

NGUYỄN MINH CHƯƠNG (Chủ biên) - NGUYỄN VĂN KHẢI
KHUẤT VĂN NINH - NGUYỄN VĂN TUẤN - NGUYỄN TƯỜNG

GIẢI TÍCH SỐ



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



NGUYỄN MINH CHƯƠNG (chủ biên) - NGUYỄN VĂN KHẢI -
KHUẤT VĂN NINH - NGUYỄN VĂN TUẤN - NGUYỄN TƯỜNG

GIẢI TÍCH SỐ

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Bản quyền thuộc HEVOBCO - Nhà xuất bản Giáo dục

11 - 2007/CXB/249 - 2119/GD Mã số : 7K471T7 - DAI

LỜI NÓI ĐẦU

Giải tích số đang phát triển mạnh, đặc biệt là mô phỏng số, phương pháp song song, xấp xỉ bằng spline và sóng nhỏ (wavelet) đang phát triển rất mạnh cùng với sự phát triển cực kì nhanh của tin học, máy vi tính.

Trước đây không lâu, đối với một số ngành lí thuyết như đại số trừu tượng, hình học vi phân, hình học đại số v.v... tưởng chừng như không thể có thuật toán, chương trình để đưa vào máy tính, nhưng bây giờ các ngành ấy đã có thuật toán, chương trình tính toán trên máy vi tính rồi (xem [81, 120, 88]). Đây là một trong các xu thế lớn của toán học hiện đại.

Nhà bác học nổi tiếng S.L. Sobolev mới 30 tuổi đã là viện sĩ Viện hàn lâm khoa học Liên Xô (cũ), đã xây dựng được một không gian phiếm hàm trừu tượng mang tên ông. Không gian này cực kì quan trọng và cần thiết cho gần hết các ngành khoa học và công nghệ, đã, đang và sẽ được phát triển không ngừng. Ông đã dành nửa đời người cho toán học tính toán. Nhiều nhà toán học có tên tuổi, trong đó có cả viện sĩ, cả những nhà bác học đã được giải thưởng Fields, Nobel, cũng đã viết nhiều công trình với nhan đề tưởng chừng không thuộc ngành giải tích số, nhưng rất gần với ngành này, như O.V. Besov, G.H. Hardy với các không gian phiếm hàm mang tên mình, H. Brezis(*), L. Nirenberg với bài báo "Lý thuyết bậc và dao động trung bình bị chặn", B.P. Maslov với sách "Các phương pháp tiệm cận cho phương trình giả vi phân", P.J. Lions(**) với sách "Nghiệm suy rộng của phương trình Hamilton - Jacobi", L.V.

Kantorovich (và G.P. Akilov) với sách "Giải tích hàm" (1984) v.v... Nhiều nhà toán học khác đã quan tâm đến rất nhiều lĩnh vực cũng đã

(*) đang là Giám đốc Phòng Giải tích số, DHTH Marie Curie, Paris

(**) Giải thưởng Fields đang cùng với bố, Viện sĩ J.J. Lions, trong Ban biên tập tạp chí "Mô phỏng toán học và giải tích số", 1 trong 4 tạp chí lớn nhất về giải tích số trên thế giới.

đóng góp nhiều bài báo về các phương pháp tính toán như P.Lax với lược đồ mang tên ông, O.A. Ladyzhenskaia [11], O.A. Oleinik [22, 102], S.Smale [111],... Đương nhiên còn rất nhiều nhà toán học đã dành cả đời chỉ cho giải tích số mà chúng tôi không thể liệt kê ở đây. Chúng tôi chỉ xin lưu ý rằng ngay trong lĩnh vực thị trường chứng khoán đang diễn biến gay gắt trong nền kinh tế thị trường, cũng phải nghiên cứu nhiều phương trình vi tích phân ngẫu nhiên, trong đó có phương trình Black-Scholes, với các bài toán biên phi tuyến mà không sử dụng giải tích số và máy vi tính thì không thể giải được.

Như vậy giải tích số là cực kì quan trọng và cần thiết cho khoa học và công nghệ. Do đó dù trong nước đã có nhiều sách viết bằng tiếng Việt, chúng tôi cũng được Nhà xuất bản Giáo dục cổ vũ, hối thúc viết quyển sách này.

Quyển sách gồm hai phần.

Phần Một gồm sáu chương giới thiệu các kiến thức cơ bản về giải tích số cho sinh viên các trường Đại học trong những năm đầu cũng như ở những năm cuối. Các kiến thức trong phần này của quyển sách được chọn lọc để thích hợp với tất cả các đối tượng ấy.

Chúng tôi cố gắng viết dễ đọc giả tiếp cận được với giải tích số hiện đại. Bên cạnh các biểu bảng, lược đồ, chúng tôi cũng đã sử dụng chương trình MAPLE V ở một số chỗ. Cuối mỗi chương của phần này đều có bài tập.

Phần Hai gồm năm chương. Phần này nhằm đưa độc giả đến một số hướng hiện đại trong giải tích số, đặc biệt để độc giả làm quen với một số kết quả nghiên cứu gần đây của các tác giả và các đồng nghiệp. Phần này cùng với một số tài liệu được liệt kê trong mục tài liệu tham khảo ở cuối sách có thể giúp cho sinh viên chuẩn bị luận văn thạc sĩ, luận án tiến sĩ và xa hơn.

Tiếp theo Chương XI là phần đáp số và hướng dẫn giải các bài tập. Như ta đã thấy giải tích số là một ngành rất rộng, nên chúng tôi chỉ đề cập một số vấn đề như trên. Ngay cả đối với các vấn đề được đề cập, với khuôn khổ quyển sách, chúng tôi cũng không thể đi sâu và rộng hơn. Song để khắc phục hạn chế ấy, chúng tôi cố gắng đưa vào những tài liệu gần đây về giải tích số trong mục tài liệu tham khảo, dù rằng những tài liệu này còn xa mới đầy đủ.

Chúng tôi trân trọng cảm ơn Nhà xuất bản Giáo dục đã cổ vũ và tạo điều kiện để quyển sách được ra đời phục vụ sớm, đặc biệt là T.S Nguyễn Huy Doan đã giúp các tác giả rất nhiều trong quá trình làm sách.

Hà Nội, Xuân 2000

CÁC TÁC GIẢ

FOREWORDS

Numerical analysis is intensively developing, especially, numerical modelling, parallel methods, spline and wavelet approximation are very rapidly growing along with the extremely rapid development of informatics, microcomputers.

Few years ago it seemed that there were some theoretical areas such as abstract algebra, differential geometry, algebraic geometry etc., which may have nothing to do with algorithms, programs for computers, but nowadays for such areas appear already the above mentioned materials, too (see [81, 88, 120]). It is one of great trends of modern mathematics.

The well known savant S.L.Sobolev at the thirty years old was already a member of the USSR (old). Academy of sciences with an abstract functional space bearing his name. This space is extremely important which has been developing endlessly in almost all branches of sciences, technology. S.L.Sobolev devoted a half of his life to computational mathematics. There are several well known mathematicians, among them members of Academies of sciences, winners of Fields, Nobel prizes, who have written several works with titles seemed not be long to numerical analysis, but essentially related to it, for instance, O.V.Besov, G.H. Hardy with the functional spaces bearing their names, H. Brezis and L. Nirenberg with the paper "Degree theory and BMO", B.P. Maslov with the book "Asymptotical methods for pseudo-differential equations", P.J. Lions with the book "Generalized solutions of Hamilton - Jacobi equations", L.V. Kantorovich (and G.P. Akilov) with the book "Functional analysis" (Nauka, Moskva, 1984) and so on. Many other mathematicians, who are interested in many fields, have contributed also many papers on computational methods, such as P.Lax with his famous difference scheme, O.A. Lagyenskaia [11], O.A Oleinik [22.102] S.Smale [111].. There are, of course, a lot of other mathematicians who have devoted all their life to numerical methods that we cannot list all of them here. We would like to notice that even in the stock market which is a heart of the modern economy requires a study of several random integral differential

equations, among them, the Black-Scholes equation, with nonlinear boundary value problems that cannot be solved up to day without numerical analysis and computers.

So numerical analysis is extremely important and necessary to sciences and technology. By this reason even though in Vietnam there have been many books on this field we are encouraged and pushed by the Education Publishing House to write this book.

The book consists of two parts. Part one with six chapters contain the basic of an undergraduate and graduate course on numerical analysis. We arrange the materials so that this part of the book is appropriate to students of colleges and Universities.

We try to write so that readers can approach to modern numerical analysis. Besides tables, schemes, we use the MAPLE V in some places. At the end of each chapter of this part there are exercises and problems.

Part two consists of five chapters aimed to lead readers to some trends of modern computational methods, especially, to be familiar with the recent results of the authors and his associates. This part together with works cited in the bibliography at the end of the book could help students to prepare a Master, Ph. D. Thesis or further study.

After the chapter XI, answers and hints to the exercises are given.

As already known that numerical analysis is a very large area, so we can cover only some problems as above. Even for the discussed problems, by the frame of the book, we cannot go deeper and wider. To over come, however, this limitation, we try to introduce a list of recent references, on numerical analysis even though, there is still not a complete one.

We are grateful to the Education Publishing House which encourages us and makes it possible for the book to see the light in a short period of time, especially. Dr. Nguyen Huy Doan for great help in preparing for the publishing.

Hanoi, Spring 2000

AUTHORS

CƠ SỞ CỦA GIẢI TÍCH SỐ

Chương I

MỘT SỐ KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

§1. KHÔNG GIAN METRIC

1. Một vài định nghĩa

Ta kí hiệu $\mathbf{R}$ là tập các số thực, $\mathbf{Q}$ là tập các số hữu tỉ, $\mathbf{Z}$ là tập các số nguyên, $\mathbf{N}$ là tập các số tự nhiên.

Định nghĩa 1.1.1. Xét một tập hợp X cùng với ánh xạ

$d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn các điều kiện :

- a) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$
- b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- c) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
- d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X.$

Khi đó tập hợp X cùng với d là một không gian metric và ánh xạ d được gọi là *hàm khoảng cách*.

Xét tập con M của X , khi đó M cùng với d hạn chế trên M là *không gian metric con của không gian metric X* .

Định nghĩa 1.1.2. Cho dãy các phần tử $x_n \in X, \forall n \in \mathbf{N}$ và phần tử $x^* \in X$. Khi đó x^* được gọi là *giới hạn của dãy* $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = 0$ và kí hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

Tập hợp $B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$ ($r > 0$) được gọi là *hình cầu mở tâm a, bán kính r* trong không gian metric X. Tương tự, tập hợp $\bar{B}(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$ được gọi là *hình cầu đóng tâm a, bán kính r* trong không gian metric X. Mỗi hình cầu mở $B(a, r)$ được gọi là một lân cận của phần tử a trong X.

Cho một tập hợp con M của X, điểm $a \in X$ được gọi là *điểm giới hạn của M* nếu tồn tại một dãy $\{x_n\}_n$ với $x_n \in M$, $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Dễ thấy rằng x^* là điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}_n$ khi và chỉ khi với mỗi lân cận $B(x^*, r)$, tồn tại một số N_0 sao cho $x_n \in B(x^*, r)$, $\forall n \geq N_0$.

Với mỗi tập hợp $M \subset X$, xét một tập hợp mới bao gồm M và tất cả các điểm giới hạn của M. Tập hợp mới đó được gọi là *bao đóng của M* và kí hiệu là $\bar{M}$.

Có thể thấy rằng phép lấy bao đóng có một vài tính chất sau :

$$a) \bar{M} \cup \bar{N} = \overline{M \cup N}$$

$$b) M \subseteq \bar{M}$$

$$c) \overline{\emptyset} = \emptyset$$

Tập hợp M có tính chất $M = \bar{M}$ được gọi là một *tập hợp đóng*. Tập hợp M có tính chất $\bar{M} = X$ thì được gọi là *trụ mật khắp nơi trong X*. Một tập hợp con M của X được gọi là *mở* nếu với mỗi $a \in M$ luôn tồn tại một hình cầu mở $S(a, r) \subset M$.

Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0$ sao cho $\forall n, m \geq N_0$ thì $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Định nghĩa 1.1.3. Không gian metric X thỏa mãn điều kiện mỗi dãy Cauchy đều có một điểm giới hạn $a \in X$ được gọi là *không gian metric đủ*.

Giả sử X, Y là hai không gian metric và M là một không gian con của X , một ánh xạ $f : M \rightarrow Y$ được gọi là *liên tục tại* $x_0 \in M$ nếu như $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x \in M$ thỏa mãn $d(x, x_0) < \delta$ thì $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Như vậy nếu : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ và $f(x)$ là ánh xạ liên tục thì : $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Xét dãy hình cầu $\{S_n(a_n, r_n)\}_n$ trong không gian metric X , khi đó, nếu như $S_{n+1}(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset S_n(a_n, r_n), \forall n$, thì ta nói dãy hình cầu đó *lồng nhau*; ngoài ra, nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ thì ta nói dãy hình cầu đó là *thắt*.

2. Một vài định lý và ví dụ :

Định lý 1.1.1. (Nguyên lý ánh xạ co). Giả sử X là không gian metric đủ và ánh xạ $T : X \rightarrow X$ thỏa mãn điều kiện :

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \quad (1)$$

với hằng số $\alpha < 1$ và $\forall x, y \in X$. Khi đó tồn tại duy nhất phần tử $x^* \in X$ sao cho $x^* = Tx^*$, hơn nữa với $x_0 \in X$ thì dãy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi $x_{k+1} = Tx_k, \forall k \in \mathbb{N}$, là hội tụ đến x^* , đồng thời ta có ước lượng :

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \quad (2)$$

Chứng minh. Dễ thấy

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(Tx_k, Tx_{k-1}) \leq \alpha d(x_k, x_{k-1}) \leq \dots \leq \alpha^k d(x_1, x_0),$$

$\forall k \in \mathbb{N}$. Từ đó $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$ ta có :

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^{n+p-1} + \dots + \alpha^n) d(x_1, x_0), \end{aligned}$$

$$\text{do đó : } d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)} d(x_1, x_0). \quad (3)$$

Ước lượng (3) chứng tỏ dãy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là dãy Cauchy, nên tồn tại duy nhất $x^* \in X$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

Cho $p \rightarrow \infty$ trong bất đẳng thức (3), ta thu được ước lượng (2) cần chứng minh. Vì $x_{n+1} = Tx_n$ nên cho $n \rightarrow \infty$, ta có $x^* = Tx^*$, vậy x^* là điểm mà $Tx^* = x^*$.

Giả sử ngoài ra còn có $\bar{x}$ cũng có tính chất $T\bar{x} = \bar{x}$, khi đó ta có : $d(x^*, \bar{x}) = d(Tx^*, T\bar{x}) \leq \alpha d(x^*, \bar{x})$, với $\alpha < 1$. Từ đó suy ra $x^* = \bar{x}$, vậy x^* là duy nhất. $\square$

Chú ý. a) Phần tử x_0 nói trên là tùy ý.

b) Ánh xạ T thỏa mãn điều kiện (1) được gọi là *ánh xạ co*.

Trong nhiều trường hợp, định lí sau đây được áp dụng :

Định lí 1.1.2 : Giả sử $S = \{x \mid d(a, x) \leq r\}$ là một hình cầu đóng trong không gian metric X và T là một ánh xạ xác định trên S , lấy giá trị trong X thỏa mãn các điều kiện sau :

a) $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$, $\forall x, y \in S$ và $\alpha < 1$ là hằng số

b) $d(Ta, a) \leq (1 - \alpha)r$.

Khi đó tồn tại phần tử $x^* \in S$ sao cho $Tx^* = x^*$, hơn nữa $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, với dãy $\{x_n\}$ được xây dựng bởi $x_{k+1} = Tx_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$

và x_0 là một phần tử bất kì trong S .

Chứng minh. Thật vậy :

$$d(Tx, a) \leq d(Tx, Ta) + d(Ta, a) \leq \alpha d(x, a) + (1 - \alpha)r.$$

Từ đó rút ra rằng $\forall x \in S$ thì $d(Tx, a) \leq r$, nên $Tx \in S$. Áp dụng định lý 1.1.1 ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 1. Xét $X = \mathbb{R}$ với khoảng cách thông thường $d(x, y) = |x - y|$. Khi đó X là không gian metric, hơn nữa nó còn là không gian metric đủ.

Ví dụ 2. Xét $X = \mathbb{Q}$ là tập hợp số hữu tỉ với khoảng cách $d(x, y) = |x - y|$, khi đó X là không gian metric.

Ví dụ 3. Xét $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ là tập hợp số tự nhiên với khoảng cách $d(x, y) = |x - y|$. Khi đó có thể thấy X là không gian metric đủ.

Ví dụ 4. Xét $X = C[0, 1]$ gồm các hàm liên tục trên $[0, 1]$ với khoảng cách $d(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$. Có thể chứng minh được

rằng X là không gian metric. Thật vậy :

- a) $d(x, y) \geq 0$
- b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- c) $d(x, y) = d(y, x)$
- d) $\forall t \in [0, 1] : [x(t) - y(t)] = [x(t) - z(t)] + [z(t) - y(t)]$, do đó $|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$.

$$\text{Vậy : } \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - z(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |z(t) - y(t)| ,$$

tức là : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$.

Không gian metric $C[0, 1]$ với khoảng cách d vừa xét được gọi là không gian các hàm liên tục trên $[0, 1]$ với khoảng cách Chebyshev. Có thể chứng minh $C[0, 1]$ là không gian metric đủ.

Bây giờ ta xét dãy hàm $\{x_n(t)\}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$ có nghĩa là :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x(t)| \right] = 0.$$

Vậy ta có : $\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon)$ sao cho $\max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x(t)| < \epsilon, \forall n \geq$

$n_0(\epsilon)$. Điều đó chứng tỏ dãy $\{x_n(t)\}$ hội tụ đều về $x(t)$. Để thấy điều ngược lại cũng đúng. Vậy ta có kết luận : sự hội tụ trong $C[0, 1]$ là sự hội tụ đều trên đoạn $[0, 1]$.

Ví dụ 5. Xét X là tập hợp tất cả các hàm số bị chặn trên đoạn $[0, 1]$. Với $x(t), y(t) \in X$, đặt :

$$d(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|.$$

Có thể thấy rằng X cùng hàm khoảng cách d là một không gian metric, kí hiệu là $M[0, 1]$. Sự hội tụ trong $M[0, 1]$ chính là sự hội tụ đều của các hàm trên đoạn $[0, 1]$. Ta có : $C[0, 1] \subset M[0, 1]$.

Ví dụ 6. (Không gian $l_p, p \geq 1$). Giả sử X là tập hợp các dãy số $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ với $x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}^*$ và : $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty, p \geq 1$.

Ta định nghĩa một hàm khoảng cách như sau : giả sử $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}, y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ là hai phần tử trong X thì :

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Nhận xét : $d(x, y) \geq 0 ; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y ; d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$. Bây giờ với $z = (z_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in X$ thì bất đẳng thức

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ tương đương với :

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - z_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad (4)$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkovski dạng tổng :

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i + \beta_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^p \right)^{1/p} \quad (5)$$

với $\alpha_i = (x_i - z_i)$ và $\beta_i = (z_i - y_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, thì có ngay (4). Vậy :
 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$. Từ đó d là hàm khoảng cách và X cùng với hàm khoảng cách này là một không gian metric.
 Người ta kí hiệu không gian này là l_p .

Ví dụ 7. (Không gian $L_p [0, 1]$, $p \geq 1$). Giả sử X là tập hợp các hàm số $x(t)$ xác định trên đoạn $[0, 1]$ sao cho tồn tại tích phân $\int_0^1 |x(t)|^p dt < +\infty^{(*)}$. Hai phần tử $x(t), y(t) \in X$ được coi là trùng nhau nếu chúng chỉ khác nhau trên một tập hợp có độ đo 0.

Với $x, y \in X$, đặt : $d(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p}$. Khi đó ta thấy rằng $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; $d(x, y) = d(y, x)$. Đồng thời, với $x, y, z \in X$ thì bất đẳng thức :

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

tương đương với

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p} &\leq \left(\int_0^1 |x(t) - z(t)|^p dt \right)^{1/p} + \\ &+ \left(\int_0^1 |z(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (6)$$

(*) Chính xác và đầy đủ hơn, xem §3 chương VII, hoặc [9], [55].

Áp dụng bất đẳng thức Minkovski dạng tích phân :

$$\left(\int_0^1 |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (7)$$

với $f(t) = (x(t) - z(t))$, $g(t) = (z(t) - y(t))$ thì có ngay (6). Vậy :
 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y \in X$. Từ đó d là hàm khoảng cách
 và X cùng với hàm khoảng cách này là một không gian metric.
 Người ta kí hiệu không gian này là $L_p [0, 1]$.

§2. KHÔNG GIAN BANACH

1. Không gian tuyến tính

Định nghĩa 1.2.1. Cho tập hợp $X \neq \emptyset$ cùng với một phép toán hai ngôi viết theo lối cộng (+) và một ánh xạ $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$. Với mỗi $k \in \mathbb{R}$ và mỗi $x \in X$ thì phần tử $\varphi(k, x)$ được gọi là *tích ngoài* của số k với phần tử x và được kí hiệu là kx . Giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn :

1) $(X, +)$ là một nhóm Abel với phần tử trung hòa θ , nghĩa là :

a) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall x, y, z \in X$

b) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in X$

c) Trong X tồn tại phần tử θ sao cho $x + \theta = \theta + x = x$, $\forall x \in X$

d) Với mỗi phần tử $x \in X$, tồn tại phần tử đối $(-x)$ sao cho

$$x + (-x) = \theta.$$

2) Tích ngoài có tính chất :

a) $1x = x$, $\forall x \in X$

b) $k(lx) = (kl)x$, $\forall k, l \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$.

c) Giữa tích ngoài và phép toán hai ngôi viết theo lối cộng có luật phân phối :

$$(i) (k + l)x = kx + lx, \forall k, l \in \mathbf{R}, \forall x \in X$$

$$(ii) k(x + y) = kx + ky, \forall k \in \mathbf{R}, \forall x, y \in X.$$

Khi đó người ta nói rằng X là một *không gian tuyến tính* trên $\mathbf{R}$ và mỗi phần tử $x \in X$ được gọi là một *vector*; còn các điều kiện trên được gọi là các tiên đề về không gian tuyến tính. Người ta cũng nói X là không gian tuyến tính thực. Bằng cách tương tự, ta có định nghĩa không gian tuyến tính phức. Trong nhiều trường hợp người ta cũng nói "*không gian vector* trên $\mathbf{R}$ " thay cho thuật ngữ "*không gian tuyến tính trên $\mathbf{R}$* ".

Chú ý : $\mathbf{R}$ cũng là một không gian tuyến tính trên chính nó.

Để thấy rằng với một không gian tuyến tính X thì các khẳng định sau là đúng :

- a) Phần tử trung hòa θ là duy nhất.
- b) Phần tử đối $(-x)$ của phần tử $x \in X$ là duy nhất.
- c) $\forall x \in X$ thì $0.x = 0$
- d) $\forall x \in X$ thì $(-1).x = -x$
- e) $\forall k \in \mathbf{R}$ thì $k.\theta = \theta$
- f) Nếu $k.x = \theta$ thì hoặc $k = 0$ hoặc $x = \theta$.

Định nghĩa 1.2.2. Cho hệ n vector $x_1, \dots, x_n$ trong không gian tuyến tính X . Xét đẳng thức vector :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$$

Nếu đẳng thức trên chỉ xảy ra với $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ thì ta nói hệ n vector đó *độc lập tuyến tính*. Nếu tồn tại một bộ số $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ với

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > 0$$

sao cho đẳng thức trên được thỏa mãn thì ta nói rằng hệ

n vector trên là *phụ thuộc tuyến tính*.

Định nghĩa 1.2.3. Giả sử X là một không gian tuyến tính trên $\mathbf{R}$. Xét x_1, x_2 là hai phần tử thuộc X , khi đó tập hợp các phần tử trong X có dạng : $y = (1 - t)x_1 + tx_2, \forall t \in [0, 1]$ được gọi là *đoạn thẳng* nối hai điểm x_1 và x_2 .

Tập hợp K trong X là *lồi* nếu $\forall x_1, x_2 \in K$ thì đoạn thẳng Δ nối x_1, x_2 nằm trọn trong K .

Định nghĩa 1.2.4. Giả sử X là một không gian tuyến tính trên $\mathbf{R}$. Tập con X_1 của X được gọi là một *không gian tuyến tính con* của không gian X nếu X_1 cùng hai phép toán cảm sinh của X trên X_1 tạo thành một không gian tuyến tính.

Định nghĩa 1.2.5. Giả sử X và Y là hai không gian tuyến tính trên $\mathbf{R}$. Khi đó ánh xạ $T : X \rightarrow Y$ được gọi là *tuyến tính* nếu :

$$a) T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2), \forall x_1, x_2 \in X.$$

$$b) T(kx) = kT(x), \forall k \in \mathbf{R}, \forall x \in X.$$

Chú ý. Người ta có thể dùng thuật ngữ : *ánh xạ tuyến tính* hoặc *toán tử tuyến tính*.

Định nghĩa 1.2.6. Giả sử X là một không gian tuyến tính trên $\mathbf{R}$. Một ánh xạ $T : X \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn điều kiện :

$$a) T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2), \forall x_1, x_2 \in X.$$

$$b) T(kx) = kT(x), \forall k \in \mathbf{R}, \forall x \in X.$$

gọi là một *phiếm hàm tuyến tính*.

2. Không gian Banach

Định nghĩa 1.2.7. Giả sử X là một không gian tuyến tính trên $\mathbf{R}$. Ánh xạ $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbf{R}$ xác định trên X , lấy giá trị trên tập số thực : $\|x\| \in \mathbf{R}, \forall x \in X$, thỏa mãn các điều kiện :

$$a) \|x\| \geq 0, \forall x \in X$$

$$b) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$c) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$$

$$d) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$$

được gọi là một *chuẩn* trên X .

Không gian tuyến tính X cùng với chuẩn $\|\cdot\|$ được gọi là một *không gian tuyến tính định chuẩn*.

Trong không gian tuyến tính định chuẩn X ta có thể định nghĩa hàm khoảng cách d như sau :

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Khi đó dễ thấy X là một không gian metric với khoảng cách d nêu trên.

Nếu với metric đó, X là không gian đủ thì X được gọi là *không gian Banach*.

Định nghĩa 1.2.8. Giả sử X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$ và $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ là hai chuẩn cùng xác định trên X . Khi đó hai chuẩn này được gọi là *tương đương* nếu như tồn tại hai số $m, M > 0$ sao cho : $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1, \forall x \in X$.

Định nghĩa 1.2.9. Giả sử X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn và $T : X \rightarrow Y$ là một toán tử tuyến tính. Nếu tồn tại giá trị hữu hạn :

$$\|T\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < +\infty$$

thì toán tử T được gọi là *bị chặn* (hay *giới nội*) và số $\|T\|$ được gọi là chuẩn của toán tử T .

3. Một số định lý và ví dụ

Định lý 1.2.1. Nếu X là một không gian tuyến tính hữu hạn chiều thì mọi chuẩn trên X là tương đương.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử trên X có $\|\bullet\|_1$ và $\|\bullet\|_2$ là hai chuẩn cho trước. Gọi $S = \{x \in X \mid \|x\|_1 = 1\}$. Vì S đóng và X có số chiều hữu hạn nên $\|\bullet\|_2$ đạt max và min trên S kí hiệu là M và m tương ứng. Xét $x \neq \theta$ là phần tử bất kì trong X , khi đó :

$$\|x\|_2 = \left\| \|x\|_1 \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 = \|x\|_1 \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2$$

Vì rằng $\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = 1$ nên $m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 \leq M$, do đó

$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$, vậy hai chuẩn là tương đương. $\square$

Ta có thể thấy rằng các khẳng định sau là đúng :

Định lý 1.2.2 : Toán tử tuyến tính $T : X \rightarrow Y$ là giới nội khi và chỉ khi T là toán tử liên tục.

$$\text{Định lý 1.2.3 : } \|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

Ví dụ 1. Xét $C[0, 1]$ các hàm số liên tục trên đoạn $[0, 1]$. Với $x(t), y(t) \in C[0, 1]$, $k \in \mathbf{R}$, ta định nghĩa :

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \forall t \in [0, 1]$$

$$(kx)(t) = k \cdot x(t), \forall t \in [0, 1]$$

Như vậy $C[0, 1]$ cùng với hai phép toán trên là một không gian tuyến tính trên $\mathbf{R}$.

Với $x \in C[0, 1]$, đặt $\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ thì có thể thấy $\|\bullet\|$ là một chuẩn trên $C[0, 1]$ và $C[0, 1]$ cùng với chuẩn nêu trên là một không gian Banach.

$$\text{Ví dụ 2. Với số } p \geq 1, \text{ xét không gian } l_p = \{x \mid x = (x_i)_i : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty\}.$$

Với $x = (x_i) \in l_p$ và $y = (y_i) \in l_p$, $\forall k \in \mathbf{R}$, ta định nghĩa :

$$(x + y)_i = (x_i + y_i), \forall i \in \mathbb{N}$$

$$(kx)_i = k.x_i, \forall i \in \mathbb{N}$$

Khi đó, l_p là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$.

Với $x \in l_p$, ta đặt : $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$, có thể thấy $\|\bullet\|$ là một

chuẩn trên l_p và l_p cùng với chuẩn nêu trên là một không gian Banach.

Ví dụ 3. Với số $p \geq 1$, xét $L_p[0, 1]$. Với $x = x(t) \in L_p[0, 1]$ và $y = y(t) \in L_p[0, 1]$, $\forall k \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa :

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \forall t \in [0, 1]$$

$$(k.x)(t) = k.x(t), \forall t \in [0, 1]$$

Không gian $L_p[0, 1]$ với hai phép toán trên là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$.

Với $x \in L_p[0, 1]$, xét : $\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$. Khi đó $\|\bullet\|$ là

một chuẩn trên $L_p[0, 1]$ và $L_p[0, 1]$ cùng với chuẩn nêu trên là một không gian Banach.

Ví dụ 4. Xét $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$. Với $x = (x_i)$, $y = (y_i)$, $k \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa :

$$(x + y)_i = (x_i + y_i), \forall i = 1, \dots, n$$

$$(kx)_i = kx_i, \forall i = 1, \dots, n$$

Khi đó $\mathbb{R}^n$ với hai phép toán nêu trên là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$.

Với $x \in \mathbb{R}^n$, đặt $\|x\|_2 = (\sum x_i^2)^{1/2}$ thì ta có $\|\bullet\|_2$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^n$ cùng với chuẩn nêu trên là một không gian Banach.

Có thể đặt $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ thì $\|\cdot\|_\infty$ là một chuẩn nữa trên $\mathbf{R}^n$

và $\mathbf{R}^n$ cùng chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ là một không gian Banach.

Cũng có thể lấy $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ thì $\|\cdot\|_1$ cũng là một chuẩn trên

$\mathbf{R}^n$ và $\mathbf{R}^n$ cùng chuẩn $\|\cdot\|_1$ là một không gian Banach. Chú ý rằng nếu $\{x^{(k)}\}$ là dãy trong $\mathbf{R}^n$, $x^{(k)} \rightarrow x^*$ thì $x_i^{(k)} \rightarrow x_i^*$, $\forall i = 1, \dots, n$, ngoài ra sự hội tụ theo chuẩn này sẽ kéo theo sự hội tụ theo chuẩn khác.

Rõ ràng ba chuẩn vừa xét trên $\mathbf{R}^n$ là tương đương.

Vi dụ 5. Xét $X = Y = \mathbf{R}^n$ và $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ là một ma trận vuông cấp n .

Xét toán tử tuyến tính $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ cho bởi $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}x$ trong đó vế phải $\mathcal{A}x$ được hiểu là phép nhân ma trận $\mathcal{A}$ với ma trận cột x :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Hãy tính các chuẩn : $\|\mathcal{A}\|_\infty$, $\|\mathcal{A}\|_1$, $\|\mathcal{A}\|_2$.

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ta có : } \|\mathcal{A}x\|_\infty &= \max_i \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |x_k| \leq \\ &\leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \cdot \max_k |x_k| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \cdot \|x\|_\infty \end{aligned}$$

Nếu chọn $\|x\|_\infty = 1$ thì từ đó ta có :

$$\|\mathcal{A}\|_\infty \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \quad (8)$$

Giả sử $\max_{k=1}^n |a_{ik}|$ đạt được tại $i = i_0$. Khi đó chọn :

$$\bar{x} = (\bar{x}_k)_{k=1, n} \text{ với } \bar{x}_k = \begin{cases} \frac{|a_{i_0 k}|}{a_{i_0 k}} & \text{nếu } a_{i_0 k} \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } a_{i_0 k} = 0 \end{cases}$$

Ta có : $\|\bar{x}\|_\infty = 1$ và $\left| \sum_{k=1}^n a_{i_0 k} \bar{x}_k \right| = \sum_{k=1}^n |a_{i_0 k}|$

Vậy $\|\mathcal{A}\bar{x}\|_\infty = \max_i \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{x}_k \right| \geq \left| \sum_{k=1}^n a_{i_0 k} \bar{x}_k \right| = \sum_{k=1}^n |a_{i_0 k}|. \quad (9)$

Từ đó rút ra : $\|\mathcal{A}\|_\infty \geq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$

Từ (8) và (9) ta có : $\|\mathcal{A}\|_\infty = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$

2) Bây giờ xét :

$$\|\mathcal{A}x\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right|$$

Khi đó ta có :

$$\|\mathcal{A}x\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \cdot |x_k| \leq \sum_{k=1}^n \left(\max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \right) \cdot |x_k|$$

Vậy :

$$\|\mathcal{A}x\|_1 \leq \left(\max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \right) \cdot \sum_{k=1}^n |x_k|$$

Nếu chọn $\|x\|_1 = 1$ thì ta có : $\|\mathcal{A}\|_1 \leq \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \quad (10)$

Bây giờ giả sử $\max_{i=1}^n |a_{ik}|$ đạt được tại $k = k_0$, khi đó ta chọn :

$$\bar{x} = (\bar{x}_k) \text{ với } \bar{x}_k = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \neq k_0 \\ 1 & \text{nếu } k = k_0 \end{cases}$$

Rõ ràng $\|\bar{x}\|_1 = 1$

$$\text{Do đó } \|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{x}_k \right| = \sum_{i=1}^n |a_{ik_0}| \quad (11)$$

Từ (10) và (11) có : $\|A\|_1 = \max_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$.

3) Dưới đây ta sẽ chứng minh $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$, với λ_1 là giá trị riêng lớn nhất của ma trận $A'A$, trong đó A' là ma trận chuyển vị của A . Thật vậy, vì $A'A$ là đối xứng, nên các giá trị riêng đều là số thực và không âm. Giả sử $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ là các giá trị riêng của $A'A$, còn $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ là các vectơ riêng tương ứng, với $\|x^{(i)}\|_2 = 1, \forall i = 1, n$.

Giả sử $x \in X, \|x\|_2 = 1$, khai triển x theo các $x^{(i)}$, ta có :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i x^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó : } \|Ax\|_2^2 &= (Ax, Ax) = (x, A'Ax) = \\ &= (c_1 x^{(1)} + \dots + c_n x^{(n)}, \lambda_1 c_1 x^{(1)} + \dots + \lambda_n c_n x^{(n)}) \\ &= \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \dots + \lambda_n c_n^2 \leq \lambda_1 \end{aligned}$$

Vậy : $\|A\|_2 \leq \sqrt{\lambda_1}$

Mặt khác, xét $x = x^{(1)}$, ta có :

$$\|e_n^{(1)}\|_2^2 = \lambda_1, \text{ từ đó } \|e\|_2 \geq \sqrt{\lambda_1}$$

Kết luận : $\|e\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$

§3. KHÔNG GIAN HILBERT

1. Mở đầu

Định nghĩa 1.3.1. Cho X là một không gian tuyến tính. Ánh xạ $\psi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện :

- a) $\psi(x, x) \geq 0, \forall x \in X$
- b) $\psi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- c) $\psi(x, y) = \psi(y, x), \forall x, y \in X$

d) $\psi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha \psi(x_1, y) + \beta \psi(x_2, y), \forall x_1, x_2, y \in X$
và $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

được gọi là một *tích vô hướng* trên X , còn $\psi(x, y)$ được gọi là *tích vô hướng* của hai phần tử x, y và thường được kí hiệu là (x, y) .

Nhận xét. Nếu X là một không gian tuyến tính trên đó có xác định một tích vô hướng $(\cdot, \cdot)$, khi đó ánh xạ $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ là một chuẩn trên X và X cùng với chuẩn đó là một không gian tuyến tính định chuẩn.

Chuẩn xác định như trên được gọi là chuẩn cảm sinh bởi tích vô hướng.

Từ đó có ánh xạ $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$$

là một hàm khoảng cách trên X và (X, d) là một không gian metric. Khoảng cách d vừa xác định được gọi là khoảng cách cảm sinh bởi tích vô hướng.

123456789101112131415161718192021222324252627282930313233343536373839404142434445464748495051525354555657585960616263646566676869707172737475767778798081828384858687888990919293949596979899100

Định nghĩa 1.3.2. Cho không gian tuyến tính X cùng với tích vô hướng $(\cdot, \cdot)$. Nếu cùng với khoảng cách d cảm sinh bởi tích vô hướng mà (X, d) trở thành một không gian metric đủ thì lúc đó X cùng với tích vô hướng $(\cdot, \cdot)$ được gọi là một *không gian Hilbert*.

Định nghĩa 1.3.3. Hệ vô hạn các phần tử $\{x_i\}_{i \in I}$ thuộc không gian tuyến tính X được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu như mọi hệ con hữu hạn các phần tử của nó là độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 1.3.4. Cho X là một không gian Hilbert. Hệ các phần tử $\{e_i\}_{i \in I}$ của X được gọi là *trực chuẩn* nếu :

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Định lý 1.3.1. Giả sử $\{x_i\}_{i \in I}$ là một hệ độc lập tuyến tính trong không gian Hilbert X . Khi đó có thể xây dựng được một hệ $\{e_i\}_{i \in I}$ trực chuẩn.

Thật vậy : Đặt $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$, $y_2 = x_2 - (x_2, e_1)e_1$ và $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$

Giả sử đã có $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$. Ta đặt $y_k = x_k - \left(\sum_{i=1}^{k-1} (x_k, e_i) e_i \right)$

và $e_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$. Khi đó hệ $\{e_i\}_{i \in I}$ là hoàn toàn xác định (vì nếu tồn tại

một chỉ số k sao cho $\|y_k\| = 0 \Leftrightarrow y_k = \theta$ thì dẫn đến hệ $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ là phụ thuộc tuyến tính, trái với giả thiết). Dễ thấy : $(e_1, e_1) = 1$.

$$\text{Xét } (e_2, e_1) = \left(\frac{y_2}{\|y_2\|}, e_1 \right) = \frac{1}{\|y_2\|} (y_2, e_1) =$$

$$= \frac{1}{\|y_2\|} (x_2 - (x_2, e_1) e_1, e_1) = \frac{1}{\|y_2\|} [(x_2, e_1) - (x_2, e_1)].$$

Vậy có $(e_2, e_1) = 0$, dễ thấy $(e_2, e_2) = 1$.

Bằng quy nạp toán học ta thấy với $k > h$:

$$\begin{aligned}(e_k, e_h) &= \left(\frac{y_k}{\|y_k\|}, e_h \right) = \frac{1}{\|y_k\|} (y_k, e_h) \\&= \frac{1}{\|y_k\|} (x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k, e_i) e_i, e_h) \\&= \frac{1}{\|y_k\|} [(x_k, e_h) - (x_k, e_h)], \text{ từ đó } (e_k, e_h) = 0, \text{ với } k > h, \text{ ngoài}\end{aligned}$$

ra $(e_k, e_k) = 1$ là rõ ràng. Như vậy hệ $\{e_i\}_{i \in I}$ là hệ trực chuẩn.

Quá trình xây dựng hệ $\{e_i\}_{i \in I}$ từ hệ $\{x_i\}_{i \in I}$ độc lập tuyến tính như trên được gọi là *quá trình trực chuẩn hóa Hilbert – Schmidt*.

Ví dụ 1 : Xét $X = \mathbf{R}^n$, với $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, đặt $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Có thể thấy $\mathbf{R}^n$ cùng với tích vô hướng

được xác định như trên là một không gian Hilbert.

Ví dụ 2 : Xét $X = L_2 [a, b]$ là không gian các hàm bình phương khả tích trên đoạn $[a, b]$ bao gồm các hàm thực $x(t)$ xác định, bình phương khả tích trên $[a, b]$ sao cho :

$$\int_a^b p(t) x^2(t) dt < +\infty$$

trong đó $p(t)$ là hàm *trọng* ($p(t)$ thường được chọn thỏa mãn các điều kiện : xác định và khả tích trên $[a, b]$, $p(t) \geq 0$ trên $[a, b]$ và $p(t) = 0$ chỉ trên một tập có độ đo 0). Ta trang bị trên $L_2 [a, b]$ một tích vô hướng bằng cách đặt : với $x(t), y(t) \in L_2 [a, b]$ thì :

$$(x, y) = \int_a^b p(t)x(t)y(t)dt$$

(có thể thấy tích phân này tồn tại hữu hạn $\forall x(t), y(t) \in L_2[a, b]$ do bất đẳng thức Bunhiacopski dạng tích phân).

Không gian $L_2[a, b]$ với tích vô hướng vừa xác định là một không gian Hilbert.

Ví dụ 3. Xét trường hợp cụ thể của $L_2[a, b]$ ở trên với $a = -1$, $b = 1$, $p(t) \equiv 1$, và xét hệ đa thức $x_1(t) \equiv 1$, $x_2(t) \equiv t$, ..., $x_k(t) \equiv t^{k-1}$, $k \geq 2$. Hãy trực giao hóa hệ $\{x_k(t)\}$ nói trên tương tự quá trình trực chuẩn hóa Hilbert – Schmidt (chính xác đến một hằng số nhân).

Nhận thấy : $\|x_1\| = 2$, $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$, thay số ta có $e_1 = \frac{1}{2}$. Dễ thấy

$$(x_2, e_1) = \int_{-1}^1 t dt = 0 \text{ nên } y_2 = x_2 = t, \forall t \in [-1, 1].$$

$$\text{Vậy } \|y_2\| = \left(\int_{-1}^1 t \cdot t dt \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^1 \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \text{ Vì } e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|},$$

$$\text{thay số có } e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot t, \forall t \in [-1, 1].$$

$$\text{Ta có : } (x_3, e_1) = \int_{-1}^1 t^2 \cdot dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

$$(x_3, e_2) = \int_{-1}^1 t^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} t dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$$

$y_3 = x_3 - [(x_3, e_1) e_1 + (x_3, e_2) e_2]$, thay số được :

$$y_3 = t^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \|y_3\| = \left(\int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dt \right)^{1/2},$$

rút gọn có $\|y_3\| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$, từ đó $e_3 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)$. v.v...

Quá trình cứ tiếp tục như vậy, ta sẽ được một hệ trực chuẩn $\{e_i\}$. Tuy nhiên do ta chỉ quan tâm đến tính trực giao của hệ nên có thể nhân mỗi e_i với một hằng số thích hợp để được một vectơ mới, vẫn kí hiệu là e_i nhưng với dạng đơn giản hơn, như sau :

$$e_1(t) \equiv 1, e_2(t) \equiv t, e_3(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$$

$$e_4(t) \equiv \frac{5t^3 - 3t}{2}, e_5(t) = \frac{35t^4 - 30t^2 + 3}{8}$$

$$e_6(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t) \text{ v.v...}$$

Hệ đa thức $\{e_i(t)\}_{i \in \mathbb{N}}$ trực giao thu được như trên gọi là hệ đa thức trực giao Legendre.

2. Một số kết quả cơ bản

Định nghĩa 1.3.5 : Giả sử X là không gian Hilbert, còn $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ là hệ trực chuẩn trong X . Với mỗi $x \in X$, ta xét $S_n = \sum_{i=1}^n c_i e_i$, với $c_i = (x, e_i)$, thì S_n được gọi là *tổng Fourier* của x và các c_i là các hệ số Fourier của x đối với hệ $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - x\| = 0$ thì người ta nói tổng Fourier S_n *hội tụ*

đến x và viết : $x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$.

Định lý 1.3.2 : Cho không gian Hilbert X và $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ là một hệ trực chuẩn của nó. Khi đó các phát biểu sau tương đương :

$$1) \forall x \in X, x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i.$$

$$2) \forall x \in X, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)^2$$

3) Nếu z là một phần tử trong X sao cho $(z, e_i) = 0, \forall i \in \mathbb{N}^*$ thì $z = \theta$.

4) Bao đóng của không gian con sinh bởi $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ trùng với X .

§4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. Phương trình vi phân cấp 1

Định nghĩa 1.4.1 : Phương trình vi phân cấp 1 giải ra được đối với đạo hàm là phương trình dạng :

$$y' = f(x, y) \quad (12)$$

Ta gọi $\varphi(x, y) = 0$ (có thể là $\varphi(x, y, c) = 0$) là *ng nghiệm* của phương trình (12) nếu từ đó ta tính được đạo hàm y' và khi thay y' vào (12) thì (12) trở thành đồng nhất thức. Ta gọi nghiệm dạng $\varphi(x, y, c) = 0$ có chứa một hằng số c tùy ý là nghiệm tổng quát của (12).

Định nghĩa 1.4.2 : Bài toán tìm nghiệm của phương trình (12) thỏa mãn điều kiện ban đầu : khi $x = x_0$ thì $y = y_0$ được gọi là *bài toán Cauchy*.

Ta công nhận định lý sau :

$$\text{Định lý 1.4.1 : Xét bài toán Cauchy } \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (13a) \\ (13b) \end{matrix}$$

Nếu $f(x, y)$ liên tục trong một lân cận của điểm (x_0, y_0) thì tồn tại một nghiệm $y = y(x)$ của (13a) thỏa mãn điều kiện ban đầu (13b). Hơn nữa, nếu $f'_y(x, y)$ cũng liên tục trong lân cận đó thì nghiệm ấy là duy nhất.

Định nghĩa 1.4.3 : *Nghiệm riêng* của phương trình (12) là nghiệm của bài toán Cauchy (13a) – (13b), tức là nghiệm duy nhất của (13a) thỏa mãn (13b).

Nghiệm kì dị của phương trình (12) là nghiệm mà tại mỗi điểm của đường cong nghiệm, tính duy nhất bị phá vỡ.

Ví dụ 1 : a) $y' = x$; b) $y' = xy$; c) $y' = y$; d) $y' = 0$ là những phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ 2 : Tìm nghiệm riêng của phương trình $y' = \cos x$ với điều kiện $y|_{x=0} = 10$.

Nhận thấy $\frac{dy}{dx} = \cos x$, vậy $dy = \cos x \, dx$, lấy tích phân hai vế có :
 $y = \int \cos x \, dx + C \Leftrightarrow y = \sin x + C$. Thay điều kiện ban đầu có :
 $10 = \sin 0 + C$, vậy $C = 10$. Từ đó nghiệm phải tìm là : $y = \sin x + 10$.

Ví dụ 3 : Xét phương trình $\sqrt{1-x^2} \, dy - dx = 0$.

Xét trong miền $G = \{(x, y) | |x| < 1, |y| < +\infty\}$ thì nghiệm tổng quát là $y = \arcsin x + C$. Đường thẳng $x = 1$ và đường thẳng $x = -1$ là hai nghiệm kì dị của phương trình đã cho.

