mặt khác từ (5) ta thấy f lại nhận được từ $\psi(t, y)$ và $K_{n+2}^{[n+2]}$ bởi phép thế. Nói cách khác f nhận được từ $g^{(n)}$, $h^{(n+2)}$ và các hàm đệ quy nguyên thủy $\psi(t, y)$, $K_{n+2}^{[n+2]}$ bởi phép thế. Bây giờ ta chỉ ra f cũng nhận được từ các hàm đệ quy nguyên thủy trên qua phép đệ quy dạng đặc biệt.

Thật vậy, xét mối quan hệ giữa ψ và Φ , muốn vậy ta viết lại các đẳng thức (2), (3) như sau:

$$(*) \begin{cases} \psi(t, 0) = G(t) \\ \psi(t, y+1) = K_0^{[n+2]}(\tilde{x}, y+1, h(\tilde{x}, y, f(\tilde{x}, y))) \end{cases} \quad (2)$$

(3)

Ta chứng minh rằng $\psi(t, y+1) = \Phi(\psi(t, y))$.

Thật vậy trong (4) ta thay u bởi bộ $\psi(t, y)$ khi đó trong (4) ta có $(K_1^{[n+2]}(\psi(t, y)), \dots, K_n^{[n+2]}(\psi(t, y))) = \tilde{x}$, còn $K_{n+1}^{[n+2]}(\psi(t, y)) + 1 = y+1$ và $K_{n+2}^{[n+2]}(\psi(t, y)) = f(\tilde{x}, y)$ (5). Hay ta có

$$\Phi(\psi(t, y)) = K_0^{[n+2]}(\tilde{x}, y+1, h(\tilde{x}, y, f(\tilde{x}, y))) = \psi(t, y+1).$$

Đến đây ta viết lại (*) như sau:

$$(**) \begin{cases} \psi(t, 0) = G(t) \\ \psi(t, y+1) = \Phi(\psi(t, y)) \end{cases}$$

Nhưng đây chưa phải là phép đệ quy nguyên thủy dạng đặc biệt như trong bổ đề nên ta tiếp tục biến đổi bằng cách đặt:

$$(***) \begin{cases} \varphi(x, 0) = x \\ \varphi(x, y+1) = \Phi(\varphi(x, y)) \end{cases}$$

Khi đó trong (***) theo định nghĩa φ nhận được từ phép đệ quy nguyên thủy dạng đặc biệt. Bởi vậy bổ đề sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra đẳng thức sau:

$$\psi(t, y) = \varphi(G(t), y) \quad (6)$$

Ta chứng minh (6) bằng quy nạp theo y .

Với $y = 0$ thì vế trái của (6) là $\psi(t, 0) = G(t)$ (do 2) còn vế phải của (6) là $\varphi(G(t), 0) = G(t)$ (do ***) vậy với $y = 0$ thì (6) đúng:

$$\psi(t, 0) = \varphi(G(t), 0).$$

Giả sử (6) đúng với y , ta chứng minh (6) cũng đúng với $y+1$, tức là ta chứng minh rằng: $\psi(t, y+1) = \varphi(G(t), y+1)$.

Ta có $\varphi(G(t), y+1) = \Phi(\varphi(G(t), y))$ (do ***). Nhưng theo giả thiết quy nạp thì $\Phi(\varphi(G(t), y)) = \Phi(\psi(t, y))$. Vậy $\varphi(G(t), y+1) = \Phi(\psi(t, y)) = \psi(t, y+1)$ (do **). Vậy bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 2: Nếu hàm $f(x_1, \dots, x_s) = (\mu y)[g(x_1, \dots, x_s, y) = 0]$ thì f cũng nhận được từ hàm g và các hàm đệ quy nguyên thủy bằng phép thế và phép toán tử cực tiểu dạng đặc biệt: $F(x) = (\mu y)[G(x, y) = 0]$.

Chứng minh: Giả sử $K^{[s]}$ là tương ứng đệ quy nguyên thủy giữa N và N^s , $x \in N \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_s) \in N^s$ thực hiện được bởi các hàm đệ quy nguyên thủy $K_1^{[s]}(x) = x_1$, $K_2^{[s]}(x) = x_2$, ..., $K_s^{[s]}(x) = x_s$ và $K_0^{[s]}(x_1, \dots, x_s) = x$.

$$\text{Đặt} \quad G(x, y) = g(K_1^{[s]}(x), K_2^{[s]}(x), \dots, K_s^{[s]}(x), y) \quad (1)$$

$$\text{và} \quad F(x) = (\mu y)[G(x, y) = 0] \quad (2)$$

Bổ đề 2 được chứng minh nếu ta chỉ ra được rằng:

$$\begin{aligned} F(K_0^{[s]}(x_1, \dots, x_s)) &= F(x) = F(K_0^{[s]}(x_1, \dots, x_s)) = \\ &= (\mu y)[G(K_0^{[s]}(x_1, \dots, x_s), y) = 0] \\ &= (\mu y)[g(x_1, \dots, x_s, y) = 0] = f(x_1, \dots, x_s). \end{aligned}$$

Vì f nhận được từ F mà F lại nhận được từ phép toán tử dạng đặc biệt nên bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 3: Tồn tại hàm đệ quy nguyên thủy $\Gamma(x, y)$ có tính chất sau: với mọi n , và với mọi bộ các số tự nhiên bất kỳ $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ bao giờ cũng tồn tại số x sao cho:

$$\begin{cases} \Gamma(x, 0) = a_0 \\ \Gamma(x, 1) = a_1 \\ \dots\dots\dots \\ \Gamma(x, n) = a_n \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh: Ta lấy ngay hàm

$$\Gamma(x, y) = \text{Rest}(K_1^{[2]}(x), 1 + (y+1)K_2^{[2]}(x))$$

trong đó $K_i^{[2]}$ ($i = 1, 2$) là tương ứng đệ quy nguyên thủy nào đó giữa N và N^2 . Còn hàm $\text{Rest}(x, y)$ là số dư của phép chia x cho y ta đã chứng minh hàm này là đệ quy nguyên thủy. Vì vậy hàm $\Gamma(x, y)$ là hàm đệ quy nguyên thủy.

Ta cần chỉ ra đối với bộ $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ có tồn tại số x để hàm $\Gamma(x, y)$ thoả mãn (1).

Ta lấy ngay $x = K_0^{[2]}(u, b)$ khi đó $u = K_1^{[2]}(x)$, $b = K_2^{[2]}(x)$. Như vậy ta cần chọn các số u , b sao cho nó thoả mãn

$$\text{Rest}(u, 1+(y+1)b) = a_y \quad (0 \leq y \leq n) \quad (2)$$

Theo định nghĩa của hàm Rest thì (2) có thể viết lại

$$\begin{cases} 1+(y+1)b > a_y \\ u - a_y : 1+(y+1)b \end{cases} \quad (3)$$

Để cho gọn ta đặt $1+(y+1)b = m_y$ khi đó hệ (3) tương đương với

$$\begin{cases} m_y > a_y \\ u - a_y : m_y \end{cases} \quad (4)$$

Như vậy bài toán quy về chọn hai số u , b sao cho thoả mãn hệ (4). Đối với b chọn ngay $b = (1 + n + a_0 + a_1 + \dots + a_n)!$

Rõ ràng với b chọn như vậy ta có ngay $m_y > a_y$.

Trước khi chọn u thoả mãn $u - a_y : m_y$, ta hãy chứng minh với cách chọn b như vậy thì $m_0, m_1, \dots, m_y, \dots, m_n$ là nguyên tố từng cặp, nghĩa là giữa chúng không có ước chung nguyên tố $\neq 1$ nào.

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng: $m_0, m_1, \dots, m_y, \dots, m_n$ là không nguyên tố từng cặp, tức là giữa m_i, m_j (giả thiết $i < j$) có một ước số chung nguyên tố $P \neq 1$.

Xét $m_j - m_i = [1+(j+1)b] - [1+(i+1)b] = (j-i)b$ nên số $(j-i)b$ chia hết cho P . Mặt khác ta nhận thấy P phải chia hết cho $(j-i)$, vì $0 < (j-i) < n < 1 + n + a_0 + a_1 + \dots + a_n$ nên $(j-i)$ phải là một thừa số nào đó trong $(1 + n + a_0 + a_1 + \dots + a_n)! = b$, hay b phải chia hết cho $j-i$.

Vì $(j-i)b$ chia hết cho P nên có hai khả năng sau:

hoặc $j-i$ chia hết cho P .

hoặc b chia hết cho P .

Vì như nhận xét trên, b chia hết cho $(j-i)$ nên trong trường hợp thứ nhất ta suy ra b chia hết cho P .

Vậy trong cả hai trường hợp đều có b chia hết cho P .

Nhưng vì $1 + (i+1)b = m_i$ mà P là ước của m_i và cũng là ước của b . Chứng tỏ P là ước của 1. Điều đó vô lý vì $P \neq 1$.

Mâu thuẫn đó chứng tỏ $m_0, m_1, \dots, m_y, \dots, m_n$ là nguyên tố từng cặp. Ta đặt $M_i = m_0 \cdot m_1 \dots m_{i-1} \cdot m_{i+1} \dots m_n$ (5) ($0 \leq i \leq n$). Khi đó M_i và m_i cũng là nguyên tố từng cặp. Bởi vì nếu không thì giữa M_i và m_i có ước chung nguyên tố $P \neq 1$ nào đó. Khi đó trong (5) phải có m_j với $j \neq i$ chia hết cho P . Từ lý luận trên ta dẫn đến trường hợp giữa m_j và m_i có ước nguyên tố chung P là điều không thể có. Hay M_i và m_i là nguyên tố từng cặp.

Trong lý thuyết số người ta đã chứng minh được rằng nếu M_i và m_i là nguyên tố từng cặp thì có $\exists$ các số z_i và w_i sao cho: $M_i z_i - m_i w_i = 1$ (6)

Từ (6) suy ra $M_i z_i$ chia hết cho m_i còn dư 1. Điều này cho phép suy ra $a_i M_i z_i$ chia hết cho m_i còn dư a_i ($0 \leq i \leq n$).

Đến đây ta chọn $u = a_0 M_0 z_0 + \dots + a_n M_n z_n$.

Ta chứng minh đối với u như vậy thì $u - a_y : m_y$. Thật vậy từ (5) ta suy ra rằng: $a_i M_i z_i : m_y, \forall y \neq i$ (7), riêng $a_y M_y z_y$ chia cho m_y còn dư a_y (8). Từ (7), (8) và cách chọn u ta suy ra $u - a_y : m_y$. Vậy bổ đề được chứng minh.

Bây giờ ta trở lại chứng minh điều kiện cần của Định lý 15.

Điều kiện cần: Giả sử f là hàm đệ quy từng phần. Ta chứng minh tập G_f là đệ quy kể được.

Theo bổ đề 1 và 2 thì mỗi hàm đệ quy từng phần nhận được từ các hàm đệ quy nguyên thủy bởi phép thế, phép đệ quy nguyên thủy dạng đặc biệt và phép cực tiểu dạng đặc biệt. Mặt khác như ta biết đồ thị của hàm đệ quy nguyên thủy là tập đệ quy nguyên thủy, do đó cũng là tập đệ quy kể được.

Vì vậy để chứng minh điều kiện cần ta cần chứng minh qua phép thế và qua phép đệ quy nguyên thủy cũng như phép toán tử cực tiểu dạng đặc biệt, tính đệ quy kể được của đồ thị của hàm vẫn bảo tồn. Cụ thể là:

1) Đối với phép thế:

Giả sử $f(x_1, \dots, x_s) = g(f_1(x_1, \dots, x_s), \dots, f_m(x_1, \dots, x_s))$ (1)

Với giả thiết G_g, G_f là tập đệ quy kể được. Ta phải chứng minh rằng G_f cũng là tập đệ quy kể được. Thật vậy do G_g đệ quy kể được nên tồn tại các hàm đệ quy nguyên thủy $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_m(t), \alpha(t)$ sao cho:

$$G_g = \{(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_m(t), \alpha(t))\} \quad (2)$$

ở đây $\alpha(t) = g(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_m(t))$. Do G_f đệ quy kể được nên tồn tại các hàm đệ quy nguyên thủy $\beta_1^i(t), \beta_2^i(t), \dots, \beta_s^i(t), \beta^i(t)$ sao cho:

$$G_{f_i} = \{(\beta_1^i(t), \beta_2^i(t), \dots, \beta_s^i(t), \beta^i(t))\} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3)$$

trong đó $\beta^i(t) = f_i(\beta_1^i(t), \dots, \beta_s^i(t))$.

Xét $(x_1, x_2, \dots, x_s, y) \in G_f$ khi và chỉ khi $f(x_1, \dots, x_s) = y = g(f_1, \dots, f_m)$ (do 1) khi và chỉ khi $\exists y_1, \dots, y_m$ sao cho $f_i(x_1, \dots, x_s) = y_i$ ($i = 1, \dots, m$) mà $y = g(y_1, \dots, y_m)$ khi và chỉ khi $\exists t_1, \dots, t_m, t$ sao cho $x_j = \beta_j^i(t_i)$, $y_i = \beta^i(t_i)$ ($i = 1, \dots, m$), và $\alpha_k(t) = y_k$, $y = \alpha(t)$. Ở đây $1 \leq j \leq s$, $1 \leq k \leq m$.

Do y_k và y_i như nhau nên ta đồng nhất chúng với nhau: $\alpha_k(t) = \beta^i(t_i)$

Tóm lại ta có viết $(x_1, \dots, x_s, y) \in G_f$ khi và chỉ khi $\exists t_1, \dots, t_m, t$ sao cho $F(x_1, \dots, x_s, y, t_1, \dots, t_m, t) = \sum_{i=1}^m |\alpha_i(t) - \beta^i(t_i)| + \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq s}} |x_j - \beta_j^i(t_i)| + |y - \alpha(t)| = 0$.

Do hàm $F(x_1, \dots, x_s, y, t_1, \dots, t_m, t)$ là hàm đệ quy nguyên thủy nên theo Định lý 13 ta có tập G_f là tập đệ quy kể được.

2) Đối với phép đệ quy nguyên thủy dạng đặc biệt.

Giả sử $f(x, y)$ nhận được từ phép đệ quy nguyên thủy dạng đặc biệt:

$$\begin{cases} f(x, 0) = x \\ f(x, y+1) = h(f(x, y)) \end{cases} \quad (1)$$

Với giả thiết thêm G_h là tập đệ quy kể được. Ta chứng minh G_f là tập đệ quy kể được.

Do G_h là tập đệ quy kể được nên tồn tại các hàm đệ quy nguyên thủy $\alpha(t), \beta(t)$ sao cho

$$G_h = \{(\alpha(t), \beta(t))\} \text{ với } \beta(t) = h(\alpha(t)) \quad (2)$$

Theo định nghĩa thì $G_f = \{(x, y, z) / z = f(x, y)\}$.

Chia G_f thành hai tập G_1 và G_2 sao cho:

$$G_f = G_1 \cup G_2 \text{ và } G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

Cụ thể $G_1 = \{(x, y, z) \in G_f / y = 0\}$

Còn $G_2 = G_f \setminus G_1 = \{(x, y, z) \in G_f / y > 0\}$

Theo Định lý 14 để chứng minh G_f là tập đệ quy kể được ta chỉ cần chứng minh G_1 và G_2 là hai tập đệ quy kể được.

a) G_1 là tập đệ quy kể được :

Ta có $(x, y, z) \in G_1$ khi và chỉ khi $y = 0$, $f(x, 0) = x = z$. Vì vậy $\chi_{G_1}(x, y, z) = \text{Sg}.y. \text{Sg}|x - z|$ đệ quy nguyên thủy hay G_1 là tập đệ quy nguyên thủy.

b) G_2 là tập đệ quy kể được :

Từ (1) có $(x, y, z) \in G_2$ khi và chỉ khi $\exists a_0, a_1, \dots, a_{y-1}, a_y$ sao cho $a_0 = x, a_1 = h(a_0), a_2 = h(a_1), \dots, a_y = h(a_{y-1}) = z$. Nhưng $h(a_i) = a_{i+1}$ tương đương với $\exists t_{i+1}$ sao cho $a_i = \alpha(t_{i+1})$; $a_{i+1} = \beta(t_{i+1})$ (do 2). Cho $i = 0, 1, \dots, y-1$, thì ta có thể viết như sau: $(x, y, z) \in G_2$ khi và chỉ khi $\exists t_1, t_2, \dots, t_y$ sao cho $\alpha(t_1) = x, \beta(t_1) = \alpha(t_2), \beta(t_2) = \alpha(t_3), \dots, \beta(t_{y-1}) = \alpha(t_y), \beta(t_y) = z$, hay $(x, y, z) \in G_2$ khi và chỉ khi

$$F(x, y, z, t_1, \dots, t_y) = |\alpha(t_1) - x| + \sum_{i=1}^{y-1} |\beta(t_i) - \alpha(t_{i+1})| + |\beta(t_y) - z| = 0 \quad (3)$$

Theo bổ đề 3 ta đã xây dựng được hàm đệ quy nguyên thủy $\Gamma(u, x)$ sao cho đối với mỗi bộ $t_1, t_2, \dots, t_y$ hệ phương trình $\Gamma(u, i) = t_i$ ($i = 1, \dots, y$) có nghiệm u . Trong (3) ta thay t_i bởi $\Gamma(u, i) = t_i$ ($i = 1, \dots, y$) ta nhận được hàm:

$$F(x, y, z, u) = |\alpha(\Gamma(u, 1)) - x| + \sum_{i=1}^{y-1} |\alpha(\Gamma(u, i+1)) - \beta(\Gamma(u, i))| + |\beta(\Gamma(u, y)) - z| = 0$$

Chúng tỏ $F(x,y,z,u)$ là đệ quy nguyên thủy.

Ta viết lại $(x,y,z) \in G_2$ khi và chỉ khi $\exists u$ sao cho $F(x,y,z,u) = 0$. Theo Định lý 13 thì G_2 là đệ quy kể được hay $G_f = G_1 \cup G_2$ là đệ quy kể được.

3) Đối với phép cực tiểu dạng đặc biệt.

Giả sử $f(x) = (\mu y)[g(x,y) = 0]$ (1) và G_g là tập đệ quy kể được. Ta chứng minh G_f cũng là tập đệ quy kể được. Vì G_g đệ quy kể được nên tồn tại các hàm đệ quy nguyên thủy $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ sao cho

$$G_g = \{(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))\} \text{ ở đây } \gamma(t) = g(\alpha(t), \beta(t)).$$

Ta có $G_f = \{(x,y) / y = f(x)\}$. Vì vậy $(x,y) \in G_f$ khi và chỉ khi $\exists a_0, a_1, \dots, a_{y-1}, a_y$ sao cho: $g(x,i) = a_i \neq 0$, với $i = 0, 1, 2, \dots, y-1$ và

$$g(x,y) = a_y = 0 \quad (2)$$

Mặt khác $(x,y,z) \in G_g$ khi và chỉ khi $z = g(x,y)$.

Từ (2) ta viết $(x,y) \in G_f$ khi và chỉ khi $\exists a_0, \dots, a_y$ sao cho $(x,i,a_i) \in G_g$ ($0 \leq i \leq y$) và $a_y = 0$ khi và chỉ khi $\exists t_0, \dots, t_y$ sao cho $\alpha(t_i) = x$, $\beta(t_i) = i$, $\gamma(t_i) \neq 0$ với $i = 0, 1, 2, \dots, y-1$ còn $\gamma(t_y) = 0$.

Nói tóm lại $(x,y) \in G_f$ khi và chỉ khi $\exists t_0, \dots, t_y$ sao cho

$$\begin{aligned} F(x, y, t_0, t_1, \dots, t_y) = & \sum_{i=0}^{y-1} (|\alpha(t_i) - x| + |\beta(t_i) - i|) \\ & + \gamma(t_y) + \overline{Sg} \prod_{i=0}^{y-1} \gamma(t_i) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Theo bổ đề 3 thì ta có thể thay $t_0, t_1, \dots, t_y$ bởi giá trị u sao cho $\Gamma(u,i) = t_i$ ($i = 0, \dots, y$). Vậy trong (3) ta thay t_i bởi $\Gamma(u,i)$ ta có:

$$\begin{aligned} F(x,y,u) = & \sum_{i=0}^{y-1} (|\alpha(\Gamma(u,i)) - x| + |\beta(\Gamma(u,i)) - i|) + \gamma(\Gamma(u,y)) \\ & + \overline{Sg} \prod_{i=0}^{y-1} \gamma(\Gamma(u,i)) = 0 \end{aligned}$$

Do đó hàm $F(x,y,u)$ là đệ quy nguyên thủy.

Ta viết lại $(x,y) \in G_f$ khi và chỉ khi $\exists u$ sao cho $F(x,y,u) = 0$. Theo Định lý 13 có G_f là đệ quy kể được. Định lý hoàn toàn được chứng minh.

Hệ quả 1: Miền xác định của hàm đệ quy từng phần là tập đệ quy kể được.

Chứng minh: Gọi $f(x_1, \dots, x_s)$ là hàm đệ quy từng phần. Khi đó theo Định lý 15 thì $G_f = \{(x_1, \dots, x_s) / y = f(x_1, \dots, x_s)\}$ là đệ quy kể được.

Gọi D_f là miền xác định của hàm f . Theo định nghĩa hình chiếu ta có $D_f = \text{hc}_{1..s} G_f$. Theo Định lý 8 thì D_f là tập đệ quy kể được.

Hệ quả 2: Miền giá trị của hàm đệ quy từng phần là tập đệ quy kể được.

Chứng minh: Gọi $f(x_1, \dots, x_s)$ là hàm đệ quy từng phần và S_f là miền giá trị của f khi đó thì $S_f = \text{hc}_{s+1} G_f$. Theo định lý 8 G_f là tập đệ quy kể được nên S_f là tập đệ quy kể được.

Hệ quả 3: Tập $M \subset N$ là tập đệ quy kể được khi và chỉ khi tồn tại hàm đệ quy từng phần $f(x)$ sao cho $M = \{f(x) / x \in N\}$.

Chứng minh:

Cần: Giả sử tập M là đệ quy kể được. Theo định nghĩa tồn tại hàm đệ quy nguyên thủy $f(x)$ sao cho $M = \{f(x) / x \in N\}$. Vì f là hàm đệ quy nguyên thủy nên nó cũng là hàm đệ quy từng phần.

Đủ: Giả sử có hàm đệ quy từng phần f sao cho tập $M = \{f(x) / x \in N\}$.

Theo hệ quả 2 thì M là tập đệ quy kể được.

Hệ quả 4: Nếu $f(x_1, \dots, x_s)$ là đệ quy từng phần thì với K bất kỳ, tập $M = \{(x_1, \dots, x_s) / f(x_1, \dots, x_s) = K\}$ là tập đệ quy kể được (người ta gọi tập M là tập Mức của $f^{(s)}$ ứng với giá trị K).

Chứng minh: Do $f^{(s)}$ đệ quy từng phần nên theo Định lý 15 thì đồ thị $G_f = \{(x_1, \dots, x_s, y) / y = f(x_1, \dots, x_s)\}$ của nó là đệ quy kể được.

Ta có $M = G_f \cap (N^s \times K)$. Theo định lý 14 để chứng minh M là tập đệ quy kể được, ta chỉ cần chỉ ra G_f và $N^s \times K$ là đệ quy kể được. Thật vậy G_f là đệ quy kể được (do Định lý 15).

Thật vậy, $(x_1, \dots, x_s, y) \in G_f$ khi và chỉ khi $y = f(x_1, \dots, x_s)$ xác định. Khi đó $(x_1, \dots, x_s) \in M_i$ nào đó và $f(x_1, \dots, x_s) = f_i(x_1, \dots, x_s) = y$. Vậy $(x_1, \dots, x_s, y) \in G_{f_i}$ đồng thời $(x_1, \dots, x_s, y) \in M_i \times N$.

Hay $(x_1, \dots, x_s, y) \in G_{f_i} \cap (M_i \times N)$.

Do đó ta có $G_f \subseteq G_{f_i} \cap (M_i \times N)$, hay $G_f \subseteq \bigcup_{i=1}^n [G_{f_i} \cap (M_i \times N)]$ (2)

Ta chứng minh bao hàm thức ngược lại

$$\bigcup_{i=1}^n [G_{f_i} \cap (M_i \times N)] \subseteq G_f \quad (3)$$

Giả sử $(x_1, \dots, x_s, y) \in \bigcup_{i=1}^n [G_{f_i} \cap (M_i \times N)]$, tức là

$(x_1, \dots, x_s, y) \in G_{f_i} \cap (M_i \times N)$ nào đó.

Vậy $(x_1, \dots, x_s, y) \in G_{f_i}$ và $(x_1, \dots, x_s, y) \in M_i \times N$ với $y = f_i(x_1, \dots, x_s)$ xác định nên $(x_1, \dots, x_s) \in M_i$, còn $y \in N$. Do $(x_1, \dots, x_s) \in M_i$ nên $f_i(x_1, \dots, x_s) = f(x_1, \dots, x_s) = y$ tức là f xác định tại $(x_1, \dots, x_s)$ hay $(x_1, \dots, x_s, y) \in G_f$.

Tóm lại bao hàm thức thứ $\bigcup_{i=1}^n [G_{f_i} \cap (M_i \times N)] \subseteq G_f$ được chứng minh.

Từ (2), (3) có (1). Mặt khác các tập G_{f_i} , $M_i \times N$ là tập đệ quy kể được nên: $G_{f_i} \cap (M_i \times N)$ là tập đệ quy kể được. Vì vậy $\bigcup_{i=1}^n [G_{f_i} \cap (M_i \times N)]$ là tập đệ quy kể được, nên G_f là tập đệ quy kể được. Hay $f(x_1, \dots, x_s)$ là hàm đệ quy từng phần do Định lý 15.

Hệ quả 7: Mọi tập đệ quy đều là đệ quy kể được.

Chứng minh: Giả sử tập $M \subset N^s$ là đệ quy, nghĩa là χ_M là đệ quy từng phần ta lại có $M = \{(x_1, \dots, x_s) / \chi_M(x_1, \dots, x_s) = 1\}$, nên theo Hệ quả 4 thì M là tập đệ quy kể được.

CHƯƠNG 10

QUAN HỆ GIỮA MÁY TURING ĐƠN ĐỊNH - HÀM ĐỆ QUY TÙNG PHẦN VÀ THUẬT TOÁN CHÍNH QUY

§1. ĐỊNH NGHĨA MÁY TURING ĐƠN ĐỊNH

Định nghĩa 1: Máy Turing đơn định là một bộ gồm các thành phần $\langle X, A, \Phi, a_0, F \rangle$, trong đó:

X - bảng chữ cái hữu hạn (gọi là bảng tín hiệu vào)

A - bảng chữ cái hữu hạn (gọi là bảng trạng thái)

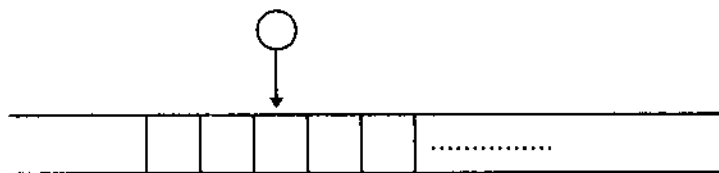
Φ - hàm ánh xạ từ tập $A \times X$ vào tập $A \times X \times \{0, 1, 2\}$

a_0 - trạng thái ban đầu, $a_0 \in A$.

F - tập các trạng thái kết thúc và $F \subseteq A$.

Mô tả cách làm việc của máy:

Giả sử có một băng dài vô hạn, được chia ra từng ô và có một bộ phận gọi là đầu đọc-ghi (hình vẽ)

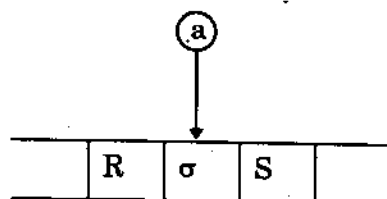


Trên mỗi ô có thể viết một tín hiệu hoặc không viết tín hiệu nào. Thường những ô không viết tín hiệu nào, để tiện lợi ta viết tín hiệu $x_0 \in X$ nào đấy. Mặc dù băng dài vô hạn, nhưng tại mỗi thời điểm số tín hiệu trên băng là hữu hạn.

Đầu đọc có khả năng đọc tín hiệu trên ô đối diện với nó hoặc xóa tín hiệu trên ô đó và viết vào ô đó tín hiệu mới. Đầu đọc còn có khả năng chuyển dịch tùy ý sang ô bên phải hoặc ô bên trái nó, hoặc không chuyển dịch.