Ví dụ 4 : Tìm nghiệm của bài toán :
$$\begin{cases} y' = 2x \\ y|_{x=1} = 1 \end{cases}$$

Vì $dy = 2x \, dx$ nên $y = x^2 + C$

Thay $x = 1, y = 1$ vào, có : $1 = 1^2 + C \Rightarrow C = 0$

Vậy nghiệm của bài toán là $y = x^2$.

Ví dụ 5 : Tìm nghiệm tổng quát của phương trình : $y' = 1 + y^2$

Vì $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ nên $\frac{dy}{1 + y^2} = dx$, từ đó $\arctg y = x + C$

Ví dụ 6 : Tìm nghiệm của phương trình vi phân : $x dx + (y + 1) dy = 0$
với điều kiện $y(0) = 0$.

Ta có : $(y + 1) dy = -x dx$ nên :

$$\left(\frac{y^2}{2} + y \right) = -\frac{x^2}{2} + C$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Thay điều kiện $x = 0, y = 0$ vào ta có $C = 0$, vậy nghiệm của bài toán là : $\frac{y^2}{2} + y + \frac{x^2}{2} = 0$

Chú ý 1 : a) Mọi phương trình dạng $y' = f(x)$ đều có thể giải tương tự như ví dụ 4.

b) Mọi phương trình dạng $y' = f(y)$ có thể giải tương tự như ví dụ 5.

c) Tổng quát, mọi phương trình dạng $y' = f(x) - g(y)$ đều có thể giải quyết tương tự như ví dụ 6.

Ví dụ 7 : Tìm nghiệm tổng quát của phương trình :

$$xy dy - (x^2 - y^2) dx = 0$$

Ta đặt $u = \frac{y}{x}$ thì $y = ux$, và $y' = u + xu'$.

Viết lại phương trình đã cho ở dạng : $y' = \frac{x^2 - y^2}{xy}$

Thay $u = \frac{y}{x}$ vào ta có : $u + xu' = \frac{x^2(1-u^2)}{x^2u} = \frac{1-u^2}{u}$, vậy :

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{u} - u = \frac{1-2u^2}{u}, \text{ từ đó ta có :}$$

$$\frac{udu}{1-2u^2} = \frac{dx}{x}. \text{ Lấy tích phân hai vế có :}$$

$$\int \frac{udu}{1-2u^2} = \ln|x| + \ln C \Rightarrow -\frac{1}{4} \int \frac{d(1-2u^2)}{1-2u^2} = \ln|x| + \ln C$$

$$\text{Vậy : } -\frac{1}{4} \ln|1-2u^2| = \ln|x| + \ln C \Rightarrow$$

$$0 = \ln C|x| \cdot |1-2u^2|^{1/4}, \text{ từ đó ta có :}$$

$$C|x| \cdot \left(1 - 2\frac{y^2}{x^2}\right)^{1/4} = 1.$$

Chú ý 2 : Phương trình dạng $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp nếu $M(x, y)$ và $N(x, y)$ là hai hàm đẳng cấp cùng bậc. Các phương trình dạng này được giải theo phương pháp đặt $u = \frac{y}{x}$ như ở ví dụ trên.

2. Phương trình vi phân cấp 2

Định nghĩa 1.4.4 : Phương trình vi phân cấp 2 giải ra được đối với đạo hàm cấp 2 là phương trình có dạng $y'' = f(x, y, y')$ (14)

Nghiệm của phương trình (14) là hàm số $y = \varphi(x)$ (hoặc $\varphi(x, C) = y$ hoặc $\varphi(x, C_1, C_2) = y$) sao cho khi thay vào (14) thì (14) trở thành đồng nhất thức với mọi x . Nghiệm dạng $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ là **nghiệm tổng quát** của (14). **Nghiệm riêng** là nghiệm nhận từ nghiệm tổng quát khi cho hằng số C_1, C_2 những giá trị cụ thể.

Định nghĩa 1.4.5 : Bài toán tìm nghiệm của phương trình (14) thỏa mãn điều kiện ban đầu : khi $x = x_0$ thì $y = y_0$ và $y'(x_0) = y'_0$ được gọi là **bài toán Cauchy**.

Ta công nhận không chứng minh định lí sau :

$$\text{Định lí 1.4.2 : Xét bài toán Cauchy } \begin{cases} y'' = f(x, y, y') & (14.a) \\ y(x_0) = y_0 & (14.b) \\ y'(x_0) = y'_0 & (14.c) \end{cases}$$

Nếu hàm $f(x, y, y')$ liên tục trong một lân cận U của (x_0, y_0, y'_0) thì tồn tại một nghiệm của bài toán. Hơn nữa, nếu f_y và $f_{y'}$ cũng liên tục trong U thì nghiệm ấy là duy nhất.

Định nghĩa 1.4.6 : Bài toán tìm nghiệm của phương trình (14) thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$ và $y(x_1) = y_1$ được gọi là *bài toán biên hai điểm* ($y_0 < y_1$). Như vậy, bài toán biên hai điểm là bài toán:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

Chú ý : Bằng cách tương tự, ta có thể định nghĩa phương trình vi phân cấp cao hơn và có thể phát biểu, chứng minh định lí về sự tồn tại và duy nhất nghiệm.

§5. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

1. Số gần đúng : Ta nói rằng a là *số gần đúng* của số a^* nếu như a không sai khác a^* nhiều, hiệu số $\Delta = (a^* - a)$ là *sai số thực sự* của a , nếu $\Delta > 0$ thì a là *giá trị gần đúng thiếu*, còn nếu $\Delta < 0$ thì a là *giá trị gần đúng thừa* của a^* .

Vì rằng a^* nói chung không biết nên cũng không biết Δ , tuy nhiên có thể thấy, tồn tại $\Delta_a \geq 0$ thỏa mãn điều kiện :

$$|a^* - a| \leq \Delta_a. \quad (15)$$

Số Δ_a thỏa mãn điều kiện (15) được gọi là *sai số tuyệt đối* của a , còn $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$ là *sai số tương đối* của a . Rõ ràng Δ_a, δ_a càng nhỏ càng tốt.

Chú ý : Nếu xét đoạn thẳng AB có số đo $a = 100\text{mét}$ và đoạn CD có số đo $b = 10\text{mét}$, với $\Delta a = \Delta b = 0,01\text{mét}$. Khi đó có $\delta_a = \frac{0,01}{100}$,

$\delta_b = \frac{0,01}{10}$, vậy $\delta_b = 10\delta_a$ và phép đo đoạn thẳng AB chính xác hơn phép đo đoạn thẳng CD. Từ đó ta thấy độ chính xác của một phép đo thường được phản ánh qua sai số tương đối.

2. Làm tròn số và sai số của phép làm tròn số

Xét một số thập phân dạng tổng quát :

$$a = \pm (\alpha_p \cdot 10^p + \dots + \alpha_i \cdot 10^i + \dots + \alpha_{p-s} \cdot 10^{p-s}) \quad (16)$$

trong đó $\alpha_j \in \mathbb{N}, \forall j, \alpha_p \neq 0, 0 \leq \alpha_j \leq 9$.

Nếu $(p - s) \geq 0$ thì a là số nguyên ; Nếu $(p - s) = -k$ ($k > 0$) thì a có phần lẻ gồm k chữ số, Nếu $(p-s) \rightarrow -\infty$ thì a là số thập phân vô hạn.

Làm tròn số a là bỏ đi một số các chữ số bên phải của số a để được số $\bar{a}$ gọn hơn và gần đúng với số a .

Quy tắc làm tròn : Xét số a ở dạng (16) và ta sẽ giữ lại đến bậc thứ i , phần bỏ đi là μ thì :

$$\bar{a} = \pm (\alpha_p \cdot 10^p + \dots + \alpha_{i+1} \cdot 10^{i+1} + \bar{\alpha}_i \cdot 10^i)$$

trong đó :

$$\bar{\alpha}_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{nếu } 0 \leq \mu < \frac{1}{2} \cdot 10^i \text{ hoặc } \mu = \frac{1}{2} \cdot 10^i \text{ mà } \alpha_i \text{ là số chẵn} \\ (\alpha_i + 1) & \text{nếu } \mu > \frac{1}{2} \cdot 10^i \text{ hoặc } \mu = \frac{1}{2} \cdot 10^i \text{ mà } \alpha_i \text{ là số lẻ} \end{cases}$$

Ta kí hiệu sai số của phép làm tròn là Γ_a , như vậy $|a - \bar{a}| = \Gamma_a$, rõ ràng $\Gamma_a \leq \frac{1}{2} \cdot 10^i$.

Vì $|a^* - \bar{a}| \leq |a^* - a| + |a - \bar{a}| \leq \Delta_a + \Gamma_a$, do đó khi làm tròn thì sai số tuyệt đối tăng thêm Γ_a .

Ví dụ : $a = 1,183$ thì $\bar{a} = 1,18 \approx 1,2 \approx 1$
 $b = -0,183$ thì $\bar{b} \approx -0,18 \approx -0,2 \approx 0$
 $c = 3,748$ thì $\bar{c} \approx 3,75 \approx 3,8 \approx 4$.

3. Chữ số có nghĩa, chữ số chắc

Xét số a ở dạng (16) nghĩa là được viết dưới dạng thập phân, khi đó, *chữ số có nghĩa* là mọi chữ số khác 0 và những chữ số 0 bị kẹp giữa hai chữ số khác 0 hoặc nó là những chữ số 0 ở hàng được giữ lại.

Xét số a ở dạng (16) :

$$a = \pm (\alpha_p \cdot 10^p + \dots + \alpha_i \cdot 10^i + \dots + \alpha_{p-s} \cdot 10^{p-s}).$$

Chữ số α_j ở (16) của số a là *chữ số chắc* nếu :

$$\Delta a \leq \omega \cdot 10^j, \omega \text{ là tham số cho trước.}$$

Tham số ω sẽ được chọn để sao cho một chữ số vốn là chắc thì sau khi làm tròn vẫn là chữ số chắc, rõ ràng α_i là chữ số chắc thì α_{i+1} cũng là chữ số chắc.

Ví dụ 1 : $a = 0,01700030$

Ta thấy hai chữ số 0 đầu tiên là không có nghĩa, tất cả các chữ số còn lại kể từ chữ số 1 sang phải đều có nghĩa.

Ví dụ 2 : $a = 1,70134, \Delta a = 0,001$.

$$\text{Khi đó : } a = 1 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-5}.$$

Chọn $\omega = 1$ thì a có 4 chữ số đầu là chắc gồm 1, 7, 0, 1, còn hai chữ số không chắc là 3, 4, còn nếu chọn $\omega = \frac{1}{2}$ thì a có 3 chữ số 1, 7, 0 là chắc, ba chữ số còn lại 1, 3, 4 là không chắc.

Bây giờ ta sẽ bàn đến vấn đề chọn ω .

Giả sử số a viết ở dạng (16) và α_i là chắc, vậy α_{i+1} vốn là chắc. Ta chọn ω để sao cho khi làm tròn đến đúng bậc $(i+1)$ thì có α_{i+1} vẫn là chắc, muốn vậy ta phải có :

$$\Delta\alpha + \Gamma_a \leq \omega \cdot 10^{i+1} \Leftrightarrow \omega \cdot 10^i + \frac{1}{2} \cdot 10^{i+1} \leq \omega \cdot 10^{i+1} \cdot$$

từ đó có $\omega \geq \frac{5}{9}$. Tuy nhiên trong thực tế để cho tiện, người ta

thường chọn $\omega = \frac{1}{2}$ hoặc $\omega = 1$, nếu $\omega = 1$ thì người ta nói chữ số là

chắc theo nghĩa rộng, còn nếu $\omega = \frac{1}{2}$ thì người ta nói chữ số là chắc theo nghĩa hẹp.

Trong cuốn sách này, kể từ nay về sau, nếu không chú thích gì thêm, ta chỉ xét chữ số chắc theo nghĩa rộng, đồng thời ta cũng quy ước rằng, khi viết chữ số gần đúng thì hoặc là mọi chữ số đều là chắc, hoặc là chỉ rõ sai số.

4. Sai số tính toán

Giả sử phải tìm đại lượng y theo công thức :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Gọi $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, $y^* = f(x^*)$ là giá trị đúng còn $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = f(x)$ là giá trị gần đúng của y^* , $\Delta x_i = |x_i^* - x_i|$.

Giả sử $f(x_1, \dots, x_n)$ là hàm số khả vi liên tục thì :

132.032
132.032
132.032

$$\Delta y = |y - y^*| = |f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)| = \sum_{i=1}^n \left| \bar{f}'_{x_i} \right| \cdot |x_i - x_i^*|$$

với $\bar{f}'_{x_i}$ là đạo hàm theo x_i tính tại điểm trung gian.

Vì f là khả vi liên tục, Δx_i khá bé nên :

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \bar{f}'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \right| \Delta x_i \quad (17)$$

Vậy :

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{|y|} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f \right| \Delta x_i \quad (18)$$

a. Sai số của phép toán cộng, trừ :

Nếu $y = \sum_{i=1}^n x_i$ thì $y'_{x_i} = 1$, vì vậy ta có :

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \Delta x_i .$$

Chú ý rằng nếu tổng đại số $y = \sum_{i=1}^n x_i$ bé về giá trị tuyệt đối thì

$\frac{\Delta y}{|y|}$ lớn, phép tính sẽ kém chính xác. Ta khắc phục bằng cách tránh công thức đưa đến hiệu của hai số gần nhau.

$$\text{Ví dụ 3 : } y = \sqrt{2,01} - \sqrt{2,00}$$

$$\text{Ta có : } y = \frac{0,01}{\sqrt{2,01} + \sqrt{2,00}} = \frac{0,01}{1,42 + 1,41} = 0,0035.$$

b. Sai số của phép toán nhân, chia

Giả sử $y = \prod_{i=1}^n x_i / \prod_{i=1}^{q-p} x_{p+i}$

Áp dụng (17), (18) sẽ có :

$$\delta_y = \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_q}$$

$$\Delta y = |y| \cdot \delta_y$$

c. Sai số của phép tính lũy thừa

Xét $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$), khi đó $\delta_y = |\alpha| \cdot \delta_x$.

Như vậy nếu $\alpha > 1$ thì độ chính xác là giảm đi, nếu $\alpha < 1$ thì độ chính xác tăng lên. Nếu $\alpha = -1$ (phép nghịch đảo) thì độ chính xác là không đổi, nếu $\alpha = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ (phép khai căn) thì độ chính xác tăng lên.

d. Sai số của phép tính logarit : $y = \ln x$.

Xét $y = \ln x$, ta có $\Delta y = \delta_x$.

Ví dụ 4 : Biết diện tích hình vuông $S = 12,34$ và $\Delta S = 0,01$. Hãy tính cạnh của hình vuông.

Gọi x là cạnh hình vuông, thì $x = \sqrt{S} = 3,513$. Xét $\delta_S = \frac{\Delta S}{S} \approx 0,008$, vậy $\Delta x \approx 1,4 \cdot 10^{-3}$, từ đó thấy rằng x có 3 chữ số chắc (trừ chữ số 3 cuối cùng).

5. Bài toán ngược của sai số :

Giả sử đại lượng y được tính theo công thức : $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Yêu cầu đặt ra là cần tính Δx_i như thế nào để $\Delta y \leq \varepsilon$, với ε là cho trước.

Theo biểu thức tổng quát của sai số tính toán, ta phải có :

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \leq \varepsilon.$$

Bất đẳng thức trên sẽ thỏa mãn nếu $\Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{n \cdot |f'_{x_i}|}$.

Kết luận : Nếu các biến x_i có vai trò "đều nhau" thì ta có thể lấy

$$\Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{n \cdot |f'_{x_i}|}, \text{ khi đó } \Delta y \leq \varepsilon.$$

Ví dụ 5 : Một hình trụ có chiều cao $h \cong 3m$, bán kính đáy $R \cong 2m$. Tìm Δh , ΔR , số π để thể tích V được tính chính xác đến $0,1m^3$. Ta có : $V = \pi R^2 h$, nên có : $\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 h$, $\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R h$,

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi R^2. \text{ Vậy } \Delta \pi = \frac{0,1}{3.4.3} < 0,003 ; \Delta R = \frac{0,1}{3.6\pi.2} < 0,001 ;$$

$$\Delta h = \frac{0,1}{3\pi.4} < 0,003.$$

BÀI TẬP

1. Xét $X = C[a, b]$ là tập hợp các hàm số thực liên tục trên đoạn $[a, b]$. Với mọi $x, y \in X$, xét $[x + y](t) = x(t) + y(t)$, $\forall t \in [a, b]$. Với số $k \in \mathbf{R}$, với $x \in X$, xét : $[kx](t) = k \cdot x(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

a) Chứng minh rằng X là không gian vectơ trên $\mathbf{R}$.

b) Gọi X_1 là tập hợp các hàm số $x(t) \in X$ sao cho tồn tại đạo hàm $x'(t)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Chứng minh rằng X_1 là không gian vectơ con của X , ta kí hiệu $X_1 = C^1[a, b]$.

c) Xét ánh xạ $f : X_1 = C^1[a, b] \rightarrow X$ xác định bởi $f(x) = x'(t)$. Chứng minh rằng f là một ánh xạ tuyến tính.

d) Xét ánh xạ $g : X = C[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ xác định bởi :

$$g(x) = \int_a^b x(t) dt.$$

Hãy chứng minh rằng g là một phiếm hàm tuyến tính.

2. Xét X là tập hợp các ma trận vuông cấp n với phép cộng hai ma trận và phép nhân một số $k \in \mathbb{R}$ với một ma trận theo nghĩa thông thường. Chứng minh rằng X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$.

3. Xét $X = C[a, b]$ với phép toán ở bài tập 1, sau đó trang bị cho nó một chuẩn sau đây: $\forall x \in C[a, b]$, ta có:

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

a) Hãy chứng minh rằng $C[a, b]$ là không gian Banach.

b) Xét toán tử $\mathcal{A}: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ xác định bởi:

$$(\mathcal{A}x)(t) = \int_a^b k(t, s) \cdot x(s) ds,$$

trong đó $k(t, s)$ là hàm liên tục theo hai biến t, s trong hình vuông

$$I = \{(t, s) \mid a \leq t, s \leq b\}.$$

Hãy chứng minh rằng $\mathcal{A}$ là một toán tử tuyến tính.

Hãy tính chuẩn của $\mathcal{A}$ trong trường hợp $a = 0, b = 1$.

4. Cho $a = 10, \Delta a = 0,05$.

$$b = 0,135, \Delta b = 0,0001$$

$$c = 53,74, \Delta c = 0,004.$$

Tính sai số tuyệt đối của:

$$P = a + b - c$$

$$Q = a + 10b - 6c$$

$$R = c^2$$

$$S = \sqrt[3]{a}$$

$$K = \ln a$$

5. Xét ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau đây:

a) Tồn tại đạo hàm $f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

b) $|f'(x)| \leq q < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng ánh xạ f là ánh xạ co trên $\mathbb{R}$.

6. Xét đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$) và ánh xạ $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ thỏa mãn điều kiện :
- a) $|f(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$.
- Chứng minh rằng f là ánh xạ co trên $[a, b]$.
7. Hãy chỉ ra một ánh xạ không phải là co.
8. Giả sử H là một không gian Hilbert.
- Ta gọi H là không gian tách được nếu trong H tồn tại một tập con đếm được M sao cho bao đóng của M là $\overline{M} = H$. Hãy chứng minh rằng :
- a) $L_2[0, 1]$ là tách được.
- b) l_2 là tách được.
9. Giả sử H là một không gian Hilbert và hệ $\{e_i\}_{i=1}^n$ là n vector trong H , xét định thức Gramm :
- $$G = G(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det(\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j=1}^n.$$
- Hãy chứng minh rằng hệ $\{e_i\}_{i=1}^n$ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi định thức Gramm G là khác 0.

Chương II

GIẢI TÍCH SỐ TRONG GIẢI TÍCH

I – LÝ THUYẾT NỘI SUY

Trong thực tế tính toán, ta thường phải tính giá trị của hàm số $y = f(x)$ với x bất kì trên đoạn $[a, b]$, trong khi chỉ biết các giá trị $y_i = f(x_i)$, $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$. Ở một số trường hợp khác, biểu thức giải tích của $f(x)$ là đã biết, nhưng quá phức tạp. Với những

trường hợp như vậy, người ta thường xây dựng một hàm số $P(x)$ đơn giản và thỏa mãn điều kiện $P(x_i) = f(x_i)$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$ và $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$, $x_i \in [a, b]$ $\forall i$; ngoài ra tại $x \in [a, b]$, $x \neq x_i$ thì $P(x)$ xấp xỉ $y = f(x)$ theo một độ chính xác nào đó. Hàm số $P(x)$ như vậy được gọi là *hàm nội suy* của $f(x)$, còn các x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) gọi là các *mốc nội suy*. Bài toán xây dựng hàm số $P(x)$ như vậy được gọi là *bài toán nội suy*.

Trong quá trình xây dựng hàm $P(x)$, lẽ tự nhiên là ta xây dựng $P(x)$ có đặc tính tương tự với hàm số $y = f(x)$, chẳng hạn nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T thì $P(x)$ cũng vậy v.v...

Dùng hàm nội suy $P(x)$, ta có thể dễ dàng tính được các giá trị $f(x)$ tại x bất kì thuộc $[a, b]$ tương đối chính xác. Từ đó có thể tính gần đúng đạo hàm, hoặc tích phân của $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$. Vì các đa thức đại số là đơn giản nên trước tiên ta nghĩ đến việc xây dựng $P(x)$ ở dạng đa thức đại số.

§1. ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE

1. Đa thức nội suy Lagrange với mốc bất kì

Bài toán : Cho $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$, $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$, và $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Hãy xây dựng đa thức nội suy $L_n(x)$ thỏa mãn $\deg L_n(x) \leq n$, $L_n(x_i) = y_i$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$.

Trước tiên ta xét :
$$\Phi_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x - x_i) / \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i).$$

Rõ ràng $\deg \Phi_j(x) = n$, $\forall j = 0, 1, \dots, n$ và :

$$\Phi_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$$

Đặt $L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \Phi_j(x)$ ta có $\deg L_n(x) \leq n$ và $L_n(x_i) = y_i$,

$\forall i = 0, 1, \dots, n$. Vậy $L_n(x)$ thỏa mãn mọi yêu cầu của bài toán đặt ra và $L_n(x)$ xây dựng như vậy được gọi là đa thức nội suy Lagrange.

Đặt $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, ta có :

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j) \omega'_{n+1}(x_j)} \quad (1)$$

Giả sử ngoài ra còn có đa thức $\tilde{L}_n(x)$ thỏa mãn các điều kiện trên khi đó gọi $\varphi(x) = [L_n(x) - \tilde{L}_n(x)]$ thì $\deg \varphi(x) \leq n$ và nhận ít nhất là $(n + 1)$ nghiệm $x_0, x_1, \dots, x_n$, do đó $\varphi(x) \equiv 0$, do vậy $\tilde{L}_n(x) \equiv L_n(x)$.

Như vậy tồn tại duy nhất một đa thức với các điều kiện kể trên.

2. Đa thức nội suy Lagrange với mốc cách đều

Giả sử $x_{i+1} - x_i = h, \forall i = 0, 1, \dots, (n - 1), x_0 = a, x_n = b$. Khi đó dùng phép đổi biến $x = x_0 + th, x_j = x_0 + jh$ với $j = 0, 1, \dots, n - 1$ và thay vào biểu thức của $\Phi_j(x)$ ta được :

$$\Phi_j(x) = \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{(t-j)} \cdot \frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!}$$

Từ đó ta thu được :

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \cdot \frac{C_n^j}{(t-j)} y_j \quad (2)$$

Chú ý rằng, trong công thức (2) thì các hệ số $(-1)^{n-j} C_n^j$ là không phụ thuộc vào hàm số $f(x)$, mặc nội suy, bước h nên có thể tính sẵn và lập bảng để sử dụng trong quá trình tính toán.

Nhận xét : 1) Đa thức nội suy Lagrange có ưu điểm là đơn giản, dễ tính và nhược điểm là nếu thêm mốc nội suy thì phải tính lại từ đầu.

2) Nếu $f(x)$ là đa thức, $\deg f(x) \leq n$ thì $L_n(x) \equiv f(x)$.

Ví dụ 1 : Tính đa thức nội suy Lagrange với hàm số $y = \sin \pi x$ với $x_0 = 0 = a$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2} = b$, trên $[0, \frac{1}{2}]$. Ta có : $y_0 = 0$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 1$, từ đó có :

$$L_2(x) = 0 + \frac{x(x - \frac{1}{2})}{\frac{1}{6}(\frac{1}{6} - \frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{2} + \frac{x(x - \frac{1}{6})}{\frac{1}{2}(\frac{1}{6} - \frac{1}{2})} \cdot 1$$

rút gọn có $L_2(x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = f(x)$ bởi bảng sau :

x	0	1	2	4
y	1	0	2	1

Hãy tính đa thức nội suy Lagrange $L_3(x)$ của nó trên đoạn $[0, 4]$ và tính gần đúng $f(3)$ bằng cách đặt : $f(3) \approx L_3(3)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } L_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} \cdot 0 \\ &+ \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} \cdot 2 + \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} \cdot 1 \end{aligned}$$

rút gọn có : $L_3(x) = \frac{1}{12}(-7x^3 + 39x^2 - 44x + 12)$

$$f(3) \approx L_3(3) = \frac{14}{4}.$$

3. Sai số. Khi thay $f(x)$ bởi $L_n(x)$ thì yêu cầu đánh giá

$|L_n(x) - f(x)|$ là cần thiết tất yếu (với những $x \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$).
Giả sử rằng $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp $(n+1)$ trên đoạn $[a, b]$.

Xét $F(x) = f(x) - L_n(x) - C\omega_{n+1}(x)$, trong đó C là hằng số, được chọn từ điều kiện $F(\bar{x}) = 0$, với $\bar{x}$ là điểm cần đánh giá sai số, từ

$$\text{đó : } C = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\omega_{n+1}(\bar{x})}$$

Dễ thấy $F(x)$ có ít nhất $(n+2)$ nghiệm $x_0, x_1, \dots, x_n$ và $\bar{x}$ ở trên đoạn $[a, b]$, theo định lí Rolle thì $F'(x)$ có ít nhất $(n+1)$ nghiệm phân biệt trên (a, b) , v.v... và $F^{(n+1)}(x)$ có ít nhất 1 nghiệm $x^* \in (a, b)$, nghĩa là :

$$f^{(n+1)}(x^*) - L_n^{(n+1)}(x^*) - C(n+1)! = 0$$

$$\text{Vậy : } C = \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}. \text{ Từ đó ta thu được :}$$

$$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(\bar{x}).$$

Gọi $M = \max_{x \in [a; b]} |f^{(n+1)}(x)|$ khi đó có ước lượng :

$$R_n(x) = |L_n(x) - f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)| \quad (3)$$

Hệ thức (3) cho ước lượng sai số của hàm số $y = f(x)$ cho trước và đa thức nội suy Lagrange của nó tại mỗi điểm.

Ví dụ 3 : Giả sử tính gần đúng $\sin \frac{\pi}{8}$ bằng cách đặt $\sin \frac{\pi}{8} \approx L_2\left(\frac{1}{8}\right)$ với $L_2(x)$ là đa thức ở ví dụ 1. Hãy ước lượng sai số.

$$\text{Áp dụng (3) thì : } R_2\left(\frac{1}{8}\right) \leq \frac{M}{3!} \left|\left(\frac{1}{8} - 0\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right)\right|$$

$$\text{Vì } f(x) = \sin \pi x \text{ nên } f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x \text{ nên } M = \pi^3$$

$$\text{Vậy sai số } R_2\left(\frac{1}{8}\right) \leq \frac{\pi^3}{6} \cdot \frac{1}{8^3}, \text{ khi đó } \sin \frac{\pi}{8} \approx \frac{25}{64}.$$

4. Mốc nội suy

$$\text{Khi ước lượng sai số ta có } |L_n(x) - f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|.$$

Trong mục này chúng ta sẽ chọn các mốc nội suy $x_i \in [a; b]$ để $\max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)|$ là nhỏ nhất. Nhận xét rằng với phép đổi biến

$$t = \frac{1}{(b-a)} [2x - (a + b)] \text{ thì đoạn } [a, b] \text{ chuyển thành } [-1; 1], \text{ do}$$

đó luôn có thể xét bài toán nội suy trên $[-1; 1]$ với các mốc nội suy thuộc đoạn $[-1; 1]$.

a. Đa thức Chebyshev

Xét hàm số $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ với $|x| \leq 1, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Để thấy : } T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \text{ v.v...}$$

Dùng công thức cộng góc ta dễ dàng chứng minh :

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (4)$$

Vậy, $T_n(x)$ là đa thức đại số, $\deg T_n(x) = n$ và hệ số cao nhất là 2^{n-1} .

Đa thức $T_n(x)$ đó được gọi là đa thức Chebyshev.

Nhận xét rằng :

1) $T_n(x)$ có đúng n nghiệm là :

$$x = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right), i = 0, 1, \dots, (n-1)$$

và như vậy mọi nghiệm của $T_n(x)$ đều thuộc $[-1; 1]$.

2) $\max_{x \in [-1; 1]} |T_n(x)| = 1$ khi $x = x_i = \cos \frac{i\pi}{n}$ với $i = 0, 1, \dots, n$.

Hơn nữa, $T_n(x_i) = 1$ với i chẵn và $T_n(x_i) = -1$ với i lẻ.

b) Chọn mức nội suy

Kí hiệu E là tập hợp tất cả các đa thức hệ số thực bậc n ($n \geq 1$) với hệ số cao nhất là 1 trên $[-1; 1]$. Xét phiếm hàm $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ xác định bởi : $\varphi(P) = \max_{x \in [-1; 1]} |P(x)|$ với mọi $P(x) \in E$.

Định lý 2.1.1 : Đa thức $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ làm cực tiểu phiếm hàm φ .

Chứng minh

$$\text{Thật vậy, rõ ràng } \varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Giả sử có đa thức $P(x) \in E$ sao cho : $\varphi(P(x)) < \frac{1}{2^{n-1}}$

Khi đó xét $Q(x) = [\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) - P(x)]$ thì $Q(x)$ là đa thức có

$\deg Q(x) \leq (n-1)$, mặt khác với $x_i = \cos \frac{i\pi}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$ thì :

$Q(x_i) = [\frac{\cos i\pi}{2^{n-1}} - P(x_i)]$ có dấu dương âm luân phiên, vậy $Q(x)$ có ít

nhất n nghiệm, vô lí. Định lí được chứng minh. $\square$

Từ định lí trên ta rút ra rằng : nếu chọn các mốc nội suy chính là các nghiệm của đa thức Chebyshev thì hàm số :

$$\omega_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$$

làm cực tiểu phiếm hàm ϕ và ước lượng tốt nhất của phép nội suy là :

$$R_n(x) = |L_n(x) - f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

§2. ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON

1. Khái niệm về tỷ sai phân và một vài tính chất

Giả sử hàm số thực $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và $x_i \in [a, b]$,

$\forall i = 0, 1, \dots, n$; $x_i \neq x_j$, $\forall i = j$. Khi đó tỷ số $\frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$ được gọi

là tỷ sai phân cấp 1 của hàm số $y = f(x)$ tại x_i, x_{i+1} ($i = 0, 1, \dots, n-1$) và được kí hiệu là $f(x_i; x_{i+1})$

Tỷ số $[f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})]/[x_{i+2} - x_i]$ được gọi là tỷ sai phân cấp 2 của hàm số $y = f(x)$ tại x_i và được ký hiệu là $f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})$.

337.842.7
1209.236

Tổng quát, tỷ số : $\frac{[f(x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) - f(x_i; \dots; x_{i+k-2})]}{(x_{i+k} - x_i)}$

được gọi là tỷ sai phân cấp k của hàm số $y = f(x)$ tại x_i và nó được ký hiệu là $f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k})$.

Tính chất 2.2.1. $f(x_0; \dots; x_k) = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}$

Tính chất 2.2.2. Tỷ sai phân là hàm đối xứng đối với các x_i .

Tính chất 2.2.3. Tỷ sai phân cấp $(m + 1)$ của đa thức bậc m là đồng nhất 0.

Hai tính chất đầu coi như là bài tập, ở đây ta chứng minh tính chất 3.

Thật vậy, giả sử $P(x)$ là đa thức bậc m, ta phải chứng minh $P(x; x_0; x_1; \dots; x_m) \equiv 0, \forall x \in [a, b]$ và $(m + 2)$ số $x, x_0, \dots, x_m$ là đôi một khác nhau. Ta có : $P(x; x_0) = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}$ là đa thức bậc

$(m - 1)$, từ đó có $P(x; x_0; x_1) = \frac{P(x; x_0) - P(x_0; x_1)}{(x - x_1)}$ là đa thức bậc

$(m - 2)$. Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được :

$P(x; x_0; x_1; \dots; x_k)$ là đa thức có bậc $[m - (k + 1)]$;

Vậy $P(x; x_0; \dots; x_{m-1})$ là đa thức bậc 0, từ đó :

$$P(x; x_0; \dots; x_{m-1}; x_m) \equiv 0. \square$$

2. Đa thức nội suy Newton với mốc bất kì

Giả sử hàm số thực $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ và $x_i \in [a, b], i = 0, 1, \dots, n$ và $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$. Gọi $L_n(x)$ là đa thức nội suy Lagrange của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu $L_n(x; x_0), L_n(x; x_0; x_1), \dots$ là các tỷ sai phân của $L_n(x)$ tại x .

Khi đó ta có : $L_n(x; x_0) = \frac{L_n(x) - L_n(x_0)}{x - x_0}$, vậy có :

$$L_n(x) = L_n(x_0) + L_n(x; x_0) \cdot (x - x_0)$$

Lại có : $L_n(x; x_0; x_1) = \frac{L_n(x; x_0) - L_n(x_0; x_1)}{x - x_1}$, từ đó rút ra :

$$L_n(x; x_0) = L_n(x_0; x_1) + L_n(x; x_0; x_1) \cdot (x - x_1)$$

Tương tự ta có :

$$L_n(x; x_0; \dots; x_{i-1}) = L_n(x_0; \dots; x_{i+1}) + L_n(x; x_0; \dots; x_i) \cdot (x - x_i)$$

Từ đó rút ra :

$$L_n(x) = L_n(x_0) + L_n(x_0; x_1)(x - x_0) + L_n(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + L_n(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Để ý $L_n(x_i) = y_i = f(x_i)$ và $L_n(x_0; x_i; \dots; x_k) = f(x_0; x_i; \dots; x_k)$
 $\forall k = 1, \dots, n$, ta có :

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (5)$$

Đa thức $L_n(x)$ cho bởi công thức (5) được gọi là đa thức nội suy Newton với mốc bất kì. *

Chú ý : 1) Nếu thêm một vài mốc nội suy thì để tính đa thức nội suy Newton, ta chỉ tính thêm một vài số hạng mới, không phải tính từ đầu. Đây chính là ưu điểm căn bản của đa thức nội suy Newton so với đa thức nội suy Lagrange.

2) Đa thức nội suy Newton cũng chính là đa thức nội suy Lagrange ở dạng khác.

Ví dụ 4 : Xét hàm số $y = f(x)$ cho bởi bảng :

x	0	1	2	4
y	0	1	8	64

Hãy tính đa thức nội suy Newton của nó

Bảng tỷ sai phân :

X	Y	TSP cấp 1	TSP cấp 2	TSP cấp 3
0	0	1		
1	1	7	3	
2	8	28	7	1
4	64			

Áp dụng công thức (5) có $L_3(x) = 0 + 1(x - 0) + 3(x - 0)(x - 1) + 1(x - 0)(x - 1)(x - 2)$, rút gọn có $L_3(x) = x^3$.

3. Khái niệm về sai phân và một vài tính chất

Giả sử $y = f(x)$ là hàm số thực, liên tục trên đoạn $[a, b]$, $h = \text{const} \neq 0$.

Khi đó hiệu số : $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$ là sai phân cấp 1 của hàm số $y = f(x)$ tại x . Một cách tổng quát có :

$$\Delta^0 f(x) = f(x)$$

$$\Delta^1 f(x) = \Delta f(x)$$

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)), n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

lần lượt là *sai phân* cấp 0, cấp 1, ..., cấp n của hàm số $y = f(x)$ tại x .

Tính chất 3.2.4. Δ là toán tử tuyến tính xác định trên không gian vectơ X các hàm số thực xác định trên đoạn $[a, b]$. Nghĩa là, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in X$, ta có :

$$\Delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta f + \beta \Delta g$$

$$\Delta(c) = 0 \text{ với } c = \text{const}$$

Tính chất 3.2.5. $\Delta^n(x^n) = n!h^n$

$$\Delta^m(x^n) = 0, \forall m > n.$$

Thật vậy, $\Delta(x^n) = (x+h)^n - x^n = nhx^{n-2} + \dots$

$$\begin{aligned}\Delta^2(x^n) &= \Delta(nhx^{n-1}) + \dots \\ &= nh\Delta(x^{n-1}) + \dots \\ &= n(n-1)h^2x^{n-2} + \dots\end{aligned}$$

Từ đó : $\Delta^n(x^n) = n(n-1) \dots 1.h^n = n!h^n$

Để chứng minh đẳng thức $\Delta^m(x^n) = 0 \quad \forall m > n$, ta nhớ rằng $c = \text{const}$ thì $\Delta c = 0$

Ngoài hai tính chất nêu trên, ta có thể thấy sai phân còn có một số tính chất nữa, chẳng hạn :

Tính chất 3.2.6 :

a) $f(x+nh) = \sum_{i=0}^n C_n^i \Delta^i f(x).$

b) $\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i f(x+(n-i)h).$

c) Nếu $f \in C^n[a, b]$, h đủ nhỏ thì :

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{h^n}.$$

4. Đa thức nội suy với mốc cách đều

a. Đa thức nội suy ở đầu bảng : Giả sử $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ và $x_{i+1} - x_i = h, \forall i = 0, 1, \dots, (n-1)$. Ta tìm đa thức nội suy $L_n(x)$ ở dạng : $L_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$. Nếu thay thế x lần lượt là $x_0, x_1, \dots, x_n$ và

chú ý rằng $L_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \forall i = 0, 1, \dots, n$ thì ta sẽ thu được :

$$a_0 = y_0, a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}, \dots, a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i! h^i}. \text{ Từ đó có :}$$

$$L_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0)(x - x_{n-1})$$

Nếu ta đổi biến $x = x_0 + th, x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \dots, (n-1)$ thì ta có:

$$L_n(x_0 + th) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)\dots(t-n+1) \quad (6)$$

Công thức (6) cho ta đa thức nội suy Newton ở đầu bảng

b. Đa thức nội suy ở cuối bảng : Giả sử rằng $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, $x_{i+1} - x_i = h$ với mọi $i = 0, 1, \dots, (n-1)$. Ta tìm đa thức nội suy Lagrange ở dạng :

$$L_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

Nếu thay thế x lần lượt là $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$ và chú ý rằng $L_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \forall i = 0, 1, \dots, n$ thì ta sẽ thu được :

$$a_0 = y_n, a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}, \dots, a_n = \frac{\Delta^n y_0}{h^n}. \text{ Từ đó ta có :}$$

$$L_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1! h} (x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_n) \dots (x - x_1)$$

Nếu đổi biến $x = x_n + th$, $x_j = x_n - (n - j)h$, $j = 0, \dots, n$, ta sẽ có :

$$L_n(x_n + th) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}t(t+1) + \dots$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t+1) \dots (t+(n-1)) \quad (7)$$

Công thức (7) cho ta đa thức nội suy Newton ở cuối bảng.

c. Đa thức nội suy Newton ở giữa bảng

Nhận xét rằng đa thức nội suy Newton ở đầu bảng hay cuối bảng mang đặc trưng là một phía. Trong nhiều trường hợp, việc áp dụng công thức nội suy chứa những giá trị trước và sau giá trị ban đầu sẽ có lợi, trong những công thức nội suy như vậy người ta thường dùng công thức sai phân trung tâm. Trong mục này sẽ trình bày một công thức dạng "một tiến, một lùi".

Giả sử $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, \pm 1, \dots, \pm n$). Ta sẽ tìm đa thức nội suy ở dạng :

$$L_{2n+1}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_1)(x - x_0) +$$

$$+ a_3(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$+ a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)}) \dots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) +$$

$$+ a_{2n}(x - x_n) \dots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Nếu thay x lần lượt bởi x_i ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$), chúng ta sẽ có :

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}, \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{1!h^2}, \quad a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!h^3}$$

$$a_{2i-1} = \frac{\Delta^{2i-1} y_{-i}}{(2i-1)!h^{2i-1}}, \quad a_{2i} = \frac{\Delta^{2i} y_{-i}}{(2i)!h^{2i}}.$$

Từ đó ta rút ra :

$$\begin{aligned}
 L_{2n+1}(x) = & y_0 + \frac{\Delta y_{-1}}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!h^2}(x-x_{-1})(x-x_0) \\
 & + \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!h^3}(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \\
 & + \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n}}{(2n-1)!h^{2n-1}}(x-x_{-(n-1)})\dots(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \\
 & + \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}(x-x_n)\dots(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Nếu dùng phép đổi biến $x = x_0 + th$, thì ta rút ra :

$$\begin{aligned}
 L_{2n+1}(x_0 + th) = & y_0 + \frac{\Delta y_{-1}}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}t(t+1) + \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!}t(t+1)(t-1) \\
 & + \dots + \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n}}{(2n-1)!}(t+n-1)\dots(t+1)t(t-1)\dots(t-n+1) \\
 & + \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!}(t+n)(t+n-1)\dots(t+1)t(t-1)\dots(t-n+1) \quad (8)
 \end{aligned}$$

Đa thức dạng (8) được gọi là đa thức nội suy Newton dạng "một tiến, một lùi".

Nhận xét : 1) Đa thức nội suy Newton dạng này hay dạng khác vẫn chỉ là cách viết khác nhau của đa thức nội suy Lagrange.

2) Nếu cần tính giá trị $f(x)$ tại x gần x_0 thì nên dùng đa thức nội suy Newton ở đầu bảng, ý nghĩa tương tự cho những đa thức nội suy Newton ở cuối bảng và giữa bảng.

5. Một số ví dụ và ứng dụng

Ví dụ 5 : tính $S_n = 1 + 4^2 + 7^2 + \dots + (3n+1)^2$

Ta có : $\Delta S_n = (3n + 4)^2$, $\Delta^2 S_n = (18n + 33)$, $\Delta^3 S_n = 18$, vậy ta có bảng :

n	S_n	ΔS_n	$\Delta^2 S_n$	$\Delta^3 S_n$
0	1			
1	17	16	33	
2	66	49	51	18
3	166	100		

Từ đó rút ra :

$$S_n = 1 + 16n + \frac{33}{2!}n(n-1) + \frac{18}{3!}n(n-1)(n-2).$$

Rút gọn có : $S_n = 3n^3 + \frac{15}{2}n^2 + \frac{11}{2}n + 1.$

Ví dụ 6 : Tính $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!}.$

Để ý : $\frac{k-1}{k!} = -\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} = \Delta\left(-\frac{1}{(k-1)!}\right)$

Vậy $S_n = \sum_{k=1}^n \Delta\left(-\frac{1}{(k-1)!}\right) = -\frac{1}{n!} + \frac{1}{0!} = 1 - \frac{1}{n!}$

Nhận xét : Phương pháp ở ví dụ 6 vừa xét rất có hiệu lực trong nhiều bài toán dạng tính tổng : $\sum_{k=1}^{n-1} f_k = S_n$

Để tính tổng này ta khai triển :

$$f_k = \Delta u_k = u_{k+1} - u_k$$

Từ đó rút ra $S_n = u_n - u_1$

Ví dụ 7 : Tính tổng $S_n = \sum_{k=1}^n \sin kx$ ($\sin \frac{x}{2} \neq 0$)

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \Delta \cos(k - \frac{1}{2})x &= \cos(k + \frac{1}{2})x - \cos(k - \frac{1}{2})x = \\ &= -2\sin(kx)\sin(\frac{1}{2}x). \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó : } \sin kx = -\frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \Delta \cos(k - \frac{1}{2})x$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \sum_{k=1}^n \sin kx &= -\frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n \Delta \cos(k - \frac{1}{2})x = \\ &= -\frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} [\cos(n + \frac{1}{2})x - \cos \frac{x}{2}]. \end{aligned}$$

$$\text{Rút gọn có : } S_n = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

§3. ĐA THỨC NỘI SUY HERMITTE

a. Bài toán : Hãy tìm đa thức nội suy $H_{2n+1}(x)$ thỏa mãn các điều kiện :

a) $\deg H_{2n+1}(x) \leq 2n+1$

$$b) H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

$$c) H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i), \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

trong đó $x_i \in [a, b]$, $x_i \neq x_j \forall i \neq j$, còn $f'(x_i)$ và $H'_{2n+1}(x_i)$ tương ứng là đạo hàm của hàm số $f(x)$ và $H_{2n+1}(x)$ tại x_i

b. Sự tồn tại. Có thể chứng minh rằng đa thức $H_{2n+1}(x)$ dưới đây thỏa mãn các yêu cầu trên và người ta gọi nó là đa thức nội suy Hermite.

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n \left\{ f(x_i) \left[1 - \frac{\omega''_{n+1}(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)} (x - x_i) \right] + f'(x_i)(x - x_i) \right\} \cdot \left\{ \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} \right\} \quad (9)$$

c. Nhận xét : Đa thức nội suy Hermite có đặc điểm riêng khác với đa thức nội suy Lagrange và đa thức nội suy Newton là ngoài các yêu cầu về sự trùng nhau giữa đa thức nội suy và hàm số đã cho tại các mốc nội suy thì còn có yêu cầu về sự trùng nhau của các giá trị đạo hàm của chúng.

Ví dụ 1 : Hãy tính đa thức nội suy Hermite của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0, 2]$ được cho bởi bảng :

x	0	1	2
y	0	1	2
y'	0	2	0

Ta có : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, f(x_0) = 0, f(x_1) = 1, f(x_2) = 2, f'(x_0) = 0, f'(x_1) = 2, f'(x_2) = 0, \omega_3(x) = x(x-1)(x-2).$

Áp dụng công thức (9) với $n = 2$, ta có :

$$\begin{aligned}
 H_5(x) = & \left\{ f(x_0) \left[1 - \frac{\omega_3^2(x_0)}{\omega_3^2(x_0)} \right] (x - x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right\} \left\{ \frac{\omega_3(x)}{(x - x_0)\omega_3^2(x_0)} \right\}^2 \\
 & + \left\{ f(x_1) \left[1 - \frac{\omega_3^2(x_1)}{\omega_3^2(x_1)} \right] (x - x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \right\} \left\{ \frac{\omega_3(x)}{(x - x_1)\omega_3^2(x_1)} \right\}^2 \\
 & + \left\{ f(x_2) \left[1 - \frac{\omega_3^2(x_2)}{\omega_3^2(x_2)} \right] (x - x_2) + f'(x_2)(x - x_2) \right\} \left\{ \frac{\omega_3(x)}{(x - x_2)\omega_3^2(x_2)} \right\}^2
 \end{aligned}$$

Thay số có : $H_5(x) = \frac{1}{2}(x^5 - 5x^4 + 7x^3 - x^2).$

§4. SPLINE ĐA THỨC

Các đa thức đã xét có một hạn chế căn bản là nếu tăng số mốc nội suy lên thì bậc của đa thức nội suy cũng tăng lên, điều này rất không thuận tiện trong việc tính toán. Nhằm khắc phục hạn chế đó, người ta đã đề xuất những giải pháp khác nhau, mà một trong những giải pháp là nội suy hàm số $y = f(x)$ bằng các Spline đa thức.

Trong mục này, chúng ta trình bày một vài khái niệm ban đầu về nội suy hàm số $y = f(x)$ nhờ spline đa thức bậc 3 nội suy.

Xét phân hoạch $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Một spline đa thức bậc 3 trên đoạn $[a, b]$ với phân hoạch (π) đã cho là hàm số $y = S(x)$ thỏa mãn hai điều kiện sau đây :

1) $S(x) \in C^2[a, b]$

2) Hạn chế của $S(x)$ trên mỗi $\Delta_i = [x_i; x_{i+1}]$ là một đa thức đại số $(S(x)|_{\Delta_i})$ với $\deg(S(x)|_{\Delta_i}) \leq 3, \forall i = 0, 1, \dots, n$.

Giả sử rằng $y_i = f(x_i)$ và $y'_i = f'(x_i)$ là các giá trị của hàm số và đạo hàm của $y = f(x)$ tại các x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) là đã cho. Bài toán đặt ra là tìm spline đa thức bậc 3 nội suy thỏa mãn :

$$S(x_i) = y_i, S'(x_i) = y'_i, \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

Để giải quyết bài toán này, ta kí hiệu $h_i = (x_{i+1} - x_i)$, $i = 0, 1, \dots, (n-1)$ và $m_i = S''(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Vì $S''(x)$ là đa thức bậc ≤ 1 trên Δ_i nên có thể viết

$$S''(x)|_{\Delta_i} = \alpha_i(x_{i+1} - x) + \beta_i(x - x_i)$$

Thay $x = x_i$ thì có $m_i = \alpha_i h_i$, do vậy $\alpha_i = \frac{m_i}{h_i}$.

Thay $x = x_{i+1}$ thì có $m_{i+1} = \beta_i h_i$ nên $\beta_i = \frac{m_{i+1}}{h_i}$.

Vậy $S(x)|_{\Delta_i}$ có thể viết dưới dạng :

$$S(x)|_{\Delta_i} = \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \xi(x_{i+1} - x) + \eta(x - x_i)$$

Tương tự như trên, thay $x = x_i$ và $x = x_{i+1}$ ta thu được :

$$\xi = \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i h_i}{6} \right) \text{ và } \eta = \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1} h_i}{6} \right).$$

Thay trở lại biểu thức $S(x)|_{\Delta_i}$ thì có :

$$\begin{aligned} S(x)|_{\Delta_i} &= \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \\ &+ \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i h_i}{6} \right)(x_{i+1} - x) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1} h_i}{6} \right)(x - x_i) \end{aligned} \quad (10)$$

Lấy đạo hàm ta có :

$$\begin{aligned} S'(x)|_{\Delta_i} &= -\frac{m_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{m_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 \\ &- \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i h_i}{6} \right) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1} h_i}{6} \right) \end{aligned}$$

Chú ý đến điều kiện $S(x) \in C^2[a; b]$, nên tại các x_i ($i = 1, 2, \dots, (n-1)$) thì đạo hàm hai phía là bằng nhau, từ đó thu được một hệ gồm $(n-1)$ phương trình với $(n+1)$ ẩn là m_i dưới đây :

II - XẤP XỈ ĐỀU

VÀ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

Bài toán tìm đa thức nội suy Lagrange của hàm số $y = f(x)$ xét ở trên có thể nhìn nhận lại như sau : Xét X là tập hợp các hàm số xác định trên đoạn $[a ; b]$ và X_1 là tập hợp con của X gồm các hàm số là đa thức trên $[a ; b]$. Với mỗi $y = f(x) \in X$ thì vấn đề tìm đa thức nội suy Lagrange của nó được hiểu là tìm phần tử $L_n(x) \in X_1$ sao cho $L_n(x)$ là xấp xỉ của $f(x)$ theo một nghĩa nào đó.

Với cách nhìn như vậy ta có thể đặt bài toán tổng quát sau đây : Xét X là không gian Banach và X_1 là một không gian con đóng của nó. Với mỗi phần tử $y \in X$ cho trước hãy tìm $\varphi_0 \in X_1$ sao cho :

$$\|\varphi_0 - y\| = \inf_{\varphi \in X_1} \|\varphi - y\| = d(y, X_1)$$

Khi đó với mỗi không gian X với chuẩn $\|\cdot\|$ tương ứng thì ta được một bài toán xấp xỉ cụ thể. Dưới đây ta xét vài trường hợp thường gặp quan trọng nhất.

§5. XẤP XỈ ĐỀU

1. Xấp xỉ tốt nhất trong không gian Banach

Bài toán : Cho X là không gian Banach và X_1 là không gian con hữu hạn chiều của nó. Với mỗi $y \in X$ cho trước, hãy tìm $\varphi_0 \in X_1$ sao cho :

$$E(y) = \|\varphi_0 - y\| = d(X_1, y) = \inf_{\varphi \in X_1} \|\varphi - y\| \quad (12)$$

Nếu phần tử φ_0 là tồn tại thì nó được gọi là xấp xỉ tốt nhất của y trong X_1 . Chú ý rằng nếu $y \in X_1$ thì bài toán là tầm thường vì có thể thấy $\varphi_0 = y$, do vậy ta chỉ xét $y \notin X_1$. Gọi $r = \|y\|$ và xét hình cầu đóng : $S = \{\varphi \in X_1, \|\varphi\| \leq 2r\} \subset X_1$

Nếu $\varphi \in (X_1 - S)$ thì $\|\varphi - y\| \geq \|\varphi\| - \|y\| > r = \|y - \theta\|$, với θ là phần tử đơn vị trong X , vậy φ không phải là xấp xỉ tốt nhất. Từ đó rút ra rằng chỉ cần tìm $\varphi \in S$ là đủ.

Vì S đóng, giới nội trong X_1 nên S compact. Xét phiếm hàm : $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\phi(\varphi) = \|\varphi - y\|$ thì

$|\phi(\varphi) - \phi(\varphi')| = \|\varphi - y\| - \|\varphi' - y\| \leq \|\varphi - \varphi'\|, \forall \varphi, \varphi' \in S$, vì vậy ϕ là liên tục trên S compact, do đó ϕ đạt cực tiểu, tức là tồn tại φ_0 sao cho $\|\varphi_0 - y\| = \inf_{\varphi \in S} \|\varphi - y\|$.

Vậy tồn tại phần tử xấp xỉ tốt nhất φ_0 . Như vậy ta có :

Định lý 2.5.1 : Nếu X_1 là không gian con hữu hạn chiều của không gian Banach X thì mỗi phần tử $y \in X$ đều có phần tử xấp xỉ tốt nhất trong X_1

Nói chung thì phần tử xấp xỉ tốt nhất là không duy nhất, tuy nhiên có khẳng định sau :

Định lý 2.5.2 : Nếu X là không gian Banach lồi chặt (nghĩa là $\forall f, g \neq 0$, trong bất đẳng thức $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ thì dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f = \alpha g, \alpha > 0$) thì phần tử xấp xỉ tốt nhất là duy nhất.

Chứng minh

Thật vậy, giả sử φ_1 và φ_2 là hai xấp xỉ tốt nhất của y , nghĩa là : $\|\varphi_1 - y\| = \|\varphi_2 - y\| = d > 0$. Khi đó ta có :

$$d \leq \|y - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\| \leq \frac{1}{2}(\|y - \varphi_1\| + \|y - \varphi_2\|) = d$$

$$\text{Vậy } \|\frac{1}{2}(y - \varphi_1) + \frac{1}{2}(y - \varphi_2)\| = \|\frac{1}{2}(y - \varphi_1)\| + \|\frac{1}{2}(y - \varphi_2)\|$$

Theo giả thiết X là lồi chặt nên

$$\frac{1}{2}(y - \varphi_1) = \alpha \frac{1}{2}(y - \varphi_2) \text{ với } \alpha > 0$$

kéo theo $y - \varphi_1 = \alpha (y - \varphi_2)$. Lấy chuẩn hai vế ta có $d = \alpha d$, suy ra $\alpha = 1$. Từ đó có $\varphi_1 = \varphi_2$

Định lí được chứng minh. $\square$

2. Xấp xỉ đều tốt nhất

Trong mục này ta xét $X = C[a; b]$ là không gian các hàm thực liên tục trên đoạn $[a; b]$ với chuẩn cho bởi :

$$\|\varphi\| = \max_{t \in [a; b]} |\varphi(t)|$$

và X_1 là không gian con của X sinh bởi $\{1, x, \dots, x^n\}$. Khi đó, theo những khảo sát ở mục trước thì với mỗi $y \in X$, tồn tại một xấp xỉ tốt nhất $Q_n^0(x)$ có dạng :

$$Q_n^0(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

Người ta gọi nó là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của y .

Dưới đây ta sẽ tìm điều kiện cần và đủ để một đa thức

$Q_n(x) \in X_1$ là xấp xỉ đều tốt nhất một hàm số liên tục $y \in X$.

Định lí 2.5.3 (Vallee – Poussin) : Cho $y \in C[a; b] = X$ và $Q_n(x) \in X_1$. Giả sử tồn tại $(n+2)$ điểm $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ sao cho : $\text{sign} [(-1)^i (y(x_i) - Q_n(x_i))] = \text{const}$ ($i = 0, 1, \dots, n+1$).

Khi đó : $E(y) = \inf_{P \in X_1} \|y - P(x)\| \geq m = \min_i |y(x_i) - Q_n(x_i)|$ (13)

Chứng minh.

Nếu $m = 0$ thì hiển nhiên định lí đúng.

Xét $m > 0$. Nếu trái lại, có đa thức xấp xỉ đều tốt nhất $Q_n^0(x)$ mà $\|Q_n^0(x) - y\| = E(y) < m$. Khi đó ta có $\text{sign} (Q_n(x) - Q_n^0(x)) = \text{sign} [(Q_n(x) - y(x)) - (Q_n^0(x) - y(x))]$. Tại x_i thì :

$$|Q_n(x_i) - y(x_i)| \geq |Q_n^0(x_i) - y(x_i)| \text{ nên}$$

$$\text{sign}(Q_n(x_i) - Q_n^0(x_i)) = \text{sign}(Q_n(x_i) - y(x_i)).$$

Từ giả thiết $\text{sign}((-1)^i (y(x_i) - Q_n(x_i))) = \text{const} \ (\forall i = 0, 1, \dots, n+1)$, ta suy ra rằng khi chuyển từ x_i sang x_{i+1} thì đại lượng $[f(x) - Q_n(x)]$ đổi dấu.

Vì vậy, $[Q_n(x) - Q_n^0(x)]$ đổi dấu tại $(n+2)$ điểm; chú ý rằng $\deg [Q_n(x) - Q_n^0(x)] \leq n$, nên đó là điều vô lí.

Định lí được chứng minh. $\square$

Định lí 2.5.4 (Chebyshev) : Để đa thức $Q_n(x)$ là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất một hàm số liên tục $y(x)$, cần và đủ là tồn tại trên $[a; b]$ ít nhất $(n+2)$ điểm $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ sao cho :

$$y(x_i) - Q_n(x_i) = \alpha(-1)^i \|y - Q_n\| \quad (14)$$

$$\forall i = 0, 1, \dots, (n+1); \alpha = 1 \text{ (hoặc } -1).$$

Các điểm $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ được gọi là các điểm luân phiên Chebyshev.

Chứng minh.

Điều kiện đủ : Kí hiệu $L = \|y - Q_n\|$ thì $L = m \leq E(y)$. Mặt khác, $E(y) \leq \|y - Q_n\| = L$. Vậy $L = E(y)$ và đa thức $Q_n(x)$ là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất. Điều kiện cần ta công nhận, không chứng minh.

Nhận xét rằng $C[a; b]$ không phải là không gian lồi chặt (xét $f \equiv 1, g \equiv x$ trên đoạn $[0; 1]$ thì $\|f\| = 1, \|f + g\| = 2$. Vậy $\|f\| + \|g\| = \|f + g\|$; tuy nhiên f và g là độc lập tuyến tính) Vì vậy ta không sử dụng định lí duy nhất của phần tử xấp xỉ đều tốt nhất được. Tuy nhiên ta có :

Định lí 2.5.5 : Với mỗi $y \in C[a; b]$, phần tử xấp xỉ đều tốt nhất của nó trong không gian $X_n = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ là duy nhất.

Chứng minh.

Giả sử tồn tại hai đa thức bậc không quá n xấp xỉ đều tốt nhất của y trên $[a; b]$ là $Q_n^1(x)$ và $Q_n^2(x)$ sao cho :

$$\|y - Q_n^1\| = \|y - Q_n^2\|$$

Khi đó $\frac{1}{2}(Q_n^1 + Q_n^2)$ cũng là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất.

Thật vậy :

$$\|y - \frac{1}{2}(Q_n^1 + Q_n^2)\| \leq \frac{1}{2}(\|y - Q_n^1\| + \|y - Q_n^2\|) = E_n(y).$$

Xét $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ là $(n+2)$ điểm luân phiên Chebyshev của $\frac{1}{2}(Q_n^1 + Q_n^2)$, lúc ấy ta có :

$$\left| \frac{1}{2}(Q_n^1(x_i) + Q_n^2(x_i)) - y(x_i) \right| = E_n(y), \quad \forall i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Từ đó rút ra :

$$\left| (Q_n^1(x_i) - y(x_i)) + (Q_n^2(x_i) - y(x_i)) \right| = 2E_n(y) \quad (15)$$

Vậy :

$$\begin{aligned} 2E_n(y) &= \left| (Q_n^1(x_i) - y(x_i)) + (Q_n^2(x_i) - y(x_i)) \right| \\ &\leq \left| Q_n^1(x_i) - y(x_i) \right| + \left| Q_n^2(x_i) - y(x_i) \right| \\ &\leq \|Q_n^1 - y\| + \|Q_n^2 - y\| = 2E_n(y). \end{aligned}$$

Từ đó ta có : $\left| Q_n^1(x_i) - y(x_i) \right| = \left| Q_n^2(x_i) - y(x_i) \right| = E_n(y), \quad \forall i = 0, 1, \dots, n+1$

$$(Q_n^1(x_i) - y(x_i)) = \lambda_i (Q_n^2(x_i) - y(x_i)), \quad \text{với } \lambda_i = \pm 1.$$

Thay vào (15) ta có :

$$|(1 + \lambda_i)[Q_n^2(x_i) - y(x_i)]| = 2E(y).$$

$$\text{Từ đó: } |(1 + \lambda_i) \cdot [Q_n^2(x_i) - y(x_i)]| = 2E(y) \Rightarrow (1 + \lambda_i)E(y) = 2E(y)$$

nên $\lambda_i = 1$ và $Q_n^1(x_i) = Q_n^2(x_i)$, $\forall i = 0, 1, \dots, (n+1)$. Từ đó có :
 $Q_n^1(x) = Q_n^2(x)$, vậy đa thức xấp xỉ đều tốt nhất là duy nhất. $\square$

Định nghĩa 2.5.1 : Giả sử $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x) \in C[a; b]$, khi đó biểu thức $\Phi(x) = a_0\varphi_0(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$ với $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{0, n}$ được gọi là một đa thức suy rộng theo hệ $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$. Hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ được gọi là hệ Chebyshev nếu như mỗi đa thức suy rộng thực sự $\Phi(x) \left(\sum_{i=0}^n a_i^2 > 0 \right)$ có không quá n nghiệm trên đoạn $[a, b]$.

Định lý 2.5.6. (Định lí Haar) : Giả sử

X_1 là không gian con của $C[a, b]$ sinh bởi hệ $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$. Điều kiện cần và đủ để tồn tại duy nhất phân tử xấp xỉ đều tốt nhất của $y \in C[a; b]$ ở trong X_1 là hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ là hệ Chebyshev.

3. Một số ví dụ

Ví dụ 8 : Xét $X = C[0; 1]$ thì hệ $\{1, x, x^2\}$ là hệ Chebyshev, còn hệ $\{\varphi_0, \varphi_1\}$, $\varphi_0 = x$, $\varphi_1 = x^2$ không phải là hệ Chebyshev.

Ví dụ 9 : Cho hàm số $y = y(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Hãy xấp xỉ tốt nhất nó bằng một đa thức bậc 0.

$$\text{Gọi } M = \max_{x \in [a; b]} y(x) = y(x_1), \quad m = \min_{x \in [a; b]} y(x) = y(x_2)$$

Khi đó, nếu đặt $Q_0(x) = \frac{m+M}{2}$ thì :

$$y(x_1) - Q_0(x_1) = \frac{M-m}{2}, \quad y(x_2) - Q_0(x_2) = -\frac{M-m}{2}$$

và $\|y - Q_0\| = \frac{M - m}{2}$, còn x_1, x_2 là hai điểm luân phiên

Chebyshev. Như vậy $Q_0(x)$ là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc 0 của $y(x)$ trên $[a; b]$.

Ví dụ 10 : Cho hàm số $y(x)$ lồi trên đoạn $[a; b]$. hãy tìm đa thức bậc nhất xấp xỉ đều tốt nhất của nó.

Nếu $y(x)$ là hàm bậc nhất thì đa thức xấp xỉ đều tốt nhất là $Q_1(x) \equiv y(x)$.

Nếu $y(x)$ đã cho không phải là hàm số bậc nhất, khi ấy gọi $Q(x) = a_0 + a_1x$ là đa thức cần tìm, thì hiệu số $y(x) - Q(x) = y(x) - (a_0 + a_1x)$ là một hàm số lồi. Vậy có 1 điểm cực trị là điểm trong, gọi điểm ấy là c . Theo định lí 2.5.4 tồn tại 3 điểm luân phiên Chebyshev, tại đó $|y(x) - Q(x)|$ đạt cực đại, từ đó suy ra hai điểm a, b là hai điểm luân phiên Chebyshev cùng với c . Vậy :

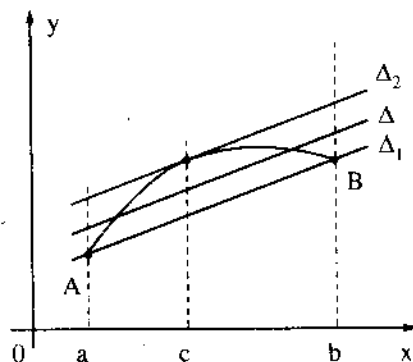
$$y(a) - Q(a) = \alpha L$$

$$y(c) - Q(c) = -\alpha L$$

$$y(b) - Q(b) = \alpha L$$

với $L = \|y - Q\|$, còn $\alpha = 1$

hoặc -1



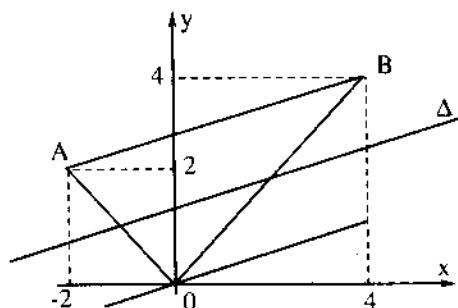
Hình 2.1

Từ các hệ thức trên rút ra rằng :

$$a_1 = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}, \quad a_0 = \frac{1}{2} \left[y(a) + y(c) - \frac{(a + c)(y(b) - y(a))}{b - a} \right]$$

Chú ý : Nếu $y(x)$ khả vi thì $a_1 = y'(c)$ và ý nghĩa hình học của ví dụ này như sau : Đồ thị của $y(x)$ là một cung lồi AB, với $A(a, y(a))$,

B(b, y(b)). Lấy Δ_1 là đường thẳng AB và Δ_2 là đường thẳng tiếp tuyến song song với AB, khi đó $Q(x)$ có đồ thị chính là đường Δ song song và cách đều Δ_1, Δ_2 (h.2.1)



Hình 2.2

Ví dụ 11 : Cho $y(x) = |x|$ trên đoạn $[-2 ; 4]$.

Hãy tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất của nó.

Ta gọi $Q_1(x) = a_0 + a_1x$ là đa thức phải tìm.

Khi đó :

$$a_1 = \frac{4-2}{4-(-2)} = \frac{1}{3}, \quad c = 0, \quad a_0 = \frac{4}{3} \quad \text{Vậy : } Q_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}. \quad \text{Đồ thị của}$$

$Q_1(x)$ là đường thẳng Δ trong hình 2.2

§6. PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

1. Mở đầu. Với một hàm số $y(x)$ đã cho trên đoạn $[a ; b]$, ở trong các phần trên chúng ta đã nghiên cứu hai phương pháp xấp xỉ nó là phương pháp nội suy và phương pháp xấp xỉ đều.

Mỗi phương pháp này đều có những hạn chế nhất định, chẳng hạn :

a. Với phương pháp nội suy, công thức công kênh, số bậc đa thức nội suy nói chung là tăng theo số mốc nội suy. Do vậy, khối lượng tính toán rất lớn. Mặt khác, các giá trị $\{y_i\}$ thường nhận được bằng thực nghiệm, do đó chỉ là những số gần đúng, vì vậy yêu cầu $P(x_i) = y_i$ chưa thật hợp lí.

b. Với phương pháp xấp xỉ đều thì lớp hàm $C[a; b]$ không đủ rộng, thực tiễn tính toán thường cần đến lớp hàm thuộc vào một không gian Hilbert H nào đó.

Để nhằm khắc phục các hạn chế nói trên, đồng thời cũng là đưa ra một cách nhìn mới về vấn đề xấp xỉ một hàm $y(x)$, trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu vấn đề xấp xỉ $y(x) \in H$ bởi một phần tử $h^* \in H_1$, trong đó H_1 là không gian con đóng nào đó của không gian Hilbert H .

2. Xấp xỉ tốt nhất trong không gian Hilbert

Cho H là một không gian Hilbert và H_1 là không gian con của H . Xét $y \in H$, bài toán đặt ra là tìm $h^* \in H_1$ sao cho :

$$\|y - h^*\| = \inf_{h \in H_1} \|y - h\| \quad (16)$$

Phần tử h^* đó được gọi là xấp xỉ tốt nhất của y trong H_1 .

Mệnh đề 2.6.1. Giả sử $h^* \in H_1$ thỏa mãn (16), khi đó :

$$(y - h^*) \perp H_1$$

Chứng minh.

Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại $h_1 \in H_1$ sao cho $(y - h^*, h_1) = \alpha \neq 0$. Không giảm tính tổng quát, giả sử rằng $\|h_1\| = 1$, khi ấy ta xét $h_2 = h^* + \alpha h_1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \|y - h_2\|^2 &= (y - h_2, y - h_2) = (y - h^* - \alpha h_1, y - h^* - \alpha h_1) = \\ &= (y - h^*, y - h^*) - 2\alpha(h_1, y - h^*) + \alpha^2(h_1, h_1) = \\ &= \|y - h^*\|^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2 = \|y - h^*\|^2 - \alpha^2. \end{aligned}$$

Vậy $\|y - h_2\| < \|y - h^*\|$, mâu thuẫn.

132084
X802
3082

Mệnh đề 2.6.2. Giả sử có $\mathbf{h}^* \in H_1$ sao cho $(\mathbf{y} - \mathbf{h}^*) \perp H_1$. Khi đó

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{h}^*\| = \inf_{\mathbf{h} \in H_1} \|\mathbf{y} - \mathbf{h}\|.$$

Chứng minh.

Thật vậy, xét $y \in H_1$ thì ta có :

$$\begin{aligned} \|y - h\|^2 &= \|(y - h^*) + (h^* - h)\|^2 = \|y - h^*\|^2 + \|h^* - h\|^2 \\ &\geq \|y - h^*\|^2, \text{ dấu "=" chỉ xảy ra với } h = h^* \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định lý 2.6.1 : Giả sử dim $H_1 = m < \infty$. Khi đó với y bất kì trong H , xấp xỉ tốt nhất h^* là tồn tại và duy nhất.

Chứng minh.

Ta có thể thấy mọi không gian Hilbert là lồi chặt. Vì vậy áp dụng lí thuyết chung về phần tử xấp xỉ tốt nhất trong không gian Banach, ta rút ra tồn tại duy nhất của phần tử xấp xỉ tốt nhất. Tuy nhiên, dưới đây sẽ cho một chứng minh mang tính chất kiến thiết. Thật vậy, giả sử $H_1 = \{h_1, \dots, h_m\}$, khi đó, sự tồn tại duy nhất của

$$\mathbf{h}^* = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{h}_i \text{ là tương đương với sự tồn tại duy nhất của bộ số}$$

$(\alpha_1; \dots; \alpha_m)$. Vì $(y - h^*, h_i) = 0, \forall i = 1, \dots, m$, nên ta có hệ:

[illegible]

Kí hiệu định thức của ma trận hệ số của hệ (18) là $G(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_m)$.

832.83
HX86
132-6

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \delta^2 &= \|y - h^*\|^2 = (y - h^*, y - h^*) = (y - h^*, y) - (y - h^*, h^*) \\ &= (y - h^*, y) = (y, y) - (h^*, y)\end{aligned}$$

Bây giờ ghép phương trình (19) vào hệ (18) thì ta có hệ mới :

Bây giờ xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất dạng $At = 0$,
 ma trận A có dạng :

và $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m, t_{m+1})$.

Nhận xét : Hệ $\{1, x, \dots, x^n\}$ là độc lập tuyến tính, tuy nhiên không là trực giao trong $L_2 [a ; b]$ nên trong thực hành tính toán thường phức tạp.

4. Xấp xỉ tốt nhất trong $L_2 [a ; b]$ bằng hệ đa thức trực giao

Để đơn giản, ta xét $L_2 [-1 ; 1]$ với $p(x) \equiv 1$, khi đó xét hệ đa thức trực giao Legendre (ví dụ 3, §3, chương I) :

$$L_0(t) = 1$$

$$L_1(t) = t$$

$$L_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$$

$$L_3(t) = \frac{1}{2}(5t^2 - 3t)$$

$$L_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3)$$

$$L_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t) , \quad v.v...$$

với $\|L_k(t)\|^2 = \frac{2}{2k+1}$. Bây giờ với một $y(t) \in L_2 [a ; b]$, khi đó đa

thức xấp xỉ tốt nhất của nó có dạng $P_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k L_k(t)$, với

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 y(t) L_k(t) dt, \quad \forall k = 0, \dots, n. \text{ Ngoài ra phương sai}$$

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^1 [y(t) - P_n(t)]^2 dt.$$

Chú ý : 1) Với hệ đa thức trực giao thì các tính toán trung gian sẽ thuận lợi đơn giản.

2) Ngoài hệ đa thức Legendre, còn có nhiều hệ đa thức trực giao khác nữa, chẳng hạn hệ lượng giác, hệ đa thức Chebyshev v.v...

327.822.7
827.822.7
327.822.7

3) Với trường hợp $L_2[a; b]$ tổng quát, nếu cần ta dùng phép biến đổi, sẽ đưa được đoạn $[a; b]$ về đoạn $[-1; 1]$.

5. Xấp xỉ hàm cho bằng bảng

Giả sử hàm số $y = f(x)$ là xác định trên đoạn $[a; b]$ và ta đã biết $y_i = f(x_i)$, với $x_i \in [a; b]$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$, đồng thời $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$. Kí hiệu $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Khi đó ta gọi $L(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$ là tập hợp tất cả các ánh xạ đi từ X vào $\mathbb{R}$. Như vậy, $f, g \in L(X)$ là đồng nhất nếu $f(x_i) = g(x_i)$, $\forall i = 0, \dots, n$. Trong $L(X)$, gọi θ là phần tử thỏa mãn $\theta(x_i) = 0$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$.

Ta đưa vào $L(X)$ hai phép toán sau :

$$(f + g)(x_i) = f(x_i) + g(x_i), \forall i = 0, 1, \dots, n \text{ và } \forall f, g \in L(X),$$

$$(\lambda f)(x_i) = \lambda \cdot f(x_i), \forall i = 0, 1, \dots, n \text{ và } \forall f \in L(X), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dễ thấy khi đó $L(X)$ là một không gian tuyến tính.

Bây giờ ta đưa một tích vô hướng vào $L(X)$ bằng cách đặt :

$$(f, g) = \sum_{i=0}^n f(x_i)g(x_i), \text{ khi đó có thể thấy rằng } L(X) \text{ là một không}$$

gian Hilbert và $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Với mỗi hàm số $y = \varphi(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hạn chế của nó trên $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ là $\varphi|_X \in L(X)$, tuy nhiên để đơn giản ta vẫn kí hiệu là φ .

Xét hệ hàm Chebyshev $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^m$ với $m \leq n$, khi đó đa thức suy rộng nhận giá trị cho trước tại các x_i ($i = 0, \dots, n$) là duy nhất. Thật vậy, nếu có hai đa thức suy rộng như vậy là Φ_1 và Φ_2 thì hiệu của chúng ($\Phi_1 - \Phi_2$) cũng là một đa thức suy rộng nhận các x_i ($i = 0,$

..., n) là nghiệm. Vậy chúng có tới (n + 1) nghiệm phân biệt nên $\Phi_1 \equiv \Phi_2$.

Bây giờ ta xét hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^m$ với $m \leq n$ gồm (m + 1) hàm số cho trên đoạn [a ; b] sao cho hệ này là hệ Chebyshev, đồng thời hạn chế của chúng trên X ta có (m + 1) phần tử $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m \in L(X)$.

Xét L_1 là không gian con của $L(X)$ sinh bởi $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$. Với $y \in L(X)$ bất kì, bài toán đặt ra là tìm $P_m \in L_1$ sao cho :

$$\|y - P_m\| = \inf_{\phi \in L_1} \|y - \phi\|.$$

Từ lí luận đã trình bày ở trên ta rút ra rằng $P_m(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x)$

với α_i là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^m (\varphi_i, \varphi_j) = (y, \varphi_i) \\ i = 0, 1, \dots, m \end{cases} \quad (21)$$

và bình phương sai số cho bởi công thức

$$\delta^2 = \|y - P_m\|^2 = (y, y) - \sum_{i=0}^{n_1} \alpha_i (y, \varphi_i).$$

Chú ý : 1) Có nhiều cách chọn hệ $\varphi_i(x)$, chẳng hạn $\varphi_i(x) = x^i$ ($i = 0, \dots, m$), hoặc tốt hơn là chọn $\varphi_i(x) = L_i(x)$, với $\{L_i(x)\}$ là hệ đa thức trực giao nào đó.

2) Nếu $m = n$ thì đa thức nội suy và đa thức xấp xỉ $P_m(x)$ của hàm số $y = y(x)$ là trùng nhau.

Thật vậy, giả sử $P(x)$ là đa thức nội suy, còn $P_m(x)$ là đa thức xấp xỉ nêu trên thì ta có :

$$0 \leq \|P_m(x) - y\|^2 \leq \|P(x) - y\|^2 = \sum_{i=0}^m (y_i - y_i)^2 = 0$$

Vậy $P_m(x_i) = y_i, \forall i$, vậy rút ra $P(x) = P_m(x)$.

3) Phương pháp xây dựng đa thức $P_m(x)$ nói trên gọi là *phương pháp bình phương tối thiểu*.

4) Nếu $m < n$ thì đa thức $P_m(x)$ được gọi là đa thức xấp xỉ có phương sai nhỏ nhất của hàm số $y = y(x)$ (hoặc là đa thức xấp xỉ của $y = y(x)$ được xây dựng theo phương pháp bình phương tối thiểu).

Ví dụ 12. Cho $a = 0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3 = b$

Xét hàm số $y = y(x)$ cho bởi bảng sau đây :

x	0	1	2	3
y	1	2	1	0

Hãy tìm các đa thức xấp xỉ $P_m(x)$ của $y = y(x)$ theo phương pháp bình phương tối thiểu ứng với các trường hợp sau :

- Với $m = 1$, hệ hàm gồm $\varphi_0 \equiv 1, \varphi_1 \equiv x$.
- Với $m = 2$, hệ hàm gồm $\varphi_0 \equiv 1, \varphi_1 \equiv x, \varphi_2 \equiv x^2$.
- Với $m = 3$, hệ hàm gồm $\varphi_0 \equiv 1, \varphi_1 \equiv x, \varphi_2 \equiv x^2, \varphi_3 \equiv x^3$.

Ta có bảng giá trị của $\varphi_i (i = 0, 1, 2, 3)$ trong $L(X)$:

x	$\varphi_0 \equiv 1$	$\varphi_1 \equiv x$	$\varphi_2 \equiv x^2$	$\varphi_3 \equiv x^3$
0	1	0	0	0
1	1	1	1	1
2	1	2	4	8
3	1	3	9	27

Vậy $(\varphi_0, \varphi_0) = 4, (\varphi_1, \varphi_0) = 6, (\varphi_1, \varphi_1) = 14, (\varphi_2, \varphi_0) = 14,$
 $(\varphi_2, \varphi_1) = 36, (\varphi_2, \varphi_2) = 98$ v.v...

a) Nếu $m = 1$, hệ hàm gồm $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$ thì L_1 là không gian con sinh bởi φ_0, φ_1 . Xấp xỉ $P_1(x) = \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1$ trong đó α_0, α_1 là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} (\varphi_0, \varphi_0)\alpha_0 + (\varphi_0, \varphi_1)\alpha_1 = (y, \varphi_0) \\ (\varphi_1, \varphi_0)\alpha_0 + (\varphi_1, \varphi_1)\alpha_1 = (y, \varphi_1) \end{cases}$$

$$\text{Thay số : } \begin{cases} 4\alpha_0 + 6\alpha_1 = 4 \\ 6\alpha_0 + 14\alpha_1 = 4 \end{cases}, \quad \text{vậy } \begin{cases} \alpha_0 = \frac{8}{5} \\ \alpha_1 = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P_1(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{8}{5}.$$

b) Nếu $m = 2$ thì tương tự, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 4\alpha_0 + 6\alpha_1 + 14\alpha_2 = 4 \\ 6\alpha_0 + 14\alpha_1 + 36\alpha_2 = 4 \\ 14\alpha_0 + 36\alpha_1 + 98\alpha_2 = 6 \end{cases}, \quad \text{vậy } \begin{cases} \alpha_0 = \frac{11}{10} \\ \alpha_1 = \frac{11}{10} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{10}x + \frac{11}{10}.$$

c) Nếu $m = 3$, khi đó quy về tìm đa thức nội suy bậc 3. Dễ thấy

$$P_3(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{8}{3}x + 1.$$

III - VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN SỐ

Trong quá trình tính toán trong toán học cũng như trong khoa học kĩ thuật ta thường gặp bài toán thực tế, phải tính đạo hàm cũng như tích phân của một hàm số cho dưới dạng bảng, hoặc là hàm số được cho bởi một biểu thức giải tích nhưng khá phức tạp, nếu tính

trực tiếp đạo hàm và tích phân sẽ gặp khó khăn, từ đó nảy sinh ra nhu cầu tính gần đúng đạo hàm và tích phân số.

§7. TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM

Nguyên tắc chung để tính gần đúng đạo hàm của một hàm số $y = y(x)$ là người ta thay nó bởi hàm nội suy (thường là hàm đa thức $L_n(x)$) sau đó lấy $f'(x) \approx L'_n(x)$, $f''(x) \approx L''_n(x)$, v.v... ở trên đoạn $[a, b]$ đang xét, tổng quát là $f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Nếu $R(x) = f(x) - L_n(x)$ thì phần dư sẽ là :

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x)$$

Thấy ngay rằng việc tính gần đúng đạo hàm như vậy (nhất là cấp cao) kém chính xác.

1. Tính gần đúng đạo hàm nhờ sự áp dụng đa thức nội suy với mốc bất kì

Xét đa thức nội suy Newton :

$$P_n(x) = L_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0; x_1; \dots; x_n)$$

$$\text{với sai số } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

Nếu coi rằng $f'(x) \approx L'_n(x)$ thì ta rút ra :

$$f'(x) \approx f(x_0; x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)f(x_0; x_1; x_2) + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_0)f(x_0; \dots; x_3) + \dots + (\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-2} + \dots + \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1})f(x_0; x_1; \dots; x_n)$$

trong đó $\alpha_i = (x - x_i)$, với sai số :

$$R'_n(x) = \frac{d\omega_{n+1}(x)}{dx} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} + \omega_{n+1}(x) \frac{f^{(n+2)}(\xi_2)}{(n+2)!}$$

Nếu coi rằng $f''(x) \approx L_n''(x)$ thì rút ra rằng :

$$f'(x) \approx 2[f(x_0; x_1; x_2) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \dots + (\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-3} + \alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-4}\alpha_{n-2} + \dots + \alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_{n-1}). f(x_0; \dots; x_n)]$$

với phần dư là :

$$R_n''(x) = \frac{d^2\omega_{n+1}(x)}{dx^2} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} + 2 \frac{d\omega_{n+1}(x)}{dx} \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi_2)}{(n+2)!} + 2\omega_{n+1}(x) \cdot \frac{f^{(n+3)}(\xi_3)}{(n+3)!}$$

Bằng cách tương tự cho các đạo hàm cấp cao.

2. Tính gần đúng đạo hàm nhờ sự áp dụng đa thức nội suy với mốc cách đều

Nói chung là ta có thể áp dụng các công thức nội suy với mốc cách đều để tính gần đúng đạo hàm. Dưới đây ta nêu một trường hợp điển hình tính $f'(x)$, $f''(x)$, với $x \approx x_0$ nhờ công thức nội suy Newton ở đầu bảng.

Ta có : $f(x) = f(x_0 + th) \approx P(x_0 + th)$

trong đó : $P(x_0 + th) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \dots +$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \dots (t-n+1)$$

$$\text{Từ đó } f'(x) \approx \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \right]$$

Tương tự,

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + \frac{6t-6}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{(12t^2-36t+22)}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots \right]$$

(chú ý rằng ta luôn sử dụng $y_0 = f(x_0)$ với $x = x_0 + th$, h là bước).

3. Tính gần đúng đạo hàm nhờ sử dụng hàm nội suy spline bậc ba

Với $y = f(x)$, ta xấp xỉ nó nhờ một đa thức spline bậc ba $S(x)$, lúc đó ta đặt :

$$f'(x) \approx S'(x) \text{ và } f''(x) \approx S''(x)$$

Ví dụ 13. Cho $f(x) = \sin x$ trên $[0, \pi]$. Hãy tính gần đúng đạo hàm $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ nhờ spline bậc 3 với phân hoạch $\pi = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

Ta có : $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \pi, f(x_0) = 0, f(x_1) = 1, f(x_2) = 0, f'(x_0) = 1, f'(x_1) = 0, f'(x_2) = -1$. Từ đó ta có hệ phương trình sau (xem §4) :

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = \frac{12}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) \\ \frac{1}{2}m_0 + 2m_1 + \frac{1}{2}m_2 = -\frac{25}{\pi^2} \\ m_1 + 2m_2 = \frac{12}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) \end{cases}$$

Giải hệ ta có :

$$\begin{cases} m_0 = m_2 = \left(\frac{24}{\pi^2} - \frac{8}{\pi} \right) \\ m_1 = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{24}{\pi^2} \right) \end{cases}$$

Từ đó ta có được đa thức spline $S(x)$ trên từng đoạn nhỏ, chẳng hạn với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ thì có :

$$\begin{aligned} S(x) = & \frac{8}{3\pi^2} \left(\frac{3}{\pi} - 1 \right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^3 + \frac{4}{3\pi^2} \left(1 - \frac{6}{\pi} \right) x^3 + \\ & + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{\pi} \right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{3} \right) x. \end{aligned}$$

Từ đó $S'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\pi} - \frac{1}{4} \approx 0,7049304$, $S''\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx -1$, chú ý đến giá trị đúng $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071068$ và $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, thì ta thấy các giá trị gần đúng này không tốt, nếu giảm h thì có được $f(x)$, $f'(x)$ chính xác hơn.

§8. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN, PHƯƠNG PHÁP MONTE - CARLO

Thực tế tính toán trong nhiều trường hợp phải tính $I = \int_a^b f(x)dx$ với $f(x)$ là hàm số không biết nguyên hàm của nó hoặc là $y = f(x)$ chỉ được cho bằng bảng. Vì vậy vấn đề tính gần đúng I được đặt ra là tự nhiên.

1. Công thức Newton - Cotes

Nếu thay $f(x)$ bởi đa thức nội suy Lagrange với mốc cách đều $L_n(x) \equiv L_n(x_0 + th)$ và đặt $I \approx \int_a^b L_n(x)dx$ thì ta sẽ có công thức Newton - Cotes :

$$\text{Vì } L_n(x_0 + th) = \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \frac{C_n^j}{(t-j)} f(x_j)$$

$$\text{nên ta có : } I \approx \sum_{j=0}^n \int_0^n \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{n!} \cdot \frac{C_n^j}{(t-j)} (-1)^{n-j} \cdot h \cdot f(x_j) \cdot dt$$

$$\text{Nếu đặt : } A_i = \frac{(-1)^{n-j}}{i!(n-i)!} h \int_0^n \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{t-i} dt$$

$$\text{thì : } I \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i). \text{ Bây giờ ta đặt } H_i = \frac{A_i}{b-a} \text{ thì rút ra :}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n H_i f(x_i) \quad (22)$$

Công thức (22) được gọi là công thức cầu phương Newton – Cotes, các hệ số H_i là các hệ số Cotes. Nếu dùng công thức Newton – Cotes thì sai số mắc phải là :

$$R_n = \int_a^b [f(x) - L_n(x)] dx .$$

Nếu đặt N là bội chung nhỏ nhất của các mẫu số của H_i ($0 \leq i \leq n$) thì lúc ấy $H_i = \frac{\hat{H}_i}{N}$ và ta có (22) trở thành :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^n \hat{H}_i y_i \quad (23)$$

Người ta cũng nói công thức (23) là công thức cầu phương Newton – Cotes và các hệ số $\hat{H}_i$ là hệ số Cotes. Nhận xét rằng các hệ số Cotes không phụ thuộc vào hàm số $y = f(x)$ hoặc độ dài bước h , vì vậy thường được tính sẵn. Dưới đây là bảng hệ số Cotes, ứng với $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

n	$\hat{H}_0$	$\hat{H}_1$	$\hat{H}_2$	$\hat{H}_3$	$\hat{H}_4$	$\hat{H}_5$	$\hat{H}_6$	N
1	1	1						2
2	1	4	1					6
3	1	3	3	1				8
4	7	32	12	32	7			90
5	19	75	50	50	75	19		288
6	41	216	27	272	27	216	41	840

Ví dụ : Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^4}$ theo công thức

Newton – Cotes với $n = 4$.

Các tính toán cho ở bảng dưới đây :

i	x_i	y_i	$\hat{H}_i$	$y_i \hat{H}_i$
0	0	1	7	7,00
1	0,5	0,942	32	30,144
2	1	0,500	12	6,000
3	1,5	0,165	32	5,280
4	2	0,059	7	0,413

$$\Sigma = 48,837$$

Áp dụng công thức (2) thì có $I \approx \frac{2}{90} \cdot 48,837 \approx 1,085$.

Dưới đây là một vài trường hợp đặc biệt của công thức cầu phương Newton – Cotes.

a) Công thức hình thang và công thức hình thang suy rộng

Nếu $n = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$, còn đa thức nội suy là $L_1(x)$ có

$$\deg L_1(x) \leq 1, \text{ khi đó: } \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \quad (24)$$

Công thức (24) được gọi là công thức hình thang. Nhận xét rằng nếu $f(x) \geq 0$ trên đoạn $[a, b]$ thì $\frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$ là diện tích hình thang có hai đáy là $f(a)$, $f(b)$ và chiều cao là $(b-a)$. Bây giờ chia đoạn $[a, b]$ thành n phần bằng nhau có độ dài h bởi các điểm chia $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, \dots, n$) và trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ ta thay $f(x)$ bởi đa thức nội suy bậc nhất, khi ấy sẽ có:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)] \quad (25)$$

Công thức (25) được gọi là công thức hình thang suy rộng.

Từ ước lượng sai số của đa thức nội suy $L_n(x)$ và hàm $y = f(x)$ của nó ta suy ra rằng sai số ở trường hợp này (hình thang suy rộng) là:

$$r = \frac{M(b-a)}{12} h^2$$

b) Công thức parabol và công thức parabol suy rộng

Nếu $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, còn đa thức nội suy là

$L_2(x)$, $\deg L_2(x) \leq 2$, thì ta thu được :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right] \quad (26)$$

Vì ta thay hàm số $y = f(x)$ bởi $L_2(x)$ có đồ thị nói chung là một parabol nên hệ thức (26) được gọi là công thức cầu phương parabol.

Nếu bây giờ ta chia đoạn $[a, b]$ thành $2n$ đoạn bằng nhau bởi các điểm chia $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, \dots, 2n$). Sau đó trên mỗi đoạn $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ người ta thay hàm số $y = f(x)$ bởi đa thức nội suy Lagrange $L_2(x)$ (thực tế là coi mỗi đoạn $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ là đoạn $[a, b]$ mới), thì ta thu được :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(b) \right] \quad (27)$$

Công thức (27) được gọi là công thức cầu phương parabol suy rộng. Từ hệ thức ước lượng sai số của đa thức nội suy $L_n(x)$ và hàm số $y = f(x)$, ta có thể thấy sai số ở trường hợp này (với công thức parabol suy rộng) là : $r \leq \frac{(b-a)}{180} Mh^4$.

Chú ý : Người ta thường gọi công thức parabol và công thức parabol suy rộng là phương pháp cầu phương Simpson.

Ví dụ : Tính gần đúng $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ theo công thức parabol suy rộng với $n = 5$.

Ta có : $a = 0$, $b = 1$, $f(a) = 1$, $f(b) = \frac{1}{2}$.

$$4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)] = 4.3,460$$

$$2[f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)] = 2.2,728$$

$$\text{Vậy : } I \approx \frac{1}{6.5} \left[1 + 4.3,460 + 2.2,728 + \frac{1}{2} \right] \approx 0,693.$$

2. Công thức Gauss : Trong mục này chúng ta sẽ tìm n số $x_1, \dots, x_n \in [-1; 1]$ và n số $A_1, \dots, A_n$ để sao cho

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (28)$$

là công thức đúng với mọi đa thức $P(x)$ mà $\deg P(x) \leq 2n - 1$.

Dễ thấy (28) là công thức đúng với mọi đa thức $P(x)$, $\deg P(x) \leq 2n - 1$ khi và chỉ khi nó đúng với mọi đơn thức $1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$.

Bây giờ ta thay $f(x_j)$ trong (28) bởi x_i^j ($j = 0, \dots, 2n - 1$) thì rút ra hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n A_i x_i^j = \frac{1 - (-1)^{j+1}}{j+1} \\ j = 0, 1, \dots, (2n - 1) \end{cases} \quad (29)$$

Đây là hệ phương trình phi tuyến $2n$ phương trình và $2n$ ẩn là x_i và A_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Xét n đa thức dạng :

$$f(x) = x^k L_n(x), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

trong đó $L_n(x)$ là đa thức Legendre.