Định nghĩa 2: Trạng thái toàn phần của máy Turing là một từ, ta ký hiệu là $K = Ra\sigma S$, trong đó $R, S \in X^*$, $a \in A$, $\sigma \in X$.

Biểu diễn trạng thái trên băng:



Máy Turing làm việc theo từng bước, sau đây là một bước làm việc của nó: $\Phi(a, \sigma) = (a', \sigma', \alpha)$ có nghĩa là:

- 1) Xóa σ ở ô đối diện và viết σ' vào ô đó.
- 2) Máy Turing chuyển từ trạng thái a sang trạng thái trong a' .

Nếu $a' \in F$ thì máy dừng lại, còn nếu $a' \notin F$ thì máy chuyển sang bước sau.

- 3) Tùy theo giá trị α mà :

Nếu $\alpha = 0$, thì đầu đọc-ghi chuyển sang trái một ô.

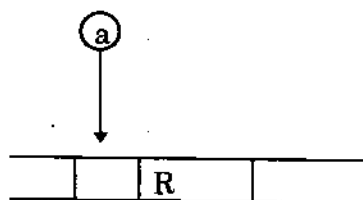
Nếu $\alpha = 1$, thì đầu đọc-ghi đứng yên.

Nếu $\alpha = 2$, thì đầu đọc-ghi chuyển sang phải một ô.

Sau một bước ta được trạng thái toàn phần mới K' : $K \vdash K'$

Định nghĩa 3: Trạng thái toàn phần K được gọi là có dạng chuẩn nếu $K = aR$, $R \in X^*$, $a \in A$.

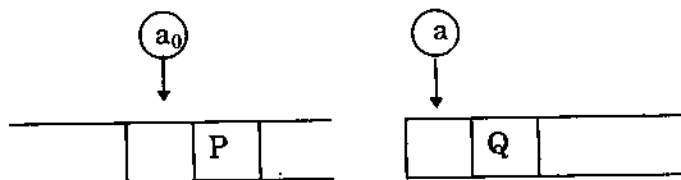
Minh họa trạng thái toàn phần dạng chuẩn trên băng:



Dưới đây để cho gọn ta nói máy Turing thay cho máy Turing đơn định.

Định nghĩa 4: Giả sử M là một máy Turing, P, Q là những từ $\in X^*$ ($P \in X^*, Q \in X^*$), nếu dãy $M(a_0P)$ hữu hạn (tức là máy gặp trạng thái kết thúc) và phần tử cuối cùng của dãy này có dạng aQ thì ta nói máy Turing M biến từ P thành Q và ký hiệu là: $M(P) = Q$

Minh họa:



Cho máy Turing, tức là cho hàm $\Phi: A \times X \rightarrow A \times X \times \{0, 1, 2\}$.

Có hai cách cho máy Turing:

1) Cho dưới dạng bảng:

Trạng thái	Tín hiệu vào
	x
a	 $\Phi(a,x)$

2) Cho dưới dạng lệnh: $ax \rightarrow a'x'\alpha$

Mỗi một dòng như trên được gọi là một lệnh của máy.

§2. LIÊN HỆ GIỮA HÀM ĐỆ QUY TỪNG PHẦN VÀ MÁY TURING

Định nghĩa 1: Giả sử $M = \langle X, A, \Phi, a_0, F \rangle$ là một máy Turing, $f(x_1, \dots, x_s)$ là một hàm s biến nào đó.

Ta nói rằng hàm $f(x_1, \dots, x_s)$ là tính được trên máy Turing khi và chỉ khi:

1) Nếu $f(x_1, \dots, x_s)$ không xác định thì dãy $M(k_0)$ vô hạn (máy không gặp trạng thái kết thúc) với

$$k_0 = a_0 | \underbrace{\hspace{2cm}}_{x_1+1} | 0 | \underbrace{\hspace{2cm}}_{x_2+1} | 0 \dots 0 | \underbrace{\hspace{2cm}}_{x_s+1} | = a_0 |^{x_1+1} 0 \dots 0 |^{x_s+1}$$

2) Nếu $f(x_1, \dots, x_s)$ xác định thì $M(k_0)$ dãy hữu hạn, tức máy gặp trạng thái kết thúc và

$$M(k_0) = a_i | \underbrace{\hspace{2cm}}_{1+f(x_1, \dots, x_s) \text{ lần}} | = a_i |^{f(x)+1}, a_i \in F.$$

Trong trường hợp này máy gặp trạng thái kết thúc.

Định nghĩa 2: Hàm là tính được trên máy Turing nếu có tồn tại một máy Turing tính nó.

Định lý 1: Một hàm là tính được trên máy Turing khi và chỉ khi nó là hàm đệ quy từng phần.

Chứng minh: Trước khi chứng minh định lý ta cần đưa vào một số khái niệm và các kết quả sau:

Giả sử $M = \langle X, A, \Phi, a_0, F \rangle$ là một máy Turing tính hàm $f^{(s)}$. Ta thực hiện việc đánh số các tín hiệu trong bảng X và A như sau (X, A - hữu hạn):

Đối với X ta đánh số các phần tử của nó bởi các số tự nhiên $0, 1, 2, \dots$ theo cách sau: tín hiệu x_0 (ứng với ô trống) mang số hiệu 0 , còn các tín hiệu $x_i \in X$ mang số hiệu i ($i = 1, 2, \dots$). Tương tự ta cũng đánh số các phần tử trong A bởi $0, 1, 2, \dots$ như sau: trạng thái ban đầu a_0 , mang số hiệu 0 , còn a_j mang số hiệu j ($j = 1, 2, \dots$).

Ta ký hiệu $P_0, P_1, P_2, \dots$ là dãy liên tiếp các số nguyên tố lớn dần, tức là $P_0 = 2, P_1 = 3, P_2 = 5, \dots$

Trước đây ta đã chứng minh được rằng hàm P_n chọn số nguyên tố thứ $n+1$ trong dãy số nguyên tố là hàm đệ quy nguyên thủy. Giả sử K là trạng thái toàn phần của máy và $K = x_{j_1} \cdot x_{j_2} \dots x_{j_{k-1}} \cdot a_i \cdot x_{j_k} \cdot x_{j_{k+1}} \dots x_{j_n}$.

Vì các hàm $g^{(s)}(\tilde{\alpha}_i)$ ($i=1, \dots, m$) là đệ quy nguyên thủy, còn 0 cũng là hàm đệ quy nguyên thủy nên hàm $G^{(s)}(\tilde{X})$ đệ quy nguyên thủy và $G(\tilde{X}) = g(\tilde{X}) \forall \tilde{X} \in M$.

Bổ đề 2: Giả sử $M = \langle X, A, \Phi, a_0, F \rangle$ là một máy Turing và $K \vdash K'$ là một bước làm việc của máy. Khi đó tồn tại hàm đệ quy nguyên thủy f sao cho $f(\mu(K)) = \mu(K')$.

Chứng minh: Do M là máy Turing nên ta có

$$\Phi(a_i, x_j) = (a_i, x_j, \alpha) \quad (1)$$

Từ (1) có nghĩa là i, j, α là những hàm xác định trên tập hữu hạn (i, j) . Theo bổ đề 1 tồn tại các hàm đệ quy nguyên thủy f_1, f_2, f_3 sao cho $f_1(i, j) = i, f_2(i, j) = j, f_3(i, j) = \alpha$.

Như ta đã biết hàm mũ $\exp_i(y)$ là số mũ của số nguyên tố P_i trong khai triển của y là hàm đệ quy nguyên thủy. Giả sử $K \vdash K'$, tức máy M chuyển từ trạng thái toàn phần K sang K' . Biết K ta biết được $\mu(K)$, ta chứng minh tồn tại hàm đệ quy nguyên thủy f sao cho $f(\mu(K)) = \mu(K')$.

Do biết K nên biết được $m = \mu(K) = P_0^{i_0} \cdot P_1^{k_1} \cdot P_2^{j_2} \dots P_{n+1}^{j_n}$. Từ khai triển này ta có $i = \exp_0(m)$, $k = \exp_1(m)$ là các hàm đệ quy nguyên thủy, trong đó i là chỉ số trạng thái, k là vị trí đầu đọc lúc bấy giờ, hay k là vị trí tín hiệu trên băng mà đầu đọc sẽ đọc.

Ta tính chỉ số j_k ($k = 1, 2, \dots, n$) như sau:

$j_k = \exp_{k+1}(m)$ cũng là hàm đệ quy nguyên thủy.

Giả sử $\mu(K') = p_0^{i'} \cdot P_1^{k'} \cdot P_2^{j'_2} \dots P_{n+1}^{j'_n}$. Để xác định $\mu(K')$ ta cần xác định $i', k', j'_1, \dots, j'_n$. Như trên ta đã biết $i' = f_1(i, j_k)$, $j'_k = f_2(i, j_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), nhưng $i = \exp_0(m)$, $j_k = \exp_{k+1}(m)$ đệ quy nguyên thủy của m nên các hàm i', j'_k cũng là các hàm đệ quy nguyên thủy của m , hay ta viết: $i' = F_1(m)$, $j'_k = F_2^k(m)$ là các hàm đệ quy nguyên thủy. Nói cách khác đối với i', j'_k có tồn tại các hàm đệ quy nguyên thủy để tính nó. Bây giờ ta xác định k' trong $\mu(K')$, có ba trường hợp xảy ra:

$k' = k$ nếu $\alpha = 1$ (đầu đọc đứng yên)

$k' = k+1$ nếu $\alpha = 2$ (đầu đọc chuyển sang ô bên phải)

$k' = k - 1$ nếu $\alpha \neq 0$ (đầu đọc chuyển sang ô bên trái) với $k > 1$

$k' = 1$ nếu $\alpha = 0$ (đầu đọc chuyển sang ô bên trái) với $k = 1$.

Vậy k' là hàm của k và α , hay ký hiệu $k' = k'(k, \alpha)$. Theo Bổ đề 1 thì hàm k' xác định trên tập hữu hạn (k, α) nên có thể thác triển thành hàm đệ quy nguyên thủy $F_3(m)$ sao cho $F_3(m) = k'$ trên (k, α) (sở dĩ viết $F_3(m)$ là vì hàm k' xác định trên tập (k, α) mà như trên k, α là các hàm đệ quy nguyên thủy của m).

Tóm lại ta có: $\mu(K') = P_0^{F_1(m)} P_1^{F_2(m)} P_2^{F_2^{-1}(i,j_1)} P_3^{F_2^{-2}(i,j_2)} \dots P_{n+1}^{F_2^{-n}(i,j_n)}$. Rồi rằng $F_1, F_2, F_2^{-1}(i,j_1), \dots, F_2^{-n}(i,j_n)$ đệ quy nguyên thủy nên $\mu(K')$ là đệ quy nguyên thủy.

Đặt $f(m) = \mu(K')$ suy ra $f(m)$ là hàm đệ quy nguyên thủy và $f(\mu(K)) = \mu(K')$ là điều cần chứng minh.

Bổ đề 3: Tồn tại hàm đệ quy nguyên thủy $\tau^{(2)}$ sao cho nếu trạng thái toàn phần K' được chuyển từ trạng thái toàn phần K qua i bước thì

$$\tau(\mu(K), i) = \mu(K') \quad (1)$$

Chứng minh: Ký hiệu $m = \mu(k)$ và giả sử $f(m)$ là hàm được xác định trong Bổ đề 2 tức là $f(\mu(k)) = \mu(k')$.

Ta xây dựng hàm $\tau^{(2)}$ như sau:

$$\begin{cases} \tau(m, 0) = m, \\ \tau(m, i+1) = f(\tau(m, i)) \end{cases}$$

Vì $f(m)$ đệ quy nguyên thủy, m là đệ quy nguyên thủy mà hàm τ nhận được từ hai hàm đệ quy nguyên thủy $m, f(m)$ qua phép đệ quy nguyên thủy nên $\tau^{(2)}$ đệ quy nguyên thủy. $\tau^{(2)}$ xây dựng như trên là thỏa mãn (1).

Bổ đề 4: Với mỗi máy Turing M bao giờ cũng tồn tại hàm η đệ quy từng phần sao cho:

$$\eta(\mu(k)) = \begin{cases} - \text{số hiệu trạng thái toàn phần cuối cùng của} \\ \quad M(k), \text{ nếu dãy } M(k) \text{ hữu hạn.} \\ - \text{không xác định nếu dãy } M(k) \text{ vô hạn.} \end{cases}$$

Chứng minh: Giả sử L là tập tất cả các chỉ số của các trạng thái kết thúc của máy Turing $M = \langle X, A, \Phi, a_0, F \rangle$. Khi đó L là tập đệ quy nguyên thủy (Vì L là hữu hạn, giả sử $L = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, $\chi_L(x) = \overline{\text{Sg}} |i_k \cdot x|$ đệ quy nguyên thủy).

Ta xác định hàm $\omega(m)$ như sau:

$$\omega(m) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } \exp_0(m) \in L. \\ 1, & \text{nếu } \exp_0(m) \notin L \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{chỉ số của trạng thái là chỉ số} \\ & \text{của trạng thái kết thúc} \\ 1, & \text{nếu } \exp_0(m) \notin L \end{cases}$$

Hàm $\omega(m)$ là hàm đệ quy nguyên thủy.

Đối với M , ta xây dựng hàm η như sau:

$$\eta(m) = \tau(m, (\mu_i)[\omega(\tau(m, i)) = 0]) \quad (1)$$

τ xây dựng như trong Bổ đề 3.

Rõ ràng thấy $\eta(m)$ là đệ quy từng phần.

Ta chứng minh hàm $\eta(m)$ xác định như trên là hàm cần tìm.

1) Nếu $M(k)$ hữu hạn, ta ký hiệu số các bước hữu hạn đó là y , nghĩa là máy sẽ dừng lại sau y bước. Trạng thái cuối cùng sau y bước sẽ là trạng thái kết thúc, hay $\exp_0(\tau(m, y)) \in L$. Khi đó theo định nghĩa của hàm $\omega(m)$ thì $\omega(\tau(m, y)) = 0$. Từ đó suy ra $\eta(m) = \eta(\mu(k)) = \tau(m, y)$ là số hiệu toàn phần cuối cùng.

2) Giả sử dãy $M(k)$ vô hạn, nghĩa là máy không bao giờ dừng, tức là máy không bao giờ gặp trạng thái kết thúc, cũng có nghĩa là $\exp_0(\tau(m, y)) \notin L \forall y$. Vậy theo định nghĩa của hàm $\omega(m)$ thì $\omega(\tau(m, y)) = 1 \forall y$. Điều này có nghĩa là toán cực tiểu μ trong (1) là không xác định, hay $\eta(m)$ không xác định. Vậy bổ đề được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh định lý 1.

Điều kiện cần: Giả sử $f(x_1, \dots, x_s)$ là hàm tính được qua máy Turing. Ta chứng minh $f(x_1, \dots, x_s)$ là hàm đệ quy từng phần. Do $f(x_1, \dots, x_s)$ tính được qua máy Turing nên tồn tại máy Turing M tính f , với $M = \langle X, A, \Phi, a_0, F \rangle$, $X = \{0, 1\}$. Mã hoá $0 \leftrightarrow 0, 1 \leftrightarrow |$. Ta lập hàm η như trong Bổ đề 4, tức là nếu $\mu(K)$ là số hiệu của trạng thái toàn phần K

thì $\eta(\mu(K))$ là số hiệu trạng thái toàn phần kết thúc của dãy $\mu(K)$ nếu $\mu(K)$ là dãy hữu hạn và không xác định nếu dãy $\mu(K)$ vô hạn.

Giả sử trạng thái toàn phần ban đầu của K_0 là

$$K_0 = a_0 | x_1^{+1} 0 | x_2^{+1} 0 \dots 0 | x_s^{+1} \quad (1)$$

a) Nếu $f(x_1, \dots, x_s)$ không xác định. Khi đó theo định nghĩa của hàm tính được trên máy ta có dãy $M(K_0)$ là vô hạn, theo Bổ đề 4 thì $\eta(\mu(K_0))$ không xác định, ở đây $m_0 = \mu(K_0)$ là số hiệu của trạng thái toàn phần ban đầu K_0 .

b) Nếu $f(x_1, \dots, x_s)$ xác định thì $M(K_0)$ là dãy hữu hạn và giả sử trạng thái toàn phần cuối cùng trong dãy trên là

$$\bar{K} = a_i | f(x_1, \dots, x_s)^{+1}, a_i \in F.$$

Theo bổ đề 4 thì $\eta(m_0) = \mu(\bar{K}) = P_0^i P_1^{-1} P_2^{-1} \dots P_{f(x_1, \dots, x_s)^{+1}}^{-1}$

Đặt hàm $g(m_0) = \sum_{2 \leq y \leq \eta(m_0)} \exp_y(\eta(m_0))$ và $g(m_0)$ là hàm đệ quy

nguyên thủy.

Mặt khác ta có $g(m_0) = f(x_1, \dots, x_s) + 1$ hay $f(x_1, \dots, x_s) = g(m_0) - 1$ là hàm đệ quy từng phần.

Điều kiện đủ: Giả sử $f(x_1, \dots, x_s)$ là hàm đệ quy từng phần, ta chỉ ra có một máy Turing tính nó. Ta chứng minh sự tồn tại máy Turing theo quy nạp của định nghĩa về hàm đệ quy từng phần.

1.a) Hàm cơ sở $0^{(0)}$: máy có lệnh $a_{00} \rightarrow a_{100}$, trạng thái ban đầu là a_0 , còn a_1 là trạng thái kết thúc.

b) Hàm cơ sở $\lambda(x) = x+1$, ta xây dựng máy Turing biến từ $\underbrace{\dots}_{x+1}$

thành từ $\underbrace{\dots}_{\lambda(x)+1}$ gồm 5 lệnh sau:

$$\begin{cases} a_0 | & \rightarrow & a_1 | 1 \\ a_1 | & \rightarrow & a_1 | 2 \\ a_1 0 & \rightarrow & a_2 | 0 \\ a_2 | & \rightarrow & a_2 | 0 \\ a_2 0 & \rightarrow & a_3 01 \end{cases}$$

a_0 - trạng thái ban đầu, $F = \{a_3\}$, $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$.

c) Hàm cơ sở $I_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_k$ ($1 \leq k \leq n$)

Ta xây dựng máy Turing biến từ dạng

$$|^{x_1+1} 0 |^{x_2+1} 0 \dots 0 |^{x_k+1} 0 \dots 0 |^{x_n+1}$$

thành từ có dạng $|^{x_k+1}$. Tức là máy xóa đi các thành phần đứng trước và đứng sau $|^{x_k+1}$ và chỉ giữ lại $|^{x_k+1}$ mà thôi. Máy Turing thực hiện điều trên có dạng sau:

$$\left. \begin{array}{l} a_0 | \rightarrow a_1 | \\ a_1 | \rightarrow a_1 02 \\ a_1 0 \rightarrow a_2 02 \end{array} \right\} \text{Xoá nhóm } |^{x_1+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_2 | \rightarrow a_2 02 \\ a_2 0 \rightarrow a_3 02 \end{array} \right\} \text{Xoá nhóm } |^{x_2+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_3 | \rightarrow a_3 02 \\ a_3 0 \rightarrow a_4 02 \end{array} \right\} \text{Xoá nhóm } |^{x_3+1}$$

.....

$$\left. \begin{array}{l} a_{k-1} | \rightarrow a_{k-1} 02 \\ a_{k-1} 0 \rightarrow a_k 02 \end{array} \right\} \text{Xoá nhóm } |^{x_{k-1}+1}$$

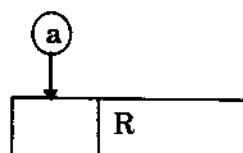
$$\left. \begin{array}{l} a_k | \rightarrow a_k |2 \\ a_k 0 \rightarrow a_{k+1} 02 \end{array} \right\} \text{Giữ nhóm } |^{x_k+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{k+1} | \rightarrow a_{k+1} 02 \\ a_{k+1} 0 \rightarrow a_{k+2} 02 \end{array} \right\} \text{Xoá nhóm } |^{x_{k+1}+1}$$

.....

$$\left. \begin{array}{l} a_n | \rightarrow a_n 02 \\ a_n 0 \rightarrow a_{n+1} 02 \end{array} \right\} \text{Xoá nhóm } |^{x_n+1}$$

Để đưa trạng thái toàn phần về dạng chuẩn tắc tức là có dạng



Ta đưa vào các lệnh phụ sau đây:

$$a_{n+1}0 \rightarrow a_{n+2}00$$

$$a_{n+2}| \rightarrow a_{n+2}|0$$

$$a_{n+2}0 \rightarrow a_{n+3}01$$

a_0 -trạng thái ban đầu, còn a_{n+3} là trạng thái kết thúc.

2) Đối với phép thế: Giả sử $h(\tilde{X}) = f(g_1(\tilde{X}), \dots, g_m(\tilde{X}))$ trong đó các hàm $f^{(m)}$, g_i , ($i=1,2,\dots, m$) tính được trên máy Turing M , M_i ($i = 1,2,\dots, m$) tương ứng.

Ta xây dựng máy Turing M với băng nhiều tầng (cụ thể là máy Turing với băng m tầng) theo nguyên tắc: Tại mỗi ô ở một thời điểm nhất định thì, máy chỉ được viết một tín hiệu mà thôi. Ví dụ lượng thông tin cần nhớ trong một ô là $C_1, C_2, \dots, C_m$ thì tại thời điểm đó nó ứng với một số $c = (C_1, C_2, \dots, C_m)$ trong băng m tầng.

c		
	C_1	
	C_2	
	...	
	C_m	

Đối với các hàm $g_1, \dots, g_m$ thì mỗi tầng phụ trách một hàm g_i .

	g_1	
	g_2	
	...	
	g_m	

M_1 tính g_1 trên tầng thứ nhất cho kết quả là $g_1(\tilde{X})$. Trong khi M_1 làm việc trên tầng 1 thì chỉ có tín hiệu trên tầng 1 là thay đổi, còn tất cả các tín hiệu ở các tầng khác giữ nguyên. Sau khi M_1 tính $g_1(\tilde{X})$, thì M_2

bắt đầu làm việc trên tầng thứ 2 và cho kết quả là $g_2(\tilde{X})$. Cũng như đối với M_1 , khi M_2 làm việc thì chỉ có tín hiệu trên tầng 2 thay đổi, các tín hiệu trên các tầng còn lại giữ nguyên. Sau khi M_2 làm việc thì đến M_3 làm việc. Quá trình đó thực hiện cho đến M_m .

Sau khi M_m cho kết quả $g_m(\tilde{X})$ thì tại 1 ô của bảng m tầng các giá trị $g_1(\tilde{X})$, $g_2(\tilde{X})$, ..., $g_m(\tilde{X})$ đã được xác định, và máy M bắt đầu làm việc để tính hàm $f(\tilde{X})$ trên ô có ký hiệu $g = (g_1(\tilde{X}), \dots, g_m(\tilde{X}))$, nó cho ta giá trị $f(g_1(\tilde{X}), \dots, g_m(\tilde{X})) = h(\tilde{X})$.

3) Đối với phép đệ quy nguyên thủy.

Giả sử $h(\tilde{X}, 0) = f_1(\tilde{X})$

$$h(\tilde{X}, y+1) = f_2(\tilde{X}, y, h(\tilde{X}, y)).$$

Ta chứng minh nếu f_1, f_2 tính được trên máy Turing thì $h(x, y)$ cũng tính được trên máy Turing. Để tính $h(\tilde{X}, y)$ ta lần lượt tính $h(\tilde{X}, 0)$, $h(\tilde{X}, 1)$, ..., $h(\tilde{X}, y-1)$ và $h(\tilde{X}, y)$. Do cách tính hàm $h(\tilde{X}, y)$ nên bảng của máy Turing M tính $h(\tilde{X}, y)$ chia làm 4 tầng.

Tầng 1 ghi ký hiệu x , tầng 2 ghi giá trị của y giảm dần từ y xuống 0, tầng 3 ghi giá trị của y tăng từ 0 đến y , tầng 4 ghi kết quả máy M_1, M_2 tính các hàm f_1, f_2 , đó là giá trị của hàm $h(\tilde{X}, 0)$, $h(\tilde{X}, 1)$, ..., $h(\tilde{X}, y-1)$ và $h(\tilde{X}, y)$ như hình dưới.

$\tilde{X}$	$\tilde{X}$	$\tilde{X}$		$\tilde{X}$
y	$y-1$	$y-2$		0
0	1	2		y
$h(\tilde{X}, 0)$	$h(\tilde{X}, 1)$	$h(\tilde{X}, 2)$		$h(\tilde{X}, y)$

Cụ thể máy Turing tính hàm $h(\tilde{X}, y)$ hoạt động như sau: Giả sử M_1 tính f_1 , M_2 tính f_2 và M tính $h(\tilde{X}, y)$.

Máy M_1 làm việc trên bộ $(\tilde{X}, 0)$ tính $f_1(\tilde{X}) = h(\tilde{X}, 0)$ trên tầng 4 của bảng và kết quả là $h(\tilde{X}, 0)$. Để tính $h(\tilde{X}, 1)$ thì trên tầng 2, y bớt đi 1 đơn vị, còn trên tầng 3 thay 0 bởi 1. Máy M_2 làm việc trên bộ $(\tilde{X}, 0, h(\tilde{X}, 0))$ và cho kết quả trên tầng 4 là $f_2(\tilde{X}, 0, h(\tilde{X}, 0))$ đây chính là giá trị $h(\tilde{X}, 1)$.

Tiếp theo để tính $h(\tilde{X}, 2)$ thì trên tầng 2 giảm $y-1$ xuống 1 đơn vị, trên tầng 3 thay 1 bởi 2. Máy M_2 lại làm việc trên bộ $(\tilde{X}, 1, h(\tilde{X}, 1))$ cho giá trị của hàm $f_2(\tilde{X}, 1, h(\tilde{X}, 1))$ chính là giá trị của hàm $h(\tilde{X}, 2)$ ghi trên tầng 4 của băng.

Quá trình này sẽ tiếp tục cho tới khi nào trên tầng 2 ghi giá trị 0, khi đó máy kết thúc và trên băng có dạng $(\tilde{X}, y, h(\tilde{X}, y))$ và cho giá trị của hàm $h(\tilde{X}, y+1) = f_2(\tilde{X}, y, h(\tilde{X}, y))$.

Tiếp theo máy xoá các tín hiệu trên tầng 1, 2, 3 giữ lại tín hiệu $h(\tilde{X}, y)$ ở tầng 4. Tóm lại ta có máy Turing M tính hàm $h(\tilde{X}, y)$.

4) Đối với toán tử cực tiểu.

Giả sử $h(\tilde{X}) = (\mu y)[f(\tilde{X}, y) = 0]$ và M_f là máy Turing tính hàm $f(\tilde{X}, y)$. Ta xây dựng máy Turing M_h tính hàm $h(\tilde{X})$ theo nguyên tắc sau:

Chia băng của M_h làm 3 tầng, tầng 1 ghi $\tilde{X}$, tầng 2 ghi các giá trị của y tăng dần từ 0, 1, 2, ... còn tầng 3 tính giá trị của hàm $f(\tilde{X}, y)$.

	$\tilde{X}$	$\tilde{X}$		$\tilde{X}$	
	0	1		t	
	$f(\tilde{X}, 0)$	$f(\tilde{X}, 1)$		$f(\tilde{X}, t)$	

Tầng 2 cho $y = 0$, trên bộ $(\tilde{X}, 0)$ máy M_f tính và cho kết quả $f(\tilde{X}, 0)$ ghi trên tầng 3. Nếu $f(\tilde{X}, 0) = 0$ thì máy dừng lại cho $h(\tilde{X}) = 0$, nếu $f(\tilde{X}, 0) \neq 0$ thì máy xoá giá trị $f(\tilde{X}, 0)$ trên tầng 3, tầng 2 thay 0 bởi 1. Máy M_f cho giá trị $f(\tilde{X}, 1)$. Nếu $f(\tilde{X}, 1) \neq 0$ thì máy xoá giá trị $f(\tilde{X}, 1)$ trên tầng 3, tầng 2 thay 1 bởi 2. Nếu $f(\tilde{X}, 1) = 0$ thì máy dừng lại cho kết quả $h(\tilde{X}) = 1$, v.v..

Một cách tổng quát: khi nào y trên tầng 2 mà $f(\tilde{X}, y) = 0$ thì máy dừng lại, cho kết quả $h(\tilde{X}) = y$, và máy xoá các tín hiệu trên tầng 1, tầng 3, giữ lại tín hiệu tầng 2 là y đó chính là giá trị của

$h(\tilde{X}) = y = (\mu y)[f(\tilde{X}, y) = 0]$. Định lý được chứng minh.