Vì bậc của các đa thức trên không vượt quá $(2n - 1)$, nên ta có :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^k L_n(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i x_i^k L_n(x_i)$$

$$\forall k = 0, 1, \dots, (n - 1).$$

Theo tính chất của đa thức Legendre, ta có :

$$\int_{-1}^1 x^k L_n(x) dx = 0 \text{ khi } k < n, \text{ từ đó rút ra rằng :}$$

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i^k L_n(x_i) = 0, \forall k = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (30)$$

Nếu chọn x_i ($i = 1, \dots, n$) là các nghiệm của đa thức Legendre $L_n(x)$ thì (3) luôn đúng. Theo tính chất của hệ đa thức Legendre, các nghiệm của nó là thực, phân biệt và thuộc vào khoảng $(-1, 1)$.

Khi đã có x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) thì ta có thể tính được A_i ($i = 1, \dots, n$) từ n phương trình đầu tiên của hệ phương trình (29) là

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n A_i x_i^j = \frac{1 - (-1)^{j+1}}{j+1} \\ j = 0, 1, \dots, (n-1) \end{cases} \quad (31)$$

Định thức của hệ này là Vandermonde :

$$D = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0$$

Vậy các A_i được xác định duy nhất.

Tóm lại công thức (28) với các x_i là nghiệm của đa thức Legendre $L_n(x)$ và các A_i được tính từ hệ (31) được gọi là công thức cầu phương Gauss.

Dưới đây là bảng các yếu tố của công thức cầu phương Gauss với $n = 1, 2, 3, 4$.

n	x_1	A_1	x_2	A_2	x_3	A_3	x_4	A_4
1	0	2						
2	-0,577	1	0,577	1				
3	-0,775	0,556	0	0,889	0,775	0,556		
4	-0,861	0,348	-0,340	0,652	0,340	0,652	0,861	0,348

Ví dụ : Tính gần đúng tích phân sau nhờ công thức Gauss với $n = 4$:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Ta lập bảng sau đây (coi rằng $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$)

i	x_i	$f(x_i)$	A_i	$A_i f(x_i)$
1	-0,861	0,574	0,348	0,200
2	-0,340	0,896	0,652	0,584
3	0,340	0,896	0,652	0,584
4	0,861	0,574	0,348	0,200

$$\Sigma = 1,568$$

Vậy $I \approx 1,568$

3. Công thức cầu phương Chebyshev

Trong mục này, ta sẽ tìm hằng số B và n số $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1; 1]$ sao cho công thức $\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n B f(x_i)$ là đúng khi $f(x) = P_n(x)$

với $P_n(x)$ là đa thức mà $\deg(P_n(x)) \leq n$. Khi đó công thức trên gọi là công thức cầu phương Chebyshev.

Dễ thấy công thức ấy đúng với mọi $P(x)$, $\deg P(x) \leq n$ khi và chỉ khi công thức ấy đúng với mọi đa thức $1, x, \dots, x^n$.

Thay $f(x)$ bởi 1 thì ta có : $2 = nB$, từ đó có $B = \frac{2}{n}$. Vậy công thức cầu phương Chebyshev có dạng :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (32)$$

Bây giờ lần lượt thay $f(x)$ bởi $x, x^2, \dots, x^n$ thì ta có hệ phương trình phi tuyến :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^k = \frac{n(1 - (-1)^{k+1})}{2(k+1)} \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (33)$$

Giải hệ này (nếu có nghiệm) thì thay các nghiệm đó vào (32) ta sẽ có công thức cầu phương Chebyshev.

Người ta chứng minh được, $n=8$ và $n \geq 10$ thì hệ không có nghiệm thực.

Dưới đây là bảng các hoành độ Chebyshev với một vài giá trị của n .

n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0				
2	-0,577	0,577			
3	-0,707	0	0,707		
4	-0,795	-0,188	0,188	0,795	
5	-0,832	-0,374	0	0,374	0,832

Ví dụ : Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ theo phương pháp

Chebyshev với $n = 5$.

$$\text{Ta có } I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{5} (f(x_1) + \dots + f(x_5))$$

trong đó $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ta có bảng sau :

i	x_i	x_i^2	$1 + x_i^2$	$f(x_i)$
1	-0,532	0,692	1,692	0,591
2	-0,374	0,140	1,140	0,577
3	0	0	1,000	1,000
4	0,374	0,140	1,140	0,877
5	0,532	0,692	1,692	0,591

$$\Sigma = 3,963$$

$$\text{Vậy } I \approx 0,787$$

4. Tính gần đúng tích phân bội. Phương pháp Monte-Carlo

Giả sử Ω là một miền giới nội trong $\mathbf{R}^n$ và $f(x)$ là một hàm số xác định và khả tích trên Ω . Bài toán đặt ra là tính gần đúng tích phân bội sau đây :

$$I = \int_{\Omega} f(x) dx$$

Khi đó có thể coi rằng đây là n tích phân một lớp và ở mỗi một lớp có thể áp dụng một trong những công thức tính gần đúng tích phân đã xét ở mục trên. Vấn đề có vẻ đơn giản, tuy nhiên khi xét kĩ sẽ thấy rằng cách đó chỉ thuận lợi khi miền lấy tích phân là hình hộp trong $\mathbf{R}^n$ và n không lớn. Trường hợp n khá lớn và nhất là miền Ω phức tạp, người ta thường dùng phương pháp Monte - Carlo. Dưới đây ta trình bày dạng đơn giản nhất của phương pháp này.

$$\text{Giả sử } I = \int_{\Omega} f(x) dx, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

và Ω xác định bởi các bất đẳng thức :

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ và với } 2 \leq i \leq n \text{ thì :}$$

$$0 \leq \varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}) \leq x_i \leq \psi_i(x_1, \dots, x_{i-1}) \leq 1$$

ngoài ra hàm số $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ thỏa mãn hệ thức :

$$0 \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq 1.$$

Bây giờ xét M điểm $P_k(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots, M$, các tọa độ của chúng là những đại lượng ngẫu nhiên, độc lập, phân phối đều trên đoạn $[0; 1]$. (Đại lượng ngẫu nhiên t là phân phối đều trên đoạn $[0; 1]$, nếu nó nhận giá trị trong khoảng $(t_i, t_{i+1}) \subset [0; 1]$ với xác suất là $t_{i+1} - t_i$).

Nếu $P_k \in \Omega$ thì ta tính giá trị $f(P_k)$, còn nếu như $P_k \notin \Omega$ thì ta đặt $f(P_k) = 0$, sau đó đặt :

$$I_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(P_k)$$

12.03.2019

Với M đủ lớn và với xác suất lớn, ta có $I_M \approx I$. Cụ thể với $\varepsilon > 0$ và $0 < \alpha < 1$, thì với xác suất α , ta có :

$$|I - I_M| < \varepsilon \text{ khi } M \geq \frac{t_\alpha^2}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} [f(x) - I]^2 dx$$

trong đó t_α thỏa mãn :

$$\Phi(t_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ (xem bảng giá trị của hàm phân phối}$$

chuẩn $\Phi(t)$ trong một cuốn giáo trình bất kì về xác suất và thống kê).

Nhận xét : Phương pháp Monte – Carlo có ưu điểm là không phụ thuộc vào số lớp lấy tích phân và tính phức tạp của miền lấy tích phân nên có nhiều áp dụng rộng rãi, tuy nhiên tính chính xác không cao.

IV – VÀI VÍ DỤ TÍNH TOÁN TRÊN MAPLE V

Đối với nhiều bài toán cụ thể, việc sử dụng máy tính đặc biệt hữu ích, nhanh gọn và chính xác. Dưới đây là một vài ví dụ tính toán trên chương trình MAPLE V với máy có bộ nhớ 8MB.

Ví dụ 1. Hãy tính đúng $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$ và tính gần đúng tích đó với 15 chữ số.

Vào lệnh :

[> product (1 - 1/(4*k^2), n = 1, ..., infinity).

Máy cho kết quả $\frac{2}{\pi}$, vậy :

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

Sau đó ta vào lệnh :

[> evalf ("", 15) ;

Kết quả : .636619772367582

Ví dụ 2. Tính số e với 20 chữ số thập phân.

Vào lệnh : [`> evalf (exp (1.0), 20)` ;

Kết quả : 2.7182818284590452354

Ví dụ 3. Tính giá trị của hàm Gamma tại 2.5.

Vào lệnh : [`> evalf(GAMMA (2.5))` ;

Kết quả : 1.329340388

Ví dụ 4. Tính số π với 30 chữ số sau dấu chấm thập phân.

Vào lệnh : [`> evalf (Pi, 30)` ;

Kết quả : 3.141592653589793238462643383279

Ví dụ 5. Tính đúng tích phân : $I = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 5} dx$

và tính gần đúng tích phân trên với 8 chữ số sau dấu chấm thập phân.

Vào lệnh :

[`> int (1 / (exp (1) ^ x + 5), x = 0 .. ln(2))` ;

Kết quả : $I = -\frac{1}{5} \ln(7) + \frac{2}{5} \ln(2) + \frac{1}{5} \ln(3)$

Sau đó vào lệnh : [`> evalf ("", 8)` ;

Kết quả : .10779931

Ví dụ 6. Tính gần đúng tích phân $I = \int_1^2 \frac{\sin(x^3)}{x^2} dx$

Vào lệnh :

[`> int (sin(x^3) / x^2, x = 1 .. 2)` ;

sẽ có : $\int_1^2 \frac{\sin(x^3)}{x^2} dx$

Sau đó ta vào lệnh :

[`> evalf ("", 10)` ;

Kết quả : .1971010454

Ví dụ 7. Tính gần đúng tích phân $I = \int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

Ta vào lệnh :

[> evalf (int(sin(x) / x, x = 1 ... Pi) ;

Kết quả : .9058539816.

Nhận xét rằng tích phân $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ không biểu diễn qua các hàm sơ cấp được và ta kí hiệu là Si x.

Ví dụ 8. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$

Vào lệnh : [> evalf (int (1 / sqrt (1 + x^4), x = 0 . . 1)) ;

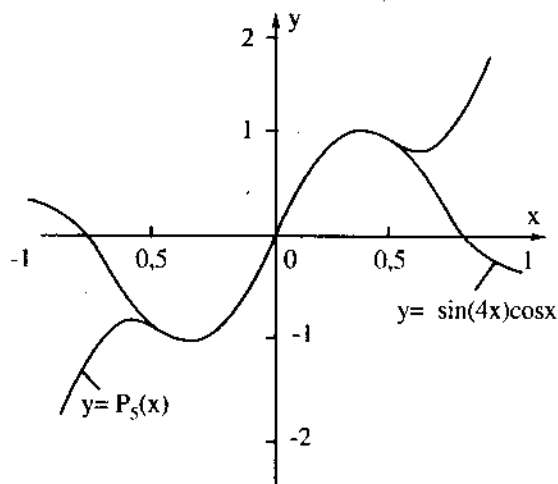
Kết quả : .92703373391

Ví dụ 9. Khai triển hàm $\sin(4x)\cos x$ thành chuỗi tại $x = 0$ và vẽ hai đồ thị để so sánh độ chính xác.

Với độ chính xác đến $O(x^6)$ thì ta có đa thức xấp xỉ bậc 5 của hàm số đã cho là :

$$P_5(x) = 4x - \frac{38}{3}x^3 + \frac{421}{30}x^5$$

Trên hình 2.3 là đồ thị của $y = P_5(x)$ và $y = \sin(4x)\cos x$.

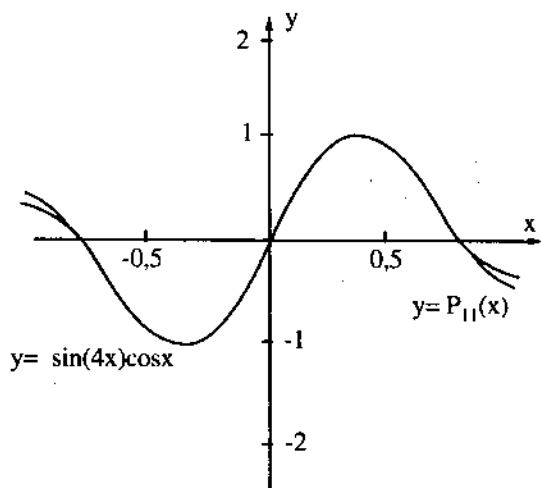


Hình 2.3

Với độ chính xác đến $O(x^{12})$ thì ta có đa thức xấp xỉ bậc 11 của hàm số đã cho là :

$$P_{11}(x) = 4x - \frac{35}{3}x^3 + \frac{421}{30}x^5 - \frac{10039}{1260}x^7 + \frac{246601}{90720}x^9 - \frac{6215659}{9979200}x^{11}$$

Trên hình 2.4 là đồ thị của $y = P_{11}(x)$ và $y = \sin(4x)\cos x$



Hình 2.4

BÀI TẬP

1. Xét hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[0, 5]$ và cho bởi bảng

x	0	1	3	5
y=f(x)	1	2	1	4

Hãy xây dựng đa thức nội suy $L_3(x)$ và tính gần đúng giá trị $f(2)$ bằng cách lấy $f(2) \approx L_3(2)$.

2. Tính : $\left[\sum_{k=1}^{1991} \frac{1}{x_k + 1} \right]$, trong đó x_k là số hạng thứ k của dãy số :

$x_2 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ và $[-]$ là hàm phần nguyên.

3. Tính tổng : $S = \sum_{k=1}^n k^m$ ($m = 1, 2, 3, 4, 5$)

bằng phương pháp sai phân.

4. Tính tổng : $S = 1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n+1)^3$.

5. Tính tổng : $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (2n+1)^2$.

6. Cho hàm số $y = \sin 10x$ trên đoạn $[0, \pi]$. Hãy tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của nó với bậc 7.

7. Tìm a, b sao cho :

$\max_{|x| \leq 1} |x^2 + ax + b|$ là nhỏ nhất.

8. Tìm a, b, c sao cho :

$\max_{|x| \leq 1} |x^3 + ax^2 + bx + b|$ là nhỏ nhất.

9. Tìm a, b sao cho $\max_{|x| \leq 1} |x^4 + ax^2 + b|$ là nhỏ nhất.

10. Tìm a và b để : $\max_{0 \leq x \leq 1} |\sqrt{x} - (ax + b)|$ là nhỏ nhất.

11. Tìm a sao cho :

$\max_{-1 \leq x \leq 2} |-2x^2 + x + a|$ là nhỏ nhất.

12. Tìm a, b để : $\max_{-1 \leq x \leq 1} |ax^2 + bx + 1|$ là nhỏ nhất.

13. Tìm a, b để : $\max_{-1 \leq x \leq 1} |ax^2 + x + b|$ là nhỏ nhất.

14. Hãy giải các bài tập 7-13 bằng kiến thức sơ cấp.

15. Tính các đa thức trực giao Legendre $L_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, 20$.

16. Tìm a, b, c sao cho :

$$\int_0^{\pi} (ax^2 + bx + c - \cos x)^2 dx \text{ là nhỏ nhất.}$$

17. Tìm a, b, c sao cho :

$$\int_0^{\pi} (ax^2 + bx + c - \sin x)^2 dx \text{ là nhỏ nhất.}$$

18. Giả sử hàm số $y = f(x)$ cho bởi bảng sau đây :

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1,4	1,3	1,4	1,1	1,3	1,8	1,6	2,3

Hãy tìm đa thức có phương sai nhỏ nhất bậc 1 và bậc 2 cho hàm số $y = f(x)$.

19. Giả sử hàm số $y = f(x)$ cho bởi bảng :

x	0	1	3	5	6	7	10
f(x)	1	1,5	2,7	1,8	3	3,1	2,2

Hãy tìm đa thức có phương sai nhỏ nhất bậc 1, bậc 2, bậc 3, bậc 4 của hàm số $y = f(x)$.

20. Tính gần đúng tích phân : $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ nhờ phương pháp

Newton-Cotes với $n = 6$.

21. Tính gần đúng tích phân sau theo phương pháp Gauss với $n = 4$:

$$I = \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx.$$

22. Tính gần đúng tích phân I sau theo phương pháp Gauss với $n = 5$:

$$I = \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$$

23. Tính gần đúng tích phân sau theo phương pháp Chebyshev với $n = 5$.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin}{1+x} dx.$$

24. Xét hệ hàm $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos kx, \sin kx\}$.

932.837.101
101
101
101

a) Chứng minh rằng hệ các hàm này là độc lập tuyến tính trong $L_2[0, \pi]$, hơn nữa, chứng minh rằng hệ hàm này là trực giao với nhau ứng với tích vô hướng :

$$\forall f, g \in L_2[0, \pi] : (f, g) = \int_0^{2\pi} f \cdot g dx$$

b) Tính chuẩn $\| \sin mx \|$ và $\| \cos mx \|$ với $m = 1, \dots, k$ (với tích vô hướng nêu trên).

24. Cho hàm số $y = f(x) = 1 - x^2 + x^3$

Hãy khai triển $y = f(x)$ thành chuỗi lượng giác ở dạng

$$y = a_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x + a_3 \sin 3x + b_3 \cos 3x.$$

25. Hãy tính gần đúng tích phân :

$$I = \iint_G (x^2 + y^2) dx dy, \quad G = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

bằng phương pháp Monte - Carlo.

26. Hãy tính gần đúng tích phân sau bằng phương pháp Monte-Carlo:

$$I = \int_G \frac{\sin(xy)}{xy} dx dy, \quad G = \left\{ (x, y) \left| \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4} \right. \right\}.$$

Chương III

GIẢI TÍCH SỐ TRONG ĐẠI SỐ

1 - GIẢI TÍCH SỐ TRONG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

§1. MỞ ĐẦU

Nhiều vấn đề của khoa học kỹ thuật, kinh tế, môi trường v.v... quy về việc giải hệ phương trình tuyến tính :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ là ma trận hệ số, $b \in \mathbb{R}^n$ là vector hệ số tự do cho trước, $x \in \mathbb{R}^n$ là vector cột phải tìm, thì hệ (1) viết được ở dạng :

$$Ax = b \quad (2)$$

Về phương diện lí thuyết, hệ (2) có thể giải được trọn vẹn nhờ lí thuyết ma trận và định thức. Tuy nhiên trong trường hợp ma trận A không suy biến, nếu giải hệ trên bằng phương pháp Cramer thì số phép tính là rất lớn. Nhằm khắc phục hạn chế đó, trong chương này chúng ta xét một số phương pháp thực tế giải hệ phương trình (2) với đặc điểm chung là khối lượng tính toán được giảm nhẹ.

Trong số các phương pháp đó có thể chia ra làm 2 nhóm lớn là nhóm phương pháp trực tiếp và nhóm phương pháp gián tiếp.

Đặc điểm chung của nhóm phương pháp trực tiếp là sau một số hữu hạn phép tính sẽ có kết quả, vì vậy nhóm phương pháp này thường được áp dụng với lớp các bài toán có kích thước nhỏ, và các số liệu ban đầu là đúng. Tuy nhiên, do phải thực hiện một số phép tính tương đối lớn nên có nguy cơ tích lũy sai số, nhất là đối với trường hợp các số liệu ban đầu không thật chính xác. Còn với nhóm các phương pháp gián tiếp (phương pháp lặp) thường được áp dụng cho lớp các bài toán với kích thước lớn, số liệu ban đầu là có sai số.

§2. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Tư tưởng của phương pháp Gauss là đưa hệ phương trình :

$$Ax = b$$

về dạng tam giác trên, lúc đó nghiệm tìm được nhờ quá trình thế ngược. Quá trình đưa hệ phương trình (2) về một hệ tương đương dạng tam giác trên được gọi là quá trình khử được thực hiện bởi lược đồ sau đây :

Ta chia phương trình thứ nhất cho a_{11} (nếu $a_{11} = 0$ thì ta có thể đổi chỗ các phương trình trong hệ để sao cho $a_{11} \neq 0$). Sau đó lần

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ \frac{25}{2}x_2 - 2x_3 = 23 \\ \frac{567}{50}x_3 = \frac{567}{50} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $\mathbf{x}^* = (3, 2, 1)$.

Nhận xét : Ưu điểm căn bản của phương pháp này là đơn giản, dễ lập trình trên máy tính và khối lượng tính toán ít (cỡ n^3 phép tính nhân chia so với $n! \cdot n^2$ phép tính nhân chia của phương pháp Cramer). Tuy nhiên nếu phần tử $a_{kk}^{(k-1)}$ ở bước thứ $(k-1)$ xấp xỉ 0 thì kết quả thiếu chính xác.

§3. PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ

1. Nội dung phương pháp

Xét lại hệ phương trình : $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (2)

Giả sử ma trận $\mathcal{A}$ có thể biểu diễn được ở dạng :

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{C} \quad (3)$$

trong đó : $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$

là ma trận tam giác dưới, còn $\mathcal{C}$ là ma trận tam giác trên :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó có : $\mathbf{b} = \mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{B}\mathcal{E}\mathbf{x} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ với $\mathbf{y} = \mathcal{E}\mathbf{x}$

Vậy hệ (2) được phân rã thành 2 hệ dạng tam giác sau đây :

$$\begin{cases} \mathcal{B}\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \mathcal{E}\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Vấn đề giải hệ trên rất đơn giản, đầu tiên là giải hệ :

$$\mathcal{B}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

và sau đó với $\mathbf{y}$ vừa tìm được, ta giải hệ :

$$\mathcal{E}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Có thể thấy rằng, nếu như ta có :

$$a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

thì ma trận $\mathcal{A}$ luôn có thể biểu diễn được ở dạng (3).

Thật vậy, xét hệ phương trình :

$$\sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{ik}c_{kj} = a_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (4)$$

Trong (4) nếu $i = j = 1$ thì có $b_{11} \cdot c_{11} = a_{11}$

Nếu như đã biết c_{11} thì sẽ có b_{11} , từ điều kiện $a_{11} \neq 0$ ta có

$$b_{11} \cdot c_{11} \neq 0$$

Bây giờ xét $i = 2, j = 1$ và $i = 1, j = 2$ thì có :

$$\begin{cases} b_{21} \cdot c_{11} = a_{21} \\ b_{11} \cdot c_{12} = a_{12} \end{cases}$$

Vì $b_{11} \neq 0$, và $c_{11} \neq 0$ nên xác định được b_{21}, c_{12} .

Bây giờ xét $i = j = 2$ thì có :

$$b_{21} \cdot c_{12} + b_{22} \cdot c_{22} = a_{22}$$

Nếu biết c_{22} thì từ đó có b_{22} :

Kiểm tra trực tiếp thấy rằng :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}c_{11}b_{22}c_{22} \neq 0 \Rightarrow b_{22}.c_{22} \neq 0$$

Quá trình lập luận tiếp tục sẽ xác định được tất cả các ẩn còn lại trong hệ (4).

2. Trường hợp riêng : Trong mục này ta xét riêng trường hợp $\mathcal{A}$ là ma trận đối xứng (nghĩa là $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$), khi đó ta có : $\mathcal{A} = \mathcal{B}.\mathcal{B}'$ với $\mathcal{B}$ là ma trận tam giác dưới, $\mathcal{B}'$ là ma trận chuyển vị của $\mathcal{B}$, còn hệ (2) được phân rã thành hệ dạng :

$$\begin{cases} \mathcal{B}\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \mathcal{B}'\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases};$$

Thực hiện phép nhân $\mathcal{B}.\mathcal{B}'$ và đồng nhất các phần tử tương ứng trong đẳng thức :

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}.\mathcal{B}'$$

$$\text{thì ta có : } \begin{cases} b_{11}^2 + b_{21}^2 + \dots + b_{i1}^2 = a_{11} \\ b_{1i}b_{1j} + b_{2i}b_{2j} + \dots + b_{ii}b_{ij} = a_{ij} \quad (i < j) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta có :

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}} \quad (j > 1)$$

$$b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki}^2} \quad (1 < i \leq n)$$

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki}b_{kj}}{b_{ii}} \quad (i < j)$$

$$b_{ij} = 0 \text{ khi } i > j$$

Chú ý rằng ta lấy :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Sau đó với tính chất đặc thù của hệ tam giác trên và hệ tam giác dưới, dùng phép thế ngược ta sẽ có được nghiệm của hệ phương trình phải tìm, cụ thể là :

$$y_1 = \frac{b_1}{b_{11}}, y_i = \frac{1}{b_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki} y_k \right) (i > 1)$$

$$x_i = \frac{1}{b_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^n b_{ik} x_k \right) (i < n), x_n = \frac{y_n}{b_{nn}}$$

Chú ý : Khối lượng tính toán của phương pháp này cỡ n^3 phép tính nhân chia.

Hệ phương trình $Ax = b$ với A là đối xứng thường gặp trong những bài toán xử lý số liệu bằng phương pháp bình phương tối thiểu.

Ví dụ : Giải hệ phương trình $Ax = b$ nhờ phương pháp phân rã trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vì } b_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1, b_{12} = \frac{a_{12}}{b_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$b_{13} = \frac{a_{13}}{b_{11}} = \frac{1}{1} = 1, b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{12}^2} = 1$$

$$b_{23} = \frac{1}{b_{22}} (a_{23} - b_{12}b_{13}) = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$b_{33} = \sqrt{a_{33} - (b_{13}^2 + b_{23}^2)} = 1$$

nên hệ trên đưa về hai hệ sau :

$$\begin{cases} 1 \cdot y_1 = 1 \\ 2y_1 + 1 \cdot y_2 = 1 \\ 1 \cdot y_1 + (-1)y_2 + 1 \cdot y_3 = 1 \end{cases} \text{ với nghiệm } \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = -1 \end{cases}$$

và hệ $\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 1 \\ 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = -1 \\ 1 \cdot x_3 = -1 \end{cases} \text{ với nghiệm } \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

§4. PHƯƠNG PHÁP TRỰC GIAO

Xét lại hệ phương trình : $Ax = b$
với ma trận hệ số A không suy biến.

Viết lại phương trình (2) ở dạng :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i = 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Kí hiệu $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, -b_i)$, $i = \overline{1, n}$, ta có hệ n vector $\{a_i\}_{i=1}^n$. Nếu thêm vector $a_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ thì có hệ $(n+1)$ vector $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$ trong đó $a_i \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\forall i = \overline{1, n+1}$.

Xét quá trình trực giao hóa Hilbert - Schmidt cho hệ $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$, ta thu được :

$$\begin{cases} u_1 = a_1, v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ u_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, v_i) v_i, \quad v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}, \quad k = 2, \dots, (n+1) \end{cases} \quad (6)$$

Bây giờ xét $u_{n+1} = (t_1, t_2, \dots, t_{n+1})$. Giả sử $t_{n+1} = 0$, theo tính chất dãy $\{u_i\}_{i=1}^{n+1}$ rút ra u_{n+1} trực giao với mọi vector a_i , $i = \overline{1, n}$; vậy ta có :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j = 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (7)$$

Mặt khác, theo giả thiết $\mathcal{A}$ là ma trận không suy biến nên từ (7) rút ra $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$, vậy có $u_{n+1} = (0, 0, \dots, 0)$, vô lý, nghĩa là $t_{n+1} \neq 0$.

Vì u_{n+1} trực giao với mọi a_i ($i = \overline{1, n}$), nên có :

$$\begin{cases} (u_{n+1}, a_i) = 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (2)$$

hay khai triển ra ta có :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j - b_i t_{n+1} = 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (5)$$

Chú ý rằng $t_{n+1} \neq 0$, nên :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\frac{t_j}{t_{n+1}} \right) = b_i \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (8)$$

Hệ thức (8) chứng tỏ rằng $x = (x_j)_{j=1}^n$ với $x_j = \frac{t_j}{t_{n+1}}$, $j = \overline{1, n}$, là nghiệm của hệ phương trình (1).

Nhận xét : Phương pháp trực giao hóa tương đối đơn giản, dễ lập trình trên máy tính, khối lượng tính toán ít (cỡ n^3 phép tính). Tuy nhiên phương pháp này hạn chế ở chỗ các công thức tính theo (5) không ổn định, kém chính xác so với phương pháp Gauss.

§5. PHÂN TÍCH SAI SỐ

1. Số điều kiện của ma trận $\mathcal{A}$

Xét $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j = \overline{1, n}}$ và $\| \cdot \|$ là một chuẩn nào đó trong $\mathbf{R}^n$, kí hiệu

$$M = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad m = \inf_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Dễ thấy $\|A\| = M$ và nếu $m > 0$ thì ma trận A có ma trận nghịch đảo A^{-1} và $m = \|A^{-1}\|^{-1}$.

Định nghĩa 3.5.1 : Đại lượng $\frac{M}{m} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ được gọi là số điều kiện của ma trận A và đại lượng đó được kí hiệu là $\text{cond}(A)$.

Ma trận A được gọi là điều kiện xấu nếu $\text{cond}(A)$ là khá lớn ($\text{cond}(A) \gg 1$).

Dễ thấy : a) $\text{cond}(A) \geq 1$

b) Nếu A là ma trận trực giao thì $\text{cond}(A) = 1$

c) $\forall c \neq 0 : \text{cond}(cA) = \text{cond}(A)$.

Nhận xét rằng các khẳng định a) và c) là hiển nhiên, với khẳng định b), ta thấy : $A^{-1} = A'$, nên có :

$\|Ax\|^2 = (Ax)' \cdot Ax = x'A'Ax = x'x = \|x\|^2$, từ đó có $M = m = 1$ và $\text{cond}(A) = 1$.

2. Phân tích sai số

Giả sử x là nghiệm của phương trình $Ax = b$, $x' = x + \Delta x$ là nghiệm của phương trình $Ax' = b'$ và $b' = b + \Delta b$. Khi ấy

$$\|\Delta x\| = \frac{1}{m} \cdot m \|\Delta x\| \leq \frac{1}{m} \|A(\Delta x)\|, \text{ từ đó có :}$$

$$\|\Delta x\| \leq \frac{1}{m} \|\Delta b\|.$$

$$\text{Mặt khác : } \|x\| = \frac{1}{M} \cdot M \|x\| \geq \frac{\|Ax\|}{M} = \frac{\|b\|}{M}, \text{ từ đó :}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{M \|\Delta b\|}{m \|b\|} = \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (9)$$

Ước lượng (9) chứng tỏ rằng sai số tương đối của nghiệm có thể bằng tích của $\text{cond}(A)$ với sai số ở vế phải. Từ đó suy ra rằng với ma trận A điều kiện xấu thì nghiệm của nó thay đổi nhiều so với

những thay đổi nhỏ ở hệ số và các số hạng tự do. Như vậy, vấn đề giải hệ phương trình đại số tuyến tính bằng số với ma trận điều kiện xấu và vế phải cho gần đúng, là một bài toán khó của toán học tính toán.

$$\text{Ví dụ 1 : Xét hệ } \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32 \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23 \\ 8x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33 \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31 \end{cases}$$

Ta có thể thấy rằng $\text{cond}(\mathcal{A}) = 2984$. Nếu xét $x_1 = 6, x_2 = -7,2, x_3 = 2,9, x_4 = -0,1$ thì ta có $b_1 = 32,1, b_2 = 22,9, b_3 = 32,9, b_4 = 31,4$, ta dễ tưởng rằng đã gần nghiệm.

Bây giờ lại xét : $x_1 = 1,50, x_2 = 0,18, x_3 = 1,19, x_4 = 0,89$ thì thu được : $b_1 = 32,01, b_2 = 22,99, b_3 = 32,99, b_4 = 31,01$; thì lại càng dễ lầm rằng $(1,50 ; 0,18 ; 1,19 ; 0,89)$ tương đối sát với nghiệm. Tuy nhiên, hệ chỉ có một nghiệm duy nhất $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$. So sánh thì rõ ràng hai trường hợp đã xét ở trên còn quá xa nghiệm.

$$\text{Ví dụ 2 : Xét hệ : } \begin{cases} 0,1x_1 & = 0,1 \\ & 0,1x_2 & = 0,1 \\ & & \ddots \\ & & & 0,1x_{20} = 0,1 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính cấp 20×20 , có định thức của ma trận hệ số là $(0,1)^{20} \approx 0$, vậy nếu xét theo quan điểm của phương pháp Cramer thì ma trận hệ số $\mathcal{A}$ coi như *suy biến*. Tuy nhiên, rõ ràng $\text{cond}(\mathcal{A}) = 1$, và thấy ngay $x_1 = x_2 = \dots = x_{20} = 1$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Nhận xét : 1. Từ hai ví dụ trên, ta có thể thấy rằng dùng khái niệm $\text{cond}(\mathcal{A})$ để kiểm tra *độ suy biến* của ma trận $\mathcal{A}$ tốt hơn hẳn dùng khái niệm định thức của ma trận $\mathcal{A}$.

2. Hệ phương trình đại số tuyến tính (1) sẽ "dễ giải" nếu $\text{cond}(\mathcal{A})$ gần với 1 và khó giải nếu $\text{cond}(\mathcal{A})$ lớn ($\text{Cond}(\mathcal{A}) \gg 1$).

§6. PHƯƠNG PHÁP LẬP ĐƠN

1. Phương pháp : Trong $\mathbf{R}^n$, người ta thường xét ba chuẩn quen thuộc sau :

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

Khi đó với ma trận $A = (a_{ij})_{i,j=1,n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ sẽ có các chuẩn tương ứng :

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$ (λ_1 là giá trị riêng lớn nhất của ma trận $A' \cdot A$).

Để giải hệ phương trình $Ax = b$ (2) nhờ phương pháp lập đơn, người ta biến đổi (2) về dạng :

$$x = Bx + g \quad (10)$$

Sau đó với $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$, ta thiết lập dãy $\{x^{(k)}\}_k$ bằng cách đặt :

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \\ k \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

Với một số điều kiện về ma trận B , dãy $\{x^{(k)}\}_k$ hội tụ đến nghiệm x^* của hệ (2). Phương pháp lập xác định theo hệ thức (11) để giải hệ phương trình (2) được gọi là phương pháp lập đơn.

2. Các định lý cơ bản :

Định lý 3.6.1. Nếu $\|B\| < 1$ thì với mọi $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, dãy $\{x^{(k)}\}_k$ xác định bởi (11) hội tụ đến nghiệm duy nhất x^* của hệ phương trình (2), hơn nữa ta có :

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

Chứng minh. Xét toán tử $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ được xác định bởi $Tx = Bx + g$. Khi ấy $\|Tx - Tx'\| \leq \|B\| \cdot \|x - x'\|, \forall x', x \in \mathbb{R}^n$, điều này chứng tỏ rằng T là toán tử co, áp dụng nguyên lý ánh xạ co ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chú ý : 1. Trong không gian $\mathbb{R}^n$ thì mọi chuẩn là tương đương cho nên nếu phép lặp (11) hội tụ với một chuẩn nào đó thì nó cũng hội tụ với các chuẩn khác.

2. Vấn đề đưa hệ phương trình (2) về dạng (10) với ma trận B thỏa mãn điều kiện $\|B\| < 1$ là không tầm thường. Nói chung, với mỗi ma trận A cụ thể phải có một kỹ thuật tương ứng kèm theo. Định lý dưới đây cho ta một vài trường hợp điển hình.

Định lý 3.6.2 : Giả sử ma trận $A = (a_{ij})_{i,j=1,\overline{n}}$ thỏa mãn một trong hai điều kiện sau :

$$a) \sum_{i \neq j=1}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

$$b) \sum_{j \neq i=1}^n |a_{ij}| < |a_{jj}|, \quad \forall j = \overline{1, n}$$

Khi đó luôn có thể đưa được hệ phương trình (2) về dạng (10) với điều kiện $\|B\| < 1$.

Chứng minh : a. Giả sử điều kiện a) được thỏa mãn, khi đó ta viết lại hệ (2) ở dạng :

$$\begin{cases} a_{ii}x_i + \sum_{i \neq j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Từ đó có :

$$\begin{cases} x_i = - \sum_{i \neq j=1}^n \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j + \frac{b_i}{a_{ii}} \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Vậy ta đã đưa hệ (2) về hệ phương trình tương đương với nó, ở đó :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Từ điều kiện a) rút ra rằng :

$$\|\mathcal{B}\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i \neq j=1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right) < 1$$

b) Giả sử điều kiện (b) được thỏa mãn ta viết lại hệ phương trình (2) ở dạng :

$$\begin{cases} a_{ii}x_i + \sum_{i \neq j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Đặt $z_i = a_{ii}x_i$ thì có hệ :

$$\begin{cases} z_i = - \sum_{i \neq j=1}^n \left(\frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right) z_j + b_i \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Vậy ta có hệ phương trình : $z = \mathcal{B}z + b$ (12)

ở đó :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{22}} & -\frac{a_{13}}{a_{33}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{33}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & -\frac{a_{n2}}{a_{22}} & -\frac{a_{n3}}{a_{33}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Từ điều kiện ta có :

$$\|\mathcal{B}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i \neq j} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| \right) < 1$$

Tóm lại, ta có hệ phương trình : $z = \mathcal{B}z + b$ với $\|\mathcal{B}\|_1 < 1$ □

Chú ý rằng nếu $z^* = (z_1^*, \dots, z_n^*)$ là nghiệm của hệ (12) thì

$$x^* = \left(\frac{z_1^*}{a_{11}}, \frac{z_2^*}{a_{22}}, \dots, \frac{z_n^*}{a_{nn}} \right) \text{ là nghiệm của hệ phương trình (2).}$$

Ví dụ : Giải hệ phương trình sau đây bằng phương pháp lặp đơn :

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Để thấy hệ phương trình này thỏa mãn điều kiện a) ở trong định lí 3.6.2. Ta đưa hệ về dạng :

$$\begin{cases} x_1 = -0,2x_2 - 0,1x_3 + 1 \\ x_2 = -0,1x_1 - 0,2x_3 + 1,2 \\ x_3 = -0,1x_1 - 0,1x_2 + 0,8 \end{cases}$$

Với xấp xỉ ban đầu $x^{(0)} = (0 ; 0 ; 0)$, ta thu được kết quả thể hiện qua bảng sau đây :

k	x_1	x_2	x_3
1	1	1,2	0,8
2	0,68	0,94	0,58
3	0,754	1,016	0,638
4	0,733	0,997	0,623
5	0,7383	1,0021	0,6270
6	0,73688	1,00077	0,62596
7	0,737250	1,00112	0,626235

Có thể thấy nghiệm đúng của hệ này là :

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{707}{955}; \frac{956}{955}; \frac{598}{955} \right) \text{ và } \mathbf{x}^{(7)} \text{ là tương đối chính xác.}$$

§7. PHƯƠNG PHÁP SEIDEL

Trong mục này ta tiếp tục nghiên cứu vấn đề giải hệ phương trình $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (2).

Giả sử hệ (2) được đưa về dạng : $\mathbf{x} = D\mathbf{x} + \mathbf{g}$ (13)

Giả sử rằng đã có các xấp xỉ $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}$ thì lúc đó

$\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ được xác định bởi :

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \sum_{j=1}^n b_{1j} x_j^{(k-1)} + g_1 \\ x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^n b_{ij} x_j^{(k-1)} + g_i \\ i = \overline{2, n} \end{cases} \quad (14)$$

Dãy $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ xây dựng theo hệ thức (14) để giải hệ phương trình (2) được gọi là dãy xấp xỉ xây dựng theo thuật toán Seidel hoặc theo phương pháp Seidel.

Định lí 3.7.1 : Nếu $\|B\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |b_{ij}| \right) < 1$ thì dãy $\{x^{(k)}\}$

xây dựng bởi hệ thức (14) hội tụ đến nghiệm duy nhất của hệ phương trình (2).

Chứng minh : Theo định lí 3.6.1 thì hệ phương trình (2) có nghiệm duy nhất x^* , nghĩa là :

$$\begin{cases} x_i^* = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j^* = g_i \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (15)$$

Lấy (14) trừ đi (15) từng phương trình ta thu được :

$$x_i^{(k+1)} - x_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} (x_j^{(k+1)} - x_j^*) + \sum_{j=i}^n b_{ij} (x_j^{(k)} - x_j^*)$$

Từ đó ta có :

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^*| = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| |x_j^{(k+1)} - x_j^*| + \sum_{j=i}^n |b_{ij}| |x_j^{(k)} - x_j^*| \quad (16)$$

Ta đặt : $\sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| = \beta_i, \quad \sum_{j=i}^n |b_{ij}| = \gamma_i, \quad \text{chú ý đến}$

$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, ta có :

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^*| \leq \beta_i \|x^{(k+1)} - x^*\|_{\infty} + \gamma_i \|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} \quad (17)$$

Gọi i_0 là chỉ số mà :

$$|x_{i_0}^{(k+1)} - x_{i_0}^*| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^*| = \|x^{(k+1)} - x^*\|_{\infty}.$$

Từ (6) ta thu được :

$$\|x^{(k+1)} - x^*\|_{\infty} \leq \beta_{i_0} \|x^{(k+1)} - x^*\|_{\infty} + \gamma_{i_0} \|x^{(k)} - x^*\|_{\infty}.$$

$$\text{Vậy : } \|x^{(k+1)} - x^*\|_{\infty} \leq \frac{\gamma_{i_0}}{(1 - \beta_{i_0})} \|x^{(k)} - x^*\|_{\infty}.$$

Đặt : $v = \max \left(\frac{\gamma_{i_0}}{1 - \beta_{i_0}} \right)$ thì sẽ có :

$$\|x^{(k+1)} - x^*\|_{\infty} \leq v \|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} . \quad (18)$$

Mặt khác dễ thấy : $(\beta_i + \gamma_i) - \frac{\gamma_i}{(1 - \beta_i)} \geq 0$, từ đó có :

$$\|B\|_{\infty} = \max_i (\beta_i + \gamma_i) \geq v, \text{ nên } v < 1, \text{ do đó hệ thức (7) dẫn}$$

đến $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$, nghĩa là dãy $\{x^{(k)}\}$ xây dựng theo phương pháp

Seidel hội tụ đến nghiệm duy nhất x^* . $\square$

Nhận xét : 1) Tốc độ hội tụ của phương pháp lặp đơn đối với hệ phương trình (2) là :

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \|B\| \cdot \|x^{(k)} - x^*\|$$

Mặt khác, tốc độ hội tụ của phương pháp Seidel là :

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq v \|x^{(k)} - x^*\| \text{ với } v < \|B\|$$

2) Nếu viết lại hệ (2) ở dạng :

$$x = (B_1 + B_2)x + g, \text{ trong đó :}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

thì có thể viết (14) dưới dạng sau đây :

$$x^{(k+1)} = (E - B_1)^{-2} B_2 x^{(k)} + (E - B_1)^{-1} g$$

Như vậy phương pháp Seidel cũng là phương pháp lặp đơn được áp dụng cho hệ phương trình khác.

Ví dụ : Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Seidel :

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}$$

với xấp xỉ ban đầu $x^{(0)} = (0 ; 0 ; 0)$.

Các tính toán cho bởi bảng sau :

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	2,5	2,1	1,2
2	2,988	2,023	1,000
3	3,0086	1,9969	0,9965
4	2,99971	1,9979	1,00020
5	2,999871	2,00065	1,000048

Chú ý rằng nghiệm đúng của hệ là $x^* = (3, 2, 1)$, từ đó ta thấy trong trường hợp này, phương pháp Seidel hội tụ tương đối nhanh.

§8. VẤN ĐỀ TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1. Bài toán :

Giả sử $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ là một ma trận không suy biến, E là ma trận đơn vị cấp n, bài toán đặt ra là tìm ma trận $B = (x_{ij})_{n \times n}$ sao cho $AB = BA = E$.

Nếu đặt X_i là cột thứ i của ma trận B, E_i là cột thứ i của ma trận E thì hệ thức $AB = E$ tương đương với n hệ phương trình :

$$\begin{cases} \mathcal{A}X_i = E_i \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Vì $\mathcal{A}$ là không suy biến nên mỗi hệ đều có nghiệm duy nhất. Tuy nhiên, ta thấy ngay khối lượng tính toán là rất lớn. Dưới đây ta khảo sát 2 phương pháp tương đối đơn giản tìm ma trận nghịch đảo với đặc trưng là khối lượng tính toán được giảm nhẹ.

2. Phương pháp Jordan

Ta viết liền nhau hai ma trận $\mathcal{A}$ và E , ma trận $\mathcal{A}$ ở bên trái và E ở bên phải. Bước một, ta tiến hành đưa cột thứ nhất của ma trận $\mathcal{A}$ về cột thứ nhất của ma trận đơn vị E bằng phép biến đổi sơ cấp thực hiện trên các dòng. Bước hai, ta tiến hành đưa cột thứ hai của ma trận $\mathcal{A}$ về cột thứ hai của ma trận E bằng phép biến đổi sơ cấp thực hiện trên các dòng. Sau n bước ta thu được E ở bên trái và $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$ ở bên phải. Bản chất vấn đề chính là ta đã nhận ma trận $\mathcal{A}^{-1}$ vào $\mathcal{A}$ và E .

Tính toán cụ thể theo quy tắc sau đây : Nếu gọi a_{jk}^p là phần tử ở dòng j cột k có được sau bước khử thứ p thì công thức tính a_{jk}^p là :

$$\begin{cases} a_{pk}^p = \frac{a_{pk}^{p-1}}{a_{pp}^{p-1}} \text{ với } k = \overline{1, n} \\ a_{jk}^p = a_{jk}^{p-1} - \frac{a_{jp}^{p-1} \cdot a_{pk}^{p-1}}{a_{pp}^{p-1}} \quad (j \neq p) \end{cases} \quad (19)$$

Ví dụ : Hãy tìm $\mathcal{A}^{-1}$ với :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 25 & 54 & 20 \\ 31 & 66 & 21 \end{pmatrix}$$

Khi đó quá trình tính $\mathcal{A}^{-1}$ được thể hiện trên sơ đồ sau :

$$\begin{bmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 25 & 54 & 20 \\ 31 & 66 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2,14 & 0,72 & 0,02 \\ 0,50 & 2 & -0,50 \\ -0,34 & -1,32 & -0,62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7,84 & 2,16 & -4,28 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0,04 & -0,96 & 0,68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -186 & 129 & 196 \\ 95 & -66 & -100 \\ -24 & 17 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy : } A^{-1} = \begin{pmatrix} -186 & 129 & 196 \\ 95 & -66 & -100 \\ -24 & 17 & 25 \end{pmatrix}$$

Nhận xét : Ưu điểm của phương pháp này là trong mỗi bước chỉ lưu trữ n^2 phần tử trong khung, tiết kiệm bộ nhớ.

3. Phương pháp lặp

Xét ma trận A không suy biến, ta sẽ tìm ma trận A^{-1} bằng phương pháp lặp như sau : Với ma trận X_0 bất kì (cùng cấp), xét dãy ma trận $\{X_n\}_n$ xây dựng bởi :

$$X_{k+1} = X_k (2E - AX_k), \forall k \geq 0 \quad (20)$$

Nếu ta kí hiệu $Y_k = (E - AX_k)$, $\forall k \geq 0$, thì :

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= E - AX_{k+1} = E - AX_k (2E - AX_k) \\ &= (E - AX_k)^2 = Y_k^2. \end{aligned}$$

$$\text{Do vậy : } Y_k = Y_{k-1}^2 = Y_{k-2}^4 = \dots = Y_0^{2^k}.$$

Mặt khác, xét : $\mathcal{A}^{-1} - X_k = \mathcal{A}^{-1} (E - \mathcal{A} X_k) = \mathcal{A}^{-1} Y_k = \mathcal{A}^{-1} \cdot Y_0^{2^k}$,
vậy : $\|\mathcal{A}^{-1} - X_k\| \leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \cdot \|Y_0\|^{2^k}$.

Từ các ước lượng ở trên ta rút ra rằng : Nếu ma trận X_0 được chọn đủ tốt (thỏa mãn điều kiện $\|E - \mathcal{A} X_0\| < 1$) thì dãy ma trận $\{X_n\}_n$ xây dựng như trên hội tụ đến ma trận $\mathcal{A}^{-1}$ và tốc độ hội tụ là rất nhanh.