§3. LIÊN HỆ GIỮA MÁY TURING VÀ THUẬT TOÁN CHÍNH QUY

1. Thuật toán chính quy

Định nghĩa: Thuật toán là bộ (X, P) , X là bảng chữ cái $\neq \emptyset$ và hữu hạn, $P = \{\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2, \dots, \alpha_k \rightarrow \beta_k\}$ là tập các quy tắc. Mỗi phần tử của P gọi là một quy tắc sản sinh. $P_1 \subseteq P$ gọi là tập các quy tắc kết thúc. Mỗi phần tử của P_1 có dạng $\alpha \rightarrow \bullet \beta$.

Ở mỗi bước của thuật toán, nó áp dụng một trong các quy tắc trong P . Thuật toán dừng lại nếu quy tắc áp dụng là quy tắc kết, tức là quy tắc có dạng $\alpha \rightarrow \bullet \beta \in P_1$, hoặc không còn quy tắc nào trong P có thể áp dụng được nữa thì thuật toán dừng lại.

Ta chứng minh định lý sau đây.

Định lý 2 : Đối với máy Turing $M = \langle X, A, \Phi, a_0, F \rangle$, tồn tại thuật toán chính quy α sao cho với mọi từ $P \in X^*$ ta có $M(P) = \alpha(P)$.

Chứng minh: Giả sử $M = \langle X, A, \Phi, a_0, F \rangle$, trong đó:

X - bảng chữ cái hữu hạn (bảng vào).

A - bảng chữ cái hữu hạn (bảng trạng thái)

$\Phi : A \times X \rightarrow A \times X \times \{0, 1, 2\}$

$a_0 \in A$ - trạng thái ban đầu.

$F \subseteq A$ - tập trạng thái kết thúc.

Giả sử $\varepsilon \in X$. Trước hết ta xây dựng thuật toán α_1 mà các bước làm việc của nó bắt trước làm việc của máy Turing M sao cho $M(a_0P) = K$ thì $\alpha_1(a_0P) = \varepsilon K \varepsilon$. Tiếp theo xây dựng thuật toán α_2 xóa mọi ký hiệu ε và các trạng thái $a \in F$, tức là $\alpha_2(\varepsilon a R \varepsilon) = R \in X^*$, $P \in X^*$, a_0 -trạng thái ban đầu của máy M . Cuối cùng xây dựng thuật toán α_0 sao cho $\alpha_0(P) = a_0P$ với $P \in X^*$, a_0 là trạng thái ban đầu của máy M . Thuật toán cần tìm trong định lý này là thuật toán α được xây dựng như sau:

$$\alpha = \alpha_2 \circ (\alpha_1 \circ \alpha_0)$$

Thật vậy giả sử $P \in X^*$ và $M(\alpha_0 P) = K$ ta có:

$$\alpha(P) = \alpha_2 \circ (\alpha_1 \circ \alpha_0(P)) = \alpha_2 \circ (\alpha_1 \circ (a_0 P)) = \alpha_2(\varepsilon K \varepsilon) = K = M(K).$$

Bằng cách mô tả như định lý 2 ta có:

Định lý 3 : Giả sử α là thuật toán chính quy trên bảng X , khi đó tồn tại máy Turing M (với bảng tín hiệu trong chứa X) sao cho

$$\alpha(P) = M(P), \forall P \in X^*.$$

§4. LIÊN HỆ GIỮA HÀM ĐỆ QUY TỪNG PHẦN VÀ THUẬT TOÁN CHÍNH QUY

Định lý 4 :

a) Đối với mỗi hàm đệ quy từng phần $f(x)$ đều tồn tại một thuật toán chính quy α trên bảng $X = \{0, 1\}$ sao cho $\alpha(x) = f(x)$, $\forall x \in X^*$.

b) Với mỗi thuật toán chính quy α đều tồn tại một hàm đệ quy từng phần $f(x)$ sao cho $\alpha(x) = f(x)$, $\forall x \in X^*$.

Chứng minh:

a) Suy ra từ các định lý trên.

b) Trong lý thuyết thuật toán chính quy ta có kết quả sau đây:

Nếu α là thuật toán chính quy trên bảng $X = \{0, 1\}$ thì tồn tại thuật toán chính quy β trên bảng $\{0, 1, \alpha, \beta\} = X \cup \{\alpha, \beta\}$ sao cho $\alpha \approx \beta$ trên $X \cup \{\alpha, \beta\}$. Ngoài ra người ta cũng đã chứng minh: Nếu α là một thuật toán trên bảng X thì tồn tại thuật toán α_1 trên bảng $X \cup \{*, \gamma, \varepsilon\}$ sao cho $\alpha_1(K_0 \delta \alpha * P) = \alpha(P)$ (1), ở đây $K_0 \delta \alpha$ là từ mã hoá của thuật toán α và $K_0 \delta \alpha \in \{\gamma, \varepsilon\}^*$. Như vậy mỗi thuật toán α trên X tương ứng với một mã $K_0 \delta \alpha$ dưới dạng 1 từ trong bảng $\{\gamma, \varepsilon\}$. Dĩ nhiên không phải từ nào trong $\{\gamma, \varepsilon\}^*$ cũng là 1 mã nào đó của thuật toán α .

Ta tiến hành xây dựng tương ứng 1 - 1 giữa tập các thuật toán α trên X với các số tự nhiên trong N . Ta phải xây dựng tương ứng trên sao

cho mỗi thuật toán ứng với một số tự nhiên n nào đó và từ n phải khôi phục lại toàn bộ hoạt động của thuật toán α .

Để đánh số mã α bởi một số tự nhiên nào đó theo nguyên tắc sau: Vì $K_0\delta\alpha$ là một từ trong $\{\gamma, \varepsilon\}^*$ nên ta đặt $\gamma \leftrightarrow 0, \varepsilon \leftrightarrow 1$.

Và nếu $\alpha_i = 0$ thì $\alpha_i = \gamma$, còn nếu $\alpha_i = 1$ thì $\alpha_i = \varepsilon$.

Ký hiệu cách đánh số này bởi φ thì $\varphi(Q) =$ một số tự nhiên nào đó với $Q \in \{\gamma, \varepsilon\}^*$. Còn nếu $n \in \mathbb{N}$ thì hàm $\varphi(n)$ là mã $K_0\delta\alpha$ của thuật toán α nào đó.

Bây giờ ta lập thuật toán $\mathfrak{B}$ bằng cách đặt

$$\mathfrak{B}(n) = \begin{cases} \varphi(n), & \text{nếu } \varphi(n) \text{ là mã } K_0\delta\alpha. \\ \wedge, & \text{nếu } \varphi(n) \text{ không phải là mã } K_0\delta\alpha. \end{cases}$$

ở đây α là thuật toán bất kỳ nào đó trên X .

Tiếp theo ta lập các thuật toán phụ:

$$\mathfrak{B}_1(\text{RoP}) = R$$

$$\mathfrak{B}_2(\text{RoP}) = *$$

$$\mathfrak{B}_3(\text{RoP}) = P, (R, P \in X^*)$$

Lưu ý: n viết dưới dạng $|^{n+1}$

x viết dưới dạng $|^{x+1}$

và (n, x) viết dưới dạng $|^{n+1} o |^{x+1}$

Hợp hai thuật toán: $\alpha \circ \mathfrak{B}(P) = \alpha(\mathfrak{B}(P))$.

Nối hai thuật toán: $\alpha : \mathfrak{B}(P) = \alpha(P) : \mathfrak{B}(P)$.

Bây giờ ta xây dựng thuật toán $L = \alpha_0(\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3)$. Rõ ràng ta

có:

$$L(n, x) = \alpha_0(\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}_1(n, x), \mathfrak{B}_2(n, x), \mathfrak{B}_3(n, x)) =$$

$$= \alpha_0(\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}_1(|^{n+1} o |^{x+1}), \mathfrak{B}_2(|^{n+1} o |^{x+1}), \mathfrak{B}_3(|^{n+1} o |^{x+1}))$$

$$= \alpha_0(\mathfrak{B}(|^{n+1}) * |^{x+1}) = \alpha_0(\mathfrak{B}(n)) * |^{x+1})$$

$$= \alpha(\varphi(n)) * |^{x+1} = \alpha(K_0\delta\alpha * |^{x+1}) = \alpha(K_0\delta\alpha * x) = \alpha(x) \text{ (do } 1)$$

Tóm lại ta có $L(n, x) = \alpha(x) = f(x)$ là hàm đệ quy từng phần. Định lý được chứng minh.

CHƯƠNG 11

LÓGIC TOÁN

I. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

§1. CÁC PHÉP TOÁN VÀ CÔNG THỨC

Trong chương này chúng ta chỉ đề cập tới các mệnh đề hoặc đúng hoặc sai.

Ví dụ: “Hôm nay trời mưa”, “Ngày mai trời sẽ nắng” là những mệnh đề hoặc đúng hoặc sai. Chúng ta không nghiên cứu mệnh đề “Tôi nói dối”, “Đề nghị các em trật tự” là những mệnh đề không đầy đủ nghĩa để khẳng định mệnh đề đó là đúng hay sai.

Chúng ta chỉ quan tâm tới mệnh đề hoặc đúng (T) hoặc sai (F) mà không quan tâm tới nội dung cũng như cấu trúc của mệnh đề. Chính vì vậy hai mệnh đề là tương đương nhau nếu nó hoặc đúng hoặc sai như nhau.

Ví dụ: “Bác Hồ sinh năm 1890” và “Bác Hồ mất năm 1969, lúc Người 79 tuổi” là hai mệnh đề tương đương nhau.

Hai mệnh đề “3 là số nguyên tố” và “chu vi đường tròn tâm là gốc tọa độ có bán kính 1 là số hữu tỷ” là không tương đương nhau.

Vì các mệnh đề chúng ta nghiên cứu trong phần này chỉ nhận một trong hai giá trị đúng (T) hoặc sai (F) nên ta có thể định nghĩa các phép toán *Tuyển* ($\vee$), *Hội* ($\wedge$), *Kéo theo* ($\rightarrow$), *Phủ định* ($\neg$) trên tập các mệnh đề hoặc đúng hoặc sai. Sự nghiên cứu các mệnh đề gọi là *đại số mệnh đề*.

Dưới đây để chỉ mệnh đề A nhận giá trị đúng tương ứng với ký hiệu T, còn nhận giá trị sai tương ứng với ký hiệu F.

1. Định nghĩa các phép toán trong đại số mệnh đề

Ký hiệu X, Y, Z (đôi khi cả chỉ số nữa) là các mệnh đề (sau này còn gọi là mệnh đề sơ cấp).

a. Phép tuyển:

Mệnh đề X tuyển với mệnh đề Y (ký hiệu $X \vee Y$) là một mệnh đề được định nghĩa như sau: $X \vee Y$ nhận giá trị T khi và chỉ khi ít nhất một trong hai mệnh đề X, Y nhận giá trị T. Mệnh đề $X \vee Y$ nhận giá trị F khi và chỉ khi cả X, Y đều nhận giá trị F.

b. Phép hội:

Mệnh đề X hội mệnh đề Y (ký hiệu $X \wedge Y$) là một mệnh đề mà nó nhận giá trị T khi và chỉ khi cả hai mệnh đề nhận giá trị T và nhận giá trị F khi và chỉ khi ít nhất một mệnh đề nhận giá trị F.

c. Phép phủ định:

Phủ định của mệnh đề X (ký hiệu $\bar{X}$) nhận giá trị F khi và chỉ khi mệnh đề X nhận giá trị T. $\bar{X}$ nhận giá trị T khi và chỉ khi X nhận giá trị F.

d. Phép kéo theo:

Mệnh đề X suy ra mệnh đề Y (ký hiệu $X \rightarrow Y$) nhận giá trị T khi và chỉ khi X nhận giá trị F hoặc X, Y cùng nhận giá trị T. Mệnh đề $X \rightarrow Y$ nhận giá trị F khi và chỉ khi X nhận giá trị T và Y nhận giá trị F.

Các phép toán ($\vee$, $\wedge$, $\bar{}$, $\rightarrow$) có thể định nghĩa thông qua bảng dưới đây:

X	Y	$X \vee Y$	$X \wedge Y$	$\bar{X}$	$X \rightarrow Y$
T	T	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T

2. Định nghĩa công thức trong đại số mệnh đề

Định nghĩa 1:

a. Mỗi mệnh đề sơ cấp mà ta ký hiệu là X, Y, Z (đôi khi cả số nữa) là một công thức.

b. Nếu A, B là hai công thức thì dãy các ký hiệu $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(\bar{A})$, $(A \rightarrow B)$ cũng là những công thức.

Lưu ý: Mỗi công thức chỉ chứa các ký hiệu X, Y, Z , các phép toán $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$ và các ký hiệu mở ngoặc "(", đóng ngoặc ")". Bản thân $A \vee B, A \wedge B, \bar{A}, A \rightarrow B$ không phải là những công thức theo định nghĩa, nhưng đôi khi để cho gọn ta viết $A \vee B$ thay cho $(A \vee B)$ v.v...

3. Công thức đồng nhất bằng nhau và công thức đồng nhất đúng

Định nghĩa 2: Hai công thức A và B được gọi là đồng nhất bằng nhau (ký hiệu $A \equiv B$) khi và chỉ khi chúng cùng nhận giá trị đúng, sai như nhau đối với mọi mệnh đề sơ cấp có trong nó.

Sau đây là các công thức đồng nhất bằng nhau thường gặp:

- (1) $\bar{\bar{A}} \equiv A$
- (2) $A \vee B \equiv B \vee A$
- (3) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
- (4) $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- (5) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
- (6) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- (7) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- (8) $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$
- (9) $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$
- (10) $A \vee A \equiv A$
- (11) $A \wedge A \equiv A$
- (12) $A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$

Lưu ý : Dùng các công thức từ (1) đến (12) có thể biến đổi từ một công thức phức tạp về một công thức đơn giản hơn đồng nhất bằng nó.

Ví dụ: $((A \vee A) \wedge B) \vee (A \wedge B) = (A \wedge B) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge B) = A \wedge B$.

Định nghĩa 3: Công thức A được gọi là đồng nhất đúng (ký hiệu $\vdash A$) khi và chỉ khi A luôn nhận giá trị đúng với mọi giá trị có thể của các mệnh đề sơ cấp trong A.

Sau đây là một số công thức đồng nhất đúng thường gặp:

- (1) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (2) $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (3) $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$
- (4) $\vdash (A \wedge B) \rightarrow B$
- (5) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$
- (6) $\vdash A \rightarrow (A \vee B)$
- (7) $\vdash B \rightarrow (A \vee B)$
- (8) $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
- (9) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$
- (10) $\vdash A \rightarrow \bar{\bar{A}}$
- (11) $\vdash \bar{\bar{A}} \rightarrow A$

4. Luật đối ngẫu

Giả sử A là một công thức chỉ chứa các phép toán $\vee, \wedge, \neg$ mà không chứa phép toán $\rightarrow$. Trong A đổi chỗ vai trò hai phép toán $\wedge$ và $\vee$ cho nhau ta được công thức A^* , ta gọi A^* là công thức đối ngẫu của công thức A.

Ví dụ: Đối ngẫu của công thức $A = (X \vee Y) \wedge \bar{Z}$ là công thức:

$$A^* = (\bar{X} \wedge \bar{Y}) \vee \bar{Z}.$$

Định lý 1: Giả sử $A(X_1, X_2, \dots, X_n)$ là một công thức, trong đó X_i ($i = 1, \dots, n$) là các mệnh đề sơ cấp trong A. Khi đó ta luôn có:

$$A^* = \bar{A}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n).$$

Chứng minh: Dựa vào định nghĩa đệ quy của công thức A .

Để cho gọn ta viết $\bar{A}(\bar{X})$ thay cho $\bar{A}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$.

a. Nếu $A = X$, ở đây X là mệnh đề sơ cấp thì hiển nhiên

$$\bar{A}(\bar{X}) = \bar{X} = X \text{ hay } A^* = \bar{A}(\bar{X}).$$

b. Giả sử công thức đã được chứng minh cho các công thức A và B tức là $A^* = \bar{A}(\bar{X})$ và $B^* = \bar{B}(\bar{X})$. Ta chứng minh định lý cũng đúng cho các công thức $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ và $(\bar{A})$.

Xét công thức $(A \wedge B)$:

$$(A \wedge B)^* = A^* \vee B^* = \bar{A}(\bar{X}) \vee \bar{B}(\bar{X}) = \overline{(A \wedge B)(\bar{X})}.$$

Xét công thức $(A \vee B)$:

$$(A \vee B)^* = A^* \wedge B^* = \bar{A}(\bar{X}) \wedge \bar{B}(\bar{X}) = \overline{(A \vee B)(\bar{X})}.$$

Xét công thức $(\bar{A})$:

$$(\bar{A})^* = \bar{A}^* = \bar{\bar{A}(\bar{X})}. \text{ Định lý được chứng minh.}$$

Ví dụ: Cho $A = (X \vee Y) \wedge \bar{Z}$.

Ta có A^* theo định nghĩa là $A^* = (X \wedge Y) \vee \bar{Z}$.

Còn theo định lý thì

$$\bar{A}(\bar{X}) = \overline{(X \vee Y) \wedge \bar{Z}} = (\overline{(X \vee Y)}) \vee \bar{\bar{Z}} = (\bar{X} \wedge \bar{Y}) \vee Z = (X \wedge Y) \vee \bar{Z} = A^*.$$

Cần chú ý rằng: Nếu $A = B$ thì $A^* = B^*$.

5. Luật thay thế

Nếu A là một công thức chứa mệnh đề sơ cấp X thì khi thay X bởi một công thức E nào đó ta được công thức mới ký hiệu là B . Với các ký hiệu đó ta có

Định lý 2: Nếu $\vdash A$ thì $\vdash B$.

Chứng minh suy ra từ định nghĩa công thức đồng nhất đúng.

6. Luật kết luận

Định lý 3: Nếu $\vdash A$ và $\vdash A \rightarrow B$ thì $\vdash B$.

Chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

§2. ĐIỀU KIỆN ĐỒNG NHẤT ĐÚNG

Định nghĩa 4: Công thức A được gọi là đồng nhất sai nếu A luôn luôn nhận giá trị sai với mọi bộ giá trị của các mệnh đề sơ cấp có trong A. Dĩ nhiên phủ định của công thức đồng nhất đúng là công thức đồng nhất sai và ngược lại.

Bài toán: Cho công thức A bất kỳ. Có hay không một thuật toán mà sau hữu hạn các bước làm việc ta có thể biết công thức A có phải là công thức đồng nhất đúng hay không.

Đối với bài toán trên luôn có một thuật toán để biết công thức A có phải là công thức đồng nhất đúng hay không. Đó là thuật toán lập bảng.

2 ⁿ hàng	$X_1 X_2 \dots X_n$	$A(X_1 X_2 \dots X_n)$
	F F F	?
	F F T	?
		
	T T T	?

Phương pháp lập bảng sẽ gặp khó khăn khi số các biến trong A quá lớn. Để khắc phục nhược điểm trên ta cần xây dựng thuật toán khác tốt hơn, đó là thuật toán tìm dạng chuẩn tắc tuyển và dạng chuẩn tắc hội của công thức A.

Trước hết ta đưa vào các khái niệm sau:

Định nghĩa 5: a. Tuyển các mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó gọi là tuyển sơ cấp (TSC).

b. Hội của các mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó gọi là hội sơ cấp (HSC).

Định lý 4 :

1. Điều kiện cần và đủ để một tuyển sơ cấp đồng nhất đúng là trong tuyển đó có chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó.

2. Điều kiện cần và đủ để một hội sơ cấp đồng nhất sai là trong hội đó có chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó.

Chứng minh: 1)

Điều kiện cần: Giả sử TSC là đồng nhất đúng. Ta chỉ ra trong TSC có chứa một mệnh đề đồng thời với phủ định của nó. Giả sử ngược lại: trong TSC không chứa một mệnh đề sơ cấp nào đồng thời với phủ định của nó. Trong TSC thay mệnh đề sơ cấp không có dấu phủ định bằng giá trị F, còn mệnh đề sơ cấp có dấu phủ định thì thay bằng T thì TSC nhận giá trị F. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Chứng tỏ TSC phải chứa mệnh đề sơ cấp cùng với phủ định của nó.

Điều kiện đủ: Giả sử trong TSC có chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó, chẳng hạn $TSC = X \vee \bar{X} \vee Y \vee \dots \vee \bar{Z}$. Vì $X \vee \bar{X}$ là công thức đồng nhất đúng nên TSC phải là công thức đồng nhất đúng.

2) Phương pháp chứng minh cũng như đối với 1). Định lý được chứng minh.

Định nghĩa 6:

a. Giả sử A là một công thức. Nếu $A' = A$ mà A' là tuyển của các hội sơ cấp, tức $A' = (HSC)_1 \vee (HSC)_2 \vee \dots \vee (HSC)_n$ thì A' được gọi là dạng chuẩn tắc tuyển (DCTT) của A.

b. Nếu $A'' = A$ mà A'' là hội của các tuyển sơ cấp, tức là:

$A'' = (TSC)_1 \wedge (TSC)_2 \wedge \dots \wedge (TSC)_n$ ta nói A'' là dạng chuẩn tắc hội (DCTH) của A.

Ví dụ: $A = X \wedge (X \rightarrow Y)$.

§2. ĐIỀU KIỆN ĐỒNG NHẤT ĐÚNG

Định nghĩa 4: Công thức A được gọi là đồng nhất sai nếu A luôn luôn nhận giá trị sai với mọi bộ giá trị của các mệnh đề sơ cấp có trong A. Dĩ nhiên phủ định của công thức đồng nhất đúng là công thức đồng nhất sai và ngược lại.

Bài toán: Cho công thức A bất kỳ. Có hay không một thuật toán mà sau hữu hạn các bước làm việc ta có thể biết công thức A có phải là công thức đồng nhất đúng hay không.

Đối với bài toán trên luôn có một thuật toán để biết công thức A có phải là công thức đồng nhất đúng hay không. Đó là thuật toán lập bảng.

$\left[\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. 2^n \text{ hàng}$	$X_1 X_2 \dots X_n$	$A(X_1 X_2 \dots X_n)$
	F F F	?
	F F T	?
		
	T T T	?

Phương pháp lập bảng sẽ gặp khó khăn khi số các biến trong A quá lớn. Để khắc phục nhược điểm trên ta cần xây dựng thuật toán khác tốt hơn, đó là thuật toán tìm dạng chuẩn tắc tuyến và dạng chuẩn tắc hội của công thức A.

Trước hết ta đưa vào các khái niệm sau:

Định nghĩa 5: a. Tuyến các mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó gọi là tuyến sơ cấp (TSC).

b. Hội của các mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó gọi là hội sơ cấp (HSC).

$$A'' = X \wedge (\bar{X} \vee \bar{Y}) \text{ là DCTH}$$

$$A' = (X \wedge \bar{X}) \vee (X \wedge Y) \text{ là DCTT của } A.$$

Dĩ nhiên $A = A'' = A'$.

Định lý 5: Mọi công thức trong đại số mệnh đề đều có dạng chuẩn tắc tuyển và dạng chuẩn tắc hội.

Chứng minh: Giả sử A là một công thức bất kỳ trong đại số mệnh đề. Nếu trong A có chứa phép toán $\rightarrow$ thì có thể khử phép $\rightarrow$ bằng cách áp dụng công thức đồng nhất bằng nhau $X \rightarrow Y \equiv \bar{X} \vee Y$. Vì vậy ta có thể giả thiết A chỉ chứa phép toán $\vee$, $\wedge$ và $\neg$. Nếu phép phủ định chưa trực tiếp đối với các mệnh đề sơ cấp trong A thì ta sử dụng các công thức đồng nhất bằng nhau $\overline{\bar{X} \vee \bar{Y}} \equiv \bar{X} \wedge \bar{Y}$ hay $\overline{X \wedge Y} \equiv \bar{X} \vee \bar{Y}$. Tiếp theo nhờ các công thức đồng nhất bằng nhau:

$$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

$$X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$$

để đưa A về dạng chuẩn tắc hội và chuẩn tắc tuyển. Định lý được chứng minh.

Ví dụ: Cho $A \equiv X \rightarrow (Y \rightarrow X)$, tìm dạng chuẩn tắc hội và chuẩn tắc tuyển của A .

Ta có $A \equiv X \rightarrow (Y \rightarrow X) \equiv \bar{X} \vee \bar{Y} \vee X \equiv A$ là dạng chuẩn tắc hội với các TSC $\equiv \bar{X} \vee \bar{Y} \vee X$ và cũng là dạng chuẩn tắc tuyển với các HSC là $\bar{X}$, $\bar{Y}$ và X .

Bây giờ ta chứng minh định lý chủ yếu sau đây:

Định lý 6:

1. Điều kiện cần và đủ để công thức A đồng nhất đúng là trong dạng chuẩn tắc hội của A , mỗi tuyển sơ cấp chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó.

2. Điều kiện cần và đủ để công thức A đồng nhất sai là trong dạng chuẩn tắc tuyển của A , mỗi hội sơ cấp chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó.

Chứng minh: Chứng minh 1)

Điều kiện cần: Giả sử A là công thức đồng nhất đúng.

Theo định lý 5 thì với A có tồn tại dạng chuẩn tắc hội:

$$A' \equiv (TSC)_1 \wedge (TSC)_2 \wedge \dots \wedge (TSC)_n \equiv A.$$

Vì A đồng nhất đúng nên $(TSC)_i$ ($i = 1, \dots, n$) là đồng nhất đúng. Theo định lý 4 thì trong mỗi tuyến sơ cấp $(TSC)_i$ ($i = 1, \dots, n$) có chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó.

Điều kiện đủ: Giả sử $A' \equiv (TSC)_1 \wedge (TSC)_2 \wedge \dots \wedge (TSC)_n$ là dạng chuẩn tắc hội của A, trong đó mỗi $(TSC)_i$ ($i = 1, \dots, n$) có chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó. Theo định lý 4 thì mỗi $(TSC)_i$ ($i = 1, \dots, n$) là đồng nhất đúng và do đó A là công thức đồng nhất đúng.

Chứng minh 2): Chứng minh tương tự 1.

Thuật toán nhận biết sự đồng nhất đúng hay đồng nhất sai đối với công thức A được xây dựng như sau:

- Bước 1: Tìm dạng chuẩn tắc hội và dạng chuẩn tắc tuyến của A.
- Bước 2: Nếu trong dạng chuẩn tắc hội mà mỗi tuyến sơ cấp có chứa một mệnh đề sơ cấp cùng với phủ định của nó thì kết luận A là đồng nhất đúng.
- Bước 3: Nếu trong dạng chuẩn tắc tuyến mà mỗi hội sơ cấp có chứa một mệnh đề sơ cấp cùng với phủ định của nó thì kết luận A là đồng nhất sai.
- Bước 4: Nếu trong dạng chuẩn tắc hội (dạng chuẩn tắc tuyến) có tồn tại một TSC (HSC) mà trong nó không có mệnh đề sơ cấp nào đồng thời với phủ định của nó thì A không phải là đồng nhất đúng và đồng nhất sai. Trong trường hợp này A là công thức thực hiện được tức là có tồn tại một bộ giá trị đúng, sai của các mệnh đề sơ cấp trong A mà A nhận được giá trị đúng.

II. HỆ TOÁN MỆNH ĐỀ

Trong phần đại số mệnh đề ta đã nghiên cứu các mệnh đề hoặc đúng hoặc sai mà không xét đến nội dung cũng như cấu trúc của mệnh đề. Trong thực tế có nhiều tập hợp, chẳng hạn tập các hàm đại số logic, tập tất cả các tập với phép toán được định nghĩa như trong đại số mệnh đề cũng có những tính chất như trong đại số mệnh đề. Vì vậy ta nghiên cứu mệnh đề một cách tổng quát hơn. Một trong các phương pháp đó là phương pháp tiên đề hóa.

Chúng ta sẽ thấy phương pháp tiên đề hóa còn được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khác, đặc biệt người ta sử dụng phương pháp tiên đề hóa để phân loại, tìm kiếm thông tin và lập bảng mã cho các thông tin đã được phân loại dưới dạng cây nhị nguyên.

Bất kỳ một môn lý thuyết nào cũng được nghiên cứu và xây dựng theo trình tự sau đây:

1. Đưa ra các đối tượng nghiên cứu.
2. Xây dựng hệ tiên đề.
3. Xây dựng các định lý.

Ví dụ: Môn hình học Oclit :

1. Đối tượng nghiên cứu là điểm, đường thẳng, mặt phẳng,...
2. Xây dựng các tiên đề Oclit.
3. Các kết quả của môn hình học Oclit.

Có nhiều cách xây dựng hệ hình thức, tùy theo cách chọn các đối tượng nghiên cứu. Nhưng hệ hình thức chỉ có nghĩa khi nó phù hợp với thực tế. Muốn vậy hệ hình thức phải thỏa mãn 3 điều kiện sau:

1. Hệ hình thức là phi mâu thuẫn.
2. Hệ hình thức là đầy đủ.
3. Hệ hình thức là độc lập.

Khái niệm về phi mâu thuẫn, đầy đủ, độc lập sẽ được định nghĩa chính xác sau.

Hệ hình thức mà ta nghiên cứu dưới đây là hệ toán mệnh đề.

Mô tả hệ toán mệnh đề

1) Chọn ra một tập hợp đếm được các ký hiệu mà ta sẽ gọi là các ký hiệu của hệ toán. Dãy hữu hạn các ký hiệu đó gọi là mệnh đề.

2) Chọn ra tập hợp con các mệnh đề mà ta gọi là công thức của hệ toán.

3) Trong các công thức của hệ toán ta chọn ra một tập hợp con các công thức và gọi là các tiên đề của hệ toán.

4) Xây dựng quy tắc dẫn xuất.

Việc xây dựng hệ toán mệnh đề được thực hiện theo 4 bước trên.

§1. HỆ TOÁN MỆNH ĐỀ

A. XÂY DỰNG HỆ TOÁN MỆNH ĐỀ

Ta xây dựng hệ toán mệnh đề theo trình tự mô tả ở trên.

1. Các ký hiệu dùng trong hệ toán mệnh đề :

a) Các chữ X, Y, Z (đôi khi cả số nữa) dùng chỉ các mệnh đề sơ cấp.

b) Các ký hiệu $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$ dùng chỉ các phép toán tuyển, hội, phủ định, kéo theo tương ứng.

c) Ký hiệu (,) gọi là dấu mở ngoặc và dấu đóng ngoặc.

d) Các chữ A, B, C, D, K... (đôi khi cả chỉ số nữa) dùng để chỉ các công thức của hệ toán.

Hệ toán mệnh đề chỉ gồm những ký hiệu trên, không còn những ký hiệu nào khác.

2. Định nghĩa công thức của hệ toán

Công thức trong hệ toán được định nghĩa đệ quy như sau:

a) Mỗi mệnh đề sơ cấp là một công thức.

b) Nếu A, B là hai công thức thì dãy các ký hiệu $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\bar{A})$, $(A \rightarrow B)$ cũng là các công thức. Để cho gọn đôi khi ta viết $A \vee B$ thay cho $(A \vee B)$.

3. Các tiên đề của hệ toán mệnh đề

Ta chọn nhóm các công thức sau làm tiên đề của hệ toán:

$$(1) \begin{cases} a) (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \\ b) ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a) ((A \wedge B) \rightarrow A) \\ b) ((A \wedge B) \rightarrow B) \\ c) ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))) \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} a) (A \rightarrow (A \vee B)) \\ b) (B \rightarrow (A \vee B)) \\ c) ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))) \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} a) ((A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})) \\ b) (A \rightarrow \bar{\bar{A}}) \\ c) (\bar{\bar{A}} \rightarrow A) \end{cases}$$

Để cho gọn ta ký hiệu $i(x)$ là tiên đề x trong nhóm i ($i = 1, 2, 3, 4$, $x \in \{a, b, c\}$)

4. Quy tắc dẫn xuất

Nếu A và $A \rightarrow B$ thì B.

B. CÁC ĐỊNH NGHĨA TRONG HỆ TOÁN MỆNH ĐỀ

1. Định nghĩa định lý

- a) Mỗi tiên đề là một định lý.
 - b) Nếu A và $A \rightarrow B$ là các định lý thì B cũng là một định lý.
- Ta ký hiệu A là một định lý qua $\vdash A$.

2. Định nghĩa dẫn xuất

Một dẫn xuất trong hệ toán mệnh đề là dãy các công thức $A_1, A_2, \dots, A_n$, trong đó A_i ($i = 1, n$) hoặc là tiên đề, hoặc trực tiếp suy ra từ các công thức đứng trước nó theo quy tắc dẫn xuất.

Từ định nghĩa dẫn xuất đôi khi ta còn định nghĩa định lý như sau:

Công thức A trong hệ toán mệnh đề được gọi là một định lý, nếu tồn tại một dẫn xuất trong hệ toán mệnh đề mà công thức cuối cùng trong dẫn xuất đó là A . Nói cách khác nếu A là một định lý thì tồn tại dãy các công thức $A_1, A_2, \dots, A_n = A$, trong đó A_i ($i = 1, n$) hoặc là tiên đề hoặc suy ra từ công thức đứng trước nó theo quy tắc dẫn xuất. Người ta thường gọi dãy $A_1, A_2, \dots, A_n$ là một chứng minh của A .

3. Định nghĩa dẫn được

Công thức A gọi là dẫn được từ các công thức $A_1, A_2, \dots, A_n$ (ký hiệu $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash A$) nếu tồn tại dãy các công thức $B_1, B_2, \dots, B_m = A$, trong đó B_i ($i = 1, 2, \dots, m$) hoặc A_j ($j = 1, \dots, n$) hoặc suy từ công thức đứng trước nó theo quy tắc dẫn xuất.

Dãy $B_1, B_2, \dots, B_m$ được gọi là một dẫn xuất của A .

Chú ý: Từ các định nghĩa trên ta suy ra:

- a) Mỗi tiên đề là một định lý.
- b) Nếu A, B là các công thức mà $B \subseteq A$ thì $B \vdash C$ khi và chỉ khi $A \vdash C$.
- c) Bản thân A dẫn được từ chính nó hay $A \vdash A$.

C. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ ĐỊNH LÝ

Ví dụ 1: Chứng minh công thức $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$ là một định lý, hay $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$.

Thật vậy: Theo 1(b) ta có:

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)) \quad (1)$$

Theo 1(a) ta có: $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (2)$

Từ (1), (2) theo quy tắc dẫn xuất ta có điều cần chứng minh là:

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A).$$

Ví dụ 2: Chứng minh $\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$.

Thật vậy theo 2(c) ta có:

$$\vdash ((A \wedge B) \rightarrow B) \rightarrow (((A \wedge B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A))) \quad (1)$$

Theo 2(b) ta có: $\vdash (A \wedge B) \rightarrow B \quad (2)$. Từ (1) và (2)

Theo quy tắc dẫn xuất thì

$$\vdash ((A \wedge B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)) \quad (3)$$

Từ 2(a) ta có: $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A \quad (4)$

Từ (3) và (4) theo quy tắc dẫn xuất ta có:

$$\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A).$$

Ví dụ 3: Chứng minh $\vdash \overline{\overline{A}} \rightarrow \overline{A}$.

Thật vậy: $\vdash (A \rightarrow \overline{\overline{A}}) \rightarrow (\overline{\overline{A}} \rightarrow \overline{A}) \quad (1) \text{ do } 4(a)$

$$\vdash (A \rightarrow \overline{\overline{A}}) \quad (2) \text{ do } 4(b)$$

Từ (1), (2) theo quy tắc dẫn xuất ta có $\vdash \overline{\overline{A}} \rightarrow \overline{A}$.

§2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA HỆ TOÁN MỆNH ĐỀ

Định lý 1 :

$$\text{Nếu } A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B_1 \quad (1)$$

$$A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B_2 \quad (2)$$

.....

$$A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B_p \quad (p)$$

và $B_1, B_2, \dots, B_p \vdash A$ thì $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash A$.

Chứng minh: Theo định nghĩa dẫn được thì từ (1), (2), ..., (p) có tồn tại các dãy công thức:

$$C^{(1)}_1, C^{(1)}_2, \dots, C^{(1)}_{n_1} \equiv B_1.$$

$$C^{(2)}_1, C^{(2)}_2, \dots, C^{(2)}_{n_2} \equiv B_2.$$

.....

$$C^{(p)}_1, C^{(p)}_2, \dots, C^{(p)}_{n_p} \equiv B_p.$$

Trong đó $C^{(k)}_i$ hoặc là tiên đề, hoặc là A_j ($j=1, 2, \dots, m$), hoặc suy từ các công thức đứng trước nó theo quy tắc dẫn xuất. Mặt khác theo giả thiết $B_1, B_2, \dots, B_p \vdash A$ nên tồn tại dãy các công thức $C^{(p+1)}_1, C^{(p+1)}_2, \dots, C^{(p+1)}_{n_{p+1}} \equiv A$, trong đó $C^{(p+1)}_i$ hoặc là tiên đề hoặc là B_j ($j=1, 2, \dots, p$), hoặc suy từ công thức đứng trước nó theo quy tắc dẫn xuất.

Ghép $p+1$ các dãy trên ta được dãy:

$C^{(1)}_1, C^{(1)}_2, \dots, C^{(1)}_{n_1} \equiv B_1, C^{(2)}_1, C^{(2)}_2, \dots, C^{(2)}_{n_2} \equiv B_2, \dots, C^{(p)}_1, C^{(p)}_2, \dots, C^{(p)}_{n_p} \equiv B_p, C^{(p+1)}_1, C^{(p+1)}_2, \dots, C^{(p+1)}_{n_{p+1}} \equiv A$ là một dẫn xuất của A từ $A_1, A_2, \dots, A_m$ hay $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash A$. Định lý được chứng minh.

Định lý 2 :

Nếu $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$ thì $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash B$.

Chứng minh: Từ giả thiết ta có tồn tại các công thức $B_1, B_2, \dots, B_m \equiv A_n \rightarrow B$, trong đó B_i ($i=1, 2, \dots, m$) hoặc là tiên đề, hoặc là A_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) hoặc suy từ các công thức đứng trước nó theo quy tắc dẫn xuất.

Xét dãy $B_1, B_2, \dots, B_m, A_n, B$ (1)

Ta chỉ ra (1) là một dẫn xuất của B từ $A_1, A_2, \dots, A_n$. Thật vậy, $B_1, B_2, \dots, B_m, A_n$ hoặc là tiên đề, hoặc là A_i ($i=1, 2, \dots, n$), hoặc suy từ các công thức đứng trước nó theo quy tắc dẫn xuất.

Vậy chỉ cần xét thêm B : Ta có

$$B_m, A_n \vdash B_m$$

$$B_m, A_n \vdash A_n$$

(do chú ý trong mục 3 của B).

Vì $B_m \equiv A_n \rightarrow B$ nên ta có $B_m, A_n \vdash A_n \rightarrow B$ và $B_m, A_n \vdash A_n$. Từ đó theo quy tắc dẫn xuất ta có $B_m, A_n \vdash B$ hay B suy ra từ công thức đứng trước nó theo quy tắc dẫn xuất. Tóm lại dãy (1) chính là một dẫn xuất của B từ $A_1, A_2, \dots, A_n$ hay $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$.

Định lý được chứng minh.

Định lý 3: Nếu $\vdash D$ thì $\vdash A \rightarrow D$, ở đây A là công thức bất kỳ.

Chứng minh: Sử dụng các tiên đề 1(a), quy tắc dẫn xuất và giả thiết.

Định lý 4 : Nếu A là một công thức bất kỳ thì ta luôn có $\vdash A \rightarrow A$.

Chứng minh: Ta lần lượt có:

$$\vdash (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)) \quad (1) \text{ (do 1(b))}$$

$$\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \quad (2) \text{ (do 1(a)).}$$

Từ (1), (2) theo quy tắc dẫn xuất ta có:

$$\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (3)$$

Mặt khác theo 1(a) thì:

$$\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \quad (4)$$

Từ (3), (4) theo quy tắc dẫn xuất ta có công thức cần chứng minh là $\vdash A \rightarrow A$. Định lý được chứng minh.

Định lý 5: (Định lý suy diễn)

Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ thì $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$ ($n \geq 1$).

Chứng minh: Quy nạp theo định nghĩa dẫn được của B từ $A_1, A_2, \dots, A_n$.

a) Nếu B là một tiên đề thì $\vdash B$ (chú ý a trong mục 3 của B).

Theo Định lý 3 thì $\vdash A_n \rightarrow B$. Theo Định lý 2 và 3 ta có ngay

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B.$$

b) Nếu B là một trong các công thức A_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) thì ta cũng có :

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash B \quad (1)$$

(chú ý trong 3 của B).

Theo 1(a) thì $\vdash B \rightarrow (A_n \rightarrow B)$ hay

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash B \rightarrow (A_n \rightarrow B) \quad (2)$$

Từ (1), (2) và quy tắc dẫn xuất ta có: $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$.

Trường hợp $B \equiv A_n$ thì do Định lý 4 ta có: $\vdash A_n \rightarrow B$ vì vậy ta cũng có $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$.

c) Giả sử B' và $B' \rightarrow B$ có tính chất sau:

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B' \quad (3)$$

$$\text{và } A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow (B' \rightarrow B) \quad (4)$$

Ta chứng minh: $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$.

Thật vậy theo 1(b) ta có:

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow (B' \rightarrow B)) \rightarrow ((A_n \rightarrow B') \rightarrow (A_n \rightarrow B)) \quad (5)$$

Từ (4), (5) theo quy tắc dẫn xuất thì:

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B') \rightarrow (A_n \rightarrow B) \quad (6)$$

Từ (3), (6) theo quy tắc dẫn xuất thì $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$. Định lý được chứng minh.

Hệ quả: Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ thì

$$\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots).$$

Áp dụng Định lý suy diễn n lần.

Định lý 6: (quy tắc bắc cầu)

$$\text{Nếu } \vdash A \rightarrow B \text{ và } \vdash B \rightarrow C \text{ thì } \vdash A \rightarrow C.$$

Chứng minh: Từ $\vdash A \rightarrow B$ theo Định lý 2 ta có $A \vdash B$.

Tương tự từ $\vdash B \rightarrow C$ ta cũng có $B \vdash C$.

Theo Định lý 1 thì ta có $A \vdash C$ và áp dụng Định lý suy diễn ta có: $\vdash A \rightarrow C$.

Định lý 7: $\vdash A$ và $\vdash B$ khi và chỉ khi $\vdash A \wedge B$.

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả sử $\vdash A$ và $\vdash B$. Lấy công thức D sao cho $\vdash D$. Theo 2(c) thì

$$\vdash (D \rightarrow A) \rightarrow ((D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow (A \wedge B))) \quad (1)$$

$$\text{nhưng do } \vdash A \text{ nên theo Định lý 3 thì } \vdash D \rightarrow A \quad (2)$$

Từ (1), (2) theo quy tắc dẫn xuất ta có:

$$\vdash (D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow (A \wedge B)) \quad (3)$$

$$\text{Vì } \vdash B \text{ nên } \vdash D \rightarrow B \text{ (do Định lý 3)} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta lại có:

$$\vdash D \rightarrow (A \wedge B) \quad (5)$$

Mặt khác $\vdash D$ (6). Từ (5) và (6) ta có: $\vdash A \wedge B$.

Điều kiện đủ: Giả sử $\vdash A \wedge B$. Theo 2(a) thì

$$\vdash (A \wedge B) \rightarrow A \quad (7)$$

$$\text{và theo 2(b) ta có } \vdash (A \wedge B) \rightarrow B \quad (8)$$

Từ giả thiết và (7), (8) ta có $\vdash A$ và $\vdash B$. Định lý được chứng minh.

Định lý 8 : (Hoán vị giả thiết)

Nếu $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$ thì $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$.

Chứng minh: Từ $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$ theo Định lý 2 thì $A \vdash B \rightarrow C$ hay $A, B \vdash C$. Ta cũng có thể viết $B, A \vdash C$. Áp dụng Định lý suy diễn 2 lần ta có:

$$\vdash B \rightarrow (A \rightarrow C).$$

Định nghĩa 1:

K là công thức sai trong Hệ toán mệnh đề nếu $\vdash \bar{K}$

D gọi là công thức đúng trong Hệ toán mệnh đề nếu $\vdash D$.

Định lý 9 : Nếu K là công thức sai và A là công thức bất kỳ thì $\vdash K \rightarrow A$.

Chứng minh: Theo 4(a) thì $\vdash (\bar{A} \rightarrow \bar{K}) \rightarrow (\bar{K} \rightarrow \bar{A})$ (1)

Vì $\vdash \bar{K}$ nên áp dụng Định lý 3 ta có: $\vdash \bar{A} \rightarrow \bar{K}$ (2)

Từ (1), (2) theo quy tắc dẫn xuất thì $\vdash \bar{K} \rightarrow \bar{A}$ (3)

Theo 4(b) thì $\vdash K \rightarrow \bar{\bar{K}}$ (4)

Từ (3), (4) theo quy tắc bắc cầu ta có: $\vdash K \rightarrow \bar{A}$ (5)

Theo 4(c) thì $\vdash \bar{A} \rightarrow A$ (6)

Từ (5), (6) ta có $\vdash K \rightarrow A$. Định lý được chứng minh.

Định lý 10: (Quy tắc ghép giả thiết)

Nếu $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$ thì $\vdash (A \wedge B) \rightarrow C$.

Chứng minh: Theo 2(a) ta có: $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$. Áp dụng Định lý 2 ta lại có:

$$A \wedge B \vdash A \quad (1)$$

Theo 2(b) ta có: $\vdash (A \wedge B) \rightarrow B$. Áp dụng Định lý 2 ta có:

$$A \wedge B \vdash B \quad (2)$$

Từ giả thiết $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$. Áp dụng Định lý 2 ta có:

$$A, B \vdash C \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) do Định lý 1 ta có: $A \wedge B \vdash C$, hay $\vdash (A \wedge B) \rightarrow C$ suy từ Định lý suy diễn.

Định lý 11 : (Quy tắc tách giả thiết)

Nếu $\vdash (A \wedge B) \rightarrow C$ thì $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Chứng minh: Vì $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ nên áp dụng hai lần Định lý 2 ta có:

$$A, B \vdash A \wedge B \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng Định lý 2 cho giả thiết ta có: } A \wedge B \vdash C \quad (2)$$

Từ (1), (2) theo Định lý 1 ta có: $A, B \vdash C$ hay $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$ do Định lý suy diễn.

Định lý 12 : Với mọi công thức A và B ta luôn có

$$\vdash (A \wedge \bar{A}) \rightarrow B.$$

Chứng minh: Suy từ Định lý 9, vì $A \wedge \bar{A}$ là một công thức sai.

Định lý 13 : Nếu A_1, A_2 là hai công thức sao cho $\vdash A_1 \rightarrow A_2$ thì ta có các trường hợp sau:

$$a) \vdash (A_1 \wedge A) \rightarrow (A_2 \wedge A)$$

$$b) \vdash (A \wedge A_1) \rightarrow (A \wedge A_2)$$

$$c) \vdash (A_1 \vee A) \rightarrow (A_2 \vee A)$$

$$d) \vdash (A \vee A_1) \rightarrow (A \vee A_2)$$

$$e) \vdash (A_2 \rightarrow A) \rightarrow (A_1 \rightarrow A)$$

$$f) \vdash (A \rightarrow A_1) \rightarrow (A \rightarrow A_2)$$

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh hai bổ đề phụ sau đây:

Bổ đề 1: $\vdash A \rightarrow (B \wedge C)$ khi và chỉ khi $\vdash A \rightarrow B$ và $\vdash A \rightarrow C$.

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả sử $\vdash A \rightarrow (B \wedge C)$ (1)

Theo 2(a) thì $\vdash (B \wedge C) \rightarrow B$ (2)

Từ (1), (2) áp dụng quy tắc bắc cầu ta có: $\vdash A \rightarrow B$.

Theo 2(b) thì $\vdash (B \wedge C) \rightarrow C$ (3)

Từ (1), (3) theo quy tắc bắc cầu ta có: $\vdash A \rightarrow C$ (4)

Điều kiện đủ: Giả sử $\vdash A \rightarrow B$ (4) và $\vdash A \rightarrow C$ (5)

Theo 2(c) thì $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$ (6)

Từ (4), (5) và (6) theo quy tắc dẫn xuất ta có: $\vdash A \rightarrow (B \wedge C)$. Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 2: $\vdash (A \vee B) \rightarrow C$ khi và chỉ khi $\vdash A \rightarrow C$ và $\vdash B \rightarrow C$.

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả sử $\vdash (A \vee B) \rightarrow C$ (1)

Theo 3(a) thì $\vdash A \rightarrow (A \vee B)$ (2)

Theo 3(b) cũng có $\vdash B \rightarrow (A \vee B)$ (3)

Từ (1), (3) theo quy tắc bắc cầu ta có $\vdash B \rightarrow C$. Từ (1) và (2) theo quy tắc bắc cầu ta có $\vdash A \rightarrow C$.

Điều kiện đủ: Giả sử $\vdash A \rightarrow C$ (4)

và $\vdash B \rightarrow C$ (5)

Theo 3(c) thì $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$ (6)

Từ (4), (5) và (6) theo quy tắc dẫn xuất ta có: $\vdash (A \vee B) \rightarrow C$.

Bổ đề 2 được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh Định lý.

a) *Chứng minh:* $\vdash (A_1 \wedge A) \rightarrow (A_2 \wedge A)$.

Để chứng minh a) theo Bổ đề 1 cần chứng minh:

$\vdash (A_1 \wedge A) \rightarrow A_2$ (1)

$\vdash (A_1 \wedge A) \rightarrow A$ (2)

Ở đây (2) là điều hiển nhiên theo 2(b). Ta chỉ cần chứng minh (1).

Theo 2(a) thì $\vdash (A_1 \wedge A) \rightarrow A_1$ (3)

và theo giả thiết ta có: $\vdash A_1 \rightarrow A_2$ (4)

Từ (3), (4) theo quy tắc bắc cầu thì $\vdash (A_1 \wedge A) \rightarrow A_2$ là công thức (1) cần chứng minh. Từ (1), (2) áp dụng Bổ đề 1 ta có:

$$\vdash (A_1 \wedge A) \rightarrow (A_2 \wedge A).$$

b) Cũng theo Bổ đề 1 để chứng minh b) ta cần chứng minh:

$$\vdash (A \wedge A_1) \rightarrow A \quad (5)$$

$$\vdash (A \wedge A_1) \rightarrow A_2 \quad (6)$$

Ở đây (5) là hiển nhiên theo 2(a). Ta chỉ cần chỉ ra (6).

Theo 2(b) thì $\vdash (A \wedge A_1) \rightarrow A_1$ (7)

và theo giả thiết $\vdash A_1 \rightarrow A_2$ (8)

Ta có: $\vdash (A \wedge A_1) \rightarrow A_2$. Rõ ràng từ (5), (6) theo Bổ đề 1 thì:

$$\vdash (A \wedge A_1) \rightarrow (A \wedge A_2)$$

c) Chứng minh: $\vdash (A_1 \vee A) \rightarrow (A_2 \vee A)$

Theo Bổ đề 2 thì để chứng minh c) ta cần chứng minh:

$$\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \vee A)$$

$$\vdash A \rightarrow (A_2 \vee A)$$

Nhưng $\vdash A \rightarrow (A_2 \vee A)$ suy từ 3(b).

Ta chứng minh $\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \vee A)$ như sau:

Theo 3(a) thì $\vdash A_2 \rightarrow (A_2 \vee A)$ và theo giả thiết thì $\vdash A_1 \rightarrow A_2$.

Từ đó ta có ngay $\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \vee A)$ theo quy tắc bắc cầu.

d) Chứng minh: $\vdash (A \vee A_1) \rightarrow (A \vee A_2)$

Theo Bổ đề 2 để chứng minh d) cần chứng minh hai biểu thức sau:

$$\vdash A \rightarrow (A \vee A_2)$$

$$\vdash A_1 \rightarrow (A \vee A_2)$$

Biểu thức $\vdash A \rightarrow (A \vee A_2)$ hiển nhiên do 3(a).

Ta chứng minh $\vdash A_1 \rightarrow (A \vee A_2)$.

Theo 3(b) thì $\vdash A_2 \rightarrow (A \vee A_2)$ và theo giả thiết $\vdash A_1 \rightarrow A_2$ ta có: $\vdash A_1 \rightarrow (A \vee A_2)$ là biểu thức cần chứng minh.

$$e) \quad \vdash (A_2 \rightarrow A) \rightarrow (A_1 \rightarrow A)$$

Theo câu b) thì $\vdash (A \wedge A_1) \rightarrow (A \wedge A_2)$.

Thay A bởi $A_2 \rightarrow A$ ta có:

$$\vdash (A_2 \rightarrow A) \wedge A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A) \wedge A_2 \quad (7)$$

Theo Định lý 4 ta có:

$\vdash (A_2 \rightarrow A) \rightarrow (A_2 \rightarrow A)$ và dùng quy tắc ghép giả thiết ta lại được:

$$\vdash (A_2 \rightarrow A) \wedge A_2 \rightarrow A \quad (8)$$

Từ (7), (8) theo quy tắc bắc cầu thì $\vdash (A_2 \rightarrow A) \wedge A_1 \rightarrow A$.

Lại tách giả thiết ta có: $\vdash (A_2 \rightarrow A) \rightarrow (A_1 \rightarrow A)$ là điều cần chứng minh.

$$f) \quad \vdash (A \rightarrow A_1) \rightarrow (A \rightarrow A_2)$$

Theo Định lý 4 thì $\vdash (A \rightarrow A_1) \rightarrow (A \rightarrow A_1)$. Ghép giả thiết được

$$\vdash (A \rightarrow A_1) \wedge A \rightarrow A_1 \quad (9)$$

Theo giả thiết thì $\vdash A_1 \rightarrow A_2$ và kết hợp với (9) ta có:

$$\vdash (A \rightarrow A_1) \wedge A \rightarrow A_2.$$

Tách giả thiết ta được công thức cần chứng minh là:

$$\vdash (A \rightarrow A_1) \rightarrow (A \rightarrow A_2).$$

Tóm lại Định lý được chứng minh.

§3. ĐỊNH LÝ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ta ký hiệu $A \sim B$ qua $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Theo Định lý 7 thì $\vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \Leftrightarrow \vdash A \rightarrow B$ và $\vdash B \rightarrow A$.

Do đó ta có định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 2 : (Định nghĩa tương đương)

Nếu $\vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ thì ta nói A và B là tương đương nhau (ký hiệu $A \sim B$).

Cũng như vậy : nếu $\vdash A \rightarrow B$ và $\vdash B \rightarrow A$ thì ta nói A và B là tương đương nhau.

Chú ý: Định nghĩa tương đương trên thỏa mãn 3 tính chất:

1. Phản xạ: Với mọi công thức A ta luôn có $A \sim A$.
2. Đối xứng: Nếu $A \sim B$ thì $B \sim A$.
3. bắc cầu: Nếu $A \sim B$ và $B \sim C$ thì $A \sim C$.

Giả sử A là một công thức bất kỳ, X là một mệnh đề sơ cấp. Thay X bởi B trong A, kết quả là một công thức mà ta ký hiệu là $\overset{B}{\underset{X}{\int}} A$ và được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 3: (Định nghĩa ký hiệu $\overset{B}{\underset{X}{\int}} A$)

Quy nạp theo định nghĩa của công thức A.

1. Nếu A là một mệnh đề sơ cấp thì có hai khả năng sau đây:

a) $A \equiv X$. Trong trường hợp này ta định nghĩa $\overset{B}{\underset{X}{\int}} A = B$.

b) Nếu $A \neq X$. Trường hợp này ta đặt $\int_X^B A = A$.

2. Giả sử đối với hai công thức A_1, A_2 đã được định nghĩa phép thế $\int_X^B A_1$ và $\int_X^B A_2$ tương ứng. Ta định nghĩa phép thế cho

các công thức: $(A_1 \wedge A_2)$, $(A_1 \vee A_2)$, $(A_1 \rightarrow A_2)$ và $(\overline{A_1})$ như sau:

$$\int_X^B (A_1 \wedge A_2) = \int_X^B A_1 \wedge \int_X^B A_2.$$

$$\int_X^B (A_1 \vee A_2) = \int_X^B A_1 \vee \int_X^B A_2$$

$$\int_X^B (A_1 \rightarrow A_2) = \int_X^B A_1 \rightarrow \int_X^B A_2$$

$$\int_X^B (\overline{A_1}) = \overline{\int_X^B A_1}$$

Định lý 14 : (Định lý về tính tương đương)

Nếu X là một mệnh đề sơ cấp, A, B_1, B_2 là các công thức bất

$$\text{kỳ thì } \vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A \sim \int_X^{B_2} A \right)$$

Chứng minh: Quy nạp theo định nghĩa công thức A .