Ví dụ : Cho ma trận $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Hãy tìm ma trận nghịch đảo của $\mathcal{A}$ nhờ phương pháp xấp xỉ (2), với ma trận X_0 được chọn bởi :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ -0,9 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Giải. Tính toán theo (20) có :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1,99 & -0,99 \\ -0,99 & 0,99 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1,9999 & -0,9999 \\ -0,9999 & 0,9999 \end{pmatrix}$$

So sánh ta thấy X_2 rất gần với $\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

§9. BÀI TOÁN GIÁ TRỊ RIÊNG

Bài toán tính toán giá trị riêng và vector riêng của một ma trận $\mathcal{A}$ cho trước là một bài toán quan trọng của toán học nói chung, nó có rất nhiều ứng dụng thực tiễn, trong vật lí, cơ học v.v... Về phương diện lí thuyết, bài toán này quy về bài toán giải phương trình đại số $\det(\mathcal{A} - \lambda E) = 0$. Tuy vậy, tính toán thực tế thấy rằng khối lượng phép tính rất lớn. Về đại thể có hai bài toán cơ bản tìm giá trị riêng là bài toán tìm tất cả các giá trị riêng và bài toán tìm giá trị riêng có modun lớn nhất. Để giải bài toán giá trị riêng, người ta đưa ra hai hướng khác nhau : Hướng thứ nhất (thường được gọi là hướng trực tiếp) là nêu ra thuật toán đơn giản để tính

các hệ số của đa thức đặc trưng một cách nhanh chóng. Khi có đa thức đặc trưng rồi thì tiến hành giải phương trình đặc trưng để có các giá trị riêng, hoặc ước lượng giá trị riêng có modun lớn nhất (bé nhất) tùy yêu cầu cụ thể từng bài toán ; Hướng thứ hai (thường được gọi là hướng gián tiếp) là dùng phương pháp lặp để tìm giá trị riêng và vectơ riêng. Dưới đây ta trình bày một vài phương pháp tìm các giá trị riêng và vectơ riêng cho trước.

1. Phương pháp Krylov

Đầu tiên ta tiến hành xác định các giá trị riêng của ma trận $\mathcal{A}$. Với mỗi ma trận $\mathcal{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ cho trước, xét E là ma trận đơn vị cấp n . Khi đó người ta gọi phương trình ẩn λ sau đây là phương trình đặc trưng của ma trận $\mathcal{A}$:

$$\det (\mathcal{A} - \lambda E) = 0$$

Nếu khai triển $\det (\mathcal{A} - \lambda E)$ theo lũy thừa của λ thì ta có $\det(\mathcal{A} - \lambda E)$ là một đa thức bậc n của λ , kí hiệu là $D(\lambda)$ và gọi là đa thức đặc trưng của ma trận $\mathcal{A}$; $D(\lambda) = (-1)^n [\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_{n-1} \lambda - p_n]$.

Nếu $\varphi(\mathcal{A}) = a_0 \mathcal{A}^n + a_1 \mathcal{A}^{n-1} + \dots + a_n E = 0$ thì ta nói rằng đa thức $\varphi(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$ nhận ma trận $\mathcal{A}$ làm nghiệm. Theo định lí Caley - Hamilton thì đa thức đặc trưng $D(\lambda)$ của ma trận $\mathcal{A}$ nhận $\mathcal{A}$ làm nghiệm, đồng thời nó còn nhận $\mathcal{A}'$ cũng là nghiệm, nghĩa là :

$$D(\mathcal{A}) = (-\lambda)^n [\mathcal{A}^n - p_1 \mathcal{A}^{n-1} - \dots - p_{n-1} \mathcal{A} - p_n E] = 0$$

$$D(\mathcal{A}') = (-1)^n [\mathcal{A}'^n - p_1 \mathcal{A}'^{n-1} - \dots - p_{n-1} \mathcal{A}' - p_n E] = 0$$

Trong tập hợp các đa thức nhận $\mathcal{A}$ làm nghiệm sẽ tồn tại duy nhất đa thức $\varphi(\lambda)$ có hệ số cao nhất bằng 1 và có bậc nhỏ nhất, ta sẽ gọi đa thức này là đa thức tối thiểu của ma trận $\mathcal{A}$.

Với vectơ : $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \dots, c_n^{(0)})$ bất kì, xét hệ các vectơ $\{\mathbf{c}^{(i)}\}_{i=0}^n$ xác định bởi $\mathbf{c}^{(i)} = \mathcal{A} \mathbf{c}^{(i-1)}$

Từ định lí Caley – Hamilton, ta có : $D(\mathcal{A})\mathbf{c}^{(0)} = 0$, nghĩa là :

$$\mathcal{A}^n \mathbf{c}^{(0)} - p_1 \mathcal{A}^{n-1} \mathbf{c}^{(0)} - p_2 \mathcal{A}^{n-2} \mathbf{c}^{(0)} - \dots - p_{n-1} \mathcal{A} \mathbf{c}^{(0)} - p_n \mathbf{c}^{(0)} = 0.$$

Chú ý rằng $\mathcal{A}^{(i)} \mathbf{c}^{(0)} = \mathbf{c}^{(i)}$, với $i = \overline{1, n}$, ta có :

$$p_1 \mathbf{c}^{(n-1)} + p_2 \mathbf{c}^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} \mathbf{c}^{(1)} + p_n \mathbf{c}^{(0)} = \mathbf{c}^{(n)} \quad (21)$$

Hệ phương trình (21) là hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất, ẩn là $p_1, \dots, p_n$.

Nếu hệ vector $\mathbf{c}^{(0)}, \dots, \mathbf{c}^{(n-1)}$ là độc lập tuyến tính thì từ (21) sẽ có duy nhất nghiệm $p_1, p_2, \dots, p_n$. Nếu hệ $\mathbf{c}^{(0)}, \mathbf{c}^{(1)}, \dots, \mathbf{c}^{(n-1)}$ là phụ thuộc tuyến tính và có $\mathbf{c}^{(0)}, \dots, \mathbf{c}^{(m)}$ ($m < n-1$) là hệ con độc lập tuyến tính cực đại của hệ này, khi đó ta không xác định được các hệ số của đa thức $D(\lambda)$ mà chỉ xác định các hệ số của đa thức tối thiểu của ma trận $\mathcal{A}$ là :

$$\psi(\lambda) = \lambda^m - \alpha_1 \lambda^{m-1} - \dots - \alpha_{m-1} \lambda - \alpha_m$$

$$\text{Từ đó có : } \mathcal{A}^m \mathbf{c}^{(0)} - \alpha_1 \mathcal{A}^{m-1} \mathbf{c}^{(0)} - \dots - \alpha_{m-1} \mathcal{A} \mathbf{c}^{(0)} - \alpha_m \mathbf{E} = 0$$

$$\text{Vậy } \alpha_1 \mathbf{c}^{(m-1)} + \dots + \alpha_{m-1} \mathbf{c}^{(1)} + \alpha_m \mathbf{c}^{(0)} = \mathbf{c}^{(m)}.$$

Đây chính là hệ phương trình đại số tuyến tính không thuần nhất, ẩn là $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, định thức của ma trận hệ số khác 0, vậy có nghiệm duy nhất là các hệ số của đa thức $\psi(\lambda)$. Các nghiệm của đa thức này chính là các giá trị riêng của $\mathcal{A}$; tuy nhiên, trường hợp này, ta không xác định được tất cả các giá trị riêng của $\mathcal{A}$.

Bây giờ, ta tiến hành tìm các vector riêng của ma trận $\mathcal{A}$.

Giả sử $\mathbf{c}^{(0)}, \mathbf{c}^{(1)}, \dots, \mathbf{c}^{(n-1)}$ là hệ vector độc lập tuyến tính (trong trường hợp ngược lại, chúng ta lấy, $\mathbf{c}^{(0)}, \dots, \mathbf{c}^{(m)}$ (với $m < n-1$) là hệ vector độc

lập tuyến tính tối đại của hệ vector trên). Khi đó vector riêng x_i của ma trận $\mathcal{A}$ ứng với giá trị riêng λ_i sẽ tìm được ở dạng sau đây :

$$x_i = d_1 c^{(n-1)} + d_2 c^{(n-2)} + \dots + d_n c^{(0)}$$

Chú ý rằng $\mathcal{A} x_i = \lambda_i x_i$, $c^{(i)} = \mathcal{A} c^{(i-1)}$, $i = \overline{1, n}$, từ đó rút ra :

$$d_1 c^n + d_2 c^{(n-1)} + \dots + d_n c^{(1)} = \lambda_i [d_1 c^{(n-1)} + \dots + d_2 c^{(0)}]$$

Mặt khác :

$$D(\mathcal{A}) c^{(0)} = 0 \Leftrightarrow (-1)^n [c^{(n)} - p_1 c^{(n+1)} - \dots - p_{n-1} c^{(1)} - p_n c^{(0)}] = 0.$$

Kết hợp hai hệ thức trên, ta có :

$$\begin{aligned} & d_1 [p_1 c^{(n-1)} + p_2 c^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} c^{(1)} + p_n c^{(0)}] + \\ & + d_2 c^{(n-1)} + \dots + d_n c^{(1)} = \lambda_i [d_1 c^{(n-1)} + \dots + d_n c^{(0)}]. \end{aligned}$$

Từ đó có :

$$\begin{aligned} & (d_1 p_1 - \lambda_i d_1 + d_2) c^{(n-1)} + (d_1 p_2 - \lambda_i d_2 + d_3) c^{(n-2)} + \dots + \\ & + (d_1 p_{n-1} - \lambda_i d_{n-1} + d_n) c^{(1)} + (d_1 p_n - \lambda_i d_n) c^{(0)} = 0. \end{aligned}$$

Vì $c^{(0)}, \dots, c^{(n-1)}$ là hệ độc lập tuyến tính nên có :

$$\begin{cases} d_1 p_1 - \lambda_i d_1 + d_2 = 0 \\ d_1 p_2 - \lambda_i d_2 + d_3 = 0 \\ \dots \\ d_1 p_{n-1} - \lambda_i d_{n-1} + d_n = 0 \\ d_1 p_n - \lambda_i d_n = 0 \end{cases}$$

Chọn d_1 bất kì khác 0, hệ này cho d_i , $\forall i = \overline{1, n}$ và từ đó có x_i .

Ví dụ : Hãy xác định các giá trị riêng của ma trận $\mathcal{A}$ và sau đó hãy tìm vector riêng ứng với giá trị riêng lớn nhất theo phương pháp Krylov, với

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Giải : Lấy $c^{(0)} = (1, 0, 0)$; $c^{(1)} = A c^{(0)} = (3, 1, 0)$;

$$c^{(2)} = A c^{(1)} = (10, 5, 1); c^{(3)} = A c^{(2)} = (35, 21, 8).$$

$$\text{Vậy : } p_1 c^{(2)} + p_2 c^{(3)} + p_3 c^{(0)} = c^{(3)} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 8 \\ p_2 = -19 \\ p_3 = 12 \end{cases}$$

Từ đó có đa thức đặc trưng của A :

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12 = 0.$$

Vậy A có các giá trị riêng : $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$.

Để xác định vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 4$, ta giải hệ :

$$\begin{cases} d_1 \cdot 8 + (-4)d_1 + d_2 = 0 \\ d_1 \cdot (-19) - 4d_2 + d_3 = 0 \\ d_1 \cdot 12 - 4d_3 = 0 \end{cases}$$

Cho $d_1 = 1$ sẽ có : $d_2 = -4, d_3 = 3$.

Vậy vector riêng x_1 có dạng :

$$x_1 = 1 \cdot c^{(2)} + (-4) \cdot c^{(1)} + 3 \cdot c^{(0)}. \text{ Tính toán sẽ thu được :}$$

$$x_2 = (1, 1, 1).$$

2. Phương pháp Leverie

Giả sử $\varphi(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-2} + \dots + p_n$ có các nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (kể cả bội). Nếu kí hiệu $S_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$, thì từ định lí Viète và nhị thức Newton,

ta có :

$$\begin{cases} p_1 = -S_1 \\ p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1) \\ \dots \\ p_n = -\frac{1}{n}(S_n + p_1 S_{n-1} + \dots + p_{n-1} S_1) \end{cases} \quad (22)$$

Ngoài ra nếu như $\varphi(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của ma trận $\mathcal{A}$ thì S_k chính là vết $\text{Tr}(\mathcal{A}^k)$ của ma trận $\mathcal{A}^k$.

Như vậy, phương pháp Leverie nói gọn lại là như sau : Tính $\mathcal{A}^k$ ($k = \overline{1, n}$), sau đó tính vết của ma trận $\mathcal{A}^k$ là $S_k = \text{Tr}(\mathcal{A}^k) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^k$,
 $\mathcal{A}^k = (a_{ij}^{(k)})_{n \times n}$.

Từ đó có thể tính được các p_i theo hệ thức (22), và ta có đa thức đặc trưng của $\mathcal{A}$.

Ví dụ : Hãy tìm đa thức đặc trưng của ma trận $\mathcal{A}$ nhờ phương pháp Leverie, với :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ta có : } \mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 8 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vậy : } S_1 = 4, \quad S_2 = 8, \quad S_3 = 13$$

$$p_1 = -4, \quad p_2 = 4, \quad p_3 = 1,$$

và do đó đa thức đặc trưng của $\mathcal{A}$ là :

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 1.$$

Nhận xét : Phương pháp Leverie rất đơn giản về ý tưởng và có thể áp dụng cho mọi trường hợp, tuy nhiên, khối lượng tính toán là lớn.

3. Phương pháp lũy thừa

Phương pháp này thường được áp dụng để tìm giá trị riêng có modul lớn nhất của một ma trận $\mathcal{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ cho trước.

a) Giả sử ma trận $\mathcal{A}$ có n giá trị riêng thỏa mãn :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|,$$

còn $x_1, \dots, x_n$ là các vector riêng tương ứng. Vấn đề đặt ra là tìm λ_1 .

Xét y_0 là một vector bất kì, khi đó $y_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Bây giờ thiết lập

một dãy $\{y_k\}_k$ theo hệ thức sau : $y_{k+1} = \mathcal{A} y_k$. Vì x_i là vector riêng ứng với giá trị riêng λ_i nên ta có :

$$\begin{cases} \mathcal{A} x_i = \lambda_i x_i \\ \mathcal{A}^s x_i = \lambda_i^s x_i \end{cases}, \text{ vậy } y_s = \mathcal{A}^s y_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^s x_i$$

$$\Leftrightarrow y_s = \lambda_1^s \sum \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^s x_i$$

Với $i \neq 1$ thì $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^s \rightarrow 0$ khi $s \rightarrow \infty$, nghĩa là ta có :

$$y_s \rightarrow \lambda_1^s \alpha_1 x_1, y_{s+1} \rightarrow \lambda_1^{s+1} \alpha_1 x_1,$$

từ đó :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{y_{s+1}}{y_s} \right) = \lambda_1.$$

Tốc độ hội tụ phụ thuộc vào tỉ số $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)$, nếu tỉ số này càng gần

1 thì tốc độ hội tụ càng chậm.

b) Giả sử ma trận $\mathcal{A}$ có n giá trị riêng $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ thỏa mãn $\lambda_1 = -\lambda_2$ là số thực và $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Khi đó với các kí hiệu như trên, ta có :

$$y_s = \lambda_1^s \left[\alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1} \right)^s x_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^s x_2 + \dots \right]$$

$$\text{Vậy : } y_s = \lambda_1^s \left[\alpha_1 x_1 + (-1)^s \alpha_2 x_2 + \alpha_3 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^s x_3 + \dots \right]$$

Bây giờ ta gọi y_s^i là thành phần thứ i của y_s thì có :

$$y_s^i = \lambda_1^s \left[\alpha_1 x_1^i + (-1)^s \alpha_2 x_2^i + \alpha_3 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^s x_3^i + \dots \right], \text{ với kí hiệu}$$

x_k^i là thành phần thứ i của vector x_k .

$$\text{Vậy } y_{2s}^i = \lambda_1^{2s} [\alpha_1 x_1^i + (-1)^{2s} \alpha_2 x_2^i + \dots]$$

$$y_{2s+1}^i = \lambda_1^{2s+1} [\alpha_1 x_1^i + (-1)^{2s+1} \alpha_2 x_2^i + \dots],$$

$$\text{từ đó có : } \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{y_{2s+1}^i}{y_{2s}^i} \right) = \left(\frac{\alpha_1 x_1^i - \alpha_2 x_2^i}{\alpha_1 x_1^i + \alpha_2 x_2^i} \right) \lambda_1 \text{ và :}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{y_{2s}^i}{y_{2s-1}^i} \right) = \frac{\alpha_1 x_1^i + \alpha_2 x_2^i}{\alpha_1 x_1^i - \alpha_2 x_2^i} \lambda_1$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{y_{s+2}^i}{y_s^i} \right) = \lambda_1^2 = \lambda_2^2$$

từ đó có λ_1 và λ_2 cần tìm.

c) Giả sử ma trận A có n giá trị riêng thỏa mãn $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ và $|\lambda_1| > |\lambda_3| \geq |\lambda_n|$. Với lập luận tương tự, ta có với s đủ lớn thì :

$$y_s = \lambda_1^s x_1 + \bar{\lambda}_1^s \bar{x}_1$$

$$y_{s+2} = \lambda_1^{s+1} x_1 + \bar{\lambda}_1^{s+1} \bar{x}_1$$

$$y_{s+2} = \lambda_1^{s+2} x_1 + \bar{\lambda}_1^{s+2} \bar{x}_1$$

Từ đó có được các hằng số b, c sao cho :

$$y_{s+2} + by_{s+1} + cy_s = 0$$

thì $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ và λ_1, λ_2 chính là nghiệm của phương trình này.

d) *Chú ý* : Để các thành phần của y_k không quá lớn, ta dùng sơ đồ lặp sau đây : với y_k , ta lập hai vectơ y_{k+1} và z_{k+1} :

$$\begin{cases} z_{k+1} = Ay_k \\ y_{k+1} = z_{k+1} / \alpha_{k+1} \end{cases}, \text{ với } \alpha_{k+1} = \max_i |(z_{k+1})_i|$$

Vectơ y_0 thường được chọn là vectơ có các thành phần bằng 1.

Ví dụ : Tìm giá trị riêng có modul lớn nhất và vectơ riêng tương ứng của ma trận A dưới đây bằng phương pháp lũy thừa :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Chọn $y_0 = (1, 1, 1)$ thì $y_1 = Ay_0 = (0, 7, 14)$;

$y_2 = Ay_1 = (7, 14, 105)$; $y_3 = (175, -21, 609)$, $y_4 = (1456, 7, 4032)$;

$y_5 = (9499, 1820, 28917)$; $y_6 = (61873, 16359, 207039)$;

$y_7 = (426874, 105889, 1455510)$; v.v...

Ta có thể thấy với $s \geq 9$ thì $\frac{y_{s+1}}{y_s^1} \approx \frac{y_{s+1}^2}{y_s^2} \approx \frac{y_{s+1}^3}{y_s^3} \approx 7$.

Vậy rút ra các giá trị riêng của ma trận ở trường hợp $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$, và có $\lambda_1 \approx 7$, từ đó nếu lấy $\lambda_2 = 7$ thì vectơ riêng tương ứng là $x = (9, 2, 30)$.

Ví dụ : Tìm giá trị riêng có modul lớn nhất của ma trận A dưới đây và vectơ riêng tương ứng :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 18 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

Chọn : $y_0 = (1 ; 0,8 ; 1)$. Xét phép lặp $\mathcal{A}y_s = y_{s+1}$ thì có

$$y_1 = (2, 2 ; -2,8 ; 7) ;$$

$$y_2 = (-14,6 ; -34 ; 4,6) ;$$

$$y_3 = (-105,8 ; -86,8 ; -125,0).$$

Ta nhận thấy ma trận $\mathcal{A}$ có giá trị riêng trội là phức. Ta tính b, c theo hệ thức : $y_{s+2} + by_{s+1} + cy_s = 0$ với $s = 1$ có $b \approx -4,21$;

$c \approx 20,14$, từ đó có được phương trình tìm λ_1, λ_2 là :

$$\lambda^2 - 4,21\lambda + 20,14 = 0 \text{ và } \lambda_1 \approx 2,10 + 3,96i ; \lambda_2 \approx 2,10 - 3,96i.$$

Từ đó có hai vectơ riêng tương ứng :

$$x_1 \approx (0,48 + 0,50i ; 1,0 ; -0,03 + 0,99i) ;$$

$$x_2 \approx (0,48 - 0,50i ; 1,0 ; -0,03 - 0,99i).$$

§10. VÀI VÍ DỤ TÍNH TOÁN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH TRÊN MAPLE V

Với bộ chương trình MAPLE V và máy tính thông thường, ta có thể có được các kết quả tốt trong các bài toán tìm định thức, ma trận ngược của một ma trận cho trước, tìm vectơ riêng và giá trị riêng của một ma trận cho trước. Sau đây là một vài ví dụ.

Ví dụ 1. Tìm vectơ riêng của ma trận :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Ta khai báo ma trận A bằng lệnh :

[>A:=matrix (3, 3, [1, -3, 3, 3, -5, 3, 6, -6, 4]) ;

Sau đó xác định vectơ riêng bằng lệnh :

[>eigenvects (A) ;

Khi đó thu được kết quả :

$$[4, 1, \{1, 1, 2\}], [-2, 2, \{-1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}]]$$

Kết quả được hiểu như sau : trong móc vuông thứ nhất số 4 là giá trị riêng, số 1 là bội của giá trị riêng 4, còn vector riêng tương ứng là $(1, 1, 2)$. Trong móc vuông thứ hai, số (-2) là giá trị riêng, số 2 là bội của giá trị riêng (-2) , còn 2 vector riêng tương ứng là $(-1, 0, 1)$ và $(1, 1, 0)$.

Ví dụ 2. Cho ma trận :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hãy tính đa thức đặc trưng và đa thức tối thiểu của A.

Ta tính đa thức đặc trưng bằng lệnh :

[>charpoly (A, x) ;

Kết quả : $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24$

Ta tính đa thức tối thiểu bằng lệnh :

[>minpoly (A, x) ;

Kết quả : $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.

Ví dụ 3. Hãy tính định thức và ma trận ngược của ma trận dưới đây :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 2 \\ -5 & \frac{14}{3} & 9 \\ 0 & 11 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Khi đó ta tiến hành khai báo ma trận A nhờ lệnh :

[> A := matrix(3,3,[$\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, 2, -5, $\frac{14}{3}$, 9, 0, 11, $-\frac{5}{6}$]);

sau đó tính định thức của A bằng lệnh :

[>det(A) ;

Kết quả : $-\frac{2881}{18}$.

Để tính ma trận A^{-1} , ta thực hiện lệnh :

[>inverse (A) ;

Kết quả :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1852}{2881} & -\frac{391}{2881} & \frac{222}{2881} \\ \frac{75}{2881} & \frac{15}{2881} & \frac{1}{2881} \\ \frac{990}{2881} & \frac{99}{2881} & -\frac{12}{2881} \end{pmatrix}$$

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình đại số tuyến tính :

$$Ax = b, \text{ trong đó : } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Ta tiến hành khai báo ma trận A nhờ lệnh :

[>A:=matrix (4, 4, [3, -2, -5, 1, 2, -3, 1, 5, 1, 2, 0, -4, 1, 1, -4 9]);

Sau đó, khai báo tiếp vector b nhờ lệnh :

[>b:=vector ([3, -3, -3, 28]).

Để giải phương trình $Ax = b$, ta đưa lệnh :

[>linsolve (A, b) ;

Kết quả : [-1, 3, -2, 2].

II – GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

§11. MỞ ĐẦU

Trong mục này, ta nghiên cứu những phương pháp giải một số phương trình dạng : $f(x) = 0$ (23)

trong đó $f(x)$ là một hàm số phi tuyến.

Phương trình trên, trừ một vài trường hợp đặc biệt, có công thức giải đúng, còn nói chung là không có cách giải đúng. Ở khía cạnh khác, các hệ số của $f(x)$ trong nhiều trường hợp cũng chỉ là các số gần đúng, cho nên vấn đề giải đúng phương trình (23) cũng không thật cần thiết.

Để giải gần đúng phương trình (23), ta tiến hành các bước sau :

Thứ nhất là tách nghiệm, nghĩa là tìm một khoảng $[a ; b]$ đủ nhỏ sao cho phương trình (23) có nghiệm duy nhất $x^* \in [a ; b]$. Tiếp theo là kiện toán nghiệm (nghĩa là chính xác hóa nghiệm đến độ chính xác cần thiết).

Cơ sở để tách nghiệm là những khẳng định sau, khá quen thuộc trong giải tích mà phép chứng minh là đơn giản.

Định lý 3.11.1. a) Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a ; b]$ và $f(a).f(b) \leq 0$. Khi đó tồn tại ít nhất 1 nghiệm $x^* \in [a ; b]$ của phương trình (23).

b) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a).f(b) \leq 0$, hơn nữa, hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f'(x)$ không đổi dấu trên $[a ; b]$ thì nghiệm x^* nói trên là duy nhất.

Bước tách nghiệm thường được tiến hành nhờ phương pháp chia đôi hoặc phương pháp đồ thị.

Nguyên tắc thực hiện phương pháp chia đôi như sau :

Xác định dấu $f(a).f(b) < 0$, sau đó chia đôi đoạn $[a ; b]$ và gọi $[a_1 ; b_1]$ là một trong hai nửa ở trên sao cho $f(a_1) . f(b_1) < 0$. Lại chia đôi đoạn $[a_1 ; b_1]$ và gọi $[a_2 ; b_2]$ là một trong hai đoạn con mà $f(a_2) . f(b_2) < 0$; quá trình cứ thế tiếp tục. (nếu tại a_i mà $f(a_i) = 0$ hoặc b_i mà $f(b_i) = 0$ thì ta có được giá trị đó là nghiệm đúng của phương trình (23)).

Trường hợp $f(x)$ là đa thức đại số, $\deg f(x) = n$, thì phương trình (23) có không quá n nghiệm. Vì vậy nếu có $(n+1)$ điểm đổi dấu thì khâu tách nghiệm là xong.

Nguyên tắc của phương pháp đồ thị như sau : Nghiệm của phương trình (23) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và trục hoành ; hoặc là tương đương, nếu ta biến đổi (23) về dạng :

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (24)$$

thì nghiệm của (24) và do đó nghiệm của (23) là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = \varphi(x)$ và $y = \psi(x)$.

Sau khi đã tách được nghiệm, thì công việc tiếp theo là kiện toàn nghiệm. Để thực hiện bước này, chúng ta có thể dùng một trong các phương pháp được mô tả ở các mục sau.

§12. PHƯƠNG PHÁP LẬP ĐƠN

1. Phương pháp và định lý hội tụ

$$\text{Xét lại phương trình : } f(x) = 0 \quad (23)$$

Ta biến đổi phương trình này về dạng tương đương :

$$x = \varphi(x) \quad (25)$$

Với xấp xỉ ban đầu x_0 đã cho, ta xây dựng dãy $\{x_n\}_n$ nhờ hệ thức : $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \geq 0$ (26)

Định lý 3.12.1 : Giả sử hàm số $y = \varphi(x)$ thỏa mãn các điều kiện :

1. $|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq L|x - x'|$, $\forall x, x' \in [\alpha - r; \alpha + r]$ và với hằng số $L < 1$.
2. $|\varphi(\alpha) - \alpha| \leq (1 - L)r$.

Khi đó, với mỗi $x_0 \in [\alpha - r, \alpha + r]$ dãy $\{x_n\}_n$ xây dựng bởi hệ thức (26) hội tụ đến nghiệm x^* của phương trình (23) và ta có ước lượng :

$$|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*| \quad (27)$$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{(1 - L)} |x_0 - x_1| \quad (28)$$

Chứng minh, Theo giả thiết $|x_0 - \alpha| \leq r$. Giả sử ta có

$$|x_{n-1} - \alpha| \leq r, \text{ khi đó}$$

$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| &= |\varphi(x_{n-1}) - \alpha| \leq |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\alpha)| + |\varphi(\alpha) - \alpha| \leq \\ &\leq L|x_{n-1} - \alpha| + (1-L)r \leq Lr + (1-L)r \leq r. \end{aligned}$$

Vậy : $|x_n - \alpha| \leq r, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có : } |x_{i+1} - x_i| = |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| \leq L|x_i - x_{i-1}|,$$

từ đó rút ra : $|x_{i+1} - x_i| \leq L^i |x_1 - x_0|, \forall i \in \mathbb{N}$.

Áp dụng kết quả này, với $m, n \in \mathbb{N}$, ta có :

$$\begin{aligned} |x_{n+m} - x_n| &\leq |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq L^{n+m-1} |x_1 - x_0| + \dots + L^n |x_1 - x_0| = \\ &= L^n (L^{m-1} + \dots + L + 1) |x_1 - x_0| \leq \frac{L^n (1-L^m)}{(1-L)} |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

vì vậy mà :

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{L^n - L^{n+m}}{1-L} |x_1 - x_0| \quad (29)$$

Vì $L < 1$ nên $\{x_n\}$ là dãy cơ bản, chuyển qua giới hạn trong (26) ta có dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến nghiệm x^* của phương trình (23). Dễ thấy nghiệm x^* này là duy nhất. Trong (29) cho $m \rightarrow \infty$ thì có ước lượng :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|, \text{ vậy hệ thức (28) được chứng minh.}$$

Cuối cùng, dễ thấy $|x_n - x^*| \leq L|x_{n-1} - x^*|$, cho nên có :

$$|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*|, \text{ vậy hệ thức (27) đã được chứng minh. } \square$$

Nhận xét : Phương pháp lặp đơn (26) có tính chất tự điều chỉnh, nghĩa là nếu tại một vài bước tính toán trung gian ta mắc phải sai số thì dãy $\{x_n\}$ vẫn hội tụ đến x^* , tất nhiên chỉ là một vài bước và sai số mắc phải sao cho x_n không vượt ra ngoài $[\alpha - r, \alpha + r]$.

Ví dụ : Tìm nghiệm dương lớn nhất của phương trình :

$$x^3 + x - 1000 = 0 \quad (30)$$

Đặt $f(x) = x^3 + x - 1000$ thì ta thấy $f(9) \cdot f(10) < 0$, vậy phương trình (32) có nghiệm $x^* \in (9, 10)$. Có 3 cách đưa (30) về dạng $x = \varphi(x)$ như sau :

a) $x = 1000 - x^3$, vậy $\varphi_1(x) = 1000 - x^3$

b) $x = \frac{1000 - x}{x^2}$, vậy $\varphi_2(x) = \frac{1000 - x}{x^2}$

c) $x = \sqrt[3]{1000 - x}$, vậy $\varphi_3(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$.

Rõ ràng, trường hợp thứ 3, $\varphi_3(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$ sẽ có $|\varphi'_3(x)|$ rất nhỏ trên $[9, 10]$, $\varphi'_3(x) \leq \frac{1}{300} = L$.

Chọn $x_0 = 10$, $x_3 \approx 9,9667$ với độ chính xác 10^{-4} , ta có thể coi $x^* \approx x_3$.

2. Phương pháp lặp đơn bậc cao.

Trong mục này ta vẫn xét phương pháp lặp đơn (3) để giải phương trình $x = \varphi(x)$ (25)

Giả sử x^* là nghiệm của phương trình (25), khi đó ta nói rằng phép lặp đơn (26) : $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n \geq 1$ là có bậc m nếu :

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(m-1)}(x^*) = 0 \text{ và } \varphi^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

Nếu trong một lân cận của x^* , hàm số $\varphi(x)$ có đạo hàm liên tục đến bậc m , thì theo công thức Taylor, ta có :

$$\varphi(x) - x^* = (x - x^*) \varphi'(x^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2!} \varphi''(x^*) + \dots +$$

$$+ \frac{(x - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(x^*) + \frac{(x - x^*)^m}{m!} \varphi^{(m)}(\xi).$$

Trong trường hợp phép lặp là có bậc m thì có :

$$\varphi(x) - x^* = \frac{(x - x^*)^m}{m!} \varphi^{(m)}(\xi)$$

$$x_n - x^* = \frac{(x_{n-1} - x^*)^m}{m!} \varphi^{(m)}(\xi)$$

Đặt $M = \max_{x \in U} |\varphi^{(m)}(x)|$, trong đó U là lân cận đang xét của x^* ,
ta có :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M}{m!} |x_{n-1} - x^*|^m$$

$$\text{Từ đó : } |x_n - x^*| \leq \left(\frac{M}{m!}\right)^{1+m+m^2+\dots+m^{n-1}} |x_0 - x^*|^{m^n}$$

nếu $|x_0 - x^*| < 1$ và $\frac{M}{m!} |x_0 - x^*| = \alpha < 1$ thì :

$$|x_n - x^*| \leq \alpha^{\frac{m^n - 1}{m - 1}}$$

Tóm lại, trong trường hợp này, dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x^* rất nhanh.

§13. PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

Trong mục này, ta xét lại phương trình : $f(x) = 0$ (23)

Giả sử rằng hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Giả sử $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 liên tục và $f'(x) > 0$ trên $[a, b]$
(nếu $f'(x) < 0$ thì ta chuyển (23) về dạng : $-f(x) = 0$, lúc đó $-f'(x) > 0$ trên đoạn $[a, b]$).

Khi đó đồ thị $y = f(x)$ nằm phía dưới dây cung AB với $A(a, f(a))$, $B = (b, f(b))$.

Trường hợp 1 : Nếu $f(a) > 0$, ta xây dựng dãy $\{x_n\}_n$ theo hệ thức :

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} (x_n - a) \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (31)$$

Khi đó ta sẽ có dãy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm, bị chặn và :

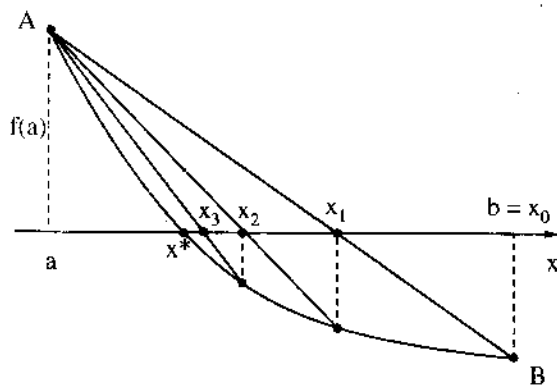
$$a < x^* < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_0 = b.$$

Trường hợp 2 : Nếu $f(a) < 0$, ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ theo công thức :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} (b - x_n) \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (32)$$

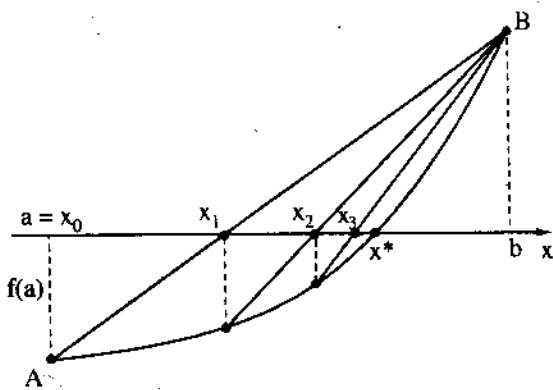
Khi đó dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng, bị chặn và :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < x^* < b.$$



Hình 3.1

Ý nghĩa hình học của hai dãy $\{x_n\}$ được xây dựng bởi (31) và (32) nêu ở trên sẽ được mô tả tương ứng trên các hình 3.1 và hình 3.2 và chính điều đó giải thích cho tên gọi của phương pháp.



Hình 3.2

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, dãy $\{x_n\} \subset [a; b]$, $f(x)$ giữ nguyên một dấu và ngoài ra có :

$$0 < m \leq |f'(x)| \leq M < +\infty.$$

Khi đó, có thể chứng minh được ước lượng sai số sau :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M - m}{m} |x_n - x_{n-1}|$$

Ví dụ : Tìm nghiệm dương của phương trình sau đây nhờ phương pháp dây cung với độ chính xác đến $\epsilon = 0,002$:

$$f(x) = x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = 0$$

Giải. Ta có $f(1) = -0,6 < 0$, $f(1,5) = 1,425 > 0$, do đó

$x^* \in (1; 1,5)$, mặt khác $f'(x) > 0$ trên $(1; 1,5)$ và $f''(x) > 0$, $\forall x \in (1; 1,5)$.

Với $x_0 = 1$, áp dụng (32), ta có :

$$x_1 = 1,15, x_2 = 1,190, x_3 = 1,198, \text{ v.v...}$$

Để ý rằng nghiệm đúng của phương trình trên là $x = 1,2$, vậy x_3 là nghiệm gần đúng chấp nhận được.

§14. PHƯƠNG PHÁP NEWTON

Trong mục này, ta xét lại phương trình : $f(x) = 0$ (23)

Giả sử rằng ta đã tách được một nghiệm $x^* \in [a; b]$, đồng thời $f(x)$, $f'(x)$ liên tục, không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, với x_0 là xấp xỉ ban đầu được chọn, ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ theo công thức :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n) \\ n \geq 0 \end{cases} \quad (33)$$

Ta có thể chứng minh được, với một số điều kiện thích hợp phương pháp Newton (33) hội tụ, chẳng hạn như điều kiện sau.

Định lý 3.14.1 : Nếu $f(a).f(b) < 0$, $f(x)$ và $f'(x)$ khác không và không đổi dấu trên (a, b) , với $x_0 \in [a, b]$ sao cho $f(x_0) - f'(x_0) > 0$, khi đó dãy (x_n) xây dựng bởi (33) hội tụ đến nghiệm x^* của phương trình (23)

Ví dụ : Xét phương trình :

$$x^4 - 3x^2 + 75x - 10.000 = 0$$

Hãy tính nghiệm âm của phương trình đã cho với độ chính xác 10^{-3} .

Nhận xét : $f(0) = -10.000$, $f(-10) = -1050$, $f(-11) = 3453$ (với $f(x)$ là biểu thức vế trái của phương trình đã cho).

Ta có : $f'(x) = 4x^3 - 6x + 75 < 0$ và $f'(x) = 12x^2 - 6 > 0$

$\forall x \in (-11, -10)$; lấy $x_0 = -11$ thì ta có :

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-f'(x_n)^{-1} f(x_n)$
0	-11	3453	-5183	0,7
1	-10,3	134,3	-4234	0,03
2	-10,27	37,8	-4196	0,009
3	-10,261	0,2		

Nhận thấy $f(-10, 261) > 0$ và $f(-10, 260) < 0$, cho nên

$x^* \in (-10, 261; -10, 260)$ chính xác đến 10^{-3} .

Nhận xét : Nếu như việc tính toán $f(x)$ tại mỗi x là phức tạp và ngoài ra có thể thấy $f(x)$ không thay đổi lớn thì người ta thay dãy xấp xỉ (33) ở trên như dãy dưới đây, thường được gọi là phương pháp Newton cải tiến :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n) \\ n \geq 0 \end{cases} \quad (34)$$

Ưu điểm nổi bật của phương pháp Newton cải tiến là chỉ phải tính $[f'(x_0)]^{-1}$ thay cho $[f'(x_n)]^{-1}$ tại mỗi bước.

§15. HỆ PHI TUYẾN

Trong mục này ta xét hệ dạng :

$$\begin{cases} x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (35)$$

Nếu kí hiệu $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in \mathbb{R}^n$$

thì hệ (35) được đưa về dạng :

$$x = \varphi(x) \quad (36)$$

1. Phương pháp lặp đơn.

Giả sử xấp xỉ ban đầu $x^{(0)}$ đã chọn trước, ta xây dựng dãy $\{x^{(k)}\}_k$ theo hệ thức :

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \\ k \geq 0 \end{cases} \quad (37)$$

Kí hiệu $S = S(\alpha, r) = \{x \in \mathbf{R}^n / \|x - \alpha\| \leq r\}$ là hình cầu đóng tâm α , bán kính r trong $\mathbf{R}^n$

Định lý 3.15.1 : Giả sử hàm số $y = \varphi(x)$ thỏa mãn các điều kiện :

$$1) \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in S$$

2) $L < 1$ và $\|\phi(\alpha) - \alpha\| \leq (1 - L) r$

Khi đó dãy $\{x^{(k)}\}_k$ xây dựng bởi (37) hội tụ đến nghiệm duy nhất x^* của hệ (36), tốc độ hội tụ được cho bởi :

$$a) \|x^{(k)} - x^*\| \leq L^k \cdot \|x^{(0)} - x^*\|$$

$$\text{b) } \| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* \| \leq \frac{L^m}{(1-L)} \| \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)} \|.$$

2. Phương pháp Seidel

Để giải hệ (36), ta xây dựng dãy xấp xỉ như sau : giả sử rằng xấp xỉ ban đầu $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ đã cho, khi đó dãy $\{y^{(k)}\}$ được xây dựng bằng quy nạp :

$$\begin{cases} y_1^{(k+1)} = \phi_1(y_1^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}) \\ y_2^{(k+1)} = \phi_1(y_1^{(k+1)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}) \\ y_3^{(k+1)} = \phi_1(y_1^{(k+1)}, y_2^{(k+1)}, y_3^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}) \\ \dots \\ y_n^{(k+1)} = \phi_n(y_1^{(k+1)}, y_2^{(k+1)}, \dots, y_{n-1}^{(k+1)}, y_n^{(k)}). \end{cases} \quad (38)$$

Định lý 3.15.2. Giả sử hệ (36) có nghiệm $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ và các $\varphi_i(\mathbf{x})$ thỏa mãn điều kiện:

$$1) \quad |\varphi_i(x_1, \dots, x_n) - \varphi_i(y_1, \dots, y_n)| \leq \sum_{j=1}^n L_{ij} |x_j - y_j|$$

$$2) L = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n L_{ij} \right) < 1$$

$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ thỏa mãn:

$$|x_i^* - y_i| \leq r, \quad |x_i^* - x_i| \leq r, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Khi đó dãy xấp xỉ xây dựng bởi (38) với $\mathbf{y}^{(0)}$ bất kì sao cho $|y_i^{(0)} - x_i^*| \leq r$ hội tụ đến nghiệm của hệ (36). Tốc độ hội tụ được cho bởi các công thức:

$$\|\mathbf{y}^{(m)} - \mathbf{x}^*\| \leq L_*^m \|\mathbf{y}^{(0)} - \mathbf{x}^*\| \quad (39)$$

$$\text{ở đó: } L_*^m = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\sum_{j=1}^n L_{ij}}{1 - \sum_{j=1}^n L_{ij}} \right)$$

3. Phương pháp Newton.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (40)$$

Hệ này được viết ở dạng $f(\mathbf{x}) = 0$, nếu coi $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ và $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$. Giả sử (40) có nghiệm $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ trong miền G , G là lối trong $\mathbf{R}^n$. Giả sử $f_i(\mathbf{x})$ có các đạo hàm riêng liên tục và hơn nữa nếu

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

là liên tục và ma trận này tại $\mathbf{x}^*$ không suy biến và vì vậy, tồn tại $f_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x})$ trong một lân cận nào đó của $\mathbf{x}^*$, khi đó hệ (40) có thể đưa về dạng sau:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - f_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) \quad (41)$$

Rõ ràng ta có $\mathbf{x}^*$ cũng là nghiệm của hệ (41). Để giải hệ (41), ta xây dựng phép lặp sau:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{m+1} = \varphi(\mathbf{x}^m) = \mathbf{x}^m - f_{\mathbf{x}^m}^{-1}(\mathbf{x}^m)f(\mathbf{x}^m) \\ m \geq 0 \end{cases}$$

với $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ là xấp xỉ ban đầu.

Khi đó, với một số giả thiết thích hợp, dãy xấp xỉ xây dựng bởi (42) hội tụ đến nghiệm của (41) và do đó tới nghiệm của hệ (40) đang xét.

§16. PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ BẬC CAO

Phương trình đại số bậc cao cũng là một phương trình phi tuyến, tuy nhiên vì nó là đa thức (bậc n) nên có những đặc trưng riêng. Trong mục này ta xét một số vấn đề về việc giải phương trình đại số bậc cao.

Xét phương trình:

$$P(x) = a_0 x^n + a + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (43)$$

với $a_i \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$.

1. Một số kết quả mở đầu

Đối với phương trình (1) ta có một vài kết quả quen thuộc sau đây:

a) Phương trình đại số bậc n có đúng n nghiệm (kể cả bội) thực hoặc phức (định lý cơ bản của đại số)

b) Giả sử $P(x)$ có nghiệm thực, $a_0 > 0$ và a_k ($k \geq 1$) là hệ số âm đầu tiên. Gọi B là giá trị lớn nhất của các giá trị tuyệt đối của các hệ

số âm. Khi đó mọi nghiệm dương nhỏ hơn hay bằng $R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$ (định lý Lagrange).

c) Nếu xét khoảng $(a; b)$ nào đó, mà $P(a).P(b) < 0$ thì phương trình (43) có một số lẻ nghiệm trong $(a; b)$

Nếu $P(a).P(b) > 0$ thì phương trình (43) hoặc là có một số chẵn nghiệm hoặc vô nghiệm trong (a, b) .

d) Hệ thống Sturm: Cho một dãy số thực khác 0 là

$$c_1, \dots, c_n \quad (n \geq 2). \quad (44)$$

Ta nói c_k, c_{k+1} đối dấu nếu $c_k.c_{k+1} < 0$, ngược lại là không đối dấu. Tổng số lần đổi dấu của các cặp c_k, c_{k+1} gọi là số đổi dấu của hệ thống.

Xét đa thức: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$
ta thiết lập hệ thống đa thức:

$$P(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x) \quad (45)$$

theo nguyên tắc: $P_1(x) = P'(x)$; gọi số dư trong phép chia $P(x)$ cho $P_1(x)$ là $r_1(x)$, khi đó $P_2(x) = -r_1(x)$; số dư trong phép chia $P_1(x)$ cho $P_2(x)$ là $r_2(x)$ và $P_3(x) = -r_2(x)$, v.v... Quá trình tiếp tục đến $P_m(x)$ là một số thực khác 0. Nếu $P(x)$ chỉ có các nghiệm đơn thì quá trình này luôn thực hiện được.

Hệ thống (45) được gọi là hệ thống Sturm của đa thức $P(x)$. Gọi $N(c)$ là số lần đổi dấu của hệ thống (45) tại điểm c (nếu có phần tử nào bằng 0 thì ta bỏ). Khi đó ta có:

Định lý 3.16.2 (Sturm): Nếu phương trình (43) không có nghiệm bội và $P(a) \neq 0, P(b) \neq 0$ thì số nghiệm thực $N(a, b)$ của (43) trong khoảng (a, b) là :

$$N(a, b) = N(a) - N(b)$$

2. Phương pháp Lobashevski

Phương pháp này dựa trên ý tưởng là khuếch đại sự khác biệt về modun mỗi nghiệm và có thể áp dụng cho phương trình đại số trong

mọi trường hợp (thực nghiệm, phức tạp v.v...) Để đơn giản, trong mục này ta chỉ nghiên cứu trường hợp đơn giản nhất: phương trình (43) chỉ có n nghiệm thực phân biệt.

a) Giả sử các nghiệm của (43) là $x_1, \dots, x_n$ với

$$|x_1| \gg |x_2| \gg \dots \gg |x_n| \quad (46)$$

nghĩa là các nghiệm khác nhau xa về giá trị tuyệt đối, khi đó:

$$x_{i+1} = \varepsilon_i x_i, \quad \forall i = 1, (n-1),$$

trong đó $|\varepsilon_i| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ.