1. Nếu A là mệnh đề sơ cấp, thì có hai khả năng sau đây:

$$\text{a) } A = X. \text{ Khi đó } \int_X^{B_1} A = B_1 \text{ và } \int_X^{B_2} A = B_2.$$

Theo Định lý 4 thì ta có:

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow (B_1 \sim B_2) \text{ hay } \vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A \sim \int_X^{B_2} A \right).$$

$$\text{b) } A \neq X. \text{ Khi đó } \int_X^{B_1} A = A \text{ và } \int_X^{B_2} A = A.$$

Theo Định lý 4 thì $\vdash A \rightarrow A$ hay $\vdash \left(\int_X^{B_1} A \sim \int_X^{B_2} A \right)$ áp dụng Định

$$\text{lý 3 ta được } \vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A \sim \int_X^{B_2} A \right).$$

2. Giả sử ta chứng minh được cho hai công thức A_1 và A_2 tức là ta đã chứng minh được:

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A_1 \sim \int_X^{B_2} A_1 \right).$$

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A_2 \sim \int_X^{B_2} A_2 \right).$$

Ta cần chứng minh các trường hợp sau:

$$\text{a) } \vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \sim \int_X^{B_2} (A_1 \wedge A_2) \right).$$

$$\text{b) } \vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} (A_1 \vee A_2) \sim \int_X^{B_2} (A_1 \vee A_2) \right).$$

$$\text{c) } \vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \sim \int_X^{B_2} (A_1 \rightarrow A_2) \right).$$

$$\text{d) } \vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} \overline{A_1} \sim \int_X^{B_2} \overline{A_1} \right).$$

Chứng minh a) Để chứng minh a) ta cần sử dụng Bổ đề 1:

$$\vdash A \rightarrow (B \wedge C) \Leftrightarrow \vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow A.$$

Theo quy nạp $\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow (\int_X^{B_1} A_1 \sim \int_X^{B_2} A_1)$.

Áp dụng Bổ đề 1 ta có:

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow (\int_X^{B_1} A_1 \rightarrow \int_X^{B_2} A_1).$$

Áp dụng Định lý 2 ta có:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} A_1 \rightarrow \int_X^{B_2} A_1 \quad (1)$$

Theo 2(a) thì $\vdash \int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \rightarrow \int_X^{B_1} A_1$ hay

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \rightarrow \int_X^{B_1} A_1 \quad (2)$$

Từ (1), (2) và quy tắc bắc cầu ta có:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \rightarrow \int_X^{B_2} A_1 \quad (3)$$

Theo 2(b) ta có: $\vdash \int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \rightarrow \int_X^{B_1} A_2$ hay

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \rightarrow \int_X^{B_1} A_1 \quad (4)$$

Theo giả thiết quy nạp thì

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A_2 \sim \int_X^{B_2} A_2 \right).$$

Do Bổ đề 1 thì $\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A_2 \sim \int_X^{B_2} A_2 \right).$

Theo Định lý 2 ta có:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} A_2 \rightarrow \int_X^{B_2} A_2 \quad (5)$$

Từ (4), (5) và quy tắc bắc cầu ta có:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \rightarrow \int_X^{B_2} A_2 \quad (6)$$

Từ (3), (6) theo Bổ đề 1 ta có:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \rightarrow \int_X^{B_2} (A_1 \wedge A_2) \quad (*)$$

Hoàn toàn tương tự đối vai trò giữa B_1 và B_2 ta có:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_2} (A_1 \wedge A_2) \rightarrow \int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \quad (**)$$

Theo định lý 7 từ (*) và (**) ta có:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \left(\int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \rightarrow \int_X^{B_2} (A_1 \wedge A_2) \right) \wedge \left(\int_X^{B_2} (A_1 \wedge A_2) \rightarrow \int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \right)$$

hay $B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \sim \int_X^{B_2} (A_1 \wedge A_2).$ Đến đây áp dụng Định

lý suy diễn ta có điều cần chứng minh là:

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} (A_1 \wedge A_2) \sim \int_X^{B_2} (A_1 \wedge A_2) \right).$$

Chứng minh b)

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} (A_1 \vee A_2) \sim \int_X^{B_2} (A_1 \vee A_2) \right).$$

Trong phần a) ta đã chỉ ra công thức:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} A_1 \rightarrow \int_X^{B_2} A_1 \quad (1)$$

$$\text{Theo 3(a) thì } (B_1 \sim B_2) \vdash \int_X^{B_2} A_1 \rightarrow \int_X^{B_2} (A_1 \vee A_2) \quad (2)$$

Từ (1), (2) và quy tắc bắc cầu ta có:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} A_1 \rightarrow \int_X^{B_2} (A_1 \vee A_2) \quad (*)$$

Chứng minh tương tự như (*) ta được:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_2} A_2 \rightarrow \int_X^{B_1} (A_1 \vee A_2) \quad (**)$$

Từ (*) và (**) theo Bổ đề 2 ta có:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} (A_1 \vee A_2) \rightarrow \int_X^{B_2} (A_1 \vee A_2) \quad (3)$$

Đổi vai trò giữa B_1 và B_2 ta có:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_2} (A_1 \vee A_2) \rightarrow \int_X^{B_1} (A_1 \vee A_2) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) theo Định lý 7 ta có:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} (A_1 \vee A_2) \sim \int_X^{B_2} (A_1 \vee A_2),$$

hay áp dụng Định lý suy diễn ta được công thức cần phải chứng minh là:

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} (A_1 \vee A_2) \sim \int_X^{B_2} (A_1 \vee A_2) \right).$$

$$\text{Chứng minh c)} \vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \sim \int_X^{B_2} (A_1 \rightarrow A_2) \right).$$

$$\text{Theo giả thiết quy nạp ta có: } \vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A_1 \sim \int_X^{B_2} A_1 \right)$$

$$\text{hay } \vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A_1 \rightarrow \int_X^{B_2} A_1 \right) \wedge \left(\int_X^{B_2} A_1 \rightarrow \int_X^{B_1} A_1 \right) \quad (1)$$

$$\text{Theo Bổ đề 1 từ (1) ta có: } \vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_2} A_1 \rightarrow \int_X^{B_1} A_1 \right). \text{ Áp dụng}$$

$$2 \text{ lần định lý 2 ta được: } B_1 \sim B_2, \int_X^{B_2} A_1 \vdash \int_X^{B_1} A_1 \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác theo định lý 4 ta có } \vdash \int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow \int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \text{ hay}$$

$$\vdash \left(\int_X^{B_1} A_1 \rightarrow \int_X^{B_1} A_2 \right) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A_1 \rightarrow \int_X^{B_1} A_2 \right).$$

Hoán vị giả thiết ta có:

$$\vdash \int_X^{B_1} A_1 \rightarrow \left(\int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow \int_X^{B_1} A_2 \right), \text{ hay ta có thể viết}$$

$$B_1 \sim B_2, \int_X^{B_2} A_1 \vdash \int_X^{B_1} A_1 \rightarrow \left(\int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow \int_X^{B_1} A_2 \right) \quad (3)$$

Từ (2), (3) theo quy tắc dẫn xuất ta có:

$$B_1 \sim B_2, \int_X^{B_2} A_1 \vdash \int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow \int_X^{B_1} A_2.$$

Lại theo định lý 2 ta có:

$$B_1 \sim B_2, \int_X^{B_2} A_1, \int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \vdash \int_X^{B_1} A_2 \quad (4)$$

Theo giả thiết quy nạp với A_2 thì:

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A_2 \sim \int_X^{B_2} A_2 \right)$$

$$\text{Từ Bổ đề 1 ta có: } \vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A_2 \rightarrow \int_X^{B_2} A_2 \right).$$

Áp dụng 2 lần định lý 2 ta thu được:

$$B_1 \sim B_2, \int_X^{B_1} A_2 \vdash \int_X^{B_2} A_2 \quad (5)$$

Theo chú ý trong phần 3 của B ta có:

$$B_1 \sim B_2, \int_X^{B_2} A_1, \int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \vdash B_1 \sim B_2 \quad (6)$$

Từ (4), (5) và (6) theo định lý 1 ta có:

$$B_1 \sim B_2, \int_X^{B_2} A_1, \int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \vdash \int_X^{B_2} A_2,$$

$$\text{hay } B_1 \sim B_2, \int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2), \int_X^{B_2} A_1 \vdash \int_X^{B_2} A_2.$$

Đến đây áp dụng định lý suy diễn ta được:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow \int_X^{B_2} (A_1 \rightarrow A_2) \quad (7)$$

Hoàn toàn tương tự đổi vai trò giữa B_1 và B_2 ta có:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_2} (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow \int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \quad (8)$$

Từ (7) và (8) theo Định lý 7 ta thu được:

$$B_1 \sim B_2 \vdash \int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \sim \int_X^{B_2} (A_1 \rightarrow A_2).$$

Áp dụng Định lý suy diễn ta có công thức cần chứng minh là:

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} (A_1 \rightarrow A_2) \sim \int_X^{B_2} (A_1 \rightarrow A_2) \right).$$

Chứng minh d)

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} \overline{A_1} \sim \int_X^{B_2} \overline{A_1} \right)$$

Theo giả thiết quy nạp đối với A_1 ta có:

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A_1 \sim \int_X^{B_2} A_1 \right) \quad (1)$$

Theo Bổ đề 1, từ (1) ta có: $\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A_1 \rightarrow \int_X^{B_2} A_1 \right)$ (2)

Theo 4(a) : $\vdash \left(\int_X^{B_1} A_1 \rightarrow \int_X^{B_2} A_1 \right) \rightarrow \left(\int_X^{B_2} \overline{A_1} \rightarrow \int_X^{B_1} \overline{A_1} \right)$ (3)

Từ (2), (3) và quy tắc bắc cầu ta có:

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_2} \overline{A_1} \rightarrow \int_X^{B_1} \overline{A_1} \right) \quad (*)$$

Hoàn toàn tương tự ta có công thức:

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} \overline{A_1} \rightarrow \int_X^{B_2} \overline{A_1} \right) \quad (**)$$

Từ (*), (**) và Bổ đề 1 ta có công thức cần chứng minh là:

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} \overline{A_1} \sim \int_X^{B_2} \overline{A_1} \right).$$

Định lý được chứng minh.

Dưới đây ta luôn ký hiệu công thức đồng nhất đúng là D, công thức đồng nhất sai là K, tức là ta luôn có $\vdash D$ và $\vdash \bar{K}$.

Định lý 15 : $\vdash (A \sim D) \sim A$.

Chứng minh: Theo Định lý 7 để chứng minh Định lý 15 ta cần chứng minh hai công thức sau:

a) $\vdash (A \sim D) \rightarrow A$.

b) $\vdash A \rightarrow (D \sim A)$.

Chứng minh a) Tức là chứng minh $\vdash (A \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow A) \rightarrow A$.

Theo 2(b) ta có: $\vdash (A \sim D) \rightarrow (D \rightarrow A)$ (1)

Vì $\vdash D$ nên theo Định lý 3 ta có

$$\vdash (D \rightarrow A) \rightarrow D \text{ hay } D \rightarrow A \vdash D \quad (2)$$

Mặt khác theo Định lý 4 ta có: $\vdash (D \rightarrow A) \rightarrow (D \rightarrow A)$ (3)

Từ (3) ta có $D \rightarrow A \vdash D \rightarrow A$ (4)

Từ (2), (4) và quy tắc dẫn xuất ta có: $D \rightarrow A \vdash A$.

Áp dụng Định lý suy diễn ta được: $\vdash (D \rightarrow A) \rightarrow A$ (5)

Từ (1), (5) theo quy tắc bắc cầu ta được: $\vdash (A \sim D) \rightarrow A$.

Chứng minh b) Do $\vdash D$ nên theo Định lý 3 ta có: $\vdash A \rightarrow D$ (1)

Áp dụng Định lý 3 cho (1) ta có: $\vdash A \rightarrow (A \rightarrow D)$ (2)

Theo 1(a): $\vdash A \rightarrow (D \rightarrow A)$ (3)

Từ (2), (3) và Bổ đề 1 ta có $\vdash A \rightarrow (D \sim A)$. Định lý được chứng minh.

Định lý 16: $\vdash (A \sim K) \rightarrow \bar{A}$.

Chứng minh: Theo Định lý 7 thì cần chứng minh hai công thức sau:

$$a) \vdash (A \sim K) \rightarrow \bar{A}.$$

$$b) \vdash \bar{A} \rightarrow (A \sim K).$$

Chứng minh a) Theo 2(a) thì $\vdash (A \sim K) \rightarrow (A \rightarrow K)$ (1)

Theo 4(a): $\vdash (A \rightarrow K) \rightarrow (\bar{K} \rightarrow \bar{A})$ (2)

Từ (1), (2) theo quy tắc bắc cầu ta có: $\vdash (A \sim K) \rightarrow (\bar{K} \rightarrow \bar{A})$ (3)

Hoán vị giả thiết trong (3) ta có: $\vdash \bar{K} \rightarrow ((A \sim K) \rightarrow \bar{A})$ (4)

Vì $\vdash \bar{K}$ (5) nên từ (4) và (5) theo quy tắc dẫn xuất ta có:

$$\vdash (A \sim K) \rightarrow \bar{A}.$$

Chứng minh b) Theo Định lý 12 ta có $\vdash A \wedge \bar{A} \rightarrow K$.

Tách giả thiết ta được $\vdash A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow K)$.

Hoán vị giả thiết ta có: $\vdash \bar{A} \rightarrow (A \rightarrow K)$ (*)

Theo Định lý 9 ta có: $\vdash K \rightarrow A$. Áp dụng Định lý 3 ta nhận được

$$\vdash \bar{A} \rightarrow (A \sim K).$$

Định lý được chứng minh.

Định lý 17:

$$\vdash \left(\int_X^D A \wedge \int_X^K A \right) \rightarrow (((X \sim D) \rightarrow A) \wedge ((X \sim K) \rightarrow A)).$$

Chứng minh:

Theo Định lý tương đương ta có: $\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow \left(\int_X^{B_1} A \sim \int_X^{B_2} A \right)$

Trong công thức này ta thay B_1 bởi X và B_2 bởi B ta được

$$\vdash (X \sim B) \rightarrow \left(\int_X^X A \sim \int_X^B A \right)$$

Theo Bổ đề 1 thì từ công thức trên ta có $\vdash (X \sim B) \rightarrow \left(\int_X^B A \rightarrow \int_X^X A \right)$

$$\text{hay} \quad \vdash (X \sim B) \rightarrow \left(\int_X^B A \rightarrow A \right).$$

Hoán vị giả thiết ta có:

$$\vdash \int_X^B A \rightarrow ((X \sim B) \rightarrow A) \quad (1)$$

Trong công thức (1) thay B bởi D và K ta được:

$$\vdash \int_X^D A \rightarrow ((X \sim D) \rightarrow A) \quad (2)$$

$$\vdash \int_X^K A \rightarrow ((X \sim K) \rightarrow A) \quad (3)$$

Mặt khác do 2(a) thì $\vdash (\int_X^D A \wedge \int_X^K A) \rightarrow \int_X^D A \quad (4)$

Từ (2) và (4) theo quy tắc bắc cầu ta nhận được

$$\vdash (\int_X^D A \wedge \int_X^K A) \rightarrow ((X \sim D) \rightarrow A) \quad (5)$$

Tương tự từ 2(b) ta có: $\vdash (\int_X^D A \wedge \int_X^K A) \rightarrow \int_X^K A \quad (6)$

Công thức $\vdash (\int_X^D A \wedge \int_X^K A) \rightarrow ((X \sim K) \rightarrow A) \quad (7)$

nhận được từ (3), (6) và quy tắc bắc cầu. Từ (5) và (7) áp dụng Bổ đề 1 ta có công thức cần chứng minh :

$$\vdash (\int_X^D A \wedge \int_X^K A) \rightarrow (((X \sim D) \rightarrow A) \wedge ((X \sim K) \rightarrow A)).$$

Định lý 18 :

$$\vdash (((X \sim D) \rightarrow A) \wedge ((X \sim K) \rightarrow A)) \rightarrow (((X \sim D) \rightarrow A) \vee ((X \sim K) \rightarrow A)).$$

Chứng minh: Theo 3(c) ta có:

$$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)).$$

Ghép giả thiết trong công thức này ta được:

$$\vdash ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C). \quad (1)$$

Trong (1) thay A bởi $X \sim D$, thay B bởi $X \sim K$ còn C thay bởi A ta được công thức cần chứng minh.

Định lý 19 : Với mọi công thức A ta luôn có $\vdash A \vee \bar{A}$

Chứng minh: Theo 3(a) ta có: $\vdash A \rightarrow (A \vee \bar{A})$ (1)

Theo 4(a) ta có: $\vdash (A \rightarrow (A \vee \bar{A})) \rightarrow (\overline{A \vee \bar{A}} \rightarrow \bar{A})$. (2)

Từ (1), (2) theo quy tắc dẫn xuất ta có $\vdash \overline{A \vee \bar{A}} \rightarrow \bar{A}$. (3)

Theo 3(b): $\vdash \bar{A} \rightarrow (A \vee \bar{A})$ (4)

và theo 4(a) ta có $\vdash (\bar{A} \rightarrow (A \vee \bar{A})) \rightarrow (\overline{A \vee \bar{A}} \rightarrow \bar{A})$. (5)

Từ (4) và (5) theo quy tắc dẫn xuất ta có: $\vdash \overline{(\overline{A \vee \bar{A}} \rightarrow \bar{A})}$. (6)

Theo 4(c) thì $\vdash \bar{\bar{A}} \rightarrow A$. (7)

Từ (6), (7) ta có: $\vdash \overline{A \vee \bar{A}} \rightarrow A$. (8)

Từ (3), (8) theo Bổ đề 1 thì ta có: $\vdash (\overline{A \vee \bar{A}} \rightarrow A \wedge \bar{A})$. (9)

Theo Định lý 12 thì $\vdash (A \wedge \bar{A}) \rightarrow K$. (10)

Từ (9), (10) theo quy tắc bắc cầu ta có: $\vdash \overline{(\overline{A \vee \bar{A}} \rightarrow K)}$ (11)

Theo 4(a) thì $\vdash (\overline{A \vee \bar{A}} \rightarrow K) \rightarrow (\bar{K} \rightarrow \overline{\overline{A \vee \bar{A}}})$ (12)

Từ (11), (12) theo quy tắc dẫn xuất ta được: $\vdash \bar{K} \rightarrow \overline{\overline{A \vee \bar{A}}}$ (13)

Theo 4(c) ta có: $\vdash \overline{\overline{A \vee \bar{A}}} \rightarrow (A \vee \bar{A})$ (14)

Từ (13), (14) theo quy tắc bắc cầu ta có $\vdash \bar{K} \rightarrow (A \vee \bar{A})$ (15)

Theo định nghĩa công thức sai thì $\vdash \bar{K}$ (16)

Từ (15), (16) dùng quy tắc dẫn xuất ta có: $\vdash A \vee \bar{A}$. Định lý được chứng minh.

Định lý 20 : $\vdash (X \sim D) \vee (X \sim K).$

Chứng minh: Theo Định lý 15 thì $\vdash (X \sim D) \sim X$ (1)

Theo Định lý 16 thì $\vdash (X \sim K) \sim \bar{X}$ (2)

Từ (1) theo Định lý 7 ta có: $\vdash X \rightarrow (X \sim D)$ (3)

Mặt khác theo 3(a) thì

$$\vdash (X \sim D) \rightarrow ((X \sim D) \vee (X \sim K)) \quad (4)$$

Từ (3), (4) theo quy tắc bắc cầu thì: $\vdash X \rightarrow ((X \sim D) \vee (X \sim K))$ (5)

Từ (2) theo Định lý 7 thì ta có: $\vdash \bar{X} \rightarrow (X \sim K)$ (6)

Theo 3(b) ta có:

$$\vdash (X \sim K) \rightarrow ((X \sim D) \vee (X \sim K)) \quad (7)$$

Từ (6) và (7) theo quy tắc bắc cầu ta có:

$$\vdash \bar{X} \rightarrow ((X \sim D) \vee (X \sim K)) \quad (8)$$

Từ (5), (8) theo Bổ đề 2 ta được:

$$\vdash (X \vee \bar{X}) \rightarrow ((X \sim D) \vee (X \sim K)) \quad (9)$$

Theo Định lý 19 thì $\vdash X \vee \bar{X}$ (10)

Từ (9), (10) theo quy tắc dẫn xuất ta có:

$$\vdash (X \sim D) \vee (X \sim K).$$

Định lý 21 : $\vdash \left(\int_X^D A \wedge \int_X^K A \right) \rightarrow A.$

Chứng minh: Theo Định lý 15 ta có:

$$\vdash \left(\int_X^D A \wedge \int_X^K A \right) \rightarrow (((X \sim D) \rightarrow A) \wedge ((X \sim K) \rightarrow A)) \quad (1)$$

Theo Định lý 18 ta có:

$$\vdash ((X \sim D) \rightarrow A) \wedge ((X \sim K) \rightarrow A) \rightarrow (((X \sim D) \vee (X \sim K)) \rightarrow A) \quad (2)$$

Từ (1), (2) theo quy tắc bắc cầu ta có:

$$\vdash \left(\int_X^D A \wedge \int_X^K A \right) \rightarrow (((X \sim D) \vee (X \sim K)) \rightarrow A) \quad (3)$$

Hoán vị giả thiết trong (3) ta được:

$$\vdash ((X \sim D) \vee (X \sim K)) \rightarrow \left(\left(\int_X^D A \wedge \int_X^K A \right) \rightarrow A \right) \quad (4)$$

Theo Định lý 20 thì: $\vdash (X \sim D) \vee (X \sim K)$ (5)

Từ (4) và (5) theo quy tắc dẫn xuất ta có:

$$\vdash \left(\int_X^D A \wedge \int_X^K A \right) \rightarrow A. \text{ Định lý được chứng minh.}$$

Định nghĩa 4: Giả sử A là một công thức bất kỳ, $X_1, X_2, \dots, X_n$ là các mệnh đề sơ cấp. Ta định nghĩa bằng quy nạp ký hiệu $\prod_{X_1 X_2 \dots X_n} A$ như sau:

a) $n=1$. Ta định nghĩa $\prod_{X_1} A := \int_{X_1}^D A \wedge \int_{X_1}^K A$.

b) Giả sử ta đã định nghĩa cho n , tức là ta định nghĩa $\prod_{X_1 X_2 \dots X_n} A$.

bây giờ ta định nghĩa cho $n+1$ như sau:

$$\prod_{X_1 \dots X_{n+1}} A := \int_{X_{n+1}}^D \left(\prod_{X_1 \dots X_n} A \right) \wedge \left(\int_{X_{n+1}}^K \left(\prod_{X_1 \dots X_n} A \right) \right).$$

Ta chứng minh định lý sau đây.

Định lý 22: $\vdash \left(\prod_{X_1 \dots X_n} A \right) \rightarrow A$.

Chứng minh: Quy nạp theo $n \geq 1$.

1) $n = 1$. Ta cần chứng minh $\vdash (\prod_{X_1} A) \rightarrow A$

$$\text{hay } \vdash (\int_{X_1}^D A \wedge \int_{X_1}^K A) \rightarrow A.$$

Công thức này là đúng do Định lý 21.

2) Giả sử Định lý đã đúng cho n , tức là đã có:

$$\vdash (\prod_{X_1 \dots X_n} A) \rightarrow A \quad (1)$$

Ta chứng minh $\vdash (\prod_{X_1 \dots X_{n+1}} A) \rightarrow A$

$$\text{Thật vậy ta có: } \prod_{X_1 \dots X_{n+1}} A := \int_{X_{n+1}}^D (\prod_{X_1 \dots X_n} A) \wedge (\int_{X_{n+1}}^K (\prod_{X_1 \dots X_n} A)).$$

Theo Định lý 21 thì:

$$\vdash \int_{X_{n+1}}^D (\prod_{X_1 \dots X_n} A) \wedge (\int_{X_{n+1}}^K (\prod_{X_1 \dots X_n} A) \rightarrow \prod_{X_1 \dots X_n} A \quad (2)$$

Từ (1), (2) theo quy tắc bắc cầu ta có:

$$\vdash \int_{X_{n+1}}^D (\prod_{X_1 \dots X_n} A) \wedge (\int_{X_{n+1}}^K (\prod_{X_1 \dots X_n} A) \rightarrow A \quad (3) \text{ hay } \vdash (\prod_{X_1 \dots X_{n+1}} A) \rightarrow A.$$

Định lý được chứng minh.

Định lý 23 : Nếu A là một định lý trong Hệ toán mệnh đề thì A là công thức đồng nhất đúng trong Đại số mệnh đề.

Chứng minh : Giả sử A là định lý trong Hệ toán mệnh đề, hay $\vdash A$. Ta chứng minh A là công thức đồng nhất đúng trong Đại số mệnh đề hay $\models A$.

Ta chứng minh $\models A$ theo định nghĩa, định lý.

1) A là một tiên đề.

Trường hợp này là hiển nhiên vì mỗi tiên đề là một công thức đồng nhất đúng.

2) Nếu $\vdash A$ và $\vdash A \rightarrow B$ thì $\vdash B$.

Bây giờ ta chỉ ra nếu $\vdash A$ và $\vdash A \rightarrow B$ thì $\vdash B$. Giả sử ngược lại B không là công thức đồng nhất đúng, tức là có tồn tại bộ giá trị đúng, sai sao cho với bộ giá trị đó thì B nhận giá trị sai. Vì A là đồng nhất đúng nên với bộ giá trị đó A nhận giá trị đúng. Điều này chứng tỏ $A \rightarrow B$ nhận giá trị sai trên bộ giá trị đúng, sai đó. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $A \rightarrow B$ là công thức đồng nhất đúng. Định lý được chứng minh.

§4. QUAN HỆ GIỮA ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ VÀ HỆ TOÁN MỆNH ĐỀ

Giả sử A là một công thức trong Hệ toán mệnh đề. A có thể là một công thức trong Đại số mệnh đề nếu ta xem các biến sơ cấp trong Hệ toán mệnh đề là các biến sơ cấp trong Đại số mệnh đề, nghĩa là chúng nhận giá trị hoặc đúng hoặc sai. Ngoài ra các phép toán $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ cũng định nghĩa như trong Đại số mệnh đề. Khi đó mỗi công thức trong Hệ toán mệnh đề sẽ nhận giá trị đúng hoặc giá trị sai theo cách tính của Đại số mệnh đề.

Bây giờ trong công thức A của Hệ toán mệnh đề ta tiến hành phép thế (ta sẽ định nghĩa sau) mỗi biến mệnh đề bởi công thức D và K . Ta xem A như là công thức của Đại số mệnh đề và thế các biến mệnh đề bởi giá trị đúng hoặc sai tùy thuộc vào biến mệnh đề đó trong Hệ toán mệnh đề nhận công thức D hay công thức K . Nói cách khác nếu biến mệnh đề trong A nhận công thức D thì trong Đại số mệnh đề ta thay biến đó bởi giá trị đúng, còn nếu biến mệnh đề nhận công thức K thì trong Đại số mệnh đề biến đó được thay giá trị sai. Khi đó công thức A trong Đại số mệnh đề nhận một trong hai giá trị đúng hoặc sai.

Ta đã định nghĩa ký hiệu $\int_X^B A$ (thay X bởi B trong A)

Bây giờ ta định nghĩa ký hiệu mở rộng sau: $\int_{X_1 \dots X_n}^{G_1 \dots G_n} A$ như sau:

Định nghĩa 5: Giả sử A là một công thức, $X_1, X_2, \dots, X_n$ là các mệnh đề sơ cấp, $B_1, B_2, \dots, B_n$ là các công thức nào đó.

Lấy các công thức $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sao cho các công thức này không nằm trong các công thức $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Ta định nghĩa ký hiệu mở rộng trên như sau:

$$\int_{X_1 \dots X_n}^{Y_1 \dots Y_n} A := \int_{X_n}^{Y_n} \left(\int_{X_{n-1}}^{Y_{n-1}} \left(\dots \left(\int_{X_1}^{Y_1} A \right) \dots \right) \right)$$

Tiếp theo ta định nghĩa:

$$\int_{Y_1 \dots Y_n}^{B_1 \dots B_n} A := \int_{Y_n}^{B_n} \left(\int_{Y_{n-1}}^{B_{n-1}} \left(\dots \left(\int_{Y_1}^{B_1} A \right) \dots \right) \right)$$

Cuối cùng ta định nghĩa :

$$\int_{X_1 \dots X_n}^{B_1 \dots B_n} A := \int_{Y_1 \dots Y_n}^{B_1 \dots B_n} \left(\int_{X_1 \dots X_n}^{Y_1 \dots Y_n} A \right)$$

Ta có định lý sau về quan hệ giữa Hệ toán mệnh đề và Đại số mệnh đề.

Định lý 24 : Giả sử A là một công thức, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ là bộ giá trị T, F, ở đây $\delta_i \in \{T, F\}$ ($i=1, n$). Lấy các công thức $G_1, G_2, \dots, G_n$ sao cho

$$G_i = \begin{cases} D & \text{nếu } \delta_i = T \\ K & \text{nếu } \delta_i = F \end{cases}$$

Giả sử $X_1, X_2, \dots, X_n$ là các mệnh đề sơ cấp trong A. Cho các mệnh đề sơ cấp này nhận bộ $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ tương ứng.

Khi đó nếu A (trong Đại số mệnh đề) nhận giá trị T thì trong Hệ toán mệnh đề ta có:

$$\vdash \left(\int_{X_1 \dots X_n}^{G_1 \dots G_n} A \right) \sim D.$$

Còn nếu A (trong Đại số mệnh đề) nhận giá trị F thì trong Hệ toán mệnh đề ta có:

$$\vdash \left(\int_{X_1 \dots X_n}^{G_1 \dots G_n} A \right) \sim K.$$

Chứng minh: Quy nạp theo định nghĩa công thức

1) A là công thức sơ cấp. Khi đó $A \equiv X_i$ ($i = \overline{1, n}$) ta có: $\vdash \int_{X_1 \dots X_n}^{G_1 \dots G_n} A = G_i.$

Khi thay X_i bởi δ_i mà $\delta_i = T$ thì $G_i \equiv D$ hay $\vdash \int_{X_1 \dots X_n}^{G_1 \dots G_n} A = D.$

Vì $\vdash D \sim D$ nên $\vdash \left(\int_{X_1 \dots X_n}^{G_1 \dots G_n} A \right) \sim D$, còn nếu $\delta_i = F$ thì $G_i \equiv K.$

Vì $\vdash K \sim K$ nên $\vdash \left(\int_{X_1 \dots X_n}^{G_1 \dots G_n} A \right) \sim K$. Vậy trường hợp 1 là đúng.

2) Giả sử định lý đã đúng với các công thức A_1, A_2 . Ta chứng minh nó cũng đúng với các công thức $(\overline{A_1}), (A_1 \vee A_2), (A_1 \wedge A_2), (A_1 \rightarrow A_2).$

Để cho gọn ta ký hiệu X thay cho $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ còn G thay cho $(G_1, G_2, \dots, G_n).$

a) Xét $(\overline{A_1}).$

Ta chứng minh khi X_i nhận giá trị δ_i và nếu $\overline{A_1}$ nhận giá trị T thì:

$$\vdash \int_X^G \overline{A_1} \sim D. \text{ Còn nếu } \overline{A_1} \text{ nhận giá trị F thì } \vdash \int_X^G \overline{A_1} \sim K.$$

Xét các trường hợp sau :

Trường hợp 1: Khi $\overline{A_1}$ nhận giá trị T thì A_1 nhận giá trị F.

$$\text{Theo giả thiết quy nạp với } A_1 \text{ thì } \vdash \int_X^G A_1 \sim K \quad (1)$$

$$\text{Theo Định lý 7 thì từ (1) ta có: } \vdash \int_X^G A_1 \rightarrow K \quad (2)$$

$$\text{Theo 4(a) thì } \vdash \left(\int_X^G A_1 \rightarrow K \right) \rightarrow \left(\overline{K} \rightarrow \int_X^G \overline{A_1} \right) \quad (3)$$

$$\text{Từ (2), (3) theo quy tắc dẫn xuất ta có } \vdash \overline{K} \rightarrow \int_X^G \overline{A_1} \quad (4)$$

$$\text{Mặt khác từ (1) theo Định lý 7 thì } \vdash K \rightarrow \int_X^G A_1 \quad (5)$$

$$\text{Lại theo tiên đề 4(a) ta có } \vdash \left(K \rightarrow \int_X^G A_1 \right) \rightarrow \left(\int_X^G \overline{A_1} \rightarrow \overline{K} \right) \quad (6)$$

$$\text{Từ (5), (6) theo quy tắc dẫn xuất ta có: } \vdash \int_X^G \overline{A_1} \rightarrow \overline{K} \quad (7)$$

$$\text{Từ (4), (7) và Định lý 7 ta có: } \vdash \int_X^G \overline{A_1} \sim \overline{K} \quad (8)$$

$$\text{Vì } \vdash D \text{ và } \vdash \overline{K} \text{ nên } \vdash \overline{K} \sim D \quad (9)$$

$$\text{Từ (8), (9) ta có: } \vdash \int_X^G \overline{A_1} \sim D \text{ (do quan hệ bắc cầu).}$$

Trường hợp 2: Khi $\overline{A_1}$ nhận giá trị F thì A_1 nhận giá trị T.

Theo giả thiết quy nạp thì: $\vdash \int_X^G A_1 \sim D$ (10)

Từ (10) theo Định lý 7 ta có $\vdash \int_X^G A_1 \rightarrow D$ (11) và

$$\vdash D \rightarrow \int_X^G A_1 \quad (12)$$

Theo 4(a) thì: $\vdash (\int_X^G A_1 \rightarrow D) \rightarrow (\overline{D} \rightarrow \int_X^G \overline{A_1})$ (13)

và $\vdash (D \rightarrow \int_X^G A_1) \rightarrow (\int_X^G \overline{A_1} \rightarrow \overline{D})$ (14)

Từ (11), (13) theo quy tắc dẫn xuất ta có: $\vdash \overline{D} \rightarrow \int_X^G \overline{A_1}$ (15)

Từ (12) và (14) theo quy tắc dẫn xuất ta có: $\vdash \int_X^G \overline{A_1} \rightarrow \overline{D}$ (16)

Theo Định lý 7 thì từ (15), (16) ta có: $\vdash \int_X^G \overline{A_1} \sim \overline{D}$ (17)

Mặt khác $\vdash \overline{D} \sim K$ (18), nên từ (17), (18) ta suy ra: $\vdash \int_X^G \overline{A_1} \sim K$.

b) Xét $A_1 \vee A_2$.

Trường hợp 1: Giả sử $A_1 \vee A_2$ nhận giá trị T. Ít nhất một trong hai công thức nhận giá trị T. Giả sử đó là A_1 nhận giá trị T.

Theo giả thiết quy nạp thì $\vdash \int_X^G A_1 \sim D$ (1)

Ta cần chỉ ra $\vdash \int_X^G (A_1 \vee A_2) \sim D$.

Từ (1) theo Định lý 7 ta có $\vdash D \rightarrow \int_X^G A_1$ (2)

Theo 3(a) thì $\vdash \int_X^G A_1 \rightarrow \int_X^G (A_1 \vee A_2)$ (3)

Từ (2), (3) theo quy tắc bắc cầu ta có: $\vdash D \rightarrow \int_X^G (A_1 \vee A_2)$ (4)

Vì $\vdash D$ nên theo Định lý 3 ta có: $\vdash \int_X^G (A_1 \vee A_2) \rightarrow D$ (5)

Từ (4), (5) theo Định lý 7 ta có: $\vdash \int_X^G (A_1 \vee A_2) \sim D$.

Trường hợp 2: Giả sử $A_1 \vee A_2$ nhận giá trị F. Điều này chứng tỏ cả A_1 và A_2 đều nhận giá trị F.

Theo giả thiết quy nạp thì $\vdash \int_X^G A_1 \sim K$ (6)

và $\vdash \int_X^G A_2 \sim K$ (7)

Từ (6), (7) theo Định lý 7 ta có $\vdash \int_X^G A_1 \rightarrow K$ (8)

$$\text{và} \quad \vdash \int_X^G A_2 \rightarrow K \quad (9)$$

$$\text{Từ (8), (9) theo Bổ đề 2 thì} \quad \vdash \int_X^G (A_1 \vee A_2) \rightarrow K \quad (10)$$

$$\text{Vì } \vdash \bar{K} \text{ nên theo Định lý 9 ta có: } \vdash K \rightarrow \int_X^G (A_1 \vee A_2) \quad (11)$$

Từ (10) và (11) áp dụng Định lý 7 ta có công thức cần chứng minh là:

$$\vdash \int_X^G (A_1 \vee A_2) \sim K.$$

c) Xét $A_1 \wedge A_2$.

Trường hợp 1: Giả sử $A_1 \wedge A_2$ nhận giá trị T. Khi đó A_1 và A_2 cùng nhận giá trị T. Theo giả thiết quy nạp thì:

$$\vdash \int_X^G A_1 \sim D \quad (1)$$

$$\text{và} \quad \vdash \int_X^G A_2 \sim D \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) theo Định lý 7 ta có: } \vdash D \rightarrow \int_X^G A_1 \quad (3)$$

$$\text{và} \quad \vdash D \rightarrow \int_X^G A_2 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3), (4) theo Bổ đề 1 ta có: } \vdash D \rightarrow \int_X^G (A_1 \wedge A_2) \quad (5)$$

Vì $\vdash D$ nên theo Định lý 3 ta có: $\vdash \int_X^G (A_1 \wedge A_2) \rightarrow D$ (6)

Từ (5), (6) theo Định lý 7 ta có $\vdash \int_X^G (A_1 \wedge A_2) \sim D$.

Trường hợp 2: Giả sử $A_1 \wedge A_2$ nhận giá trị F. Khi đó ít nhất một trong hai công thức nhận giá trị F. Chẳng hạn A_1 nhận giá trị F.

Theo giả thiết quy nạp thì $\vdash \int_X^G A_1 \sim K$ (7)

Từ (7) ta có: $\vdash \int_X^G A_1 \rightarrow K$ (8) (do Định lý 7).

Theo 2(a) thì $\vdash \int_X^G (A_1 \wedge A_2) \rightarrow \int_X^G A_1$ (9)

Từ (8), (9) theo quy tắc bắc cầu ta có: $\vdash \int_X^G (A_1 \wedge A_2) \rightarrow K$ (10)

Do $\vdash \bar{K}$ nên theo Định lý 9 ta có: $\vdash K \rightarrow \int_X^G (A_1 \wedge A_2)$ (11)

Từ (10), (11) ta nhận được $\vdash \int_X^G (A_1 \wedge A_2) \sim K$ (do Định lý 7).

d) Xét $A_1 \rightarrow A_2$.

Trường hợp 1: $A_1 \rightarrow A_2$ nhận giá trị T. Có hai khả năng xảy ra:

d1) A_1 và A_2 nhận giá trị T.

Trường hợp này theo giả thiết quy nạp ta có: $\vdash \int_X^G A_1 \sim D$ (1)

$$\text{và } \vdash \int_X^G A_2 \sim D \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) theo Định lý 7 ta có: } \vdash \int_X^G A_1 \rightarrow D \quad (3)$$

$$\text{và } \vdash D \rightarrow \int_X^G A_2 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3), (4) theo quy tắc bắc cầu ta có: } \vdash \int_X^G A_1 \rightarrow \int_X^G A_2$$

$$\text{hay } \vdash \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2) \quad (5)$$

$$\text{Vì } \vdash D \text{ nên theo Định lý 3 ta có } \vdash \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow D \quad (6)$$

$$\text{Từ (5) theo Định lý 3 thì } \vdash D \rightarrow \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2) \quad (7)$$

$$\text{Từ (6) và (7) theo Định lý 7 ta có } \vdash \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2) \sim D.$$

d2) A_1 nhận giá trị F.

$$\text{Theo giả thiết quy nạp thì } \vdash \int_X^G A_1 \sim K \quad (8)$$

$$\text{Từ (8) theo Định lý 7 thì } \vdash \int_X^G A_1 \rightarrow K \quad (9)$$

Vì $\vdash \bar{K}$ và do Định lý 9 ta có:

$$\vdash K \rightarrow \int_X^G A_2 \quad (10)$$

Từ (9), (10) theo quy tắc bắc cầu ta có:

$$\vdash \int_X^G A_1 \rightarrow \int_X^G A_2 \text{ hay } \vdash \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2) \quad (11)$$

$$\text{Theo Định lý 3 từ (11) ta có: } \vdash D \rightarrow \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2) \quad (12)$$

$$\text{Ta lại có } \vdash \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow D \text{ (do } \vdash D). \quad (13)$$

$$\text{Từ (12) và (13) áp dụng Định lý 7 ta thu được: } \vdash \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2) \sim D.$$

Trường hợp 2: $A_1 \rightarrow A_2$ nhận giá trị F. Khi đó ta có A_1 nhận giá trị T còn A_2 nhận giá trị F. Theo giả thiết quy nạp ta có: $\vdash \int_X^G A_1 \sim D$ (14)

$$\text{và} \quad \vdash \int_X^G A_2 \sim K \quad (15)$$

$$\text{Theo Định lý 7 thì: } \vdash D \rightarrow \int_X^G A_1 \quad (16)$$

$$\text{và} \quad \vdash \int_X^G A_2 \rightarrow K \quad (17)$$

$$\text{Áp dụng Định lý 4 ta có } \vdash \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2)$$

$$\text{hay} \quad \vdash \left(\int_X^G A_1 \rightarrow \int_X^G A_2 \right) \rightarrow \left(\int_X^G A_1 \rightarrow \int_X^G A_2 \right) \quad (18)$$

Hoán vị giả thiết trong (18) ta có:

$$\vdash \int_X^G A_1 \rightarrow ((\int_X^G A_1 \rightarrow \int_X^G A_2) \rightarrow \int_X^G A_2) \quad (19)$$

Từ (16) do $\vdash D$ nên ta có: $\vdash \int_X^G A_1$ (20)

Từ (19), (20) áp dụng quy tắc dẫn xuất ta có :

$$\vdash (\int_X^G A_1 \rightarrow \int_X^G A_2) \rightarrow \int_X^G A_2 \text{ hay } \vdash \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow \int_X^G A_2 \quad (21)$$

Từ (17) và (21) áp dụng quy tắc bắc cầu ta có:

$$\vdash \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow K \quad (22)$$

Mặt khác do $\vdash \bar{K}$ và Định lý 9: $\vdash K \rightarrow \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2)$ (23)

Từ (22) và (23) áp dụng Định lý 7 ta có: $\vdash \int_X^G (A_1 \rightarrow A_2) \sim K$.

Định lý được chứng minh.

§5. TÍNH PHI MÂU THUẦN, TÍNH ĐẦY ĐỦ, TÍNH ĐỘC LẬP CỦA HỆ TOÁN MỆNH ĐỀ

1. Tính phi mâu thuẫn

Định nghĩa 6: Hệ toán mệnh đề là phi mâu thuẫn nếu không tồn tại một công thức A nào đó sao cho $\vdash A$ và $\vdash \bar{A}$.

Định lý 25. Hệ toán mệnh đề là phi mâu thuẫn.

Chứng minh: Giả sử ngược lại, Hệ toán mệnh đề là mâu thuẫn tức là có tồn tại công thức A mà $\vdash A$ và $\vdash \bar{A}$. Theo Định lý 23 thì từ $\vdash A$ và $\vdash \bar{A}$ suy ra $\vdash A$ và $\vdash \bar{A}$. Điều này không thể có trong Đại số mệnh đề.

2. Tính đầy đủ của Hệ toán mệnh đề

Định nghĩa 7: Hệ toán mệnh đề là đầy đủ, nếu mọi công thức đồng nhất đúng trong Đại số mệnh đề là Định lý trong Hệ toán mệnh đề.

Định lý 26 : Hệ toán mệnh đề là đầy đủ.

Chứng minh: Ta cần chứng minh: nếu $\vdash A$ thì $\vdash A$.

Giả sử $\vdash A$ và A chứa các mệnh đề sơ cấp $X_1, X_2, \dots, X_n$. Ta lấy D và K là các công thức đúng và sai sao cho D, K không chứa các $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Theo Định nghĩa ký hiệu $\prod_{X_1 \dots X_n} A$ ta có thể viết

$$\prod_{X_1 \dots X_n} A = \bigwedge_{G_1 \dots G_n} \int_{X_1 \dots X_n} A, \text{ trong đó } G_i \text{ hoặc là } D \text{ hoặc là } K (i=1, n).$$

Xét $\int_{X_1 \dots X_n} A$ với bộ $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ ở đây $\delta_i = T$, nếu G_i được thay bởi D , còn nếu $\delta_i = F$ thì G_i được thay bởi K .

Giả sử $X_1, X_2, \dots, X_n$ nhận bộ giá trị $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ tương ứng. Vì $\vdash A$ nên đối với bộ giá trị đó thì A nhận giá trị T . Theo Định lý 24 thì ta có:

$$\vdash \int_{X_1 \dots X_n} A \sim D \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) theo Định lý 7 ta có: } \vdash D \rightarrow \int_{X_1 \dots X_n} A \quad (2)$$

$$\text{Vì } \vdash D \text{ nên từ (2) ta có: } \vdash \int_{X_1 \dots X_n} A \quad (3)$$

Từ (3) áp dụng Định lý 7 ta lại có: $\vdash \bigwedge_{X_1 \dots X_n}^{G_1 \dots G_n} A$

$$\text{hay } \vdash \prod_{X_1 \dots X_n} A \quad (4)$$

$$\text{Mặt khác theo Định lý 22 thì } \vdash \prod_{X_1 \dots X_n} A \rightarrow A \quad (5)$$

Từ (4) và (5) theo quy tắc dẫn xuất ta có: $\vdash A$. Định lý được chứng minh.

3. Tính độc lập của hệ toán mệnh đề

Định nghĩa 8: Ta ký hiệu các tiên đề của Hệ toán mệnh đề qua

$$AX = \{1(a), 1(b), 2(a), 2(b), 2(c), 3(a), 3(b), 3(c), 4(a), 4(b), 4(c)\}$$

Tiên đề $ax \in AX$ được gọi là độc lập với các tiên đề còn lại $AX \setminus \{ax\}$ nếu như ax không dẫn được từ các tiên đề $AX \setminus \{ax\}$ theo các quy tắc dẫn xuất.

Hệ toán mệnh đề gọi là độc lập nếu mọi tiên đề của AX là độc lập với các tiên đề còn lại.

Định lý 27 : Hệ toán mệnh đề là độc lập.

Chứng minh: Theo định nghĩa trên để chứng minh Định lý 27 ta cần tìm một tính chất $\mathcal{Q}$ nào đấy thoả mãn điều kiện sau đây:

- $\alpha \setminus A$ có tính chất $\mathcal{Q}$.
- Nếu công thức B dẫn được từ các tiên đề $\alpha \setminus A$ thì B có tính chất $\mathcal{Q}$.
- Tiên đề A không có tính chất $\mathcal{Q}$.

Nếu chứng minh được như vậy thì theo định nghĩa ta có A là tiên đề độc lập với các tiên đề còn lại. Nếu α gồm các tiên đề độc lập thì hệ tiên đề α là độc lập.

Để chứng minh Định lý trên ta chứng minh mọi tiên đề của hệ toán mệnh đề là độc lập với các tiên đề còn lại. Cụ thể hệ tiên đề của ta

gồm 4 nhóm: 1, 2, 3 và 4. Trước tiên ta chứng minh tính độc lập cho nhóm 2, 3, và 4 trước.

Lấy các ký hiệu $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ xem chúng là những giá trị mà công thức có thể nhận được, khi đó ta sẽ định nghĩa các phép toán $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ trên các ký hiệu đó.

Tính chất $\mathcal{Q}$ ta chọn là: “Công thức A luôn luôn nhận giá trị α ”.

Việc định nghĩa các phép toán trên các ký hiệu $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ trên là tùy ý sao cho tính chất $\mathcal{Q}$ thỏa mãn các tiên đề $\alpha \setminus \{A\}$ trừ tiên đề A.

Thực ra để chứng minh tính độc lập của các nhóm tiên đề 2, 3, 4 ta chỉ cần hai ký hiệu α, β , đặt $\alpha = T, \beta = F$.

a. Chứng minh tính độc lập của tiên đề nhóm 2 :

Chú ý rằng tiên đề trong nhóm 2 chỉ chứa các phép toán $\wedge, \rightarrow$ còn các tiên đề trong nhóm 1, 3, 4 chứa các phép toán $\vee, \rightarrow$ và $\neg$. Vì vậy ta định nghĩa các phép toán $\vee, \rightarrow, \neg$ như trong đại số mệnh đề, còn tính chất $\mathcal{Q}$ ta chọn như sau: “Công thức A luôn luôn nhận giá trị α , tức là A luôn luôn nhận giá trị đúng”.

Với tính chất $\mathcal{Q}$ như trên và với cách định nghĩa các phép toán $\vee, \rightarrow, \neg$ như trong đại số mệnh đề, rõ ràng các tiên đề trong các nhóm 1, 3, 4 đều có tính chất $\mathcal{Q}$ bởi vì chúng đều là những công thức đồng nhất đúng. Bây giờ ta chỉ cần xét nhóm tiên đề 2.

Tính độc lập của tiên đề 2(a) :

Đối với 2(a) ta định nghĩa phép toán $\wedge$ như sau: $A \wedge B = B$.

Với cách định nghĩa trên tiên đề 2(a) không có tính chất $\mathcal{Q}$, bởi vì $A \wedge B \rightarrow A \equiv B \rightarrow A \neq \alpha$ nếu ta chọn B đúng, A sai. Còn mọi tiên đề khác đều có tính chất $\mathcal{Q}$.

Thật vậy các tiên đề trong nhóm 1, 3 và 4 có tính chất $\mathcal{Q}$ là hiển nhiên. Xét tiên đề 2(b): $A \wedge B \rightarrow B \equiv B \rightarrow B \equiv \alpha$ (có tính chất $\mathcal{Q}$).

Xét tiên đề 2(c): $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$

$$\equiv (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow \alpha \equiv \alpha.$$

Vậy 2(c) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Để kết thúc chứng minh tính độc lập của tiên đề 2(a), ta cần chứng minh thêm rằng: nếu A có tính chất $\mathcal{Q}$, $A \rightarrow B$ có tính chất $\mathcal{Q}$ thì B có tính chất $\mathcal{Q}$.

Vì A, $A \rightarrow B$ có tính chất $\mathcal{Q}$, nghĩa là $A = T$, $A \rightarrow B = T$. Khi đó $B = T$, bởi vì nếu không thì sẽ tồn tại một khả năng nào đó để $B = F$, với khả năng đó A đúng mà $\rightarrow$ định nghĩa như trong đại số mệnh đề nên $A \rightarrow B$ sai với khả năng trên. Điều này vô lý bởi vì $A \rightarrow B = \alpha$.

Tóm lại ta đã chứng minh được:

- Các tiên đề 2(b), 2(c) và các tiên đề trong các nhóm 3, 4, 1 đều có tính chất $\mathcal{Q}$.

- Nếu B dẫn được từ các tiên đề còn lại thì B có tính chất $\mathcal{Q}$.

- Tiên đề 2(a) không có tính chất $\mathcal{Q}$.

Vậy 2(a) là tiên đề độc lập với các tiên đề còn lại.

Chứng minh tính độc lập của 2(b) :

Đối với 2(b) ta định nghĩa phép toán $\wedge$ như sau: $A \wedge B \models A$.

Với cách định nghĩa đó ta thấy mọi tiên đề không thuộc nhóm 2 đều có tính chất $\mathcal{Q}$, bởi vì các tiên đề này chỉ chứa các phép toán $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ mà ta định nghĩa như trong đại số mệnh đề, nên chúng đều là các công thức đồng nhất đúng.

Xét tiên đề 2(a): $A \wedge B \rightarrow A \models A \rightarrow A \models \alpha$ hay tiên đề 2(a) có tính chất $\mathcal{Q}$.

$$\begin{aligned} \text{Xét tiên đề 2(c): } (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))) \\ \models (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \models \alpha. \end{aligned}$$

Vậy 2(c) cũng có tính chất $\mathcal{Q}$.

Tóm lại mọi tiên đề trong hệ toán mệnh đề (trừ tiên đề 2(b)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$.

Tiên đề 2(b) không có tính chất $\mathcal{Q}$.

Thật vậy: $A \wedge B \rightarrow B \models A \rightarrow B \models \beta$ nếu ta chọn $A = \alpha$, $B = \beta$.

Mọi công thức dẫn được từ các tiên đề (trừ tiên đề 2(b)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$. Chứng minh tương tự như đối với tiên đề 2(a). Vậy tiên đề 2(b) là độc lập đối với các tiên đề còn lại.

Chứng minh tính độc lập của tiên đề 2(c) :

Đối với 2(c) ta định nghĩa phép $\wedge$ như sau: $A \wedge B = \beta$.

Với cách định nghĩa trên ta thấy mọi tiên đề không thuộc nhóm 2 đều có tính chất $\mathcal{Q}$.

Xét tiên đề 2(a): $A \wedge B \rightarrow A \equiv \beta \rightarrow A \equiv \alpha$. Vậy 2(a) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Xét tiên đề 2(b): $A \wedge B \rightarrow B \equiv \beta \rightarrow B \equiv \alpha$. Vậy 2(b) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Nói tóm lại mọi tiên đề trong hệ toán mệnh đề (trừ tiên đề 2(b)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$.

Tiên đề 2(c) không có tính chất $\mathcal{Q}$.

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy: } (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))) \\ = (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow \beta)) = \beta \end{aligned}$$

nếu ta chọn $A = \alpha$, $B = \alpha$, $C = \alpha$.

Mọi công thức dẫn được từ các tiên đề (trừ tiên đề 2(c)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$ (chứng minh như các phần trên). Vậy tiên đề 2(c) độc lập đối với các tiên đề còn lại.

b. Chứng minh tính độc lập của các tiên đề nhóm 3 :

Đối với nhóm 3, ta định nghĩa các phép toán $\wedge$, $\rightarrow$, $-$ như trong đại số mệnh đề.

Chứng minh tính độc lập của tiên đề 3(a) :

Ta định nghĩa phép toán $\vee$ như sau: $A \vee B = B$.

Với cách định nghĩa trên, mọi tiên đề (trừ tiên đề 3(a)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$. Thật vậy các tiên đề không thuộc nhóm 3 có tính chất $\mathcal{Q}$ là rõ ràng:

Xét tiên đề 3(b): $B \rightarrow (A \vee B) \equiv B \rightarrow B \equiv \alpha$. Vậy 3(b) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Xét tiên đề 3(c): $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

$$\equiv (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))$$

$$\equiv (A \rightarrow C) \rightarrow \alpha \equiv \alpha, \text{ hay } 3(c) \text{ có tính chất } \mathcal{Q}.$$

Tiên đề 3(a) không có tính chất $\mathcal{Q}$.

Xét tiên đề 3(a): $A \rightarrow (A \vee B) \equiv A \rightarrow B \equiv \beta$ nếu ta chọn $A = \alpha$, $B = \beta$.
Mọi công thức dẫn được từ các tiên đề (trừ tiên đề 3(a)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$.
Vậy tiên đề 3(a) là độc lập đối với các tiên đề còn lại.

Tính độc lập của tiên đề 3(b):

Ta định nghĩa phép toán $\vee$ như sau: $A \vee B \equiv A$.

Khi đó mọi tiên đề (trừ tiên đề 3(b)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$.

Thật vậy các tiên đề không thuộc nhóm 3 đều có tính chất $\mathcal{Q}$ là rõ ràng.

Xét tiên đề 3(a): $A \rightarrow (A \vee B) \equiv A \rightarrow A \equiv \alpha$. Vậy 3(a) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Xét tiên đề 3(c): $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

$$\equiv (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \equiv \alpha$$

hay 3(c) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Tiên đề 3(b) không có tính chất $\mathcal{Q}$.

Xét tiên đề 3(b): $B \rightarrow (A \vee B) \equiv B \rightarrow A \equiv \beta$ nếu ta chọn $B = \alpha$, $A = \beta$.

Mọi tiên đề dẫn được từ các tiên đề (trừ tiên đề 3(b)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$. Tóm lại tiên đề 3(b) là độc lập đối với các tiên đề còn lại.

Tính độc lập của tiên đề 3(c):

Ta định nghĩa phép toán $\vee$ như sau: $A \vee B \equiv \alpha$.

Khi đó mọi tiên đề (trừ tiên đề 3(c)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$.

Thật vậy mọi tiên đề không thuộc nhóm 3 đều có tính chất $\mathcal{Q}$ là rõ ràng.

Xét tiên đề 3(a): $A \rightarrow (A \vee B) \equiv A \vee \alpha \equiv \alpha$. Vậy 3(a) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Xét tiên đề 3(b): $B \rightarrow (A \vee B) \equiv B \vee \alpha \equiv \alpha$. Vậy 3(b) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Tiên đề 3(c) không có tính chất $\mathcal{Q}$.

$$\begin{aligned}\text{Thật vậy: } (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)) \\ \equiv (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (\alpha \rightarrow C)) \equiv \beta\end{aligned}$$

nếu ta chọn $C = \beta$, $A = B = \beta$. Vậy mọi công thức dẫn được từ các tiên đề (trừ tiên đề 3(c)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$. Tóm lại tiên đề 3(c) là độc lập đối với các tiên đề còn lại.

c. Chứng minh tính độc lập của các tiên đề nhóm 4 :

Các tiên đề trong nhóm 4 chỉ chứa các phép toán $\rightarrow$, $\neg$, riêng phép toán $\neg$ thì các tiên đề khác không chứa.