Định lý Viète cho ta hệ thức:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0} \\ x_0 x_1 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

Vậy ta có :

$$\begin{cases} x_1(1 + E_1) = -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1 x_2(1 + E_2) = \frac{a_2}{a_0} \\ \dots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

trong đó $E_1, \dots, E_{n-1}$ là nhỏ về giá trị tuyệt đối, do đó có thể coi

$$\begin{cases} x_1 \approx -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1 x_2 \approx \frac{a_2}{a_0} \\ \dots \\ x_1 \dots x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

Từ đó có :

$$\begin{cases} x_1 \approx -\frac{a_1}{a_0} \\ x_2 \approx -\frac{a_2}{a_1} \\ \dots \\ x_n \approx -\frac{a_n}{a_{n-1}} \end{cases}$$

b) Bây giờ ta giới hạn (43) có n nghiệm thực, phân biệt, giá trị tuyệt đối có thể sai khác nhau không nhiều. Ta sẽ đưa (43) đến một phương trình dạng:

$$\overline{a_0}y^n + \overline{a_1}y^{n-1} + \dots + \overline{a_n} = 0 \quad (47)$$

ở đó (47) có nghiệm $y_1, \dots, y_n$ mà $y_k = \overline{x_k^m}$, $k = \overline{1, n}$, $m \in \mathbf{N}^*$.

Dưới đây ta sẽ xuất phát từ (43) có n nghiệm $x_1, \dots, x_n$ phân biệt. Khi đó :

$$P(x) = a_0(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$\Rightarrow P(-x) = (-1)^n a_0(x + x_1) \dots (x + x_n)$$

$$\text{Vậy : } P(x).P(-x) = (-1)^n a_0^2(x^2 - x_1^2) \dots (x^2 - x_n^2)$$

$$\text{Đặt } y = -x^2 \text{ thì có : } Q(y) = a_0^2(y + x_1^2) \dots (y + x_n^2)$$

$$\text{Vậy } Q(y) = A_0y^n + A_1y^{n-2} + \dots + A_n = 0$$

có các nghiệm $y_1, \dots, y_n$, $y_k = -x_k^2$ ($k = \overline{1, n}$), thực hiện phép nhân $P(x).P(-x)$, ta có:

$$\begin{cases} A_0 = a_0^2 \\ A_1 = a_1^2 - 2a_0a_2 \\ \dots \\ A_k = a_k^2 + \sum_{i=1}^k (-1)^i a_{k-i}a_{k+i} \\ \dots \\ A_n = a_n^2 \end{cases}$$

Quá trình cứ tiếp tục, sau p bước thì đến phương trình:

$$b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n = 0 \quad (48)$$

với nghiệm: $z_k = -x_k^{2^p} \quad (k = \overline{1, n})$

ở đó điều kiện (46) thỏa mãn, vậy ta có được:

$$x_k = \pm \sqrt[2^p]{z_k} = \pm \sqrt[2^p]{\frac{b_k}{b_{k-1}}}$$

Việc xác định dấu của x_k có thể thực hiện nhờ thử trực tiếp hoặc xem xét quan hệ giữa các hệ số của phương trình.

Nhận xét: Quá trình có thể dừng lại ở bước thứ p khi các hệ số của phương trình ở bước sau xấp xỉ với bình phương hệ số tương ứng ở bước trước.

Ví dụ: Giải gần đúng phương trình sau nhờ phương pháp Lobashevski:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

Sau sáu bước, ta dẫn đến phương trình:

$$y^3 - 3,445 \cdot 10^{17} y^2 + 2,486 \cdot 10^{29} y - 1 = 0$$

Từ đó: $x_1 = \pm \sqrt[64]{3,445 \cdot 10^{17}} \approx \pm 1,879$

$$x_2 = \pm \sqrt[64]{\frac{2,486}{3,445}} \cdot 10^{12} \approx \pm 1,532$$

$$x_3 = \pm \sqrt[64]{\frac{1}{2,486}} \cdot 10^{-29} \approx \pm 0,347.$$

So sánh: dùng công thức Cardano, ta có:

$$x_1 = 2\cos 160^\circ = -1,87938$$

$$x_2 \approx 1,53208 (= 2\cos 40^\circ)$$

$$x_3 \approx 2\cos 80^\circ \approx 0,34730$$

3. Phương pháp Newton – Horner.

Xét phương trình $f(x) = 0$ (51)

và phương pháp Newton:

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n)$$

Đối với trường hợp $f(x)$ là đa thức $P(x)$ thì việc tính toán $f'(x_n)$ và $f(x_n)$ rất thuận lợi nhờ thuật toán Horner:

a) Tính $P_n(\alpha)$:

Ta viết $P_n(\alpha) = \{[(a_0\alpha + a_1)\alpha + a_2]\alpha + \dots + a_{n-1}\}\alpha + a_n$

đặt : $b_0 = a_0$

$$b_1 = b_0\alpha + a_1$$

$$b_2 = b_1\alpha + a_2$$

...

$$b_n = b_{n-1}\alpha + a_n = P_n(\alpha)$$

Ta tính theo bảng sau đây:

a_0	a_1	a_2		a_{n-1}	a_n
+	αb_0	αb_1		αb_{n-2}	αb_n
b_0	b_1	b_2		b_{n-1}	$P_n(\alpha)$

Ví dụ: Cho $P_5(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 + x - 1$. Hãy tính $P(2)$.

Lập bảng có:

3	2	-1	-5	1	-1
+	2.3	2.8	2.15	2.25	2.51
3	8	15	25	51	101

Vậy $P_5(2) = 101$.

b) Thực hiện phép chia đa thức $P_n(x)$ cho đơn thức $(x - \alpha)$, ta có :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - \alpha)Q_{n-1}(x) + P_n(\alpha) \\ &= (x - \alpha)(b_0x^{n-1} + \dots + b_{n-1}) + P_n(\alpha) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_n(x) = b_0x^n + (b_1 - \alpha b_0)x^{n-1} + \dots + (b_{n-1} - \alpha b_{n-2})x + P_n(\alpha) - \alpha b_{n-1}.$$

Từ đó rút ra :

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 - \alpha b_0 \\ \dots \\ a_n = P_n(\alpha) - \alpha b_{n-1} \end{cases}$$

và do đó :

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 + \alpha b_0 \\ \dots \\ b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2} \end{cases}$$

Bây giờ đặt : $P_n(\alpha) = R_n$ là số dư trong phép chia $P_n(\alpha)$ cho $(x - \alpha)$, lặp lại phép chia này nhiều lần, ta được :

$$\begin{aligned} P_{n-1}(x) &= (x - \alpha)Q_{n-1}(x) + R_n \\ Q_{n-1}(x) &= (x - \alpha)Q_{n-2}(x) + R_{n-1} \\ &\dots \\ Q_1(x) &= (x - \alpha)Q_0(x) + R_1 \\ Q_0(x) &= R_0 = a_0 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó : } P_n(x) = R_0(x - \alpha)^n + R_1(x - \alpha)^{n-1} + \dots + R_{n-1}(x - \alpha) + R_n$$

$$\text{Để thấy : } P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k$$

Vậy: $P_n^{(k)}(\alpha) = k! R_{(n-k)}$.

Từ đó ta thấy việc tính đạo hàm tại α là rất thuận lợi.

BÀI TẬP

1. Giải hệ phương trình sau đây nhờ phương pháp Gauss:

$$a) \begin{cases} 2,0x_1 + 1,0x_2 - 0,1x_3 + 1,0x_4 = 2,7 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 + 4,0x_3 - 8,5x_4 = 21,9 \\ 0,3x_1 - 1,0x_2 + 1,0x_3 + 5,2x_4 = -3,9 \\ 1,0x_1 + 0,2x_2 + 2,5x_3 - 1,0x_4 = 9,9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 10 \\ 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 25x_4 = 65 \\ L_1x_1 + x_2 - 2x_3 + 27x_4 = 20 \end{cases}$$

2. Giải các hệ phương trình dạng $Ax = b$ dưới đây nhờ phương pháp phân rã:

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,7 \\ 0,9 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 5,4 \\ 5,0 \\ 7,5 \\ 3,3 \end{pmatrix}$$

3. Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2,5 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 4,5 & 5 & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & \frac{4k-3}{2} \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng A xác định dương.

4. Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

với $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ và $a_i \neq 0, b_i \neq 0, c_i \neq 0, \forall i; a_{i+1} \cdot c_i > 0, \forall i$. Hãy chứng minh các giá trị riêng của A là thực.

5. Giải hệ phương trình $Ax = b$ sau bằng phương pháp lặp đơn:

$$A = \begin{pmatrix} 10,9 & 1,2 & 2,1 & 0,9 \\ 1,2 & 11,2 & 1,5 & 2,5 \\ 2,1 & 1,5 & 9,8 & 1,3 \\ 0,9 & 2,5 & 1,3 & 21,1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -7,0 \\ 5,3 \\ 10,3 \\ 24,3 \end{pmatrix}$$

với độ chính xác $\varepsilon = 10^{-3}$.

6. Giải hệ phương trình $Ax = b$ dưới đây nhờ phương pháp lặp đơn:

$$A = \begin{pmatrix} 20,9 & 1,2 & 2,1 & 0,9 \\ 1,2 & 21,2 & 1,5 & 2,5 \\ 2,1 & 1,5 & 19,8 & 1,3 \\ 0,9 & 2,5 & 1,3 & 32,1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 21,70 \\ 27,40 \\ 28,76 \\ 49,72 \end{pmatrix}$$

7. Giải hệ phương trình $Ax = b$ ở bài 6 nhờ phương pháp Seidel

8. Giải hệ phương trình $Ax = b$ dưới đây nhờ phương pháp Seidel:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 11,33 \\ 32 \\ 42 \end{pmatrix}.$$

9. Tìm đa thức đặc trưng của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Giải hệ phương trình $Ax = b$ dưới đây bằng phương pháp trực giao hóa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0,5 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ 0,5 & 0 & 2,25 & 7,5 \\ 1 & -2 & 7,5 & 27 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11. Hãy tìm các hệ số của đa thức đặc trưng của ma trận A theo phương pháp Leverier:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Cho $\mathcal{M}$ là tập hợp các ma trận vuông cấp $n \times n$. Xét phiếm hàm $\mathcal{L}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$\mathcal{L}(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n} (|a_{ij}|)$$

Hỏi phiếm hàm này có phải là một chuẩn không?

13. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình:

$$3x - e^x = 0 \text{ với } \varepsilon = 10^{-3}.$$

14. Tìm nghiệm dương lớn nhất của phương trình:

$$2x - \lg x = 7 \text{ với } \varepsilon = 10^{-3}$$

15. Hãy tách nghiệm các phương trình sau:

a) $x^3 - 2x - \frac{1}{2} = C$

b) $x + \lg x = 2$

c) $x^2 - 2\lg x = 9.$

16. Dùng phương pháp lặp đơn giản các phương trình sau:

a) $x = \ln x + 3$

b) $x^5 - x - 10 = 0$

c) $x^2 - e^x + 10 = 0$

17. Dùng phương pháp Newton giải các phương trình sau:

a) $x.e^x = 3$

b) $x - 2\sin x = 0$

c) $3x^2 = 2e^x + 2.$

18. Dùng phương pháp Newton giải các phương trình sau:

a) $\cos x = x - 4$

b) $x - 2 \sin x - \frac{1}{2} = 0$

c) $x^2 = e^x + 1$

19. Xét $P(x) = x^5 + 12x^3 - 17x + 41$

Tính giá trị: $P'(x_0)$, $P''(x_0)$, $P'''(x_0)$, $P^{(4)}(x_0)$, $P^{(5)}(x_0)$, với :

a) $x_0 = 1$; b) $x_0 = -3$.

20. Cho $P(x) = 2x^4 - 2x^3 + 16x - 7$

Tính $P(x_0)$, $P'(x_0)$, $P''(x_0)$, $P'''(x_0)$, $P^{(4)}(x_0)$ với $x_0 = 10$.

21. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lập đơn:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ 5y^2 + xy = 4 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} \sin x - y = 1 \\ x - \cos y = 0,82 \end{cases} \end{aligned}$$

Chương IV

GIẢI GẦN ĐÚNG CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

Trong khoa học, kỹ thuật chúng ta thường gặp rất nhiều bài toán liên quan tới phương trình vi phân thường. Có nhiều trường hợp nghiệm đúng của các phương trình vi phân không thể tìm được.

Bởi vậy để tìm nghiệm của chúng phải áp dụng các phương pháp gần đúng khác nhau.

Các phương pháp này chia thành hai nhóm. Nhóm thứ nhất gọi là các phương pháp giải tích. Nhóm thứ hai gọi là các phương pháp số.

Các phương pháp giải tích cho phép tìm nghiệm gần đúng dưới dạng biểu thức giải tích.

Các phương pháp số cho phép tìm nghiệm dưới dạng bảng.

Dưới đây, chúng tôi chỉ giới thiệu một phương pháp giải tích thường dùng là phương pháp lập đơn, và một số phương pháp số. Ngoài ra, chúng ta giả thiết tất cả các bài toán xét đến đều giải được.

§1. PHƯƠNG PHÁP LẬP ĐƠN

Xét bài toán giá trị ban đầu sau đây :

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

$$y'(x_0) = y_0, \quad (2)$$

Giả sử $f(x, y)$ là hàm liên tục trên $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$.

Khi đó bài toán (1), (2) tương đương với phương trình tích phân

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[s, y(s)] ds \quad (3)$$

Nghiệm của phương trình (3) được xác định bằng dãy

$$\begin{cases} y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[s, y_{n-1}(s)] ds, & n = 1, 2, 3, \dots \\ y_0(x) = y_0. \end{cases} \quad (4)$$

Từ các kiến thức cơ bản về phương trình vi phân ta có định lý sau.

Định lý 4.1.1. Giả sử hàm $f(x, y)$ liên tục trong R và trên đó thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ hai

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|,$$

ngoài ra, giả sử $M = \max_R |f(x, y)|$, $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

Khi đó dãy các xấp xỉ (4) sẽ hội tụ tới nghiệm duy nhất của phương trình (3) trên $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Tốc độ hội tụ được xác định bởi công thức

$$|y(x) - y_n(x)| \leq L^n M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Với $y(x)$ là nghiệm đúng của (3); $y_n(x)$ được tính theo (4).

Chứng minh:

Để chứng minh tốc độ hội tụ chúng ta trừ các vế của phương trình (3) cho (4) ta có :

$$y(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^x [f(s, y(s)) - f(s, y_{n-1}(s))] ds.$$

Do đó:

$$\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y(s))| ds,$$

giả sử $x \geq x_0$ (với $x \leq x_0$ cũng hoàn toàn tương tự).

Vì $f(x, y)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo y nên

$$\varepsilon_n(x) \leq \int_{x_0}^x L |y(s) - y_{n-1}(s)| ds = L \int_{x_0}^x \varepsilon_{n-1}(s) ds.$$

Với $n = 0$ ta có

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= |y(x) - y_0| = |x - x_0| |y'(\xi)|, \quad x_0 \leq \xi \leq x_0 + h, \\ &= |x - x_0| |f(\xi, y(\xi))| \\ &\leq M(x - x_0). \end{aligned}$$

Như vậy (5) đúng với $n = 0$.

Giả sử (5) đúng với k , xét

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1}(x) &= L \int_{x_0}^x \varepsilon_k(s) ds \leq L \int_{x_0}^x \frac{L^k M (s - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} ds = \\ &= \frac{ML^k}{(k+1)!(k+2)} (s - x_0)^{k+2} \Big|_{s=x_0}^{s=x} \\ &= \frac{ML^{k+1} (x - x_0)^{k+2}}{(k+2)!}, \end{aligned}$$

từ đó rút ra điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 1. Giải bài toán sau bằng phương pháp lặp đơn

$$y^2 = x^2 + y^2$$

với $y(0) = 0$.

Giải.

Hàm $f(x, y) = x^2 + y^2$ liên tục trên toàn mặt phẳng nên a, b có thể chọn tùy ý.

Chọn $y_0 = 0$ thì xấp xỉ đầu tiên được xác định

$$y_1(x) = \int_0^x s^2 ds = \frac{x^3}{3}.$$

Tương tự

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \int_0^x (s^2 + y_1^2(s)) ds \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= \int_0^x (s^2 + y_2^2) ds = \int_0^x \left(s^2 + \frac{s^6}{9} + \frac{2s^{10}}{189} + \frac{s^{14}}{3969} \right) ds \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59539}. \end{aligned}$$

Chúng ta ước lượng sai số của $y_3(x)$ bằng công thức (5).

Chọn $a = 1, b = 0,5$ thì ta có:

$$M = \max_G |f(x, y)| = \max_G |x^2 + y^2| = 1,25,$$

$$L = \max_G |f'_y(x, y)| = \max_G |2y| = 1,$$

$$h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right) = \min \left(1, \frac{0,5}{1,25} \right) = 0,4.$$

Do vậy trên đoạn $[0; 0,4]$ ta có

$$|y(x) - y_3(x)| \leq 1,25 \cdot 1^3 \cdot \frac{x^4}{4!} = \frac{5}{96} x^4,$$

$$\text{từ đó } \max |y(x) - y_3(x)| \leq \frac{5,0,4^4}{96} \approx 0,00133.$$

Chú ý. Công thức (5) thường dùng để ước lượng sai số.

Ta xét một ví dụ minh họa.

Ví dụ 2. Xét phương trình $y' = x + 0,1y^2$ với $y(0) = 1$, xác định nghiệm xấp xỉ trong $[0; 0,2]$ chính xác tới 10^{-5} . Chọn xấp xỉ ban đầu $y_0(x)$:

$$y_0(x) = y_0 + \frac{y'_0(0)}{1!}x + \frac{y''_0(0)}{2!}x^2.$$

Từ phương trình vi phân đã cho, với điều kiện ban đầu ta có:

$$y_0 = 1$$

$$y'_0(0) = 0,1 y_0^2 = 0,1,$$

$$y''_0(0) = 1 + 0,2 y_0 y'_0 = 1,02.$$

$$\text{Từ đó } y_0(x) = 1 + 0,1x + 0,51x^2.$$

Chúng ta xác định

$$f(x, y_0) = x + 0,1 y_0^2 = 0,1 + 1,02x + 0,103x^2 + 0,0102x^3 + 0,0260x^4;$$

Xấp xỉ thứ nhất

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (s + 0,1 y_0^2(s)) ds$$

$$= 1 + 0,1x + 0,51x^2 + 0,034x^3 + 0,0025x^4 + 0,0052x^5.$$

$$\text{Xét hiệu } y_1(x) - y_0(x) = 0,034x^3 + 0,0025x^4 + 0,0052x^5,$$

$$\text{Khi đó } \max_{[0,0,2]} |y_1(x) - y_0(x)| = 0,00028 > 10^{-5}.$$

Do vậy $y_1(x)$ chưa thỏa mãn điều kiện bài ra. Chú ý trong khai triển $y_1(x)$ tổng của hai số hạng cuối không vượt quá 10^{-5} , vì thế ta đặt

$$y_1(x) = 1 + 0,1x + 0,51x^2 + 0,034x^3;$$

Ta có :

$$\begin{aligned} f(x, y_1(x)) &= x + 0,1y_1^2(x) \\ &= 0,1 + 1,02x + 0,103x^2 + 0,0170x^3 + 0,0267x^4 + 0,0017x^5 + 0,0001x^6; \end{aligned}$$

$$\text{và} \quad y_2(x) = 1 + \int_0^x (s + 0,1y_1^2(s))ds$$

$$= 1 + 0,1x + 0,51x^2 + 0,034x^3 + 0,0042x^4 + 0,0053x^5.$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = 0,0042x^4 + 0,0053x^5 < 0,000008 < 10^{-5} \quad \forall x \in [0; 0,2].$$

$$\text{Vậy } y(x) \approx 1 + 0,1x + 0,51x^2 + 0,034x^3 + 0,0042x^4 + 0,0053x^5.$$

§2. PHƯƠNG PHÁP EULER VÀ EULER CẢI TIẾN

1. Phương pháp Euler

Giả sử hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng bậc m liên tục trên $R = [x_0, x_0 + X] \times [r - y_0, r + y_0]$, $m \in \mathbb{N}$, $r, X > 0$.

Lấy đạo hàm (1) theo x ta có

$$y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)y',$$

$$y'''(x) = f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y)y' + f_{yy}(x, y)y'^2 + f_y(x, y)y'',$$

...

thay $x = x_0$ và $y = y_0$ ta nhận được dãy

$$y'(x_0), y''(x_0), y'''(x_0), \dots$$

với x đủ gần x_0 chúng ta có thể tính được giá trị gần đúng của nghiệm của bài toán (1), (2) theo công thức :

$$y(x) \approx \sum_{j=1}^m \frac{y^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

Trong trường hợp x ở xa x_0 , chúng ta chia đoạn $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$; khi đó giả sử tính được $y(x_i) \approx y_i$, ta đặt $y_i^{(j)} = y^{(j)}(x_i, y_i)$.

Sử dụng công thức

$$y(x) \approx z_i(x) = \sum_{j=0}^m \frac{y_i^{(j)}}{j!} (x - x_i)^j, \quad (6)$$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$, thì y_{i+1} sẽ được tính bởi $y_{i+1} = z_i(x_{i+1})$.

Chọn $m = 1$ thì (6) sẽ là

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ h = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, n-1. \end{cases} \quad (7)$$

Phương pháp số tính nghiệm gần đúng của (1), (2) theo công thức (7) gọi là phương pháp Euler.

Bây giờ xét sai số của phương pháp Euler.

$$\text{Ta có } y(x+h) = y(x) + \int_0^h y'(x+s)ds. \quad (8)$$

Nếu thay $\int_0^h y'(x+s)ds = hy'(x) + O(h^2)$ thì

$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y(x)) + O(h^2).$$

Đặt $x = x_i$, $x+h = x_{i+1}$ thì

$$|y_{i+1} - y_i| = O(h^2).$$

Ví dụ. Áp dụng phương pháp Euler tìm nghiệm gần đúng của phương trình $y' = y - \frac{2x}{y}$, với $y(0) = 1$, $x \in [0, 1]$ chọn $h = 0,2$.

Giải.

Áp dụng công thức (7) ta được bảng

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$		Δy_i $= hf(x_i, y_i)$	Nghiệm đúng $y = \sqrt{2x+1}$
			$\frac{2x_i}{y_i}$	$y_i - \frac{2x_i}{y_i}$		
0	0	1,0000	0	1,0000	0,2000	1,0000
1	0,2	1,2000	0,3333	0,8667	0,1733	1,1832
2	0,4	1,3733	0,5928	0,7805	0,1561	1,3416
3	0,6	1,5294	0,7846	0,7458	0,1492	1,4832
4	0,8	1,6786	0,9532	0,7254	0,1451	1,6124
5	1,0	1,8237				1,7320

2. Phương pháp Euler cải tiến

Để có được phương pháp số giải (1), (2) với độ chính xác cao hơn phương pháp Euler, chúng ta cần xấp xỉ tích phân ở vế phải của (8) tốt hơn. Từ (8) sử dụng công thức hình thang

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} [y'(x) + y'(x+h)] + O(h^3) \quad (9)$$

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} [f(x, y(x)) + f(x+h, y(x+h))] + O(h^3).$$

Thay $x = x_i$, $x+h = x_{i+1}$ ta có

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})].$$

Để tính được y_{i+1} chúng ta thay $y(x+h)$ trong vế phải của (9) bằng đại lượng

$$y^* = y(x+h) + O(h^2),$$

khi đó ta có

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}[f(x, y(x)) + f(x+h, y^*)] + O(h^3).$$

Do đó

$$\begin{cases} y_{i+1}^* = y_i + hf(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)] \\ i = 0, \dots, n-1. \end{cases} \quad (10)$$

Phương pháp tìm nghiệm gần đúng của (1), (2) theo công thức (10) gọi là phương pháp Euler cải tiến (hay Euler – Cauchy).

Ví dụ 1. Sử dụng phương pháp Euler cải tiến tìm nghiệm gần đúng của

$$y' = y - \frac{2x}{y},$$

với $y(0) = 1, x \in [0, 1]$ chọn $h = 0,2$.

Sử dụng công thức (10) kết quả tính toán được thể hiện trong bảng sau

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2}f_i$	x_{i+1}	y_{i+1}^*	$\frac{h}{2}f_{i+1}^*$	$\Delta y_i = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}^*)$	Nghiệm đúng
0	0	1	0,1	0,2	1,2	0,0867	0,1867	1,0000
1	0,2	1,1867	0,0850	0,4	1,3566	0,0767	0,1617	1,1832
2	0,4	1,3484	0,0755	0,6	1,4993	0,0699	0,1454	1,3416
3	0,6	1,4938	0,0690	0,8	1,6180	0,0651	0,1341	1,4832
4	0,8	1,6272	0,0645	1,0	1,7569	0,0618	0,1263	1,6125
5	1,0	1,7542						1,7325

Chúng ta có thể làm tăng độ chính xác cho phương pháp Euler cải tiến bằng cách áp dụng phương pháp lặp đơn cho tính các giá trị y_i

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})], \\ y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k)} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Hãy tìm giá trị $y(0, 1)$ với độ chính xác 10^{-4} biết

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Chọn $h = 0,05$ ta có

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,05 \cdot 1 = 1,05,$$

$$y_1^{(1)} = 1 + \frac{0,05}{2} (1 + 1,10) = 1,0525,$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \frac{0,05}{2} (1 + 1,0525) = 1,05256,$$

chọn $y_1 = 1,0526$,

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,0526 + 0,05 \cdot 1,1026 = 1,1077.$$

$$y_2^{(1)} = 1,0526 + 0,025(1,1026 + 1,2077) = 1,11036,$$

$$y_2^{(2)} = 1,0526 + 0,025(1,1026 + 1,2104) = 1,11042.$$

Từ đó $y_2 = 1,1104$.

Nghiệm đúng của phương trình trên $y = 2e^x - x - 1$,

$$y(0,1) = 2 \cdot e^{0,1} - 1,1 = 1,1103.$$

§3. PHƯƠNG PHÁP RUNGE-KUTTA

Để giải bài toán (1), (2), xuất phát từ giá trị ban đầu y_0 tìm được giá trị gần đúng y_1 tại $x_0 + h = x_1$ theo công thức

$$y(x_0 + h) = y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

$$= y_0 + [p_{r1}K_1(h) + p_{r2}K_2(h) + \dots + p_{rr}K_r(h)],$$

trong đó :

$\xi_i = x_0 + \alpha_i h$, $\eta_i = y_0 + \beta_{i1}K_1(h) + \dots + \beta_{ii-1}K_{i-1}(h)$, α_i, β_{ij} là các hằng số ; $\alpha_1 = 0$; $K_i(h) = hf(\xi_i, \eta_i)$.

Các $\alpha_i, \beta_{ij}, p_{ri}$ được chọn sao cho với l đủ lớn, hàm

$$\phi_r(h) = y(x_0 + h) - y_0 - [p_{r1}K_1(h) + p_{r2}K_2(h) + \dots + p_{rr}K_r(h)]$$

thỏa mãn

$$\phi_r(0) = \phi_r'(0) = \dots = \phi_r^{(l)}(0) = 0, \quad \phi_r^{(l+1)}(0) \neq 0.$$

Như vậy sai số mắc phải trong mỗi bước là

$$R_r(h) = \frac{\phi_r^{(l+1)}(\xi)}{(l+1)!} h^{l+1}, \quad 0 < \xi < h.$$

Từ $\phi_r^{(h)}(0) = 0, s = 0, 1, \dots, l$ ta rút ra:

$$\begin{cases} y_0^{(s)} = p_{r1}K_1^{(2)}(0) + p_{r2}K_2^{(s)}(0) + \dots + p_{rr}K_r^{(s)}(0) \\ s = 1, 2, \dots, l. \end{cases} \quad (11)$$

Bây giờ chúng ta xét một vài trường hợp riêng thường dùng.

1. Trường hợp $r = 1$

Từ (11) ta có

$$\phi_1(h) = y(x_0 + h) - y(x_0) - p_{11}hf_0,$$

$$\phi_1'(h) = y'(x_0 + h) - p_{11}f_0$$

$$\phi_1'(0) = y_0' - p_{11}f_0.$$

Muốn $\phi_1'(0) = 0$ với mọi $f(x, y)$ phải chọn $p_{11} = 0$; mặt khác vì

$\phi_1''(0) = y_0''$ nói chung là khác 0. Do vậy

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Sai số mắc phải là

$$R_1(h) = \frac{h^2}{2} y''(\xi), \quad x_0 < \xi < x_0 + h.$$

Vậy chúng ta thấy lại công thức Euler và sai số của nó.

2. Trường hợp $r = 2$

$$\varphi_2(h) = y(x_0 + h) - y_0 - [p_{21}K_1(h) + p_{22}K_2(h)],$$

$$\begin{aligned} \varphi_2'(0) &= y_0' - [p_{21}K_1'(0) + p_{22}K_2'(0)] \\ &= f_0 - (p_{21}f_0 + p_{22}f_0). \end{aligned}$$

Muốn cho $\varphi_2'(0) = 0$ với mọi $f(x, y)$ ta phải chọn

$$p_{21} + p_{22} = 1.$$

$$D_0 \varphi_2''(0) = y_0'' - [p_{21}K_1''(0) + p_{22}K_2''(0)] = 0, \text{ nên}$$

$$\begin{cases} 2p_{22}\alpha_2 = 1 \\ 2p_{22}\beta_{21} = 1. \end{cases}$$

Vậy chúng ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} p_{21} + p_{22} = 1, \\ p_{22}\alpha_2 = \frac{1}{2}, \\ p_{22}\beta_{21} = 1. \end{cases}$$

Hệ phương trình này giải được, tuy nhiên nghiệm không duy nhất.

$$\text{Chọn } \alpha_2 = \beta_{21} = 1; \text{ thì } p_{21} = p_{22} = \frac{1}{2},$$

ta có công thức

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{2} (K_1 + K_2), \\ &= \frac{1}{2} h[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + K_1)] ; \end{aligned}$$

Đây chính là công thức Euler cải tiến với sai số

$$R_2(h) = O(h^3).$$

3. Trường hợp $r = 3$

Trong trường hợp này chúng ta có thể xây dựng được một trong các công thức thông dụng sau

$$y(x_0 + h) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6} (K_1 + 4K_2 + K_3),$$

$$\text{với } K_1 = hf(x_0, y_0), K_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}),$$

$$K_3 = hf(x_0 + h, y_0 - K_1 + 2K_2).$$

Sai số được xác định bởi công thức

$$R_3(h) = \frac{\phi_3^{(4)}(\xi)}{24} h^4.$$

4. Trường hợp $r = 4$

Một trong các công thức thông dụng nhất ứng với trường hợp này

$$y(x_0 + h) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

$$K_1 = hf(x_0, y_0), K_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}),$$

$$K_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}), K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3),$$

như vậy

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Sai số được xác định bởi

$$R_4(h) = \frac{\phi_4^{(5)}(\xi)}{120} h^5.$$

Sơ đồ tính cho phương pháp Runge – Kutta

i	x	y	$K=hf(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2 K_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2 K_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				$\Delta y_0 = \frac{1}{6} \Sigma$
1	x_1	y_1		

Ví dụ. Sử dụng phương pháp Runge – Kutta tìm nghiệm của phương trình $y' = 0,25y^2 + x^2$, với $y(0) = -1$, $x \in [0; 0,3]$, chọn $h = 0,1$.

Giải.

Kết quả tính được trình bày trong bảng sau

i	x	y	$0,25y$	$K = hf(x, y)$	Δy
0	0	-1	-0,25	0,025	0,025
	0,05	-0,98750	-0,24688	0,024629	0,049258
	0,05	-0,98769	-0,24692	0,024638	0,049276
	0,1	-0,97536	-0,24384	0,024783	0,024783
					0,02472
1	0,1	-0,97528	-0,24382	0,024779	0,024779
	0,15	-0,96289	-0,24072	0,025429	0,050858
	0,15	-0,96257	-0,24064	0,025413	0,050826
	0,2	-0,94987	-0,23747	0,026557	0,026557
					0,02550
2	0,2	-0,94978	-0,23745	0,026553	0,026553
	0,25	-0,93650	-0,23413	0,028176	0,056352
	0,25	-0,93569	-0,23392	0,028138	0,056276
	0,3	-0,92164	-0,23041	0,030236	0,030236
					0,02824
3	0,3	-0,92154			

§4. PHƯƠNG PHÁP ADAMS

Giả sử bằng một cách nào đó chúng ta tìm được các giá trị nghiệm gần đúng của $y(x)$ ($y(x)$ là nghiệm của bài toán (1), (2)) tại các điểm $x_m, x_{m-1}, \dots, x_{m-k}$ tương ứng là $y_m, y_{m-1}, \dots, y_{m-k}$ ($x_{m-i} = x_m - ih$).

Kí hiệu $f_i = f(x_i, y_i)$, $i = m-k, \dots, m$.

Gọi $P_{m, k}(x)$ là đa thức nội suy nhận giá trị tại các điểm $x_m, x_{m-1}, \dots, x_{m-k}$ với giá trị tương ứng

$$f_m, f_{m-1}, \dots, f_{m-k}.$$

$$\text{Ta có } P_{m, k}(x) = \sum_{i=0}^k f_{m-i} P_i(x),$$

trong đó $P_i(x)$ không phụ thuộc vào f_j . Đổi biến số $x - x_m = th$ thì $P_i(x)$ trở thành $Q_i(t)$ không phụ thuộc vào h và m .

Từ công thức

$$y(x_{m+1}) = y(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f[x, y(x)] dx,$$

chúng ta có thể tính y_{m+1}

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_{m, k}(x) dx \quad (12)$$

$$= y_m + h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{m-i},$$

$$\text{với } \beta_i = \int_0^1 Q_i(t) dt.$$

(12) gọi là công thức ngoại suy.

Khi xây dựng đa thức nội suy chúng ta có thể sử dụng cả giá trị chưa biết f_{m+1} . Công thức nhận được

$$y_{m+1} = y_m + h \sum_{i=-1}^k \gamma_i f_{m-i}, \quad (13)$$

(13) gọi là công thức nội suy.

Nếu trong công thức (12) ta chọn $P_{m,k}(x)$ là đa thức nội suy Newton lùi

$$P_{m,k}(x) = f_m + \frac{t}{1!} \Delta f_{m-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f_{m-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+k-1)}{k!} \Delta^k f_{m-k}$$

thì ta có

$$\begin{aligned} y_{m+1} &\doteq y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_{m,k}(x) dx \\ &= y_m + h \int_0^1 P_{m,k}(x_m + th) dt \\ &= y_m + h \int_0^1 \left[f_m + t \Delta f_{m-1} + \frac{t(t+1)}{2} \Delta^2 f_{m-2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t(t+1)\dots(t+k-1)}{k!} \Delta^k f_{m-k} \right] dt, \end{aligned}$$

$$y_{m+1} = y_m + h [f_m + a_1 \Delta f_{m-1} + a_2 \Delta^2 f_{m-2} + \dots + a_k \Delta^k f_{m-k}],$$

trong đó

$$a_1 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \int_0^1 \frac{t(t+1)}{2} dt = \frac{5}{12},$$

$$a_3 = \int_0^1 \frac{t(t+1)(t+2)}{6} dt = \frac{3}{8},$$

....

Do vậy

$$y_{m+1} = y_m + h[f_m + \frac{1}{2} \Delta f_{m-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 f_{m-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 f_{m-3} + \dots]. \quad (14)$$

Công thức (14) gọi là công thức ngoại suy Adams.

Biểu diễn f_i qua y'_i ($y'_i = f'_i$) ta có

$$y_{m+1} = y_m + h y'_m + \frac{h}{2} (y'_m - y'_{m-1}) + \frac{5}{12} h (y'_m - 2y'_{m-1} + y'_{m-2}) + \\ + \frac{3}{8} h (y'_m - 3y'_{m-1} + 3y'_{m-2} - y'_{m-3}) + \dots$$

Bây giờ nếu chọn $P_{m,k}(x)$ là đa thức nội suy lùi nhưng điểm ban đầu không phải là x_m nữa mà là x_{m+1} thì

$$P_{m,k}(x) = f_{m+1} + \frac{t}{1!} \Delta f_m + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f_{m-1} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+k-1)}{k!} \Delta^k f_{m-k+1}$$

do đó

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_{m,k}(x) dx = \\ = y_m + h \int_{-1}^0 [f_{m+1} + t \Delta f_m + \frac{t(t+1)}{2} \Delta^2 f_{m-1} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+k-1)}{k!} \Delta^k f_{m-k+1}] dt$$

$$y_{m+1} = y_m + h[f_{m+1} + b_1 \Delta f_m + b_2 \Delta^2 f_{m-1} + \dots + b_k \Delta^k f_{m-k+1}],$$

với

$$b_0 = \int_{-1}^0 dt = 1,$$

$$b_1 = \int_{-1}^0 t dt = -\frac{1}{2},$$

$$b_2 = \int_{-1}^0 \frac{t(t+1)}{2} dt = -\frac{1}{12},$$

$$b_3 = \int_{-1}^0 \frac{t(t+1)(t+2)}{6} dt = -\frac{1}{24},$$

...

Vậy chúng ta nhận được

$$y_{m+1} = y_m + h \left[f_{m+1} - \frac{1}{2} \Delta f_m - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{m-1} - \dots \right]. \quad (15)$$

Công thức (15) gọi là công thức nội suy Adams.

§5. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Trong mục này chúng ta sẽ giải xấp xỉ hệ phương trình vi phân bằng các phương pháp trên cho hệ hai phương trình (để đơn giản trong việc trình bày).

Xét bài toán Cauchy với hệ hai phương trình vi phân :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), & y(x_0) = y_0, \\ \frac{dz}{dx} = g(x, y, z), & z(x_0) = z_0. \end{cases}$$

1. Phương pháp Runge-Kutta

Kí hiệu $K_i(h) = hf(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$

$$L_i(h) = hg(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i),$$

$$\text{với } \xi_i = x_0 + \alpha_i h, \quad \alpha_1 = 0$$

$$\bar{\xi}_i = x_0 + \bar{\alpha}_i h, \quad \bar{\alpha}_1 = 0$$

$$\eta_i = y_0 + \beta_{i1} K_1 + \beta_{i2} K_2 + \dots + \beta_{ii-1} K_{i-1},$$

$$\bar{\eta}_i = y_0 + \bar{\beta}_{i1} K_1 + \bar{\beta}_{i2} K_2 + \dots + \bar{\beta}_{ii-1} K_{i-1},$$

$$\zeta_i = z_0 + \gamma_{i1} l_1 + \gamma_{i2} l_2 + \dots + \gamma_{ii-1} l_{i-1},$$

$$\bar{\zeta}_i = z_0 + \bar{\gamma}_{i1} l_1 + \bar{\gamma}_{i2} l_2 + \dots + \bar{\gamma}_{ii-1} l_{i-1}.$$

Các hằng số α_i , β_{ij} , γ_{ij} , $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_{ij}$, $\bar{\gamma}_{ij}$, p_{ri} , q_{ri} được chọn sao cho khi phân tích các hàm sau

$$\varphi_r(h) = y(x_0 + h) - y(x_0) - [p_{r1} K_1(h) + p_{r2} K_2(h) + \dots + p_{rr} K_r(h)]$$

$$\psi_r(h) = z(x_0 + h) - z(x_0) - [q_{r1} l_1(h) + q_{r2} l_2(h) + \dots + q_{rr} l_r(h)]$$

theo các lũy thừa của h thì được các đa thức bậc càng cao càng tốt.

Ví dụ để nhận được công thức Runge - Kutta có sai số mỗi bước bậc h^5 thì các hàm

$$\varphi_4(h) = y(x_0 + h) - y(x_0) - [p_{41} K_1(h) + \dots + p_{44} K_4(h)],$$

$$\psi_4(h) = z(x_0 + h) - z(x_0) - [q_{41} l_1(h) + \dots + q_{44} l_4(h)]$$

có tính chất :

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = \varphi^{(4)}(0) = 0, \\ \psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = \psi'''(0) = \psi^{(4)}(0) = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên giải được, tuy nhiên nghiệm không duy nhất như trường hợp một phương trình.

Lấy một trong những nghiệm của hệ phương trình đó ta có :

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

$$z(x_0 + h) = z(x_0) + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4),$$

trong đó :

$$K_1 = hf_0 = hf(x_0, y_0), \quad l_1 = hg_0 = hg(x_0, y_0),$$

$$K_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right),$$

$$l_2 = hg\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right),$$

$$K_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right),$$

$$l_3 = hg\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right),$$

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3, z_0 + l_3),$$

$$l_4 = hg(x_0 + h, y_0 + K_3, z_0 + l_3).$$

Ta nhận thấy trong trường hợp này các đạo hàm $y^{(k)}$, $z^{(k)}$ nhận được tương tự như lấy đạo hàm của hệ phương trình ban đầu

$$y'' = \frac{d}{dx} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z',$$

$$z'' = \frac{d}{dx} g(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial z} z',$$

$$z''' = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} z' + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} y' + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} (y')^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} z' y' + \frac{\partial g}{\partial y} y'' + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} z' + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} y' z' + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} (z')^2 + \frac{\partial g}{\partial z} z'',$$

...

Ví dụ : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 5z, \\ \frac{dy}{dt} = -(1 - \sin t)x - y + 3z, \\ \frac{dz}{dt} = -x + 2z \end{cases}$$

với điều kiện đầu $x(0) = 2, y(0) = 1, z(0) = 1$, chọn $h = 0,1$;
 $t \in [0 ; 0,2]$.

Giải

Đặt $f = -2x + 5z$, $g = -(1 - \sin t)x - y + 3z$, $u = -x + 2z$.

1) Với $i = 0, t = 0$ thì $x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = 1$.

2) Tính $f(t_0, x_0, y_0, z_0) = -4 + 5 = 1$,

$$g(t_0, x_0, y_0, z_0) = -2 - 1 + 3 = 0,$$

$$u(t_0, x_0, y_0, z_0) = -2 + 2 = 0.$$

$$K_1^{(0)} = hf_0 = 0,1 \cdot 1 = 0,1,$$

$$l_1^{(0)} = hg_0 = 0,1 \cdot 0 = 0,$$

$$m_1^{(0)} = hu_0 = 0,1 \cdot 0 = 0,$$

3) Với $t = 0,05$ ta tính được :

$$x_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2} = 2,05, \quad y_0 + \frac{l_1^{(0)}}{2} = 1; \quad z_0 + \frac{u_1^{(0)}}{2} = 1.$$

4) Tính f, g, u với các giá trị của t, x, y, z thì :

$$K_2^{(0)} = 0,09; \quad l_2^{(0)} = 0,00525, \quad m_2^{(0)} = -0,005.$$

5) $t = 0,05$ tính giá trị sau :

$$x_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2} = 2,045, \quad y_0 + \frac{l_2^{(0)}}{2} = 1,00262, \quad z_0 + \frac{m_2^{(0)}}{2} = 0,99750.$$

Khi đó :

$$K_3^{(0)} = 0,08975, l_3^{(0)} = 0,00471, m_3^{(0)} = -0,00500.$$

Tính tương tự ta được $K_4^{(0)}, l_4^{(0)}, m_4^{(0)}$.

$$\text{Khi đó } \Delta x_0 = \frac{1}{6} [K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)}] = 0,08984,$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} [l_1^{(0)} + 2l_2^{(0)} + 2l_3^{(0)} + l_4^{(0)}] = 0,00497,$$

$$\Delta z_0 = \frac{1}{6} [m_1^{(0)} + 2m_2^{(0)} + 2m_3^{(0)} + m_4^{(0)}] = -0,00500.$$

Vậy

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 2,08984,$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1,00497,$$

$$z_1 = z_0 + \Delta z_0 = 0,99500.$$

Kết quả tính được thể hiện trong bảng sau :

i	t	x	y	z	k=hf	l=hg	m=hu	Δx	Δy	Δz
0	0	2	1	1	0,1	0	0	0,08984	0,00497	-0,005
	0,05	2,05	1	1	0,09	0,00525	-0,005			
	0,05	2,045	1,00262	0,99750	0,08975	0,00471	-0,005			
	0,1	2,08975	1,00497	0,99500	0,07953	0,00988	-0,00998			
1	0,1	2,08984	1,00497	0,99500	0,07953	0,00988	-0,00998	0,06896	0,01456	-0,01494
	0,15	2,12960	1,00991	0,99001	0,06908	0,01480	-0,01496			
	0,15	2,12438	1,01237	0,98752	0,06888	0,01433	-0,01493			
	0,2	2,15872	1,10930	0,98007	0,05829	0,01911	-0,01986			
2	0,2	2,15872	1,10930	0,98007	0,05827	0,01907	-0,01987	0,04739	0,02313	-0,02473
	0,25	2,18794	1,02907	0,97012	0,04747	0,02346	-0,02477			
	0,25	2,18254	1,03126	0,96758	0,04733	0,02292	-0,02472			
	0,3	2,20613	1,04245	0,95534	0,03644	0,02694	0,02954			

2. Phương pháp Adams

Giả sử chúng ta đã tìm được giá trị gần đúng của $y(x)$ và $z(x)$ tại các điểm $x_m, x_{m-1}, \dots, x_{m-k}$ tương ứng là $f_m, f_{m-1}, \dots, f_{m-k}$ và $g_m, g_{m-1}, \dots, g_{m-k}$.

Xây dựng các đa thức nội suy tương ứng :

$$P_{m,k}(x) = \sum_{i=0}^k f_{m-i} P_i(x),$$

$$\bar{P}_{m,k}(x) = \sum_{i=0}^k g_{m-i} \bar{P}_i(x),$$

trong đó $P_i(x)$ không phụ thuộc f_i và $\bar{P}_i(x)$ không phụ thuộc g_i .

Đặt : $x - x_m = th$, khi đó $P_i(x)$, $\bar{P}_i(x)$ là các đa thức bậc k tương ứng là : $Q_i(t)$ và $\bar{Q}_i(t)$. Ta có thể tính gần đúng :

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} P_{m,k}(x) dx = y_m + h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{m-i}, \\ z_{m+1} = z_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} \bar{P}_{m,k}(x) dx = z_m + h \sum_{i=0}^k \bar{\beta}_i g_{m-i}, \end{cases}$$

với $\beta_i = \int_0^1 Q_i(t) dt$, $\bar{\beta}_i = \int_0^1 \bar{Q}_i(t) dt$.

Các công thức này gọi là công thức ngoại suy Adams đối với hệ phương trình vi phân.