Vậy ta định nghĩa các phép toán $\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$ như trong đại số mệnh đề.

Tính độc lập của tiên đề 4(a) :

Đối với tiên đề 4(a) ta định nghĩa phép toán $\neg$ như sau: $\overline{A} = A$.

Với định nghĩa trên thì mọi tiên đề (trừ tiên đề 4(a)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$.

Xét tiên đề 4(b): $A \rightarrow \overline{\overline{A}} \equiv A \rightarrow \overline{A} \equiv A \rightarrow A \equiv \alpha$. Vậy 4(b) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Xét tiên đề 4(c): $\overline{\overline{A}} \rightarrow A \equiv \overline{A} \rightarrow A \equiv A \rightarrow A \equiv \alpha$. Vậy 4(c) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Tiên đề 4(a) không có tính chất $\mathcal{Q}$.

Thật vậy, $(A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A}) \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \equiv \beta$ nếu ta chọn $A = \beta$, $B = \alpha$.

Mọi công thức dẫn được từ các tiên đề (trừ tiên đề 4(a)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$. Vậy tiên đề 4(a) là độc lập đối với các tiên đề còn lại.

Tính độc lập của tiên đề 4(b) :

Trước tiên đối với tiên đề này ta định nghĩa phép toán $\neg$ như sau: $\overline{A} = \beta$.

Rõ ràng mọi tiên đề không thuộc nhóm 4 đều có tính chất $\mathcal{Q}$.

Xét tiên đề 4(a): $(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$
 $\equiv (A \rightarrow B) \rightarrow \alpha \equiv \alpha$. Vậy tiên đề 4(a) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Tiên đề 4(c): $\bar{A} \rightarrow A \equiv \beta \rightarrow A \equiv \alpha$. Vậy 4(c) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Riêng tiên đề 4(b) không có tính chất $\mathcal{Q}$.

Thật vậy: $A \rightarrow \bar{A} \equiv A \rightarrow \beta \equiv \beta$ nếu ta chọn $A = \alpha$.

Mọi công thức dẫn được từ các tiên đề (trừ tiên đề 4(b)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$. Vậy tiên đề 4(b) là độc lập đối với các tiên đề còn lại.

Tính độc lập của tiên đề 4(c):

Ta định nghĩa phép toán — như sau: $\bar{A} = \alpha$.

Khi đó mọi tiên đề trừ tiên đề 4(c) đều có tính chất $\mathcal{Q}$.

Thật vậy, các tiên đề không thuộc nhóm 4 đều có tính chất $\mathcal{Q}$ là rõ ràng.

Xét tiên đề 4(a): $(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
 $\equiv (A \rightarrow B) \rightarrow \alpha \equiv \alpha$

Xét tiên đề 4(b): $A \rightarrow \bar{A} \equiv A \rightarrow \alpha \equiv \alpha$

Vậy hai tiên đề 4(a) và 4(b) cũng có tính chất $\mathcal{Q}$. Riêng 4(c) không có tính chất $\mathcal{Q}$.

Thật vậy: $\bar{A} \rightarrow A \equiv \alpha \rightarrow A \equiv \beta$ nếu ta chọn $A = \beta$. Vậy tiên đề 4(c) độc lập với các tiên đề còn lại.

d. Chứng minh tính độc lập của các tiên đề trong nhóm 1 :

Vì rằng phép toán $\rightarrow$ trong nhóm 1 có mặt ở các nhóm khác nên để chứng minh tính độc lập của các tiên đề trong nhóm 1 ta cần định nghĩa các phép toán thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} A \wedge B \equiv B \wedge A, A \wedge \alpha \equiv A, A \wedge \beta \equiv \beta, A \wedge A \equiv A \\ A \vee B \equiv B \vee A, A \vee \alpha \equiv A, A \vee \beta \equiv A, A \vee A \equiv A \\ A \rightarrow A = \alpha, A \rightarrow \alpha = \alpha, \beta \rightarrow A = \alpha, \alpha \rightarrow \beta = \beta \\ \text{và } \alpha \rightarrow B \neq \alpha \text{ nếu } B \text{ nhận giá trị } \neq \alpha \\ \bar{\alpha} = \beta, \bar{\beta} = \alpha \end{array} \right. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

Rõ ràng thấy rằng cách định nghĩa như trên là hợp lý bởi vì ta xem α -đúng, β -sai.

Với nhóm (a) như trên ta có thể chứng minh rằng nếu A có tính chất $\mathcal{Q}$, $A \rightarrow B$ có tính chất $\mathcal{Q}$, thì B cũng có tính chất $\mathcal{Q}$. Nói cách khác từ (a) ta chứng minh rằng nếu $A = \alpha$, $A \rightarrow B = \alpha$ thì $B = \alpha$.

Thật vậy, nếu $B \neq \alpha$ với bộ giá trị có thể nào đó, thì với bộ đó $A = \alpha$, như vậy với bộ $A \rightarrow B \neq \alpha$ (do a) mâu thuẫn với giả thiết là $A \rightarrow B$ có tính chất $\mathcal{Q}$.

Tính độc lập của tiên đề 1(b) :

Đối với tiên đề này ta lấy bộ giá trị α, β, γ và định nghĩa bổ sung vào nhóm (a) các phép toán sau đây và gọi là nhóm (b):

$$\alpha \rightarrow \gamma = \gamma, \gamma \rightarrow \beta = \gamma, \bar{\gamma} = \gamma.$$

Với cách định nghĩa trên mọi tiên đề (trừ tiên đề 1(b)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$.

Chúng ta sẽ không thử lại đối với mọi tiên đề mà chỉ thử lại cho tiên đề 2(a) : $A \wedge B \rightarrow A$.

Nếu $A = \alpha$, theo tính giao hoán của (1) trong (a) ta có:

$A \wedge B \rightarrow A \equiv B \wedge A \rightarrow A \equiv B \wedge \alpha \rightarrow \alpha \equiv B \rightarrow \alpha$, nhưng theo (3) của (a) thì $B \rightarrow \alpha = \alpha$. Nếu $A = \beta$.

Khi đó $A \wedge B \rightarrow A \equiv B \wedge A \rightarrow A \equiv B \wedge \beta \rightarrow \beta \equiv \beta \rightarrow \beta = \alpha$. Nếu $A = \gamma$ thì $A \wedge B \rightarrow A$. Căn cứ vào (a) thì $A \wedge B$ hoặc là β hoặc là γ , mà không thể là α do đó ta có:

$$A \wedge B \rightarrow A \equiv \beta \rightarrow \gamma \text{ hoặc } A \wedge B \rightarrow A \equiv \gamma \rightarrow \gamma$$

cả hai trường hợp ta đều có $A \wedge B \rightarrow A \equiv \alpha$ (xem nhóm 3) của (a).

Vậy 2(a) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Riêng 1(b) không có tính chất $\mathcal{Q}$.

Thật vậy, $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \neq \alpha$ nếu ta chọn $A = B = \gamma, C = \beta$. Rõ ràng

$$= (\gamma \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) = \alpha \rightarrow \gamma = \gamma.$$

Tính độc lập của tiên đề 1(a) :

Ta dùng 4 ký hiệu: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Ta định nghĩa thêm vào (a), (b) và gọi là nhóm (c) sau đây:

$$(c) \begin{cases} \alpha \rightarrow B = \beta \text{ (trong đó } B = \gamma, \delta, \beta) \\ \alpha \rightarrow \beta = \beta, \gamma \rightarrow \delta = \beta, \delta \rightarrow \beta = \beta, \delta \rightarrow \gamma = \alpha. \\ \gamma \wedge \delta = \delta, \gamma \vee \delta = \gamma, \bar{\gamma} = \delta, \bar{\delta} = \gamma. \end{cases}$$

Với định nghĩa trên mọi tiên đề (trừ tiên đề 1(a)) đều có tính chất $\mathcal{Q}$. Ở đây ta chỉ chứng minh cho tiên đề 2(a), còn các tiên đề khác có thể chứng minh tương tự.

$A \wedge B \rightarrow A$. Nếu A, B cùng nhận giá trị β thì $A \wedge B \equiv \beta$, do đó $A \wedge B \rightarrow A \equiv \beta \rightarrow \beta \equiv \alpha$. Nếu A nhận giá trị α thì

$$A \wedge B \rightarrow A \equiv B \wedge A \rightarrow A \equiv B \wedge \alpha \rightarrow \alpha \equiv B \rightarrow \alpha \equiv \alpha.$$

Nếu B nhận giá trị α thì $A \wedge \alpha \rightarrow A \equiv A \rightarrow A \equiv \alpha$.

Nếu $A = B$ thì $A \wedge B \rightarrow A \equiv \alpha$.

Nếu $A \neq B$ và nhận các giá trị δ, γ do tính giao hoán chỉ cần xét hai trường hợp $\gamma \wedge \delta \rightarrow \gamma$ và $\gamma \wedge \delta \rightarrow \delta$ vì $\gamma \wedge \delta = \delta$ (xem phần bổ sung) nên trường hợp thứ nhất viết như sau: $\gamma \wedge \delta \rightarrow \gamma \equiv \delta \rightarrow \gamma \equiv \alpha$ (do nhóm (c)) trường hợp thứ hai $\gamma \wedge \delta \rightarrow \delta \equiv \delta \rightarrow \delta \equiv \alpha$ (do nhóm (c)). Tóm lại tiên đề 2(a) có tính chất $\mathcal{Q}$.

Riêng tiên đề 1(a) không có tính chất $\mathcal{Q}$.

Thật vậy, $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ chọn $A = \delta, B = \alpha$ khi đó:

$$\delta \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta) \equiv \delta \rightarrow \beta = \beta \text{ (do nhóm (c))}$$

Vậy tiên đề 1(a) độc lập với các tiên đề còn lại. Định lý được chứng minh.

III. LÔGIC VỊ TỪ

§1. ĐỊNH NGHĨA VỊ TỪ

Giả sử M là một tập hợp gồm các phần tử nào đấy. M thường gọi là trường, các phần tử của M thường ký hiệu là các chữ $a, b, c, \dots$

Trên trường M ta thành lập các mệnh đề, mệnh đề gồm một phần tử sẽ nói lên tính chất của phần tử, mệnh đề gồm hai phần tử tham gia sẽ nói lên quan hệ giữa các phần tử.

Ví dụ: Lấy trường $M = \{1, 2, 3, \dots\}$, trên trường này ta thành lập các mệnh đề sau đây: “3 là số nguyên tố”, “ $1 > 2$ ”, ...

Mệnh đề thứ nhất đúng, nói lên tính chất của số 3.

Mệnh đề thứ 2 sai, nói lên quan hệ giữa hai số 1 và 2.

Tóm lại đối với các phần tử của trường M ta có thể thiết lập được các mệnh đề.

Các mệnh đề nói ở đây chỉ quan tâm tới sự đúng sai mà không quan tâm tới nội dung của mệnh đề, hay nó thỏa mãn luật bài chung, tức là hoặc đúng hoặc sai, cũng như trong đại số mệnh đề ta không xét mệnh đề không đúng mà cũng không sai.

Định nghĩa 1: Biểu thức $P(x)$ gọi là vị từ xác định trên trường M nếu khi thay x bởi phần tử bất kỳ của trường M thì $P(x)$ sẽ trở thành mệnh đề xác định trên trường M .

Ví dụ: $M = \{1, 2, \dots\}$

Khi đó biểu thức “ x là số nguyên tố” là một vị từ xác định trên trường M , bởi vì khi thay x bởi 3 ta được mệnh đề là “3 là số nguyên tố”.

Như vậy $P(x)$ có thể xem như một ánh xạ (hay một hàm) xác định trên trường M và nhận giá trị trong tập hợp $\{đ, s\}$, loại vị từ nói trên gọi là vị từ một ngôi. Vị từ một ngôi $P(x)$ chỉ nói lên tính chất của một phần tử thuộc M .

Để nói lên quan hệ giữa các phần tử của trường $\mathcal{M}$, người ta cần đưa vào vị từ nhiều ngôi.

Định nghĩa 2: Biểu thức $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gọi là vị từ xác định trên tập $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \times \mathcal{M}_n$, nếu ta thay x_i ($i = 1, \dots, n$) bởi phần tử bất kỳ của trường $\mathcal{M}_i$ ($i = 1, \dots, n$) thì ta được các mệnh đề xác định trên $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \times \mathcal{M}_n$. $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gọi là vị từ n ngôi.

$\mathcal{M}^n = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \times \mathcal{M}_n$ là tập tích Đề các, còn $x_1, x_2, \dots, x_n$ trong vị từ n ngôi ta gọi là các biến tử. Các biến tử $x_1, x_2, \dots, x_n$ sẽ nhận các phần tử $a, b, c, \dots \in \mathcal{M}$ ta gọi là các hằng tử.

Các vị từ thường ký hiệu là các chữ $P, F, G, \dots$ (đôi khi cả chỉ số nữa) và ta cũng gọi chúng là các biến vị từ.

Ta ký hiệu các chữ $X, Y, Z, \dots$ là các mệnh đề và gọi là các biến mệnh đề.

Như vậy trong logic vị từ có tới 3 biến (trong đại số mệnh đề chỉ có một biến) tương ứng với nó ta có ba loại biến hằng:

- Ứng với biến tử ta có các biến hằng
- Ứng với các biến vị từ ta có các vị từ cụ thể
- Ứng với biến mệnh đề ta có các mệnh đề cụ thể

Ta gọi các biến vị từ và các biến mệnh đề là các công thức sơ cấp.

Định nghĩa 3 (Định nghĩa công thức)

1. Mỗi một biến mệnh đề hoặc biến vị từ gọi là một công thức.
2. Nếu A, B là các công thức thì $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(\bar{A})$ cũng là những công thức.
3. Nếu A là công thức thì biểu thức: $(\forall x) A$ hoặc $(\exists x) A$ cũng là công thức.

Từ định nghĩa công thức ta thấy logic vị từ gồm các phép toán sau: $\wedge$ (hội), $\vee$ (tuyển), $\rightarrow$ (kéo theo), $\neg$ (phủ định), ký hiệu $\forall$ (với mọi) và $\exists$ (tồn tại). Các phép toán $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ định nghĩa như trong đại số mệnh đề. Hai ký hiệu $\forall, \exists$ gọi là các lượng từ định nghĩa như sau:

Giả sử A là một công thức xác định trên trường $\mathcal{M}$. Khi đó biểu thức $(\forall x) A$ là một mệnh đề: mệnh đề này đúng khi A đúng với mọi phần tử của trường $\mathcal{M}$ và sai trong trường hợp ngược lại.

Mệnh đề này không phụ thuộc vào x và ta diễn đạt bằng lời như sau: “đối với mọi x , A đúng”. Ký hiệu $\forall$ gọi là lượng từ toàn thể.

Tương tự ta định nghĩa ký hiệu $\exists$ như sau:

$(\exists x) A$ là một mệnh đề: đúng nếu có một phần tử của trường $\mathcal{M}$ mà A đúng và sai trong trường hợp ngược lại. Hay biểu diễn bằng lời: “tồn tại x , A đúng”, lượng từ trên phụ thuộc vào x . Ký hiệu $\exists$ gọi là lượng từ tồn tại.

Chú ý 1: Trong các công thức $(\forall x) A$ và $(\exists x) A$ thì công thức A gọi là miền tác dụng của các lượng từ $(\forall x)$ và $(\exists x)$.

Chú ý 2: Nếu trong các công thức A của công thức $(\forall x) A$ hoặc $(\exists x) A$ chứa các biến x và có thể thêm một số biến khác không nằm dưới dấu $\forall, \exists$ thì biến x gọi là biến ràng buộc, các biến khác gọi là các biến tự do.

Ví dụ: $(\forall x) A(x) \rightarrow F(x)$ là một công thức, đây là một vị từ mà miền tác dụng của lượng từ là toàn thể A , x có mặt trong A gọi là biến ràng buộc. Còn x trong F gọi là biến độc lập (vì không bị ràng buộc bởi $\forall$).

Ví dụ: $(\exists x) A(x) \vee F(x)$ là một công thức, $A(x)$ là miền tác dụng của $(\exists)$, biến x trong A gọi là biến ràng buộc, còn biến x trong F gọi là biến độc lập.

Ví dụ: $A(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_1) B(x_1)$ là một công thức miền tác dụng là $B(x_1)$, x_1 trong B là biến ràng buộc, x_1 trong A là biến tự do, x_2 trong A cũng là biến tự do.

Như vậy, qua 3 ví dụ trên ta nhận thấy một biến trong cùng một công thức logic vị từ có thể vừa là tự do vừa là ràng buộc.

§2. KHÁI NIỆM CÔNG THỨC ĐỒNG NHẤT BẰNG NHAU VÀ ĐỒNG NHẤT ĐÚNG

Định nghĩa 4: Hai công thức A và B được gọi là đồng nhất bằng nhau trên trường $\mathcal{M}$ (ký hiệu $A \equiv_{\mathcal{M}} B$) nếu chúng nhận giá trị đúng sai như nhau khi các biến vị từ được thay bởi các mệnh đề cụ thể trên trường $\mathcal{M}$ và các biến tử được thay bởi các hằng tử (hay các phần tử) cụ thể của trường $\mathcal{M}$.

Định nghĩa 5: Hai công thức A và B được gọi là đồng nhất bằng nhau nếu nó đồng nhất bằng nhau trên mọi trường.

Định nghĩa 6: Công thức A gọi là đồng nhất đúng trên trường $\mathcal{M}$ nếu nó luôn luôn nhận giá trị đúng khi thay các biến tử bằng các hằng tử cụ thể trên trường $\mathcal{M}$, các biến mệnh đề bằng các mệnh đề cụ thể trên trường $\mathcal{M}$ và các biến vị từ bằng các vị từ cụ thể trên trường $\mathcal{M}$.

Định nghĩa 7: Công thức A gọi là đồng nhất đúng nếu nó đúng với mọi trường.

Chú ý 4: Từ các định nghĩa trong §1, §2 ta thấy rằng lớp các logic vị từ rộng hơn lớp các đại số mệnh đề. Do đó nếu A là công thức đồng nhất đúng trong đại số mệnh đề cũng là công thức đồng nhất đúng trong logic vị từ. Mọi đồng nhất thức trong đại số mệnh đề cũng là đồng nhất thức trong logic vị từ.

Chẳng hạn trong đại số mệnh đề ta có đồng nhất thức

$$A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B \quad (1)$$

thì trong logic vị từ với A, B là công thức ta cũng có đẳng thức trên.

Chính vì vậy trong logic vị từ ta dùng đẳng thức trên để khử phép $\rightarrow$ và đưa một công thức phức tạp về công thức đơn giản hơn chỉ chứa phép toán $\wedge, \vee, \neg$. Tiếp tục dùng các công thức trong đại số mệnh đề đồng thời cũng đúng trong logic vị từ:

$$\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B} \quad (2)$$

$$\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B} \quad (3)$$

để đưa dấu $\neg$ chỉ liên quan tới các công thức sơ cấp.

Ngoài ra trong logic vị từ ta còn có đồng nhất thức sau:

$$\overline{(\forall x)A} \equiv (\exists x) \overline{A} \quad (4)$$

$$\overline{(\exists x)A} \equiv (\forall x) \overline{A} \quad (5)$$

Như vậy với mỗi công thức ta đưa về công thức mới đồng nhất bằng nó mà chỉ chứa các phép toán $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (do 1) lại áp dụng (2) đến (5) ta đưa dấu $\neg$ chỉ liên quan tới các công thức sơ cấp.

Ví dụ 4: xét công thức

$$\begin{aligned} \overline{(\exists x)(A(x) \rightarrow (\forall y)B(y))} &= \overline{(\exists x)(\overline{A(x)} \vee (\forall y)B(y))} \\ &= (\forall x) \overline{(\overline{A(x)} \vee (\forall y)B(y))} = (\forall x)(\overline{\overline{A(x)}} \wedge \overline{(\forall y)B(y)}) \\ &= (\forall x)[A(x) \wedge (\exists y) \overline{B(y)}] \end{aligned}$$

công thức cuối cùng chứa dấu $\neg$ chỉ liên quan tới $B(y)$.

Định nghĩa 8: Một công thức mà trong đó chỉ chứa các phép toán $\wedge$, $\vee$, $\neg$, dấu $\neg$ chỉ liên quan tới các công thức sơ cấp được gọi là công thức rút gọn.

Vậy từ lý luận trên ta thấy trong logic vị từ mọi công thức đều có công thức rút gọn đồng nhất bằng nó. Chẳng hạn công thức

$$(\forall x)[A(x) \wedge (\exists y) \overline{B(y)}]$$

là công thức rút gọn của công thức sau: $\overline{(\exists x)(A(x) \rightarrow (\forall y)B(y))}$.

§3. Ý NGHĨA CÁC VỊ TỪ THEO LÝ THUYẾT TẬP HỢP

1. Vị từ một ngôi

Giả sử $M \neq \emptyset$ là một trường nào đấy, $P(x)$ là vị từ xác định trên trường M . Ta ký hiệu $E_P = \{x \in M / P(x) \text{ đúng}\}$ như vậy ứng với lượng tử $P(x)$ xác định trên trường M có một tập $E_P \subset M$.

Điều ngược lại cũng đúng, tức là ứng với một tập hợp con $E \subset M$ sẽ tồn tại một vị từ $P(x)$ xác định trên M sao cho $E = E_P$. Thật vậy với

$E \subset \mathcal{M}$, ta xây dựng vị từ $P(x)$ là vị từ “ x thuộc E ”. Khi đó ta thấy vị từ $P(x)$ đúng khi $x \in E$ và sai khi $x \notin E$, rõ ràng $E_P = E$.

Như vậy giữa các tập hợp con của trường $\mathcal{M}$ với các vị từ một biến xác định trên $\mathcal{M}$ có tương ứng nào đó.

Giả sử $P_1(x), P_2(x)$ là hai vị từ xác định trên trường $\mathcal{M}$ và giả sử

$$E_{P_1} = \{x \in \mathcal{M} / P_1(x) \text{ đúng}\}, E_{P_2} = \{x \in \mathcal{M} / P_2(x) \text{ đúng}\}$$

a. Xét vị từ $P(x) = P_1(x) \vee P_2(x)$ và gọi $E_P = \{x \in \mathcal{M} / P(x) \text{ đúng}\}$.

Ta chứng minh rằng $E_P = E_{P_1} \cup E_{P_2}$.

Giả sử $x \in E_P$, khi đó $P(x)$ đúng hay với x đó thì hoặc $P_1(x)$ đúng hoặc $P_2(x)$ đúng hoặc cả hai $P_1(x), P_2(x)$ đều đúng. Trong cả ba trường hợp ta đều có $x \in E_{P_1}$ hoặc $x \in E_{P_1}$ và $x \in E_{P_2}$, trong mọi trường hợp ta đều có $x \in E_{P_1} \cup E_{P_2}$. Vậy ta có bao hàm thức $E_P \subseteq E_{P_1} \cup E_{P_2}$.

Bao hàm thức ngược lại $E_{P_1} \cup E_{P_2} \subseteq E_P$ là hiển nhiên.

Từ hai bao hàm thức trên ta có $E_P = E_{P_1} \cup E_{P_2}$.

b. Xét vị từ $P(x) = P_1(x) \wedge P_2(x)$.

Ta chứng minh $E_P = E_{P_1} \cap E_{P_2}$. Giả sử $x \in E_P$, khi đó $P(x)$ đúng, $P_1(x)$ và $P_2(x)$ cũng đúng. Từ đó $x \in E_{P_1}$ và $x \in E_{P_2}$ nên ta có $x \in E_{P_1} \cap E_{P_2}$. Vậy $E_P \subseteq E_{P_1} \cap E_{P_2}$.

Giả sử $x \in E_{P_1} \cap E_{P_2}$, khi đó $x \in E_{P_1}$ và $x \in E_{P_2}$. Vậy $P_1(x), P_2(x)$ đúng tức là $P(x)$ đúng và $x \in E_P$. Vậy $E_P = E_{P_1} \cap E_{P_2}$.

c. Xét vị từ $\bar{P}(x)$.

Giả sử $E_P = \{x \in \mathcal{M} / P(x) \text{ đúng}\}$. Khi đó $E_{\bar{P}(x)} = \mathcal{M} \setminus E_P$.

Thật vậy $x \in E_{\bar{P}(x)} \Leftrightarrow \bar{P}(x) \text{ đúng} \Leftrightarrow P(x) \text{ sai} \Leftrightarrow x \in \mathcal{M} \setminus E_P$.

2. Mở rộng cho vị từ n ngôi

Giả sử $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathcal{M}_i$ là vị từ n ngôi xác định trên trường $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \times \mathcal{M}_n$.

Ta định nghĩa $E_P = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{M}^n / P(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ đúng}\}$, ở đây ta chỉ xét vị từ hai ngôi $P(x, y)$ trên trường $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ là tập hợp các điểm trên mặt phẳng mà hoành độ $x \in \mathcal{M}_1$, tung độ $y \in \mathcal{M}_2$. $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ chính là trục hoành và trục tung tương ứng.

Giả sử $S \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ ta ký hiệu hình chiếu của S trên trục hoành là $hc_1 S = \{x \in \mathcal{M}_1 / \exists y \text{ để } (x, y) \in S\}$, tương tự $hc_2 S = \{y \in \mathcal{M}_2 / \exists x \text{ để } (x, y) \in S\}$ là hình chiếu của S trên trục tung.

d. Xét lượng tử $(\exists x) P(x, y) =: P_1(y)$

Theo định nghĩa hình chiếu trên thì: $E_{P_1} = hc_2 E_P$ trong đó $E_{P_1} = \{y \in \mathcal{M}_2 / P_1(y) \text{ đúng}\}$ và $E_P = \{(x, y) \in \mathcal{M}^2 / P(x, y) \text{ đúng}\}$.

Thật vậy $y \in E_{P_1} \Leftrightarrow P_1(y) \text{ đúng} \Leftrightarrow \exists x \text{ để } P(x, y) \text{ đúng} \Leftrightarrow \exists x \text{ để } (x, y) \in E_P \Leftrightarrow y \in hc_2 E_P$, hay $E_{P_1} = hc_2 E_P$.

e. Xét lượng tử $(\forall x) P(x, y) =: P_2(y)$

Để có $E_{P_2}(y)$ ta biến đổi như sau:

$$P_2(y) = \overline{(\exists x) \overline{P(x, y)}} \text{ đặt } (\exists x) \overline{P(x, y)} = Q(y)$$

Khi đó $P_2(y) = \overline{Q(y)}$, vì $E_{\overline{Q}} = \mathcal{M}^2 \setminus E_Q$ nên $E_{P_2}(y) = \mathcal{M}^2 \setminus E_Q$.

Nhưng $E_{Q(y)} = hc_2 E_{\overline{P}} = hc_2(\mathcal{M}^2 \setminus E_P)$ nên $E_{P_2}(y) = \mathcal{M}^2 \setminus hc_2(\mathcal{M}^2 \setminus E_P)$.

§4. DẠNG CHUẨN CỦA CÔNG THỨC

Như chúng ta đã biết một công thức trong logic vị từ đều có dạng công thức rút gọn đồng nhất bằng nó. Nói cách khác nếu A là một công thức thì bao giờ cũng tồn tại công thức B chỉ chứa các phép toán $\wedge, \vee, \neg$, trong đó $\neg$ chỉ liên quan tới công thức sơ cấp trong B mà $A \equiv B$.

Định nghĩa 9: Bây giờ trong công thức B nếu mọi ký hiệu $\forall, \exists$ đều đứng trước các phép toán logic khác thì B được gọi là công thức chuẩn tắc. Nếu B là công thức chuẩn tắc mà $A \equiv B$ thì ta nói B là dạng chuẩn của A .

Ví dụ 5: $(\forall x_1) (\forall x_2) \dots (\forall x_i) \dots (\forall x_n) A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, trong đó $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ không chứa ký hiệu $\rightarrow, \forall, \exists$, còn ký hiệu $\rightarrow$ chỉ liên quan tới công thức sơ cấp thì công thức trên gọi là công thức chuẩn tắc.

Định lý 1: Trong logic vị từ, mọi công thức đều có dạng chuẩn tắc.

Chứng minh: Trước tiên ta chứng minh bốn đồng nhất thức sau đây, trong đó $A(x)$ là công thức, H là mệnh đề:

$$1) (\forall x)A(x) \vee H \equiv (\forall x) (A(x) \vee H)$$

$$2) (\forall x)A(x) \wedge H \equiv (\forall x) (A(x) \wedge H)$$

$$3) (\exists x)A(x) \vee H \equiv (\exists x) (A(x) \vee H)$$

$$4) (\exists x)A(x) \wedge H \equiv (\exists x) (A(x) \wedge H)$$

Thật vậy ta có: $(\forall x)A(x) \vee H$ đúng $\Leftrightarrow \forall x A(x)$ đúng hoặc H đúng $\Leftrightarrow (\forall x) (A(x) \vee H)$ đúng.

Vậy đồng nhất thức 1) là đúng hay $(\forall x)A(x) \vee H \equiv (\forall x) (A(x) \vee H)$

2) $(\forall x)A(x) \wedge H$ đúng $\Leftrightarrow (\forall x)A(x)$ đúng và H đúng $\Leftrightarrow A(x)$ đúng $\forall x$ và H đúng $\Leftrightarrow A(x) \wedge H$ đúng $\forall x \Leftrightarrow (\forall x) (A(x) \wedge H)$ đúng.

Vậy $(\forall x)A(x) \wedge H \equiv (\forall x) (A(x) \wedge H)$.

3) $(\exists x)A(x) \vee H$ đúng $\Leftrightarrow (\exists x) A(x)$ đúng hoặc H đúng $\Leftrightarrow (\exists x)$ để $A(x)$ đúng hoặc H đúng $\Leftrightarrow (\exists x) (A(x) \vee H)$ đúng.

Vậy $(\exists x)A(x) \vee H \equiv (\exists x) (A(x) \vee H)$.

4) $(\exists x)A(x) \wedge H$ đúng $\Leftrightarrow (\exists x) A(x)$ đúng và H đúng $\Leftrightarrow (\exists x)$ để $A(x)$ đúng và H đúng $\Leftrightarrow (\exists x) (A(x) \wedge H)$ đúng. Vậy $(\exists x)A(x) \wedge H \equiv (\exists x) (A(x) \wedge H)$.

Dĩ nhiên bốn đồng nhất thức trên cũng đúng khi các lượng từ đứng trước H và cách chứng minh cũng tương tự.

Bây giờ ta chứng minh Định lý trên bằng qui nạp theo định nghĩa công thức. Giả sử A là công thức trong logic vị từ.

1) Nếu A là công thức sơ cấp, tức A là biến mệnh đề hay biến vị từ thì trường hợp này Định lý đúng, bởi vì chính các biến vị từ hoặc các biến mệnh đề là các công thức chuẩn tắc.

2) Giả sử A_1, A_2 có dạng chuẩn tắc tương ứng là:

$$A_1^* = (\forall x_1) \dots (\forall x_i) (\exists x_{i+1}) \dots (\exists x_n) A'(x_1, \dots, x_n) \equiv A_1.$$

$$A_2^* = (\exists y_1) \dots (\forall y_i) \dots (\forall y_m) A''(y_1, \dots, y_n) \equiv A_2.$$

Ta chứng minh $A_1 \vee A_2$ cũng có dạng chuẩn tắc. Áp dụng 1 và 3 ta có:

$$\begin{aligned} A_1 \vee A_2 &= (\forall x_1) \dots (\forall x_i) (\exists x_{i+1}) \dots (\exists x_n) A'(x_1, \dots, x_n) \vee (\exists y_1) \dots (\forall y_i) \dots (\forall y_m) \\ &A''(y_1, \dots, y_n) \equiv (\forall x_1) \dots (\forall x_i) (\exists x_{i+1}) \dots (\exists x_n) (A'(x_1, \dots, x_n) \vee (\exists y_1) \dots (\forall y_i) \dots \\ &(\forall y_m) A''(y_1, \dots, y_n)) \equiv (\forall x_1) \dots (\forall x_i) (\exists x_{i+1}) \dots (\exists x_n) (\exists y_1) \dots (\forall y_m) (A'(x_1, \dots, \\ &x_n) \vee A''(y_1, \dots, y_n)). \text{ Rõ ràng } (\forall x_i) \dots (\exists x_n) (\exists y_1) \dots (\forall y_m) (A' \vee A'') \text{ là công} \\ &\text{thức chuẩn tắc, hay } A_1 \vee A_2 \text{ có dạng chuẩn tắc. Áp dụng 2, 4 ta tìm được} \\ &\text{dạng chuẩn tắc của } A_1 \wedge A_2. \end{aligned}$$

Giả sử A_1 có dạng chuẩn tắc A_1^* như trên, ta chỉ ra $\overline{A_1}$ cũng có dạng chuẩn tắc.

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy, } \overline{A_1} &= \overline{A_1^*} = \overline{(\forall x_1) \dots (\forall x_i) (\exists x_{i+1}) \dots (\exists x_n) A'(x_1, \dots, x_n)} \\ &= (\exists x_1) \dots (\exists x_n) (\forall x_{i+1}) \dots (\forall x_n) \overline{A'}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

nếu A' chưa phải là công thức sơ cấp thì tiếp tục đưa dấu $\neg$ chỉ liên quan tới công thức sơ cấp. Giả sử $\overline{A'}(x_1, \dots, x_n) \equiv B'(x_1, \dots, x_n)$, trong đó B' chứa $\wedge, \vee, \neg$, với $\neg$ chỉ liên quan tới công thức sơ cấp. Khi đó $(\exists x_1) \dots (\exists x_n) (\forall x_{i+1}) \dots (\forall x_n) B'(x_1, \dots, x_n)$ chính là công thức chuẩn tắc và là dạng chuẩn tắc của $\overline{A_1}$.

Vì $A_1 \rightarrow A_2 \equiv \overline{A_1} \vee A_2$ nên từ trên ta thấy $A_1 \rightarrow A_2$ cũng có dạng chuẩn tắc.

3) Giả sử A có dạng chuẩn tắc là A^*

Khi đó $(\forall x)A$ và $(\exists x)A$ cũng có dạng chuẩn tắc, cụ thể là $(\forall x)A^*$. $(\forall x)A^*$ là dạng chuẩn tắc của $(\forall x)A$ và $(\exists x)A$ tương ứng.

Tóm lại định lý được chứng minh.

§5. VẤN ĐỀ VỀ TÍNH GIẢI ĐƯỢC

Trong đại số mệnh đề thì bài toán về tính giải được hoàn toàn được giải quyết. Nghĩa là nếu A là công thức trong đại số mệnh đề thì ta có một phương pháp để biết A có phải là đồng nhất đúng hay không.

Ta hãy đặt bài toán này đối với lôgic vị từ, trong đó ta chỉ giới hạn các công thức không chứa các phần tử và các vị từ cụ thể.

Cũng như trong đại số mệnh đề ta đưa vào định nghĩa:

Định nghĩa 10: Công thức A trong lôgic vị từ gọi là thực hiện được trên trường $\mathcal{M}$ nếu nó đúng với những vị từ nào đó trên trường $\mathcal{M}$.

Định nghĩa 11: Công thức A gọi là đồng nhất đúng (gọi tắt là đúng) nếu nó đúng với mọi trường và đối với mọi vị từ.

Định nghĩa 12: Công thức A gọi là sai hay gọi là không thực hiện được nếu nó không đúng đối với mọi trường và đối với mọi phép thế của các vị từ.

Từ định nghĩa ta suy ra rằng: Nếu A là đồng nhất đúng thì $\bar{A}$ là sai và ngược lại.

Bài toán giải được đặt ra cho lôgic vị từ như sau: Hãy tìm một phương pháp để biết một công thức A là đồng nhất đúng hay không?

Nếu có một phương pháp nào đó để biết được công thức A đồng nhất đúng, và do đó cũng biết được $\bar{A}$ có là sai hay không.

Giả sử $\bar{A}$ sai khi đó A là đồng nhất đúng, vậy A thực hiện được, còn $\bar{A}$ là không thực hiện được.

Nếu $\bar{A}$ là không đồng nhất đúng thì A không sai, vậy A thực hiện được.

Người ta đã chứng minh được rằng bài toán về tính giải được đối với lôgic vị từ là không giải quyết được. Nghĩa là đối với công thức A bất kỳ trong lôgic vị từ không có một thuật toán nào để biết A có là đồng nhất đúng hay không.

Tuy nhiên nếu ta xét một tập hợp con các công thức của logic vị từ thì bài toán trên được giải quyết, chẳng hạn tập hợp các công thức trong đại số mệnh đề là tập hợp con các công thức của logic vị từ thì bài toán về tính giải được lại được giải quyết.

Ngoài ra nếu xét vị từ một biến thì vấn đề công thức đồng nhất đúng lại được giải quyết.

Định nghĩa 13: Công thức A trong logic vị từ gọi là thỏa mãn trên trường $\mathcal{M}$ nếu A đúng với những vị từ cụ thể nào đó trên $\mathcal{M}$.

Định lý 2: Nếu công thức A (trong logic vị từ) chứa n vị từ 1 biến thỏa mãn trên trường $\mathcal{M}$ thì nó cũng sẽ thỏa mãn trên mọi trường có số phần tử $\leq 2^n$.

Chứng minh: Giả sử công thức A thỏa mãn trên trường $\mathcal{M}$, và n là số vị từ 1 biến có trong A . Theo Định lý trên ta có thể giả thiết A là công thức chuẩn tắc. Trong A không có biến tử tự do (vì nếu A có một biến tử tự do x nào đấy thì việc xét tính thỏa mãn của vị từ $A(x)$ tương đương với việc xét tính thỏa mãn của vị từ $(\forall x) A(x)$ mà trong $(\forall x) A(x)$ không còn biến tử tự do). Với các giả thiết đó ta sẽ giả sử các vị từ trong A là $A_1, \dots, A_n$ ($A_i = 1, n$) là vị từ một biến, lúc đó công thức A viết dưới dạng: $A = (\sigma x_1) (\sigma x_2) \dots (\sigma x_p) B(A_1, \dots, A_n, x_1, \dots, x_p)$, trong đó σx_i hoặc là lượng từ $(\forall x_i)$ hoặc là $(\exists x_i)$, B là công thức không chứa lượng từ (do A chuẩn tắc), $x_1, \dots, x_p$ là các biến ràng buộc. Thực ra có thể viết:

$$B(A_1(x_1)) \dots, B(A_n(x_n)), \text{ trong đó } x_{ij} \in \{x_1, \dots, x_p\}.$$

Theo giả thiết của định lý, A thỏa mãn trên trường $\mathcal{M}$ do đó có các vị từ cụ thể nào đấy mà ta ký hiệu là $A_1^0, \dots, A_n^0$ trên $\mathcal{M}$ sao cho $A(A_1^0, \dots, A_n^0)$ đúng trên $\mathcal{M}$. Ta sẽ chứng minh $A(A_1^0, \dots, A_n^0)$ cũng sẽ đúng trên mọi trường $\mathcal{M}'$ mà $|\mathcal{M}'| \leq 2^n$.

* Muốn vậy ta chia $\mathcal{M}$ thành các lớp sau đây:

Ký hiệu $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ là một bộ mà $\alpha_i \in \{0,1\}$ và ký hiệu $M_{x_1, \dots, x_n} = \{x \in \mathcal{M} / A_i^0(x) = \alpha_i, \forall i = 1, \dots, n\}$ như vậy ứng với mỗi bộ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ khác nhau ta có những lớp khác nhau.

Tính chất: Với $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ thì $M_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \cap M_{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n} = \emptyset$,
thật vậy giả sử ngược lại chúng có phần tử chung là $x \in \mathcal{M}$ sao cho:

$$A_i^0(x) = \alpha_i \text{ và } A_i^0(x) = \alpha'_i \text{ mà } \alpha_i \neq \alpha'_i \text{ trái với tính đơn trị của vị từ } A_i^0.$$

Dĩ nhiên mỗi phần tử $\in \mathcal{M}$ thì thuộc vào một lớp nào đó. Với cách chia trên ta được một phân hoạch đối với $\mathcal{M}$. Số các lớp của phân hoạch này không thể vượt quá số bộ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ khác nhau nghĩa là số lớp của phân hoạch này $\leq 2^n$. Ta gọi số lớp của phân hoạch là q ($\leq 2^n$), mỗi lớp lấy ra một phần tử ký hiệu lần lượt là $a_1, a_2, \dots, a_q$. Ta ký hiệu tập hợp các phần tử này là $\mathcal{M}'$ ($\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$).

Ta chứng minh A thỏa mãn trên trường $\mathcal{M}$.

Cụ thể ta chứng minh công thức $A(A_1^0, \dots, A_n^0)$ đúng trên $\mathcal{M}$. Thật vậy với mỗi phần tử $x \in \mathcal{M}$, ký hiệu $\varphi(x)$ là phần tử trong $\mathcal{M}'$, tức là $\varphi(x) = \alpha_i$ nào đó $\in \mathcal{M}'$ sao cho x, α_i thuộc cùng một lớp của phân hoạch. Theo định nghĩa điều này có nghĩa là: $A_i^0(\varphi(x)) = A_i^0(x)$ ($i = 1, \dots, n$), tức là nếu trong công thức A ta thay $x = \varphi(x)$ thì ta được công thức đồng nhất với A.

Giả thiết rằng $R(x, y, \dots, u)$ là vị từ bất kỳ xác định trên $\mathcal{M}$. Ký hiệu $(\forall(x))R(x, y, \dots, u)$ là vị từ chỉ phụ thuộc vào $y, \dots, u$ và nhận giá trị đúng khi và chỉ khi $R(x, y, \dots, u)$ đúng với mọi $x \in \mathcal{M}$, (x là a_i nào đấy).

Hoàn toàn tương tự ta định nghĩa vị từ $(\exists(x))R(x, y, \dots, u)$ đúng $\Leftrightarrow$ tồn tại $x \in \mathcal{M}$ để $R(x, y, \dots, u)$ đúng. Các ký hiệu $(\forall(x)), (\exists(x))$ gọi là các lượng từ hạn chế. Bây giờ ta chứng minh công thức:

$$(\forall(x))R(x, y, \dots, u) \equiv (\forall(x))R(\varphi(x), y, \dots, u).$$

Ta chỉ cần chứng minh vế phải đúng khi vế trái đúng và ngược lại.

Giả sử vế trái đúng tức là $R(x, y, \dots, u)$ đúng với mọi $x \in \mathcal{M}$. Xét $(\forall(x))R(\varphi(x), y, \dots, u)$ đúng (lưu ý với mọi $x \in \mathcal{M}$ thì $\varphi(x) \in \mathcal{M}'$ mà $R(x, y, \dots, u)$ đúng với mọi $x \in \mathcal{M}$ thì $R(\varphi(x), y, \dots, u)$ đúng với mọi x hay $(\forall(x))R(\varphi(x), y, \dots, u)$ đúng).

Giả sử vế phải đúng tức là $(\forall(x))R(\varphi(x), y, \dots, u)$ đúng với mọi $x \in \mathcal{M}$ theo định nghĩa thì $(\forall(x))R(x, y, \dots, u)$ đúng.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được công thức:

$$\widehat{(\exists(x))}R(x, y, \dots, u) \equiv (\exists(x)) R(\varphi(x), y, \dots, u)$$

dựa vào 2 công thức trên xét công thức:

$A = (\sigma x_1) (\sigma x_2) \dots (\sigma x_p) B(A_1^0, \dots, A_n^0, x_1, \dots, x_p)$ ta chứng minh A đúng trên $\mathcal{M}$.

Xét $B(A_1^0, \dots, A_n^0, x_1, \dots, x_p) \equiv B(A_1^0, \dots, A_n^0, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p))$ (do nhận xét ở trên) từ đó ta có:

$$\begin{aligned} (\sigma x_p) B(A_1^0, \dots, A_n^0, x_1, \dots, x_p) &\equiv (\sigma x_p) B(A_1^0, \dots, A_n^0, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)) \\ &\equiv \widehat{(\sigma x_p)} B(A_1^0, \dots, A_n^0, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)) \end{aligned}$$

tương tự như vậy đối với $\sigma x_1 \dots \sigma x_{p-1}$ ta có:

$$\begin{aligned} (\sigma x_1) (\sigma x_2) \dots (\sigma x_p) B(A_1^0, \dots, A_n^0, x_1, \dots, x_p) \\ \equiv \widehat{(\sigma x_1)} \dots \widehat{(\sigma x_p)} B(A_1^0, \dots, A_n^0, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)) \end{aligned}$$

Công thức vế phải cũng là công thức vế trái nhưng xét trên trường $\mathcal{M}$. Tóm lại nếu A đúng trên $\mathcal{M}$ thì nó cũng đúng trên trường $\mathcal{M}'$ với $|\mathcal{M}'| \leq 2^n$. Định lý được chứng minh.

Hệ quả 1: Nếu công thức A chỉ chứa các vị từ một biến và luôn luôn đúng với mọi trường có không quá 2^n phần tử (n là số vị từ một biến có mặt trong A) thì A là công thức đồng nhất đúng, nghĩa là A đúng với mọi trường bất kỳ.

Chứng minh: Giả sử ngược lại A không đồng nhất đúng, nghĩa là có một trường $\mathcal{M}$ nào đó sao cho $\overline{A}$ thỏa mãn trên $\mathcal{M}$, theo định nghĩa trên thì tồn tại trường $\mathcal{M}'$ với $|\mathcal{M}'| \leq 2^n$ sao cho $\overline{A}$ thỏa mãn trên $\mathcal{M}'$. Chứng tỏ A không phải là đồng nhất đúng trên $\mathcal{M}$ trái với giả thiết. Vậy A đúng trên mọi trường có số phần tử $\leq 2^n$.

Hệ quả 2: Với mọi công thức A chỉ chứa vị từ một biến đều có thuật toán để giải quyết vấn đề A là đồng nhất đúng hay không.

Chứng minh: Lưu ý rằng theo định nghĩa thì việc đồng nhất đúng hay không trên trường $\mathcal{M}$ chỉ phụ thuộc vào lực lượng của $\mathcal{M}$. Nói cách khác nếu $\mathcal{M}$ và $\mathcal{M}'$ có lực lượng như nhau thì A đúng trên $\mathcal{M}$ khi và chỉ khi A đúng trên $\mathcal{M}'$.

Thật vậy để chứng minh điều đó ta chỉ cần chứng minh rằng: Nếu $|M| = |M'|$ thì A sai trên trường M với vị từ cụ thể nào đấy khi và chỉ khi A sai trên trường M' với vị từ cụ thể chẳng hạn là $\{A_i^0\}$.

Vì $|M| = |M'|$ nên lập được tương ứng 1 - 1 giữa các phần tử của chúng.

Vì vậy đối với $A_i^0(x)$ trên M ta có thể lập được vị từ $B_i^0(x')$ trên trường M' bằng cách tương ứng $B_i^0(x') \equiv A_i^0(x)$ khi và chỉ khi $x \leftrightarrow x'$. Từ đó suy ra nếu A sai trên M ứng với $A_i^0(x)$ khi và chỉ khi A sai trên M' ứng với $B_i^0(x')$.

Tóm lại tính đồng nhất đúng của công thức chỉ phụ thuộc vào lực lượng của trường mà không phụ thuộc vào các phần tử cụ thể của trường.

Thuật toán

Giả sử A là công thức chỉ chứa vị từ một biến.

- Bước 1: Thử A với tất cả các trường có lực lượng $\leq 2^n$ (n là số vị từ một biến có mặt trong A).
- Bước 2: Nếu nó đồng nhất đúng với mọi trường có lực lượng $\leq 2^n$ thì A là đồng nhất đúng. Nếu không thì A không đồng nhất đúng.

Thuật toán này qua một số hữu hạn bước sẽ dừng lại vì số các trường có lực lượng $\leq 2^n$ khác nhau là hữu hạn, còn những trường có lực lượng giống nhau thì không cần xét đến.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

A. TÀI LIỆU TIẾNG NƯỚC NGOÀI

1. AHO A. - ULLMAN J.
THE THEORY OF PASSING, TRANSLATION AND COMPILING I, II.
Prentice_Hall, Englewood Cliffs, 1972.
2. ASSER G.
EINFÜHRUNG IN DIE MATEMATISCHE LOGIK I,II,1959.
3. BECKER H. - WALTER H.
FORMALE SPRACHEN.
(Skriptum für aller Fachrichtungen ab.3.Semester_Uni_Text, Printed in Germany_West, 1977).
4. GINSBURG S.
THE MATHEMATICAL THEORY OF CONTEXTFREE LANGUAGES.
(Mc Grow_Hill, New York, 1966).
5. GRIES D.
COMPILER CONSTRUCTION FOR DIGITAL COMPUTERS.
(John Wiley & Sons, New York, 1971)
6. HOPCROFT J. - ULLMAN J.
FORMAL LANGUAGES AND THEIR RELATION TO AUTOMATA.
(Addison_wesley, Reading Mass._London, 1969).
7. HOTZ G. - CLAUS V.
AUTOMATENTHEORIE UND FORMALE SPRACHEN, III : FORMALE SPRACHEN.
(BI_Hochschulsripten Band 823a*, Mannheim, 1972).
8. HOTZ G. - WALTER H.
AUTOMATENTHEORIE UND FORMALE SPRACHEN, I:
TURINGMASCHINEN UND REKURSIVE FUNKTIONEN.
(BI_Hochschulsripten Band 821 / 822a, Mannheim, 1968).
9. KAIN R.
AUTOMATA THEORY: MACHINES AND LANGUAGE.
(Mc Graw_Hill, New York, 1972).
10. MAURER H.
THEORETISCHE GRUNDLAGEN DER PROGRAMMIERSPRACHEN.
(BI_Hochschultaschenbücher Band 404/404a*, Mannheim, 1969).

11. MENDELSON E.
INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC.
(Bản dịch tiếng Nga).
12. ROGERS H.
THE THEORY OF RECURSIVE FUNCTIONS AND EFFECTIVE
COMPUTABILITY.
(Mc Graw-Hill, New York, 1967).
13. ROSEN K. H.
DISCRETE MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS.
(Mc Graw-Hill, 1994).
14. SALOMAA A.
FORMAL LANGUAGES.
(Academic Press, New York, 1973).
15. CLAUDE BERGE.
THÉORIE DES GRAPHS ET SES APPLICATIONS.
(Dunod, Paris - 1967).

B. TÀI LIỆU TIẾNG VIỆT

1. PHAN ĐÌNH DIỆU.
LÝ THUYẾT ÔTÔ MẮT VÀ THUẬT TOÁN.
(Nxb. ĐH và THCN - Hà Nội, 1977).
2. ĐỖ ĐỨC GIÁO và ĐẶNG HUY RUẬN.
VĂN PHẠM VÀ NGÔN NGỮ HÌNH THỨC.
(Nxb. KH&KT - Hà Nội, 1991).
3. ĐỖ ĐỨC GIÁO và ĐẶNG HUY RUẬN.
LÝ THUYẾT HÀM ĐỆ QUY.
(ĐH TH - Hà nội, 1991).
4. ĐỖ ĐỨC GIÁO.
GIÁO TRÌNH TOÁN HỌC RỜI RẠC.
(Khoa CNTT, trường Đại học KHTN, ĐHQGHN, 1998).
5. ĐOÀN CHÂU LONG.
LÝ THUYẾT QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH VÀ LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ HỮU HẠN.
(Nxb. GD - Hà nội, 1982).
6. ĐỖ XUÂN LÔI.
CẤU TRÚC DỮ LIỆU VÀ THUẬT GIẢI.
(Nxb. GD - Hà Nội, 1993).

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
Lời giới thiệu	3
Lời nói đầu	5

Chương 1

KHÁI NIỆM THUẬT TOÁN - PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP - PHƯƠNG PHÁP ĐỆ QUY

§1. Khái niệm thuật toán	7
§2. Phương pháp quy nạp	21
§3. Phương pháp đệ quy	26

Chương 2

QUAN HỆ

§1. Quan hệ và biểu diễn quan hệ	37
§2. Cung và đường trong đồ thị của quan hệ	45
§3. Quan hệ ngược và quan hệ hợp thành	46
§4. Quan hệ tương đương	49
§5. Bao đóng bắc cầu của quan hệ	52
§6. Thuật toán xác định bao đóng bắc cầu của quan hệ	55

Chương 3

ĐỒ THỊ HỮU HẠN

§1. Đồ thị hữu hạn	57
§2. Số ổn định trong, số ổn định ngoài và nhân của đồ thị	67
§3. Sắc số của đồ thị	72
§4. Thuật toán tìm chu trình Euler và đường Euler	74
§5. Chu trình Haminton và đường Haminton	82
§6. Đường đi ngắn nhất trong đồ thị	85

Chương 4

CÂY

§1. Cây là một đồ thị liên thông không có chu trình	91
---	----

§2. Cây phân cấp	102
§3. Thuật toán tìm cây nhị nguyên tối ưu với các thông tin chứa ở các lá	107
§4. Thuật toán tìm cây nhị nguyên tối ưu với các thông tin chứa ở các đỉnh trong	136

Chương 5

NHẬP MÔN VỀ VĂN PHẠM VÀ NGÔN NGỮ HÌNH THỨC

§1. Khái niệm chung về ngôn ngữ	145
§2. Văn phạm và ngôn ngữ sinh bởi văn phạm	147
§3. Phân loại văn phạm của Chomsky	149
§4. Một số ví dụ về văn phạm	151
§5. Một số tính chất của văn phạm	155

Chương 6

ÔTÔ MÁT HỮU HẠN ĐOÁN NHẬN NGÔN NGỮ CHÍNH QUY

§1. Ôtô mát hữu hạn	163
§2. Ngôn ngữ chính quy và biểu thức chính quy	176

Chương 7

MÁY PUSHDOWN ĐOÁN NHẬN NGÔN NGỮ PHI NGỮ CẢNH

§1. Văn phạm phi ngữ cảnh và cây dẫn xuất của nó	184
§2. Giảm lược các văn phạm phi ngữ cảnh	189
§3. Dạng chuẩn của Chomsky	193
§4. Ôtô mát đẩy xuống	196
§5. Phương pháp phân tích tất định trên lớp ngôn ngữ phi ngữ cảnh	204

Chương 8

MÁY TURING KHÔNG ĐƠN ĐỊNH ĐÀN HỒI ĐOÁN NHẬN NGÔN NGỮ VĂN PHẠM

§1. Định nghĩa máy Turing không đơn định đàn hồi	214
§2. Sự tương đương giữa máy Turing không đơn định đàn hồi và văn phạm Chomsky	220

Chương 9 HÀM ĐỆ QUY

§1. Hàm đệ quy nguyên thủy	222
§2. Hàm đệ quy từng phần	235

Chương 10 QUAN HỆ GIỮA MÁY TURING ĐƠN ĐỊNH - HÀM ĐỆ QUY TỪNG PHẦN VÀ THUẬT TOÁN CHÍNH QUY

§1. Định nghĩa máy Turing đơn định	260
§2. Liên hệ giữa hàm đệ quy từng phần và máy Turing	262
§3. Liên hệ giữa máy Turing và thuật toán chính quy	273
§4. Liên hệ giữa hàm đệ quy từng phần và thuật toán chính quy	274

Chương 11 LÔGIC TOÁN

I. Đại số mệnh đề	276
§1. Các phép toán và công thức	276
§2. Điều kiện đồng nhất đúng	281
II. Hệ toán mệnh đề	285
§1. Hệ toán mệnh đề	286
§2. Các tính chất của hệ toán mệnh đề	290
§3. Định lý tương đương	299
§4. Quan hệ giữa đại số mệnh đề và hệ toán mệnh đề	316
§5. Tính phi mâu thuẫn, tính đầy đủ, tính độc lập của hệ toán mệnh đề	326
III. Lôgic vị từ	337
§1. Định nghĩa vị từ	337
§2. Khái niệm công thức đồng nhất bằng nhau và đồng nhất đúng	340
§3. Ý nghĩa các vị từ theo lý thuyết tập hợp	341
§4. Dạng chuẩn của công thức	343
§5. Vấn đề về tính giải được	346
TÀI LIỆU THAM KHẢO	351

Pgs, Pts. ĐỖ ĐỨC GIÁO

CƠ SỞ TOÁN TRONG LẬP TRÌNH

Chịu trách nhiệm xuất bản : Pgs, Pts. TÔ ĐĂNG HẢI

Biên tập và sửa bài : ĐỖ THỊ CẢNH

Trình bày bìa : HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 TRẦN HUNG ĐẠO - HÀ NỘI

In 700 cuốn, khổ 16 x 24 cm, Tại Nhà in ĐHQG Hà Nội.

Giấy phép xuất bản số : 544 - 1, cấp ngày 13/7/1998.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 1998.

QS
20

GLÁ : 35.000 d