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau đây bằng phương pháp Adams

$$\begin{cases} y' = \cos(y + 1, lz) + 1, \\ z' = \frac{1}{x + 2, ly^2} + x + 1 \end{cases}$$

với điều kiện đầu $y(0) = \pi$, $z(0) = 0$, $x \in [0 ; 0,6]$, chọn $h = 0,1$ ngoài ra cho :

$$y(0,1) = 3,14184 ; y(0, 2) = 3,14364 ; y(0,3) = 3,14903$$

$$z(0,1) = 0,10981 ; z(0,2) = 0,22960 ; z(0,3) = 0,35934.$$

Giải

Quá trình tính toán được thể hiện trong bảng

k	x_k	y_k	Δy_k	hf	$h\Delta f$	$h\Delta^2 f$	$h\Delta^3 f$
0	0	3,14159		0	73	176	53
1	0,1	3,14184		0,00073	249	229	63
2	0,2	3,14364		0,00322	478	292	66
3	0,3	3,14903	0,01154	0,00800	770	358	
4	0,4	3,16057	0,02101	0,01570	1128		
5	0,5	3,18158	0,03446	0,02708			
6	0,6	3,21604					

k	z_k	Δz_k	hg	$h\Delta g$	$h\Delta^2 g$	$h\Delta^3 g$
0	0		0,10482	998	-1	0
1	0,10981		0,11480	997	-1	0
2	0,22960		0,12477	996	-1	2
3	0,35934	0,13971	0,13473	995	-1	
4	0,49905	0,14965	0,14468	992	-3	
5	0,64870	0,15955	0,15460			
6	0,80825					

§6. PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN GIẢI BÀI TOÁN BIÊN

Xét bài toán

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y] \equiv y' - q(x)y = f(x), \\ y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \end{cases} \quad (16)$$

Giả sử có đủ điều kiện để bài toán (16) tồn tại và duy nhất nghiệm.

1. Phương pháp sai phân

Giả sử $q(x) \geq 0$ và $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Chia $[a, b]$ thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n; \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Ta có

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + r_i,$$

nếu $y^{(4)}(x)$ tồn tại và liên tục trên $[a, b]$ thì

$$|r_i| \leq r = \frac{h^2 M}{12}, \quad M = \max_{a \leq x \leq b} |y^{(4)}(x)|.$$

Khi đó bài toán (16) tương đương với

$$\begin{cases} \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + r_i - q(x_i)y(x_i) = f(x_i) \\ \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ y(x_0) = y_a, \quad y(x_n) = y_b. \end{cases} \quad (17)$$

Trong hệ (17) chúng ta bỏ r_i thì nhận được lược đồ sai phân hữu hạn

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q(x_i) y_i = f(x_i) \\ y_0 = y_a, \quad y_n = y_b. \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (18)$$

Giải hệ phương trình tuyến tính (18) ta được các y_i đó là giá trị gần đúng của nghiệm của bài toán (16) tại các điểm $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Sai số nhận được sẽ là :

$$\max_{0 \leq i \leq n} |y(x_i) - y_i| \leq \frac{M(b-a)^2}{96} h^2.$$

2. Phương pháp duỗi

Từ hệ phương trình (18) chúng ta nhận thấy hệ này có dạng

$$\begin{cases} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ y_0 = y_a, \quad y_n = y_b. \end{cases} \quad (19)$$

trong đó $A_i, B_i, C_i, F_i, i = 1, \dots, n-1$ là các hằng số, ngoài ra $A_i \neq 0, B_i \neq 0, i = 1, \dots, n-1$.

Hệ (19) viết dưới dạng ma trận

$$\mathcal{A}y = f, \quad y_0 = y_a, \quad y_n = y_b,$$

với $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)^T, f = (y_a, -F_1, \dots, -F_{n-1}, y_b)^T$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & -C_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_i & -C_i & B_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1} & -C_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận A vuông với ba đường chéo (cấp $n+1$).

Để giải hệ phương trình (19) chúng ta có thể dùng các phương pháp đã trình bày. Tuy nhiên do dạng đặc biệt của hệ phương trình có thể sử dụng phương pháp sau gọi là phương pháp đuổi.

Giả sử có

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}. \quad (20)$$

Chúng ta sẽ xác định các hệ số α_{i+1} , β_{i+1} thay y_i vào hệ (19) ta có

$$(A_i \alpha_i - C_i) y_i + B_i y_{i+1} = -(f_i + A_i \beta_i). \quad (21)$$

Từ (20) và (21) rút ra

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + f_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Vậy chúng ta có công thức đuổi sau :

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \alpha_1 = 0 \\ \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + f_i}{C_i - A_i \alpha_i}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \beta_1 = y_a, \\ y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, & i = n-1, n-2, \dots, 1, 0, \\ y_n = y_b. \end{cases} \quad (22)$$

Nhận xét. Nếu $|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ thì chúng ta có thể áp dụng công thức đuổi (22).

Chứng minh. Với $i = 1$ theo giả thiết có $A_1, B_1 \neq 0$ và vì $\alpha_1 < 1$ nên $C_1 - A_1 \alpha_1 \neq 0$. Giả sử $C_i - A_i \alpha_i \neq 0$, $\alpha_i \leq 1$ ta phải chứng minh $C_{i+1} - \alpha_{i+1} A_{i+1} \neq 0$ và $\alpha_{i+1} \leq 1$.

Ta có

$$|C_i - A_i \alpha_i| - |B_i| \geq |C_i| - |A_i| |\alpha_i| - |B_i|$$

$$\geq |A_i| (1 - |\alpha_i|) \geq 0.$$

Vậy $|C_i - A_i \alpha_i| \geq |B_i| > 0$ và

$$|\alpha_{i+1}| = \frac{|B_i|}{|C_i - A_i \alpha_i|} \leq 1.$$

Đó là điều phải chứng minh.

§7. PHƯƠNG PHÁP GALERKIN

Xét phương trình vi phân

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (23)$$

với các điều kiện biên

$$\begin{cases} \alpha_a y(a) + \beta_a y'(a) = \gamma_a \\ \alpha_b y(b) + \beta_b y'(b) = \gamma_b, \end{cases} \quad (24)$$

trong đó $p(x), q(x), f(x) \in C[a, b]$, $\alpha_a, \alpha_b, \beta_a, \beta_b, \gamma_a, \gamma_b$ là các hằng số đã cho, $|\alpha_a| + |\beta_a| \neq 0$, $|\alpha_b| + |\beta_b| \neq 0$.

Kí hiệu $\mathcal{L}[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y$,

$$B_a[y] = \alpha_a y(a) + \beta_a y'(a),$$

$$B_b[y] = \alpha_b y(b) + \beta_b y'(b).$$

Giả sử $\phi_i \in C^2[a, b]$, $\{\phi_i\}_{i=0}^n$ là các hàm độc lập tuyến tính trên $[a, b]$, thỏa mãn

$$B_a(\phi_0) = \gamma_a, \quad B_b(\phi_0) = \gamma_b,$$

$$B_a(\phi_i) = B_b(\phi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Chúng ta tìm nghiệm của (23), (24) dưới dạng

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(x) + \phi_0(x),$$

các hằng số C_i được xác định từ điều kiện sau :

$$(\mathcal{L}(y_n) - f, \phi_j) = \int_a^b [\mathcal{L}\phi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{L}\phi_i(x) - f(x)] \phi_j(x) dx = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Từ đó ta có một hệ phương trình

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n C_i \int_a^b [\mathcal{L}\phi_i(x)] \phi_j(x) dx = \int_a^b [f(x) - \mathcal{L}[y_i]] \phi_j(x) dx \\ j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Ví dụ. Sử dụng phương pháp Galerkin xấp xỉ nghiệm của phương trình

$$y'' - y' \cos x + y \sin x = \sin x,$$

với $y(-\pi) = y(\pi) = 2$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Chọn } \phi_0(x) = 2, \quad \phi_1(x) = \sin x, \quad \phi_2(x) = \cos x + 1, \\ \phi_3(x) = \sin 2x, \quad \phi_4(x) = \cos 2x - 1. \end{aligned}$$

Hệ hàm này độc lập tuyến tính trên $[-\pi, \pi]$, $\phi_0(x)$ thỏa mãn $\phi_0(-\pi) = \phi_0(\pi) = 2$; $\phi_i(-\pi) = \phi_i(\pi) = 0$, $i = 1, \dots, 4$.

Chúng ta tìm nghiệm dưới dạng

$$y_4(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^4 C_i \phi_i(x).$$

Ta có: $\mathcal{L}[\phi_0] = 2\sin x$,

$$\mathcal{L}[\phi_1] = -\sin x - \cos 2x,$$

$$\mathcal{L}[\phi_2] = \sin x - \cos x + \sin 2x,$$

$$\mathcal{L}[\phi_3] = -\frac{1}{2} \cos x - 4 \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 3x,$$

$$\mathcal{L}[\phi_4] = -\frac{1}{2} \sin x - 4 \cos 2x + \frac{3}{2} \cos 3x,$$

$$f(x) - \mathcal{L}[\phi_0] = -\sin x.$$

$$\text{Đặt } a_{ik} = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_k(x) \mathcal{L}[\phi_i] dx, \quad b_k = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_k(x) \{f(x) - \mathcal{L}[\phi_0]\} dx,$$

$$\text{thì } b_1 = - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = -\pi, \quad b_2 = b_3 = b_4 = 0.$$

$$a_{11} = - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = -\pi; \quad a_{12} = \pi, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = -\frac{\pi}{2},$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \pi, \quad a_{23} = -\frac{\pi}{2}, \quad a_{24} = 0,$$

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2x dx = \pi, \quad a_{33} = -4\pi, \quad a_{34} = 0$$

$$a_{41} = - \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x dx = -\pi, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 0, \quad a_{44} = -4\pi.$$

Do đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + 0,5C_4 = 1 \\ C_2 + 0,5C_3 = 0, \\ C_2 - 4C_3 = 0, \\ C_1 + 4C_4 = 0, \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ này ta có : } C_1 = \frac{8}{7}, \quad C_2 = C_3 = 0, \quad C_4 = -\frac{2}{7}.$$

$$\text{Vậy } y(x) \approx y_4(x) = 2 + \frac{8}{7} \sin x + \frac{4}{7} \sin^2 x.$$

§8. PHƯƠNG PHÁP COLLOCATION

Giả sử X là không gian con tuyến tính của $C[a, b]$

$$\mathcal{L}: X \rightarrow X$$

$$f \mapsto \mathcal{L} f \in X,$$

là toán tử tuyến tính, $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ là một hệ độc lập tuyến tính của X .

$$\text{Đặt } X_n = \{f(t) = \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(t) \mid C_i \in \mathbf{R}\}.$$

Giả sử cho phương trình tuyến tính

$$\mathcal{L} x = y, \quad (25)$$

y là hàm đã cho của X . Xấp xỉ nghiệm $x(t)$ của (25) bằng phương pháp collocation là xác định một hàm $x_n(t) \in X_n$,

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(t) \text{ sao cho}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}x_n(t_i) = \sum_{j=1}^n C_j \phi_j(t_i) = y(t_i) \\ i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (26)$$

trong đó $t_1, t_2, \dots, t_n$ là các điểm phân biệt của $[a, b]$.

Hệ phương trình (26) là hệ phương trình tuyến tính n ẩn. Giả sử $c_1^*, \dots, c_n^*$ là nghiệm của nó. Khi đó hàm số $x_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i^* \phi_i(t)$ là nghiệm xấp xỉ của (25).

Ví dụ. Tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình

$$\begin{aligned} x''(t) - x(t) &= 1, \\ \text{với } x(0) &= x(1) = 0. \end{aligned}$$

Giải :

Đặt $\mathcal{L} x(t) = x''(t) - x(t)$, chọn $\phi_1(t) = t(t-1)$, $\phi_2(t) = t^2(t-1)$.
Ta có :

$$\phi_1(0) = \phi_1(1) = \phi_2(0) = \phi_2(1) = 0,$$

$$\mathcal{L} \phi_1(t) = 2 - t(t-1)$$

$$\mathcal{L} \phi_2(t) = 6t - 2 - t^2(t-1),$$

$$\mathcal{L} \phi_1(0) = 2, \mathcal{L} \phi_2(0) = -2,$$

$$\mathcal{L} \phi_1(1) = 2, \mathcal{L} \phi_2(1) = 4.$$

Chọn $t_1 = 0$ và $t_2 = 1$. Nghiệm xấp xỉ collocation :

$$x_2(t) = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t)$$

Hệ (26) viết dưới dạng ma trận :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Giải ra ta được $c_1 = \frac{1}{6}$, $c_2 = \frac{1}{3}$.

Vậy nghiệm xấp xỉ collocation $x_2(t) = \frac{1}{6} t(t-1) + \frac{1}{3} t^2(t-1)$,

nghiệm chính xác là $x(t) = \frac{1}{e+1}(e^t + e^{1-t}) - 1$.

Sai số $e(t) = |x(t) - x_2(t)|$ cho ở bảng dưới đây

t	x(t)	$x_2(t)$	e(t)
0	0	0	0
0,1	-0,04128461	-0,01800000	0,02328461
0,2	-0,07297407	-0,03733333	0,03564073
0,3	-0,09538554	-0,05600000	0,03938554
0,4	-0,10874333	-0,07200000	0,05674333
0,5	-0,11318112	-0,08333333	0,02984778
0,6	-0,10874333	-0,08800000	0,02074333
0,7	-0,08400000	-0,08400000	0,01138554
0,8	-0,07297407	-0,06933333	0,00354073
0,9	-0,04128461	-0,04200000	0,00071539
1,0	0,00000000	0,00000000	0,00000000

§9. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG BẰNG CHƯƠNG TRÌNH MAPLE V

Sử dụng Maple V chúng ta có thể tìm nghiệm chính xác của nhiều phương trình vi phân thường, phương trình vi phân với điều kiện ban đầu. Hơn nữa Maple cho phép tìm nghiệm gần đúng của các phương trình vi phân và vẽ được đồ thị của nghiệm gần đúng đó.

Muốn giải phương trình vi phân thường ta khởi động chương trình Maple V và nạp gói công cụ cho phép giải bằng các lệnh sau

```
[> restart ;  
[> with (DEtools) ;
```

1. Giải phương trình và hệ phương trình

Sử dụng lệnh

```
[> dsolve (deq, x(t0) = x0, {x(t)}) ;
```

trong đó deq là phương trình vi phân, $x(t)$ là nghiệm, $x(t_0) = x_0$ là điều kiện ban đầu. Nếu tìm nghiệm tổng quát thì bỏ điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$.

Ví dụ 1. Giải phương trình biến số phân ly

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t^2 - 4}$$

```
[> dsolve (D (x) (t) = 2/(t^2-4), {x(t)}) ;
```

$$x(t) = \frac{1}{2} \ln(t-2) - \frac{1}{2} \ln(t+2) + C_1.$$

Ví dụ 2 : Giải phương trình vi phân

$$x'(t) = \frac{t(x^3 - 1)}{(t^2 - 1)x}$$

```
[> dsolve (D(x) (t) = -((t*(x^3-1))/((t^2-1)*x)), {x(t)}) ;
```

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \ln(x(t) - 1) - \frac{1}{6} \ln(x^2(t) + x(t) + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{1}{3} (2x(t) + 1) \sqrt{3} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \ln(t-1) + \frac{1}{2} \ln(t+1) = C_1. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Giải phương trình vi phân thuần nhất

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4tx}{t^2 - x^2}$$

[>dsolve (D(x) (t) = (4*t*x)/(t^2 - x^2), {x(t)}) ;

$$-\frac{2t^2}{\sqrt{x(t)}} - \frac{2}{3} (x(t))^{3/2} = C_1.$$

Ví dụ 4. Giải phương trình Bernoulli sau

$$t \frac{dx}{dt} - 4x = t^2 x.$$

[>dsolve (t*D(x)(t) - 4*x = t^2*x, {x(t)}) ;

$$x(t) = C_1 t^4 e^{1/2 t^2}.$$

Ví dụ 5. Giải phương trình Riccati sau

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + x + c, \text{ với } c \text{ là hằng số.}$$

[>dsolve (D(x) (t) = x^2 + x + c, {x(t)}) ;

$$-2 \frac{\arctan \frac{2x(t) + 1}{\sqrt{4c - 1}}}{\sqrt{4c - 1}} + t = C_1.$$

Ví dụ 6. Giải phương trình Clero

$$x = \frac{dx}{dt} \cdot t - \frac{1}{4} [x'(t)]^2$$

[>dsolve (x = D(x) (t) * t - 1/4 * (D(x) (t))^2, {x(t)}) ;

$$x(t) = -\frac{1}{4} C_1^2 + C_1 t ; x(t) = t^2.$$

Ví dụ 7. Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Trước tiên ta gán tên cho phương trình cần giải :

[> diff_eq := D(D(y))(x) - 3 * D(y)(x) + 2*y(x) = 0

Sau khi thực hiện lệnh trên màn hình xuất hiện :

$$\text{diff_eq} := (D^{(2)})(y)(x) - 3D(y)(x) + 2y(x) = 0 ;$$

- Nhập điều kiện ban đầu bằng lệnh

[> init_con := y(0) = 0, D(y)(0) = 1 ;

- Giải phương trình bằng lệnh

[> dsolve ({diff_eq, init_con}, {y(x)}) ;

$$y(x) = -e^x + e^{2x}.$$

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - z(x) = \cos x \\ \frac{dz}{dx} + y = 1. \end{cases}$$

- Gán tên sys cho hệ

[> sys := {diff(y(x), x) - z(x) = cos(x), diff(z(x), x) + y(x) = 1} ;

- Gán tên cho nghiệm

[> fcns := {y(x), z(x)} ;

- Giải hệ phương trình

[> dsolve(sys, fcns) ;

$$\begin{cases} y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{2} \sin x + 1, \\ z(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x - \frac{1}{2} x \sin x. \end{cases}$$

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - z = \cos x \\ \frac{dz}{dx} + y = 1, \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 0, z(0) = 1$.

```
[>sys := {diff (y(x), x) - z(x) = cos(x), diff (z(x), x) +
+ y(x) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1} ;
[>ngh := {y(x), z(x)} ;
[> dsolve (sys, ngh) ;
```

$$\begin{cases} y(x) = \frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2} x \cos x - \cos x + 1, \\ z(x) = \cos x - \frac{1}{2} (\sin x)x + \sin x. \end{cases}$$

2. Vẽ đồ thị nghiệm của phương trình vi phân

Để vẽ đồ thị nghiệm của phương trình vi phân, chúng ta nhập dòng lệnh sau

```
[>with (DEtools) ;
```

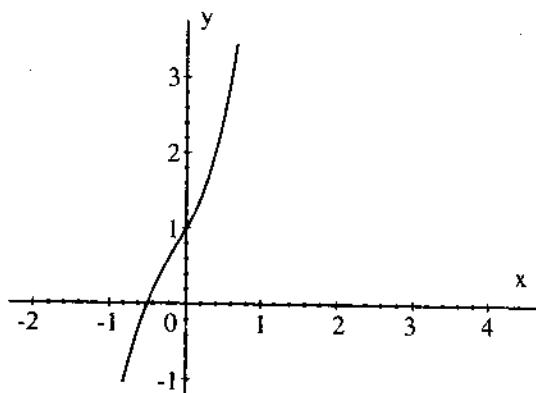
Ví dụ 1. Vẽ đồ thị nghiệm của phương trình vi phân

$$\cos x \frac{d^3 y}{dx^3} - \pi \frac{dy}{dx} = y + x,$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 1, x \in [-2, 4],$
 $y \in [-1, 3],$ chọn bước là 0,05.

```
[>with (DEtools) ;
[DEnormal, DEplot, DEplot3d, Dchangevar, PDEchangecoords,
PDEplot, autonomous, convertAlg, convertsys, indicialeq, phaseportrait,
reduceOrder, regularsp, translate, untranslate, varparam]
```

```
>DEplot({cos(x)*diff(y(x), x$3) - Pi*diff(y(x), x) = y(x) + x},
{y(x)}, x = -2..4, [[y(0)=1, D(y)(0) = 2, (D@@2)(y)(0) = 1]],
y = -1..3, stepsize = .05);
```

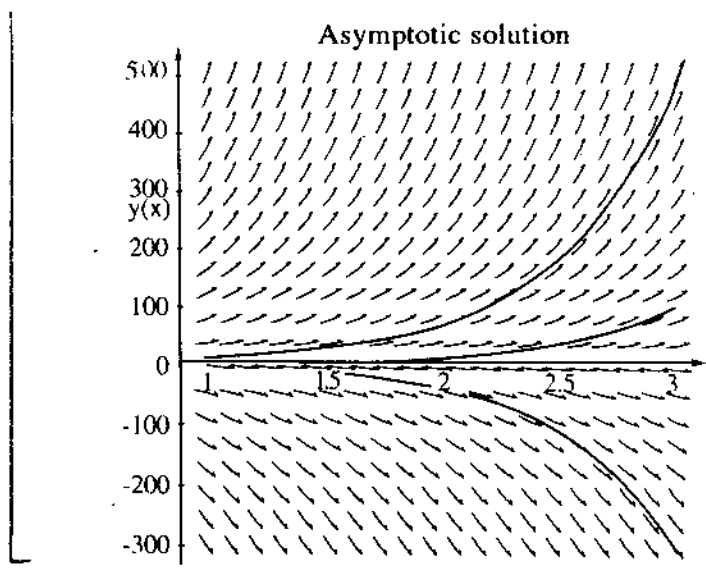


Hình 4.1

Ví dụ 2. Vẽ đồ thị nghiệm của phương trình vi phân $y' = 2y + x^2$, biến độc lập x thay đổi trong đoạn $[1, 3]$. Điều kiện ban đầu $y(0) = 0$ hoặc $y(0) = 1$ hoặc $y(0) = -1$, chọn bước là 0,05 ; Tiêu đề "nghiệm tiệm cận".

```
>with(DEtools);
[DEnormal, DEplot, DEplot3d, Dchangevar, PDEchangecoords,
PDEplot, autonomous, converAlg, convertsys, dfieldplot,
indiciaeq, phaseportrait, reduceOrder, regularsp, translate,
untranslate, varparam]
```

```
>DEplot({D(y)(x) =
2*y(x) + x^2}, {y(x)}, x = 1..3, [[y(0) = 0], [y(0) = 1],
[y(0)=-1]], stepsize = .05, title=Asymptotic solution);
```



Hình 4.2

BÀI TẬP

1. Xác định nghiệm gần đúng thứ ba của bài toán sau bằng phương pháp lặp đơn

- a) $y' = x^2 - y^2$ với $y(0) = 0$.
- b) $y' = 2x - 1 + y^2$ với $y(0) = 1$.

2. Tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác tới 10^{-3} trên $[0, 1]$ của phương trình

- a) $y' = 2x - 0,01y^2$ với $y(0) = 1$,
- b) $y' = x + y\sqrt{x}$ với $y(0) = 0$;

3. Áp dụng phương pháp Euler tìm nghiệm của phương trình

$$y' = \frac{x + y}{y - x}, \quad y(0) = 1, \text{ bước } h = 0,1, x \in [0, 1].$$

4. Giải gần đúng bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}xy \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

bằng phương pháp Euler với bước $h = 0,1$ trên đoạn $[0,1]$.

5. Bằng phương pháp Euler giải bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x+1} - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

trên $[0, 1]$ với bước $h = 0,1$.

6. Bằng phương pháp Euler cải tiến tìm nghiệm gần đúng $y(0, 3)$ của phương trình

$$y' = x + y^2 \text{ với } y(0) = 0, \quad h = 0,03.$$

7. Xác định nghiệm gần đúng $y(1,6)$ của phương trình

$$y' = x \ln y - y \ln x,$$

với $y(1) = 1$, chọn $h = 0,1$.

8. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình sau bằng phương pháp Runge-Kutta

$$y' = y - x \text{ với } y(0) = 1,5 \text{ trên } [0,1], \quad h = 0,2.$$

9. Áp dụng phương pháp Runge - Kutta xác định nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} x' = \frac{\cos x}{a+t} + x^2, \\ x(0) = 0, \quad t \in [0;0,3]; \quad h = 0,1 \end{cases}$$

$$a = 1,0 + 0,4k, \quad k = 0,1,\dots,5$$

10. Tìm nghiệm gần đúng trong đoạn $[0, 1]$ của phương trình sau bằng phương pháp Adams

$$y' = x - y \text{ với } y(0) = 1,$$

chọn $h = 0,1$.

11. Bằng phương pháp Adams tìm nghiệm với độ chính xác 10^{-4} trên $[0, 1]$ của phương trình

$$y' = xy^3 - y \text{ với } y(0) = 1 ;$$

Các giá trị đầu tiên được tìm bằng phương pháp Runge-Kutta.

12. Giải hệ phương trình sau đây bằng phương pháp Adams

$$\begin{cases} x' = \cos(x + 2y) + 2 \\ y' = \frac{2}{t + 2x^2} + t + 1 \end{cases}$$

với
$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0,05, \end{cases}$$

chọn $h = 0,1$. Các giá trị đầu tiên được tìm bằng phương pháp Runge-Kutta.

13. Áp dụng phương pháp Galerkin xấp xỉ nghiệm của bài toán giá trị biên sau :

$$\begin{aligned} y'' - y' \cos x + y \sin x &= \sin x, \\ y(-\pi) &= y(\pi) = 2. \end{aligned}$$

14. Bằng phương pháp Galerkin giải phương trình

$$y'' - 2xy' + 2y = x,$$

với $y(0) = 0$ và $y'(1) = 1$.

15. Giải xấp xỉ phương trình sau bằng phương pháp collocation

$$y'' + x^2 y' - xy = e^x,$$

với $y(0) = y(1) = 0$.

16. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$y'' + y' - \frac{y}{x} = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8},$$

với $y(0) = 0, y'(1) = 1,$

bằng phương pháp collocation.

Chương V

GIẢI GẦN ĐÚNG CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

Vấn đề tìm nghiệm đúng của các phương trình đạo hàm riêng cũng như các phương trình vi phân thường không thể và cũng không cần thực hiện trong mọi trường hợp.

Bởi vậy để tìm nghiệm của các phương trình đạo hàm riêng người ta phải sử dụng các phương pháp gần đúng.

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu một số phương pháp thông dụng giải gần đúng các lớp phương trình đạo hàm riêng.

§1. PHƯƠNG PHÁP LƯỚI

Phương pháp lưới là một trong các phương pháp số thông dụng để giải bài toán biên đối với các phương trình vi phân đạo hàm riêng.

Ý tưởng của phương pháp lưới được thể hiện như sau : trong miền biến thiên của các biến độc lập chúng ta tạo ra một lưới nhờ các đường thẳng song song với hai trục tọa độ. Điểm giao nhau của các đường thẳng đó gọi là các nút lưới (điểm lưới). Tại các điểm lưới thay đạo hàm trong phương trình kể cả điều kiện biên bằng các biểu thức sai phân ;

Nghiệm của hệ phương trình này chính là các giá trị gần đúng của nghiệm bài toán ban đầu tại các điểm lưới.

Nghiên cứu phương pháp lưới liên quan tới việc giải các bài toán sau :

1. Lập luận khả năng giải được của hệ phương trình nhận được và xác định nghiệm đúng hoặc gần đúng của nó bằng một phương pháp gần đúng nào đó.

2. Đánh giá sai số của phương pháp mà sai số được tích lũy dần từ ước lượng sai số xấp xỉ của phương trình vi phân với các điều kiện biên.

Trong mục này chúng ta sẽ xét các bài toán biên đối với phương trình dạng elliptic, hyperbolic và parabolic.

1. Phương trình elliptic

Xét phương trình elliptic sau

$$\mathcal{L}u \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f \quad (1)$$

Với a, b, c, d, g, f là các hàm của hai biến độc lập x và y ; Chúng xác định trong miền hữu hạn G với biên Γ .

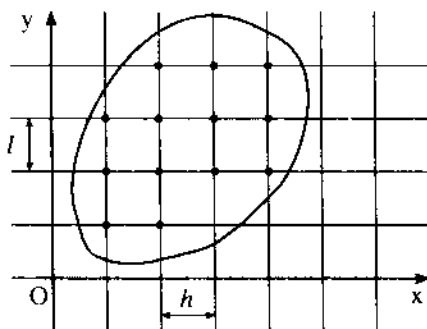
Giả sử a, b, c, d, g, f liên tục trong $G \cup \Gamma$ và $a > 0, b > 0, g < 0$
 $\forall (x, y) \in G \cup \Gamma$.

Chúng ta đi tìm nghiệm u của (1), $u \in C(G)$ và $u|_{\Gamma} = \varphi$, φ liên tục trên Γ . (2)

Xét hai họ đường thẳng song song với các trục tọa độ

$$x = x_0 + ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$y = y_0 + jl, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Hình 5.1

trong đó $h > 0, l > 0$ là các số đã cho (bước lưới theo Ox, Oy). Điểm giao nhau của các đường thẳng này gọi là điểm lưới (hay điểm nút).

Chúng ta chỉ xét những điểm lưới thuộc $G \cup \Gamma$. Nếu hai điểm lưới cách xa nhau theo trục Ox hoặc Oy một khoảng bước của lưới thì ta nói đó là các điểm kề.

Những điểm lưới (của $G \cup \Gamma$) mà bốn điểm kề cùng thuộc tập các điểm lưới của $G \cup \Gamma$ gọi là các điểm lưới trong. Tập hợp tất cả các điểm lưới trong kí hiệu là G^* .

Những điểm lưới dù chỉ có một điểm lưới kề không thuộc tập các điểm lưới của $G \cup \Gamma$ gọi là điểm lưới biên. Tập hợp các điểm lưới biên gọi là biên của miền lưới và kí hiệu là Γ^* .

Bây giờ chúng ta sẽ xấp xỉ phương trình (1)

Với mỗi điểm lưới trong (i, j) ta lập biểu thức sai phân thay thế các đạo hàm tại các điểm $(x_0 + ih, y_0 + jl)$, ta có :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_i, y_j)} \approx \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_i, y_j)} \approx \frac{u(x_i, y_j + l) - u(x_i, y_j - l)}{2l},$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_j)} \approx \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2},$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(x_i, y_j)} \approx \frac{u(x_i, y_j + l) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - l)}{l^2}$$

Do vậy chúng ta nhận được :

$$\begin{aligned} l_{ij} \equiv & a_{ij} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + b_{ij} \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{l^2} + \\ & + c_{ij} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + d_{ij} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2l} + g_{ij} u_{ij} = f_{ij} \end{aligned} \quad (3)$$

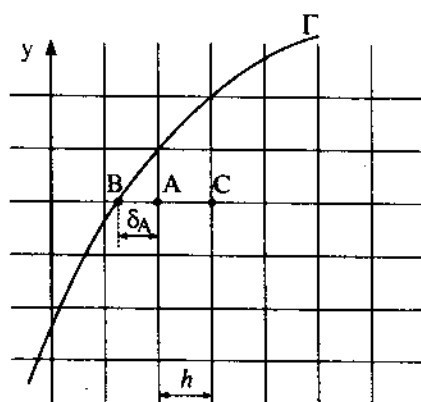
trong đó $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, g_{ij}, f_{ij}$ là giá trị các hệ số của (1) tại các điểm lưới (i, j) . Phương trình (3) chỉ có thể viết tại các điểm lưới

trong. Nếu (i, j) là điểm lưới biên thì u_{ij} tại điểm lưới này là giá trị của φ tại điểm của Γ gần nhất với điểm lưới đó.

Kollats đưa ra một phương pháp xấp xỉ các điều kiện biên tương đối thuận lợi như sau

Từ hình 5.2 rõ ràng với điểm lưới A ta có phương trình

$$u_A = \frac{\delta_A u_C + h u_B}{\delta_A + h}, \text{ với } \delta_A = BA, h = AC.$$



Hình 5.2

Phương trình Kollats có nghĩa là giá trị u_A nhận được bằng nội suy tuyến tính các giá trị u_C và φ_B .

Sai số nhận được có bậc h^2

Vậy để xác định u_{ij} ta có hệ phương trình tuyến tính (3).

Số ẩn của nó bằng số phương trình.

Nghiệm của hệ này là giá trị gần đúng của nghiệm của bài toán (1), (2) tại (x_i, y_j) ,

$$u(x_i, y_j) \approx u_{ij}.$$

Bây giờ chúng ta chứng minh hệ (3) có nghiệm duy nhất và sử dụng phương pháp lặp đơn ta sẽ tìm được nghiệm của nó.

Biến đổi (3) thành dạng sau

$$\varphi_{ij} = A_{ij} u_{i+1,j} + B_{ij} u_{i-1,j} + C_{ij} u_{i,j+1} + D_{ij} u_{i,j-1} - E_{ij} u_{ij} = f_{ij}.$$

với

$$A_{ij} = \frac{C_{ij}}{h^2} + \frac{C_{ij}}{2h}, \quad B_{ij} = \frac{a_{ij}}{h^2} - \frac{C_{ij}}{2h},$$

$$C_{ij} = \frac{b_{ij}}{l^2} + \frac{d_{ij}}{2l}, \quad D_{ij} = \frac{b_{ij}}{l^2} - \frac{d_{ij}}{2l},$$

$$E_{ij} = \frac{2a_{ij}}{h^2} + \frac{2b_{ij}}{l^2} - g_{ij}.$$

Từ các điều kiện với các hệ số của (1) ta thấy khi h, l đủ nhỏ, các hệ số $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}$ sẽ dương tại tất cả các điểm lưới của miền lưới, và $A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} - E_{ij} = g_{ij}$.

Bổ đề 5.1.1

Giả sử dãy $\{v_{ij}\}$, $v_{ij} \neq \text{const}$ xác định trên G^* thỏa mãn điều kiện

$$lv_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in G^*,$$

hoặc

$$lv_{ij} \leq 0 \quad \forall (i, j) \in G^*.$$

Khi đó v_{ij} không đạt max dương (hoặc min âm) trong G^* .

Chứng minh. Giả sử $lv_{ij} \geq 0$ và $M = \max_{G^*} v_{ij} > 0$.

Lúc đó tìm được $(i_0, j_0) \in G^*$, sao cho $v_{i_0 j_0} = M$ và có ít ra một điểm kề $(i; j)$ sao cho $v_{ij} < M$.

Ta có :

$$lv_{i_0 j_0} = A_{i_0 j_0} v_{i_0+1 j_0} + B_{i_0 j_0} v_{i_0-1 j_0} + C_{i_0 j_0} v_{i_0 j_0+1} +$$

$$+ D_{i_0 j_0} v_{i_0 j_0-1} - M E_{i_0 j_0},$$

$$\begin{aligned} \ell_{v_{i_o j_o}} &\leq (A_{i_o j_o} + B_{i_o j_o} + C_{i_o j_o} + D_{i_o j_o} - E_{i_o j_o})M = \\ &= g_{i_o j_o} M < 0, \end{aligned}$$

$$\ell_{v_{i_o j_o}} < 0.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do đó điều giả sử của chúng ta không đúng. Phần khẳng định thứ nhất được chứng minh. Phần thứ hai chứng minh tương tự. $\square$

Áp dụng bổ đề này để dàng chứng minh được hệ (3) có nghiệm duy nhất. Để có điều đó ta chỉ cần chứng minh hệ phương trình thuần nhất tương ứng chỉ có nghiệm tầm thường.

Thật vậy, nếu hệ phương trình thuần nhất có nghiệm khác 0 thì nó có giá trị dương lớn nhất hoặc giá trị âm nhỏ nhất trên Γ^* . Đó là điều mâu thuẫn, vì trên Γ^* ta có $u_{ij} = 0$.

Giả sử $g < 0$, h đủ nhỏ sao cho $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}$ dương. Vì $\delta_A < h$ và $A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} < E_{ij}$, nên rút ra chuẩn của ma trận của hệ phương trình

$$\begin{cases} u_{ij} = \frac{A_{ij}}{E_{ij}} u_{i+1j} + \frac{B_{ij}}{E_{ij}} u_{i-1j} + \frac{C_{ij}}{E_{ij}} u_{ij+1} + \frac{D_{ij}}{E_{ij}} u_{ij-1} - \frac{f_{ij}}{E_{ij}}, \\ u_A = \frac{\delta_A u_C + h \varphi_B}{h + \delta_A} \end{cases}$$

bị chặn trên bởi số

$$q = \max \left\{ \frac{\delta_A}{\delta_A + h}, \frac{A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij}}{E_{ij}} \right\} < 1.$$

Khi đó phương pháp lặp đơn và Seidel hội tụ tới nghiệm của hệ (4).

Bây giờ chúng ta đánh giá sai số của phương pháp lưới.

Giả sử nghiệm của (1), (2) có đạo hàm liên tục bậc 4.

Ta có

$$\frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\tilde{x}_i, y_j),$$

$$\frac{u(x_i, y_j + l) - u(x_i, y_j - l)}{2l} = \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, \tilde{y}_j),$$

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j))}{h^2} = \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{x}_i, y_j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, y_j + l) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - l))}{l^2} = \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \tilde{y}_j), \end{aligned}$$

với $x_i - h \leq \tilde{x}_i \leq x_i + h, \quad y_j - l \leq \tilde{y}_j \leq y_j + l$

$x_i - h \leq \tilde{\tilde{x}}_i \leq x_i + h, \quad y_j - l \leq \tilde{\tilde{y}}_j \leq y_j + l,$

rút ra

$$\begin{aligned} \ell_{u_{ij}} = \left\{ a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_{ij} \frac{\partial u}{\partial x} + d_{ij} \frac{\partial u}{\partial y} + g_{ij} u \right\}_{(x_i, y_j)} + \\ + \frac{h^2}{12} \left\{ a_{ij} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{x}_i, y_j) + b_{ij} \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \tilde{y}_j) + \right. \\ \left. + 2c_{ij} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\tilde{x}_i, y_j) + 2d_{ij} \alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, \tilde{y}_j) \right\} \end{aligned}$$

$$= [\mathcal{L}(u)]_{(i,j)} + R_{ij},$$

$$\text{với } \alpha = l/h \text{ và } R_{ij} = \frac{h^2}{12} \left\{ a_{ij} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{x}_i, y_j) + b_{ij} \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \tilde{y}_j) + 2c_{ij} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\tilde{x}_i, y_j) + 2d_{ij} \alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, \tilde{y}_j) \right\}.$$

$$\text{Đặt } M_3 = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|, \left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right| \right\}, \quad M_4 = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}.$$

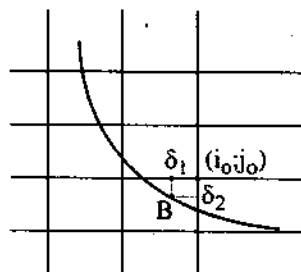
Khi đó ta có

$$|R_{ij}| \leq \frac{h^2}{12} \{ (|a_{ij}| + \alpha^2 |b_{ij}|) M_4 + 2(|c_{ij}| + \alpha^2 |d_{ij}|) M_3 \}.$$

$$\text{Vậy} \quad |u_{ij} - (\mathcal{L}u)_{(i,j)}| = R_{ij} = O(h^2) \quad (5)$$

Nhận xét

Như ở trên đã trình bày nếu các điều kiện biên xấp xỉ theo Kollats thì sai số là bậc h^2 . Nếu các giá trị của nghiệm cần tìm tại các điểm lưới biên cho bằng các giá trị của φ tại các điểm của Γ gần nhất với điểm lưới này thì bậc xấp xỉ là $O(\delta)$ ($\delta = \max(h, l)$).



Hình 5.3

Chứng minh. Giả sử (i_0, j_0) là điểm lưới biên, $B \in \Gamma$, B gần (i_0, j_0) nhất (h.5.3).

$$\text{Ta có:} \quad u_{i_0 j_0} - u_B = \frac{\partial u}{\partial x} \delta_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \delta_2,$$

$$\text{vậy} \quad |u_{i_0 j_0} - \varphi(B)| \leq 2\delta M_1,$$

$$\delta = \max(h, l)$$

$$M_1 = \max \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right\}.$$

Bổ đề 5.1.2. Giả sử có hai dãy v_{ij}, V_{ij} xác định trên G^* ngoài ra có

$$|\ell v_{ij}| \leq -\ell V_{ij}, \text{ với mọi điểm lưới trong,}$$

$$|v_{ij}| \leq V_{ij}, \text{ với mọi điểm lưới biên.}$$

Khi đó $|v_{ij}| \leq V_{ij}, \forall (i, j) \in G^*.$

Chứng minh. Từ điều kiện của bổ đề ta có

$$\begin{cases} \ell(V_{ij} - v_{ij}) \leq 0 \\ \ell(V_{ij} + v_{ij}) \leq 0 \end{cases}$$

với mọi điểm lưới trong $(i, j),$

và
$$\begin{cases} V_{ij} - v_{ij} \geq 0 \\ V_{ij} + v_{ij} \geq 0, \end{cases}$$

với mọi điểm lưới biên.

Theo bổ đề 5.1.1 thì $V_{ij} - v_{ij}$ và $V_{ij} + v_{ij}$ tại các điểm lưới trong không thể có cực tiểu âm.

Do đó
$$\begin{cases} V_{ij} - v_{ij} \geq 0 \\ V_{ij} + v_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

với mọi điểm lưới trong $(i, j).$

Vậy
$$|v_{ij}| \leq V_{ij}.$$

Bây giờ chúng ta đánh giá sai số của phương pháp.

Giả sử nghiệm u của bài toán (1), (2) thỏa mãn $u \in C^4[G \cup \Gamma]$

và $\frac{a}{p^2} + \frac{b}{q^2} - \frac{|c|}{p} - \frac{|d|}{q} > 0,$ p, q là bán trục của ellip mà các trục

của ellip song song với các trục tọa độ, tâm của nó là điểm $(x_0, y_0) \in G$.

Đặt $\varepsilon_{ij} = u(x_i, y_j) - u_{ij}$. Theo nhận xét ở trên ta có

$$|\varepsilon_{ij}| \leq 2M_1\delta, \text{ với mọi điểm lưới biên,}$$

$$\text{hoặc } |\varepsilon_{ij}| \leq 3M_2h^2 \text{ với } M_2 = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \right\},$$

(nếu sử dụng phương trình Kollats với điểm lưới biên).

Từ (5) ta có

$$\ell \varepsilon_{ij} = R_{ij}(u) \text{ với mọi điểm lưới trong.}$$

Tìm nghiệm của hệ phương trình này dưới dạng

$$\varepsilon_{ij} = \xi_{ij} + \eta_{ij},$$

$$\text{với } \begin{cases} \ell \eta_{ij} = 0, & (i, j) \in G^* \\ \eta_{ij} = \varepsilon_{ij}, & (i, j) \in \Gamma^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell \xi_{ij} = R_{ij}(u), & (i, j) \in G^* \\ \xi_{ij} = 0, & (i, j) \in \Gamma^*. \end{cases}$$

Xét hàm

$$\omega = \lambda \left[1 - \frac{(x - x_0)^2}{p^2} - \frac{(y - y_0)^2}{q^2} \right], \quad \lambda > 0$$

vì $R_{ij}(\omega) = 0$, nên từ (5) ta nhận được

$$\ell \omega_{ij} = (\mathcal{L}\omega)_{(i,j)} + R_{ij}(\omega) = (\mathcal{L}\omega)_{(i,j)}.$$

Do vậy

$$\ell \omega_{ij} = -2\lambda \left[\frac{a_{ij}}{p^2} + \frac{b_{ij}}{q^2} + \frac{x_i - x_0}{p^2} c_{ij} + \frac{y_i - y_0}{q^2} d_{ij} - \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{g_{ij}}{q^2} \left(1 - \frac{(x_i - x_0)^2}{p^2} - \frac{(y_i - y_0)^2}{q^2} \right) \Bigg] \leq \\
 & \leq -2\lambda \left[\frac{a_{ij}}{p^2} + \frac{b_{ij}}{q^2} - \frac{|c_{ij}|}{p} - \frac{|d_{ij}|}{q} \right].
 \end{aligned}$$

Đặt

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{\max |R_{ij}(u)|}{\min_G \left(\frac{a}{p^2} + \frac{b}{q^2} - \frac{|c|}{p} - \frac{|d|}{q} \right)},$$

rút ra $|R_{ij}(u)| \leq 2\lambda \left[\frac{a_{ij}}{p^2} + \frac{b_{ij}}{q^2} - \frac{|c_{ij}|}{p} - \frac{|d_{ij}|}{q} \right].$

Khi đó $|\ell_{\epsilon_{ij}}| = |R_{ij}(u)| \leq -\ell_{\omega_{ij}}.$

Vì $\xi_{ij} = 0$ với $(i, j) \in \Gamma^*$ và $\omega_{ij} > 0$, sử dụng bổ đề 5.1.2, ta có $|\xi_{ij}| \leq \omega_{ij}.$

Vậy $|\epsilon_{ij}| \leq |\eta_{ij}| + |\xi_{ij}| \leq$

$$\begin{aligned}
 & \leq 2M_1\delta + \frac{h^2}{24} \frac{\max_G \{(a + \alpha^2 b)M_4 + 2(|c| + \alpha^2 |d|)M_3\}}{\min_G \left[\frac{a}{p^2} + \frac{b}{q^2} - \frac{|c|}{p} - \frac{|d|}{q} \right]} \\
 & \quad \cdot \left[1 - \frac{(x_i - x_0)^2}{p^2} - \frac{(y_j - y_0)^2}{q^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\leq 2M_1\delta + \frac{h^2}{24} \frac{\max_G \{(a + \alpha^2 b)M_4 + 2(|c| + d^2 |d|)M_3\}}{\min_G \left(\frac{a}{p^2} + \frac{b}{q^2} - \frac{|c|}{p} - \frac{|d|}{q} \right)},$$

$$M_2 = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \right\}.$$

Nếu các điều kiện biên được xấp xỉ theo phương pháp Kollats thì số hạng thứ nhất $2M_1\delta$ được thay bằng $3h^2M_2$.

2. Phương trình hyperbolic

Xét phương trình hyperbolic

$$\mathcal{L}u \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f$$

ở đây a, b, c, d, g, f là hàm của các biến độc lập x, y xác định trong miền $G = \{-\infty < x < \infty, y \geq 0\}$. Giả thiết chúng liên tục và bị chặn, a và $b > 0$.

Tìm nghiệm của (6) trong miền G , thỏa mãn điều kiện đầu :

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (7)$$

với φ, ψ là các hàm đã cho.

Giả sử cho hai họ đường thẳng song song

$$x = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$y = jl, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Điểm giao nhau của các đường thẳng này gọi là điểm lưới. Các điểm lưới nằm trên đường thẳng $y = 0$ mang các giá trị đã cho ban đầu gọi là các điểm lưới biên.

Đối với mỗi điểm lưới trong (i, j) ta lập phương trình sai phân xấp xỉ phương trình vi phân (6)

$$\ell_{u_{ij}} = a_{ij} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} - b_{ij} \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{l^2} +$$

$$+ c_{ij} \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} + d_{ij} \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l} + g_{ij} u_{ij} = f_{ij},$$

hay là

$$\ell u_{ij} = A_{ij} u_{ij+1} + B_{ij} u_{ij-1} + C_{ij} u_{i+1j} + D_{ij} u_{i-1j} + E_{ij} u_{ij} = f_{ij},$$

$$\text{với } A_{ij} = -\frac{b_{ij}}{l^2} + \frac{d_{ij}}{2l}, B_{ij} = -\frac{b_{ij}}{l^2} - \frac{d_{ij}}{2l}, C_{ij} = \frac{a_{ij}}{h^2} + \frac{c_{ij}}{2h},$$

$$D_{ij} = \frac{a_{ij}}{h^2} - \frac{c_{ij}}{2h}, E_{ij} = -\frac{2a_{ij}}{h^2} + \frac{2b_{ij}}{h^2} + \frac{2b_{ij}}{l^2} + g_{ij}.$$

Chúng ta giả sử với lưới đủ nhỏ tại tất cả các điểm lưới $A_{ij} < 0$.

Khi đó nếu biết giá trị nghiệm tại các điểm lưới thứ $j - 1$ và thứ j ở các dãy ngang thì có thể tìm được nghiệm tại tất cả các điểm lưới thứ $j + 1$ của dãy ngang. Các giá trị nghiệm ở hai dãy đầu $j = 0, j = 1$ có thể tìm được từ các điều kiện ban đầu bằng một trong hai phương pháp.

Phương pháp 1. Từ điều kiện (7) ta có

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, 0) \approx \frac{u(x_i, l) - u(x_i, 0)}{l}.$$

$$\text{Khi đó } u_{i0} = \varphi(ih) = \varphi_i, \frac{u_{i1} - u_{i0}}{l} = \psi(ih) = \psi_i,$$

$$\text{hay là } u_{i0} = \varphi_i, u_{i1} = \varphi_i + l\psi_i.$$

Phương pháp 2. Đạo hàm được thay bằng biểu thức sai phân

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \approx \frac{u(x_i, l) - u(x_i, -l)}{2l}.$$

Khi đó ta nhận được

$$u_{i0} = \varphi_i, \frac{u_{i1} - u_{i,-1}}{2l} = \psi_i.$$

Sử dụng phương trình sai phân với các điểm lưới $(i, 0)$ ta được

$$A_{i0} u_{i1} + B_{i0} u_{i,-1} + C_{i0} u_{i+1,0} + D_{i0} u_{i-1,0} + E_{i0} u_{i0} = f_{i0}$$

tương đương với

$$(A_{i0} + B_{i0})u_{i1} + C_{i0} u_{i+1,0} + D_{i0} u_{i-1,0} + E_{i0} u_{i0} = f_{i0} + 2/B_{i0} \psi_i,$$

do vậy

$$(A_{i0} + B_{i0})u_{i1} = f_{i0} + 2/B_{i0} \psi_i - C_{i0} \varphi_{i+1} - D_{i0} \varphi_{i-1} - E_{i0} \varphi_i.$$

Rút ra

$$u_{i0} = \varphi_i, \quad u_{i1} = \frac{1}{A_{i0} + B_{i0}} [f_{i0} + 2/B_{i0} \psi_i - C_{i0} \varphi_{i+1} - D_{i0} \varphi_{i-1} - E_{i0} \varphi_i].$$

Cũng như trong mục trước chúng ta chứng minh được nếu nghiệm của (6), (7) có đạo hàm liên tục bị chặn bậc 4 thì

$$\ell u(x_i, y_j) = (\mathcal{L}u)(x_i, y_j) + R_{ij}(u),$$

$$\text{với} \quad |R_{ij}| \leq \frac{h^2}{12} \{ (|a_{ij}| + \alpha^2 |b_{ij}|) M_4 + 2(|c_{ij}| + \alpha^2 |d_{ij}|) M_3$$

$$\alpha = \frac{l}{h}, \quad M_k = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right|, \left| \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right| \right\}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Bây giờ chúng ta đánh giá sai số của điều kiện ban đầu.

Với phương pháp 1 ta có

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, l) - u(x_i, 0)}{l} &= \frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{(x_i, y_0)} + \frac{l}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, \eta_i) \\ &= \psi_i + \frac{l}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, \eta_i) = \psi_i + r_i, \end{aligned}$$

$u(x_i, y_0) = \varphi_i$, $u(x_i, l) = \varphi_i + l(\psi_i + r_i)$,
trong đó

$$r_i = \frac{l}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, \eta_i), \quad |r_i| \leq \frac{\alpha h}{12} M_2.$$

Với phương pháp 2 xấp xỉ các điều kiện ban đầu ta được

$$\frac{u(x_i, l) - u(x_i, -l)}{2l} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_i, y_0)} + \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial y^3} = \Psi_i + \eta_i,$$

ở đây $\eta_i = \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial y^3}, \quad |\eta_i| \leq \frac{l^2}{6} M_3.$

Mặt khác $l u(x_i, y_0) = f_{i0} + R_{i0}$, khử $u(x_i, -l)$ ta được
 $u(x_i, y_0) = \varphi_i$,

$$u(x_i, l) = \frac{1}{A_{i0} + B_{i0}} [f_i + 2l B_{i0} \psi_i - C_{i0} \varphi_{i+1} - D_{i0} \varphi_{i-1} - E_{i0} \varphi_i] + r_i^*,$$

với $r_i^* = \frac{1}{A_{i0} + B_{i0}} (R_{i0} + 2l B_{i0} \eta_i) = -\frac{1}{2b_{i0}} [l^2 R_{i0} - l(2b_{i0} + l d_{i0}) \eta_i],$

vậy ta được

$$|r_i^*| \leq \frac{1}{2|b_{i0}|} \left\{ \frac{h^4 \alpha^2}{12} [(|a_{i0}| + \alpha^2 |b_{i0}|) M_4 + 2(|c_{i0}| + \alpha^2 |d_{i0}|) M_3] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2 h^3}{6} (2|b_{i0}| + \alpha h |d_{i0}|) M_3 \right\}.$$

Chúng ta đánh giá sai số của phương pháp chỉ đối với trường hợp riêng của bài toán (6), (7). Cụ thể xét

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = \psi(x), \end{cases} \quad (8)$$

với lưới là hình vuông $l = h$.

$$S_3 = h^2 \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{v=0}^{j-2-\alpha} f_{i-v+\alpha, j-\alpha-v-1}.$$

Ta có

$$\ell u(x_i, y_j) = f_{ij} + R_{ij}(u), \text{ với } |R_{ij}| \leq \frac{h^2}{6} M_4,$$

$$\text{và } u(x_i, 0) = \varphi_i, \quad u(x_j, l) = \frac{1}{2}[-h^2 f_{i0} + 2h\psi_i + \varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}] + r_i^*$$

$$\text{trong đó } |r_i^*| \leq \frac{h^4}{12} M_4 + \frac{h^3}{6} M_3.$$

Đặt $\varepsilon_{ij} = u(x_i, y_j) - u_{ij}$, ta nhận được

$$\begin{cases} \ell \varepsilon_{ij} = -R_{ij} \\ \varepsilon_{i0} = 0, \quad \varepsilon_{il} = -r_i^* \end{cases}$$

Sử dụng công thức (9) sau khi biến đổi ta nhận được

$$|\varepsilon_{ij}| \leq j \left(\frac{h^4}{12} M_4 + \frac{h^3}{6} M_3 \right) + \frac{h^4}{12} M_4 (j^2 - j).$$

Nếu điểm lưới $(i; j)$ có tọa độ $(x_0; y_0)$ thì $jh = y_0$ và do đó :

$$|\varepsilon_{ij}| \leq \frac{h^2}{12} (M_4 h + 2M_3) y_0 + \frac{h^2}{12} y_0^2 M_4.$$

3. Phương trình parabolic

Xét phương trình parabolic

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - cu = f, \quad (10)$$

208.208

trong đó a, b, c, f là các hàm hai biến độc lập x, t , xác định trên miền $G = \{-\infty < x < +\infty, t \geq 0\}$, $a > 0$.

Chúng ta phải tìm nghiệm của phương trình (10) trong miền G thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (11)$$

$\varphi(x)$ là hàm đã cho.

Để tìm nghiệm gần đúng của bài toán bằng phương pháp lưới, chúng ta xét lưới chữ nhật được tạo bởi các giao điểm của hai họ đường thẳng song song

$$x = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$t = jl, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Đối với mỗi điểm lưới (i, j) , $j \geq 1$ ta viết phương trình sai phân xấp xỉ phương trình (10) với độ chính xác nào đó.

Tại điểm lưới (x_i, y_j) các đạo hàm được thay tương ứng bằng các biểu thức sai phân

$$\frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h}, \quad \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2}$$

Thay $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)$ bằng một trong ba biểu thức

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{l}, \quad \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1}))}{l}, \quad \frac{u(x_i, t_{i+1}) - u(x_i, t_{i-1}))}{2l}.$$

Sử dụng các công thức này ta có ba dạng xấp xỉ sai phân của phương trình vi phân (10)

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} u_{ij} = & \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{l} - a_{ij} \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} - b_{ij} \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} \\ & - c_{ij} u_{ij} = f_{ij}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^{(2)}_{ij} u_{ij} &\equiv \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{l} - a_{ij} \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} - b_{ij} \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} \\ &\quad - c_{ij} u_{ij} = f_{ij}, \\ \rho^{(3)}_{ij} u_{ij} &\equiv \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l} - a_{ij} \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} - b_{ij} \times \\ &\quad \times \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} - c_{ij} u_{ij} = f_{ij}. \end{aligned} \quad (12)$$

Phương trình sai phân thứ nhất của (12) chứa các giá trị nghiệm tại bốn điểm lưới và xấp xỉ (10) với độ chính xác $O(l + h^2)$.

Phương trình sai phân thứ hai của (12) chứa các giá trị nghiệm tại 4 điểm lưới và xấp xỉ phương trình (10) với độ chính xác $O(l + h^2)$.

Phương trình sai phân thứ ba của (12) chứa các giá trị nghiệm tại 5 điểm lưới và xấp xỉ phương trình (10) với độ chính xác $O(l^2 + h^2)$.

Với $j = 0$, từ điều kiện (11) ta có

$$u_{i0} = \varphi(ih) = \varphi_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ví dụ. Xét bài toán

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (13)$$

Kí hiệu $\alpha = \frac{l}{h^2}$ thì các sơ đồ sai phân (lược đồ sai phân) trong (12) có dạng

$$\begin{cases} u_{ij+1} = (1 - 2\alpha)u_{ij} + \alpha(u_{i+1j} + u_{i-1j}), \\ u_{ij-1} = (1 + 2\alpha)u_{ij} - \alpha(u_{i+1j} + u_{i-1j}), \\ u_{ij+1} = 2\alpha(u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}) + u_{ij-1}. \end{cases} \quad (14)$$

Chọn $\alpha = \frac{1}{2}$ thì các phương trình sai phân này có dạng

$$\begin{cases} u_{ij+1} = \frac{u_{i+1j} + u_{i-1j}}{2} \\ u_{ij-1} = 2u_{ij} - \frac{u_{i+1j} + u_{i-1j}}{2} \\ u_{ij+1} = u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{ij-1}. \end{cases} \quad (15)$$

Chúng ta có thể chứng minh được dãy $\{u_{ij}^{(h)}\}$ về hội tụ đến các giá trị nghiệm của bài toán (13) tại các điểm lưới khi $h \rightarrow 0$.

§2. SỰ ỔN ĐỊNH CỦA LƯỚI ĐỒ SAI PHÂN

Trong mục trước chúng ta đã trình bày phương pháp lưới giải một số bài toán và chứng minh sự hội tụ của các phương pháp này bằng các cách khác nhau.

Mục này chúng ta đưa ra các phương pháp khác chứng minh sự hội tụ của các lược đồ sai phân.

Giả sử G là một miền trong không gian n chiều với biên Γ tạo thành từ một số đoạn Γ_i , $i = 1, \dots, m$ có thể có phần chung hoặc trùng nhau.

Kí hiệu $\mathcal{L}(u)$ và $\ell_i(u)$, $i = 1, \dots, m$ là các toán tử vi phân tuyến tính.

Chúng ta tìm nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) = f \\ \ell_i(u) = \varphi_i, \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

trong miền G , ở đây f là hàm đã cho trong G , φ_i là các hàm đã cho trên Γ_i .

Trong miền đóng $G \cup \Gamma$ với mỗi $h, 0 < h < h_0$, xác định tập hợp các điểm G_h mà chúng ta gọi là lưới.

Toán tử vi phân $\mathcal{L}$ được đặt tương ứng với toán tử sai phân $\mathcal{L}_h$:

Trong đó $\mathcal{L}_h$ biến hàm u_h xác định trên G_h thành hàm $\mathcal{L}_h(u_h)$ xác định trên một tập hợp $\overset{\circ}{G}_h \subset G_h$.

Giả sử rằng mỗi điểm P của miền G trong lân cận của nó với h đủ nhỏ ta tìm được các điểm thuộc G_h và $\overset{\circ}{G}_h$.

Toán tử vi phân ℓ được thay thế bằng toán tử sai phân ℓ_{ih} ; ℓ_{ih} xác định trên $\Gamma_{ih} \subset G_h$ đưa hàm u_h (xác định trên Γ_{ih}) thành hàm $\ell_{ih}(u_h)$ xác định trên $\overset{\circ}{\Gamma}_{ih} \subset \Gamma_{ih}$.

Bài toán (16) được thay bằng lược đồ sai phân

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h(u_h) = f_h, \\ \ell_{ih}(u_h) = \varphi_{ih}, \quad i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (17)$$

trong đó f_h xác định trên $\overset{\circ}{G}_h$ và tại các điểm của $\overset{\circ}{G}_h$ thì $f_h = f$,

φ_{ih} xác định trên $\overset{\circ}{\Gamma}_{ih}$ tương ứng với φ_i (cách tương ứng này phụ thuộc vào cách chuyển các điều kiện biên từ Γ_i vào Γ_{ih}).

Giả sử $\{\varphi_{ih}\}$ thỏa mãn điều kiện : với mỗi φ_{ih} tồn tại u_h sao cho

$$\ell_{ih}(u_h) = \varphi_{ih}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Kí hiệu U và F là lớp các hàm xác định trên G, $\phi_i, i = 1, \dots, m$ là lớp các hàm xác định trên Γ_i sao cho với $u \in U$ xác định được $\mathcal{L}(u)$ và $\ell_i(u)$. Khi đó $\mathcal{L}(u) \in \Gamma$, $\ell_i(u) \in \phi_i$. Giả sử trên U, F, ϕ_i ta

xác định được các chuẩn và kí hiệu $\|u\|_U$, $\|f\|_F$, $\|\varphi\|_{\phi_i}$. Thêm vào đó

mỗi hàm u_h, f_h và φ_{ih} xác định tương ứng trên $G_h, \overset{o}{G}_h, \overset{o}{\Gamma}_{ih}$ đều xác định được các chuẩn $\|u_h\|_{U_h}$, $\|f\|_{F_h}$, $\|\varphi_{ih}\|_{\phi_{ih}}$.

Giả sử $\forall u \in U, f \in F$ ta có

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u\|_{U_h} = \|u\|_U, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|f\|_{F_h} = \|f\|_F$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi_i h\|_{\phi_{ih}} = \|\varphi_i\|_{\phi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Định nghĩa 5.2.1. Lược đồ sai phân (17) gọi là xấp xỉ bài toán (16) trên U nếu với mỗi $u \in U$ ta có

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - \mathcal{L}_h(u)\|_{F_h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\ell_i(u)_{ih} - \ell_{ih}(u)\|_{\phi_{ih}} = 0$$

Với $[\ell_i(u)]_{ih}$ là toán tử chuyển điều kiện biên từ Γ_i sang Γ_{ih} .

Định nghĩa 5.2.2. Ta nói xấp xỉ sai phân có bậc k nếu với mỗi $u \in U$ ta có

$$\|\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}_h(u)\|_{F_h} \leq ch^k$$

$$\|\ell_i(u)_{ih} - \ell_{ih}(u)\|_{\phi_{ih}} \leq c_i h^k, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ở đây các hằng số $c, c_i, i = 1, \dots, m$ không phụ thuộc $h, 0 < h < h_0$.

Định nghĩa 5.2.3. Ta nói lược đồ sai phân (17) là đúng đắn nếu với h đủ nhỏ ($0 < h < h_0$) hai điều kiện sau đây được thỏa mãn :

a) Lược đồ sai phân (17) giải được duy nhất với mọi f_h và $\varphi_{ih}, i = 1, 2, \dots, m$.

b) Nghiệm u_h của lược đồ sai phân (17) phụ thuộc liên tục vào f_h và φ_{ih} tức là

$$\|u_h\|_{U_h} \leq N \|f_h\|_{F_h} + \sum_{i=1}^m N_i \|\varphi_{ih}\|_{\phi_{ih}}, \quad \forall f_h, \varphi_{ih},$$

trong đó N, N_i là các hằng số dương không phụ thuộc h, f_h, φ_{ih} . Khi đó ta cũng nói (17) là ổn định.

Định lý 5.2.1. Giả sử bài toán (16) có nghiệm thuộc U ngoài ra lược đồ sai phân (17) xấp xỉ (16) đúng đắn. Khi đó ta có :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{U_h} = 0.$$

Nếu bậc xấp xỉ là k thì

$$\|u - u_h\|_{U_h} \leq h^k \left(CN + \sum_{i=1}^m N_i C_i \right),$$

và

$$\|u\|_U \leq N \|f\|_F + \sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|_{\phi_i}.$$

Chứng minh. Giả sử $u \in U$ là nghiệm của bài toán (16)

Kí hiệu $\tilde{f} = \mathcal{L}_h(u)$, $\tilde{\varphi}_{ih} = \ell_{ih}(u)$.

Từ điều kiện xấp xỉ, với h đủ nhỏ ta có

$$\|f - \tilde{f}\|_F < \delta, \quad \|\varphi_{ih} - \tilde{\varphi}_{ih}\|_{\phi_{ih}} < \delta.$$

Sử dụng điều kiện được đúng đắn của lược đồ sai phân, với δ đủ nhỏ có

$$\|u_h - u\|_{U_h} < \varepsilon,$$

hay là

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\| = 0.$$

Bây giờ chúng ta đánh giá tốc độ hội tụ.

Ta có

$$\mathcal{L}_h(u_h) = f = \mathcal{L}u,$$

$$\ell_{ih}(u_h) = \varphi_{ih} = [\varphi_i]_{ih} = [\ell_i(u)]_{ih};$$

Kí hiệu $\varepsilon_h = u_h - u$ thì

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}_h(u) &= \mathcal{L}_h(u_h) - \mathcal{L}_h(u) \\ &= \mathcal{L}_h(\varepsilon_h),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\ell_i(u)]_{ih} - \ell_{ih}(u) &= \ell_{ih}(u_h) - \ell_{ih}(u) \\ &= \ell_{ih}(\varepsilon_h).\end{aligned}$$

Vì xấp xỉ sai phân có bậc k nên

$$\|\mathcal{L}_h(\varepsilon_h)\|_{F_h} \leq ch^k, \quad \|\ell_{ih}(\varepsilon_h)\|_{\phi_{ih}} \leq c_i h^k.$$

Do lược đồ sai phân đúng đắn, rút ra :

$$\|u_h\|_{U_h} \leq N \|\mathcal{L}_h(u_h)\|_{F_h} + \sum_{i=1}^m N_i \|\ell_{ih}(u_h)\|_{\phi_{ih}}.$$

Nếu đặt $u_h = \varepsilon_h$ và sử dụng đánh giá đối với ε_h ta có được đánh giá về tốc độ hội tụ.

§3. PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp đường thẳng giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng cũng như phương pháp lưới ; nghĩa là thay các đạo hàm trong phương trình tại các điểm lưới bằng biểu thức sai phân. Nhưng ở phương pháp đường thẳng ta không thay tất cả các đạo hàm mà chỉ thay đạo hàm theo một biến độc lập.

Từ kết quả thay thế này hệ phương trình nhận được không phải là hệ phương trình đại số như ở phương pháp lưới mà là hệ các phương trình vi phân thường (trong trường hợp hai biến độc lập). Nghiệm của hệ này được coi là nghiệm gần đúng của bài toán ban đầu trên các đường thẳng song song.

1. Phương trình Poisson

Giả sử chúng ta cần giải phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x; y), \quad (x; y) \in G \quad (18)$$

với

$$\begin{cases} u(x, y_0) = \varphi_0(x), & u(x, y_0 + Y) = \varphi_1(x), & x_0 \leq x \leq x_0 + X \\ u(x_0, y) = \psi_0(y), & u(x_0 + X, y) = \psi_1(y), & y_0 \leq y \leq y_0 + Y, \end{cases} \quad (19)$$

$$G = \{(x, y) \mid x_0 \leq x \leq x_0 + X, y_0 \leq y \leq y_0 + Y\},$$

$\varphi_i(x), \psi_i(y), i = 0, 1$ là các hàm đã cho.

Trên đoạn $[y_0, y_0 + Y]$ lấy các điểm

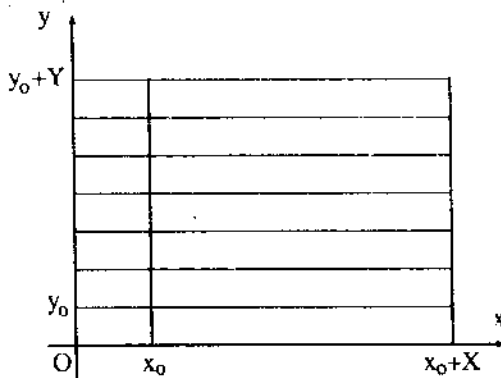
$$y_j = y_0 + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n;$$

$$h = \frac{Y}{n+1};$$

Kẻ các đường thẳng $y = y_j$.

Giả sử bài toán (18), (19) có nghiệm đủ trơn.

Trong phương trình (18) thay $y = y_j, j = 1, 2, \dots, n$ và



Hình 5.4

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=y_j} = \frac{1}{h^2} [u(x, y_{j+1}) - 2u(x, y_j) + u(x, y_{j-1})] + O(h^2),$$

ta có

$$\begin{cases} U_j''(x) + \frac{1}{h^2} [U_{j+1}(x) - 2U_j(x) + U_{j-1}(x)] = f_j(x), \\ U_0(x) = \varphi_0(x), \quad U_{n+1}(x) = \varphi_1(x), \\ U_j(x_0) = \psi_0(y_j), \quad U_j(x_0 + X) = \psi_1(y_j). \end{cases} \quad (20)$$

Bài toán (20) xấp xỉ bài toán (18) bậc $O(h^2)$.

Xét bài toán thuần nhất tương ứng

$$\begin{cases} U_j''(x) + \frac{1}{h^2} [U_{j+1}(x) - 2U_j(x) - U_{j-1}(x)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ U_0(x) = U_{n+1}(x) = 0. \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán này tìm được dưới dạng

$$U_j(x) = \gamma(j)v(x).$$

Khi đó ta có :

$$\begin{cases} \gamma(j)v''(x) + \frac{1}{h^2} v(x) [\gamma(j+1) - 2\gamma(j) + \gamma(j-1)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \gamma(0) = \gamma(n+1) = 0, \end{cases}$$

rút ra

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{\gamma(j+1) - 2\gamma(j) + \gamma(j-1)}{-h^2 \gamma(j)} = \delta^2 = \text{const}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Như vậy} \quad v''(x) - \delta^2 v(x) = 0, \quad (21)$$

$$\begin{cases} \gamma(j+1) - (2 - h^2 \delta^2) \gamma(j) + \gamma(j-1) = 0 \\ \gamma(0) = \gamma(n+1) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Nghiệm của các phương trình (22) tìm dưới dạng

$$\gamma(j) = c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j,$$

với λ_1, λ_2 là nghiệm của phương trình

$$\lambda^2 - (2 - h^2 \delta^2) \lambda + 1 = 0.$$

Từ phương trình thứ hai của (22) ta có

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_2 = -c_1,$$

$$c_1 \lambda_1^{n+1} + c_2 \lambda_2^{n+1} = c_1 (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) = 0,$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{n+1} = 1, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt[n+1]{1} = e^{\frac{2\pi i k}{n+1}}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Vì $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ nên

$$\lambda_1^2 = e^{\frac{2\pi i k}{n+1}}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} = e^{\frac{\pi i k}{n+1}}.$$

$$\text{Do vậy } 2 - h^2 \delta^2 = \lambda_1 + \lambda_2 = e^{\frac{\pi i k}{n+1}} + e^{-\frac{\pi i k}{n+1}} = 2 \cos \frac{\pi k}{n+1}.$$

Từ đó

$$\delta_k^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k}{2(n+1)} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi(y_k - y_0)}{2Y}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$\gamma_k(j) = c_1 \left(e^{\frac{\pi i k j}{n+1}} - e^{-\frac{\pi i k j}{n+1}} \right), \quad \gamma_k(j) = c \sin \frac{\pi k(y_j - y_0)}{Y}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Nghiệm (21) có dạng

$$v_k(x) = A_k e^{\delta_k x} + B_k e^{-\delta_k x}.$$

Như thế chúng ta đã tìm được n nghiệm độc lập tuyến tính của bài toán thuần nhất.

$$U_{j,k}(x) = (A_k e^{\delta_k x} + B_k e^{-\delta_k x}) \sin \frac{\pi k(y_j - y_0)}{Y}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Nghiệm tổng quát của bài toán thuần nhất :

$$U_j(x) = \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{Y} (y_j - y_0) (A_k e^{\delta_k x} + B_k e^{-\delta_k x}),$$

A_k, B_k là những hằng số tùy ý.

Sử dụng phương pháp biến thiên các hằng số ta có thể xác định được nghiệm của bài toán không thuần nhất.

2. Phương trình dao động con lắc

Tìm nghiệm của phương trình dao động con lắc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (23)$$

trong miền $G = \{(x, t), 0 \leq x \leq X, 0 \leq t\}$, thỏa mãn các điều kiện :

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi_1(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x), & 0 \leq x \leq X, \\ u(0, t) = \psi_1(t), u(X, t) = \psi_2(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (24)$$

trong đó $\varphi_i(x), 0 \leq x \leq X, i = 1, 2, \psi_i(t), t \geq 0, i = 1, 2$ là các hàm đã cho.

Chọn hệ đường thẳng song song $x = x_k = kh, k = 0, 1, \dots, n+1,$

$$h = \frac{X}{n+1}.$$

Sử dụng công thức

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_k} \approx \frac{u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t))}{h^2};$$

Để giải gần đúng (23), (24) bằng phương pháp đường thẳng ta giải bài toán sau

$$\begin{cases} U_k''(t) - \frac{1}{h^2}[U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] = f_k(t), \\ U_0(t) = \psi_1(t), U_{n+1}(t) = \psi_2(t) \\ U_k(0) = \varphi_1(x_k) = \varphi_{1k}, U_k'(0) = \varphi_2(x_k) = \varphi_{2k}, \\ k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Bài toán này xấp xỉ bài toán (23), (24) bậc h^2 .

2020.09.08
2020.09.08

Xét hệ thuần nhất tương ứng

$$\begin{cases} U_k''(t) - \frac{1}{h^2} [U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] = 0 \\ U_0(t) = 0, U_{n+1}(t) = 0. \end{cases}$$

Nghiệm riêng của hệ phương trình này tìm dưới dạng

$$U_k(t) = \gamma(k) v(t).$$

Khi đó

$$\begin{cases} v''(t) \gamma(k) - \frac{v(t)}{h^2} [\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ \gamma(0) = \gamma(n+1) = 0, \end{cases}$$

hay là

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)}{h^2 \gamma(k)} = -\delta^2 = \text{const.}$$

Để tìm $\gamma(k)$ ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \gamma(k+1) - (2 - h^2 \delta^2) \gamma(k) + \gamma(k-1) = 0, \\ \gamma(0) = \gamma(n+1) = 0. \end{cases}$$

Phương trình này trùng với (22). Khi đó có nghiệm

$$\gamma_s(k) = C \sin \frac{\pi s x_k}{X}, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

và
$$\delta^2 = \delta_s^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{2X} x_s, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Để xác định v_t ta giải phương trình

$$v''(t) + \delta_s^2 v(t) = 0,$$

rút ra
$$v_s(t) = A_s \cos \delta_s t + B_s \sin \delta_s t.$$

Vậy
$$U_k(t) = \sin \frac{\pi s x_k}{X} (A_s \cos \delta_s t + B_s \sin \delta_s t).$$

Nghiệm tổng quát của bài toán thuần nhất xác định bởi :

$$U_k(t) = \sum_{s=1}^n \sin \frac{\pi s x_k}{X} (A_s \cos \delta_s t + B_s \sin \delta_s t),$$

A_s, B_s là các hằng số tùy ý.

Bằng phương pháp biến thiên hằng số có thể xác định nghiệm tổng quát của bài toán không thuần nhất.

3. Phương trình truyền nhiệt

Tìm nghiệm của phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (25)$$

trong miền $G = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq X, t \geq 0\}$, thỏa mãn

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq X \\ u(0, t) = \psi_1(t), u(X, t) = \psi_2(t), t \geq 0, \end{cases} \quad (26)$$

trong đó $\varphi(x), 0 \leq x \leq X; \psi_i(t), i = 1, 2, t \geq 0$ là các hàm đã cho.

Chúng ta đưa vào họ các đường thẳng song song

$$x = x_k = kh, k = 0, 1, \dots, n+1, h = \frac{X}{n+1}.$$

Sử dụng :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_k} \approx \frac{u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t))}{h^2}$$

Khi đó bài toán (25), (26) được xấp xỉ bởi :

$$\begin{cases} U'_k(t) - \frac{1}{h^2} [U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] = f_k(t) \\ U_k(0) = \varphi(x_k) = \varphi_k, k = 1, 2, \dots, n \\ U_0(t) = \psi_1(t), U_{n+1}(t) = \psi_2(t). \end{cases}$$

Bài toán này xấp xỉ bậc h^2 với bài toán đã cho.

Nghiệm của hệ phương trình này tìm dưới dạng :

$$U_k(t) = \gamma(k)v(t).$$

Để xác định $\gamma(t)$ ta cũng phải giải phương trình sai phân (20) ;

Từ
$$\frac{v'(t)}{v(t)} = -s^2, \text{ Ta có } v_s(t) = C_s e^{-s^2 t}$$

Nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất

$$U_k(t) = \sum_{s=1}^n C_s \sin \frac{\pi s x_k}{X} e^{-\delta_s^2 t}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

với
$$\delta_s^2 = \frac{4 \sin^2 \frac{\pi x_s}{2X}}{h^2}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Từ đó chúng ta có thể tìm được nghiệm của hệ phương trình không thuần nhất.

4. Ước lượng sai số

Chúng ta sẽ ước lượng sai số của phương pháp đường thẳng đối với phương trình truyền nhiệt. Tương tự có thể ước lượng sai số đối với các bài toán khác đã xét trong mục này.

Giả sử rằng bài toán (25), (26) có nghiệm và nghiệm này có đạo hàm liên tục bậc 4 theo x .

Ta có
$$u'(t, x_k) - \frac{1}{h^2} [u(t, x_{k+1}) - 2u(t, x_k) + u(t, x_{k-1})]$$

$$= f_k(t) + R_k(t),$$

$$u(0, x_k) = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$u(t, x_0) = \psi_1(t), \quad u(t, x_{n+1}) = \psi_2(t),$$

Với
$$R_k(t) = O(h^2).$$

Kí hiệu
$$\varepsilon_k(t) = u(t, x_k) - U_k(t),$$

ta có

$$\begin{cases} \varepsilon'_k(t) - \frac{1}{h^2} [\varepsilon_{k+1}(t) - 2\varepsilon_k(t) + \varepsilon_{k-1}(t)] = R_k(t) \\ \varepsilon_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \varepsilon_0(t) = \varepsilon_{n+1}(t) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Sử dụng công thức

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \Delta \delta_k = - \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k+1} \Delta \varepsilon_k, \quad \Delta \varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k;$$

Vì $\varepsilon_0 = \varepsilon_{n+1} = 0$ nên

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \Delta \delta_k = - \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{k+1} \Delta \varepsilon_k.$$

Đặt $\delta_k = \Delta \varepsilon_{k-1}$, ta có

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \Delta^2 \varepsilon_{k-1} = - \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta \varepsilon_k)^2. \quad (28)$$

Nhân hệ (27) với $\varepsilon_k(t)$

$$\frac{1}{2} [\varepsilon_k^2(t)]' - \frac{\Delta^2 \varepsilon_{k-1}(t)}{h} \times \varepsilon_k(t) = R_k(t) \varepsilon_k(t),$$

rút ra

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t) \right]' - \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k(t) \Delta^2 \varepsilon_{k-1}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} R_k(t) \varepsilon_k(t).$$

Theo (27) ta có :

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t) \right]' + \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{n-1} [\Delta \varepsilon_k(t)]^2 = \sum_{k=1}^{n-1} R_k(t) \varepsilon_k(t).$$

Khi đó

$$\left[\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t) \right] \leq 2 \sum_{k=1}^{n-1} R_k(t) \varepsilon_k(t) \leq \sum_{k=1}^{n-1} R_k^2(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t),$$

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq E(t) + R, \quad E(0) = 0,$$

$$E(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t), \quad R = \max_t \sum_{k=1}^{n-1} R_k^2(t).$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{dE}{dt} - E \right) e^{-t} \leq R e^{-t}, \quad \frac{d[e^{-t} E(t)]}{dt} \leq R e^{-t},$$

$$e^{-t} E(t) \leq R(1 - e^{-t}), \quad E(t) \leq R(e^t - 1).$$

$$\text{Vậy } \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t) \leq (e^t - 1) \sum_{k=1}^{n-1} \max_t R_k^2(t) \leq C(e^t - 1) h^3,$$

với $C = \text{const.}$

Sau đây chúng ta lấy một vài ví dụ sử dụng chương trình Maple V giải các phương trình đạo hàm riêng.

Để giải phương trình đạo hàm riêng, chúng ta vào chức năng Insert/Excution/After Cursor để có cụm xử lý với dấu nhắc "[>", vào lệnh restart, nạp "gói công cụ" để giải bằng lệnh with(DE tools).

Ví dụ 1. Giải phương trình đạo hàm riêng

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

- Gán tên pde cho phương trình cần giải
 $[> \text{pde} := D[1](z)(x,y) + D[2](z)(x,y) = 0;$
- Giải hệ phương trình bằng lệnh
 $[> \text{pdesolve}(\text{pde}, z(x,y));$

$$z(x,y) = F_1(y-x)$$

(trong đó F_1 là một hàm bất kỳ).

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x;$$

```
[> pde := D[1,1] (u) (x,y) - D[2,2] (u) (x,y) = x ;
```

```
[> pdesolve (pde, u(x,y)) ;
```

$$u(x, y) = \frac{1}{6}x^3 + F_1(y+x) + F_2(y-x),$$

Với F_1, F_2 là các hàm bất kì ;

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \sin(x+y);$$

```
[> pde := D[1] (z) (x,y) + D[2] (z) (x,y) = sin(x + y) ;
```

```
[> pdesolve (pde, z(x,y)) ;
```

$$z(x, y) = \sin(y) \sin(x) + F_1(y-x).$$

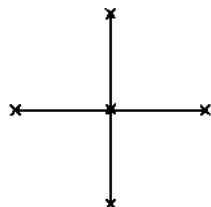
BÀI TẬP

Sai phân hóa các bài toán biên sau đây đồng thời ước lượng cấp xấp xỉ của phương trình sai phân (theo các lược đồ cho bên cạnh).

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) = t^2 x$$

$$G = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$$

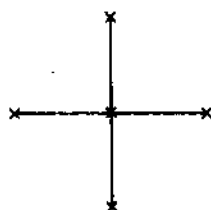
$$u(x, t) \big|_{\Gamma} = 2t + x, \text{ lưới vuông } h = 1.$$



$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$G = \{(x, t) \mid x^2 + t^2 \leq 1\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ lưới vuông } h = l.$$



3. Sử dụng phương pháp lưới, giải phương trình Poisson

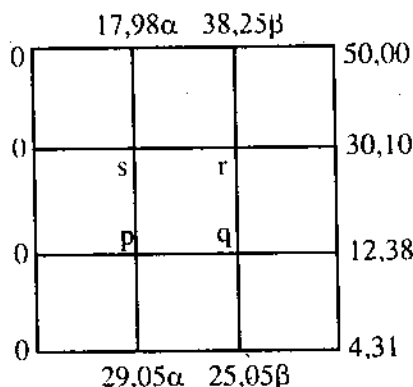
$$\Delta u = -1, (x, y) \in \Omega \text{ (}\Omega \text{ là hình vuông cạnh 1),}$$

với $u = 0, (x, y) \in \Gamma$ (Γ biên của Ω),

chọn bước $h = \frac{1}{4}$.

4. Áp dụng phương pháp lưới xác định nghiệm của phương trình Laplace tại điểm p, q, r, s của hình vuông với điều kiện biên được chỉ ra trên hình 5.5, chọn $\alpha = 0,9$, $\beta = 1,01 + 0,01n$,

$n = 0, 1, 2, 3, 4$.



Hình 5.5

5. Nghiên cứu sự hội tụ của nghiệm của lược đồ sai phân

$$\frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{l} = (1 - \theta) \frac{u_{m-1,n+1} - 2u_{m,n+1} + u_{m+1,n+1}}{h^2} + \theta \frac{u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}}{h^2},$$

$$u_{m0} = \Psi(x_m), u_{0n} = 0, u_{Mn} = 0,$$

$m = 1, \dots, M - 1, n = 0, 1, \dots, N - 1, Mh = 1, Nl = T$, tới nghiệm của bài toán

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = \Psi(x), \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\text{với } x_m = mh, \quad t_n = n\tau, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

6. Nghiên cứu sự hội tụ của nghiệm của lược đồ sai phân

$$\frac{u_{mn} - u_{m,n-1}}{\tau} = A \frac{u_{m+1,n} - u_{m-1,n}}{2h} + \varphi(x_m, t_n),$$

$$u_{m0} = \psi(x_m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$n = 1, \dots, N; \quad N\tau = T,$$

tới nghiệm của bài toán

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \Psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

7. Tìm nghiệm của phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,08,$$

$$\text{thỏa mãn điều kiện } u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 0,5 + t, \quad 0 \leq t \leq 0,08,$$

$$u(x, 0) = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \text{ tại các điểm } x = 0, 2m, m = 0, 1, \dots, 5, t = 0,08:$$

a) Theo lược đồ sai phân hiện, lấy $h = 0,2$; $\tau = 0,02$;

b) Theo lược đồ sai phân ẩn, lấy $h = 0,2$; $\tau = 0,08$.

8. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

thỏa mãn điều kiện

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = \varphi(t), \quad u(1, t) = \psi(t),$$

với $0 \leq t \leq T$, theo đối số x , chọn bước $h = 0,1$, trong đó sử dụng công thức đầu tiên của (15)

$$u_{ij+1} = \frac{u_{i+1j} + u_{i-1j}}{2}.$$

Các điều kiện cụ thể

$$f(x) = (ax^2 + b)\sin \pi x, \quad \varphi(t) = \psi(t) = 0, \quad T = 0,02, \quad a = 1,1; b = 1,1.$$

9. Tìm nghiệm của bài toán

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{4x}{x^2 + 2t + 1} \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$0 \leq x \leq 1, t > 0,$$

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1}, \quad u(1,t) = \frac{1}{2(t+1)}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{x^2 + 0,1}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

tại điểm (x_m, T) , $x_m = 0,1m$ ($m = 0, 1, \dots, 10$, $T = 0,1$) với độ chính xác $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

10. Sử dụng phương pháp lưới, tìm nghiệm $u(x, t)$ của bài toán

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (-\alpha^2 t + 1)e^{-\alpha x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,01;$$

$$u(0, t) = t, \quad u(1, t) = te^{-\alpha}, \quad 0 \leq t \leq 0,01, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$\alpha = 0,5k$, $k = 1, \dots, 6$, với $t = 0,01$ với độ chính xác 0,001, nếu biết

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| \leq 0,02, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| \leq 6.$$

Tìm nghiệm của các bài toán sau trên lưới (x_m, t_n) , với $x_m = 0,1m$, $t_n = 0,1n$; $m, n = 0, 1, \dots, 10$:

$$11. \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2(\alpha^2 - 1)}{(x + \alpha t + 1)^3}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(0,t) = \frac{1}{\alpha t + 1}, \quad u(1,t) = \frac{1}{\alpha t + 2}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\frac{\alpha}{(1+x)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\alpha = 0,5 + 0,1k, \quad k = 0, 1, \dots, 10.$$

$$12. \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(0,t) = \frac{1}{t + \alpha}, \quad u(1,t) = \frac{1}{t + \alpha + 1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x,0) = \frac{1}{x + \alpha}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -\frac{1}{(x + \alpha)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\alpha = 0,5 + 0,1k, \quad k = 1, 2, \dots, 10.$$

$$13. \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

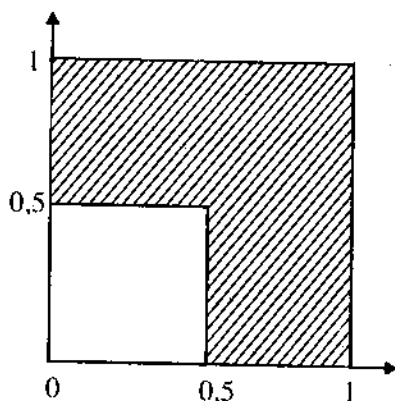
$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \pi \sin \pi x,$$

$$0 \leq x \leq 1.$$

14. Hãy dựng lược đồ sai phân xấp xỉ bài toán



Hình 5.6

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \varphi(x,y) \quad (x,y) \in G, \quad u|_{\Gamma} = 0,$$

G và Γ là miền và biên của nó biểu diễn bằng miền gạch sọc ở hình 5.6

Tìm nghiệm của các bài toán biên sau đây trên lưới (x_m, y_n) ,
 $x_m = 0,2m, y_n = 0,2n$:

$$15. \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 4, \quad 0 \leq x \leq 0,8, \quad 0 \leq y \leq 0,8,$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad u(x, 0,8) = x^2 + 0,64, \quad 0 \leq x \leq 0,8,$$

$$u(0, y) = y^2, \quad u(0,8, y) = y^2 + 0,64, \quad 0 \leq y \leq 0,8.$$

$$16. \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 2(1+a),$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad u(0, y) = \alpha y^2, \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad u|_{\Gamma} = (1-\alpha)x^2 + \alpha,$$

Γ là phần của hình tròn $x^2 + y^2 = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0$; $\alpha = 0,3k$,
 $k = 1, 2, \dots, 10$.

17. Hãy tìm nghiệm của các bài toán Dirichlet tại các điểm
 $(0,2m; 0,2n) \in \bar{G}$

$$a) \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad u(M)|_{M \in \Gamma} = 2(x^2 - 1);$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 4, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad u(M)|_{M \in \Gamma} = 2y,$$

$$c) \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 4, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad u(M)|_{M \in \Gamma} = 2xy;$$

Chương VI

GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN

§1. PHƯƠNG PHÁP LẬP ĐƠN

Xét phương trình tích phân phi tuyến

$$y(z) = \lambda \int_a^b K[x, s; y(s)] + f(x). \quad (1)$$

Các nghiệm gần đúng của phương trình (1) được xây dựng như sau:

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K[x, s; y_{n-1}(s)] ds + f(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

trong đó $y_0(x)$ là hàm số liên tục tùy ý. Ta có định lý sau :

Định lý 6.1.1. Giả sử hàm liên tục $K(x, s; y)$ ($a \leq x, s \leq b$, $-\infty < y < +\infty$) thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo y :

$$|K(x, s; \bar{y}) - K(x, s; y)| \leq L |\bar{y} - y|, \quad (a \leq x, s \leq b, -\infty < y, \bar{y} < \infty)$$

Ngoài ra $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và

$$|\lambda| < \frac{1}{L(b-a)}.$$

Khi đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $y^*(x)$ xác định trên $[a, b]$ và nghiệm này là giới hạn của các xấp xỉ (2). Tốc độ hội tụ được xác định bởi bất đẳng thức

$$|y_n(x) - y^*(x)| \leq q^n \max_{a \leq x \leq b} |y_0(x) - y^*(x)|, \quad (3)$$

trong đó $q = |\lambda|(b-a)L$.

Chứng minh. Đặt

$$X = C_{[a,b]}, \quad T(y) = \lambda \int_a^b K[x,s; y(s)] ds + f(x).$$

Ta có

$$\begin{aligned} |T(\bar{y}) - T(y)| &= |\lambda| \left| \int_a^b \{K[x,s; \bar{y}(s)] - K[x,s; y(s)]\} ds \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \int_a^b |K[x,s; \bar{y}(s)] - K[x,s; y(s)]| ds \leq \\ &\leq L |\lambda| \int_a^b |\bar{y}(s) - y(s)| ds \leq L |\lambda| (b-a) \|\bar{y} - y\| \\ \|T(\bar{y}) - T(y)\| &\leq q \|\bar{y} - y\|. \quad \square \end{aligned}$$

Áp dụng định lí 1.1 ta có đ.p.c.m. $\square$

Định lí 6.1.2. Giả sử hàm liên tục $K(x, s; y)$ ($a \leq x, s \leq b$, $|y - y_0| \leq r$) thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo y

$$|K(x,s; \bar{y}) - K(x,s; y)| \leq L |\bar{y} - y| \quad (a \leq x, s \leq b, |y - y_0| \leq r).$$

Ngoài ra $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, $|y_0(x) - y_0| \leq r$ và

$$|\lambda| \leq \frac{1}{(b-a)L}, \quad |\lambda| (b-a)M + \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - y_0| \leq r.$$

Khi đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $y^*(x)$ ($|y^*(x) - y_0| \leq r$) xác định trên $[a, b]$ và nghiệm này là giới hạn của các xấp xỉ (2). Tốc độ hội tụ được xác định bởi bất đẳng thức (3).

Chứng minh. Đặt

$$X = C_{[a,b]}, \quad S = \{y(x) \in C_{[a,b]} ; \|y - y_0\| \leq r\}$$

$$T(y) = \lambda \int_a^b K[x, s; y(s)] ds + f(x).$$

Ta chứng minh rằng toán tử T tác động trong S . Giả sử $y(x) \in S$. Khi đó

$$\begin{aligned} |T(y) - y_0| &\leq \lambda \int_a^b |K[x, s; y(s)]| ds + |f(x) - y_0| \leq \\ &\leq \lambda (b-a)M + \|f - y_0\| \end{aligned}$$

trong đó $M = \max_{\substack{a \leq x, s \leq b \\ |y - y_0| \leq r}} |K(x, s; y)|$

Từ điều kiện của định lý ta có

$$\|T(y) - y_0\| \leq r.$$

Áp dụng định lý 1.2 ta có đ.p.c.m $\square$

Bây giờ ta xét phương trình phi tuyến Volterra :

$$y(x) = \lambda \int_a^x K[x, s; y(s)] ds + f(x) \quad (4)$$

Định lý 6.1.3. Giả sử hàm liên tục $K(x, s; y)$ ($a \leq x, s \leq b$, $-\infty < y < \infty$) thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo y :

$$|K(x, s; \bar{y}) - K(x, s; y)| \leq L |\bar{y} - y| \quad (a \leq x, s \leq b, -\infty < y, \bar{y} < \infty)$$

Khi đó phương trình (4) có nghiệm duy nhất $y^*(x)$ xác định trên $[a, b]$ và $y^*(x)$ là giới hạn của dãy $y_n(x)$:

$$y_n(x) = \lambda \int_a^x K[x, s; y_{n-1}(s)] ds + f(x), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

trong đó $y_0(x)$ là hàm liên tục tùy ý trên đoạn $[a, b]$.

Tốc độ hội tụ được xác định bởi bất đẳng thức

$$|y_n(x) - y^*(x)| \leq q^{n/k} \max_{a \leq x \leq b} |y_0(x) - y^*(x)|,$$

trong đó $q = \frac{[\|\lambda\| L(b-a)]^k}{k!} < 1$ với k đủ lớn.

Chứng minh.

Ta đặt

$$X = C_{[a,b]}, \quad A(y) = \lambda \int_a^x K[x,s; y(s)] ds + f(x)$$

Ta chứng minh rằng

$$\|A^k(\bar{y}) - A^k(y)\| \leq \frac{[\|\lambda\| L(b-a)]^k}{k!} \|\bar{y} - y\|$$

Ta có

$$|A(\bar{y}) - A(y)| \leq \|\lambda\| \int_a^x |K[x,s; \bar{y}(s)] - K[x,s; y(s)]| ds \leq$$

$$\leq \|\lambda\| L \int_a^x |\bar{y}(s) - y(s)| ds \leq \|\lambda\| L \|\bar{y} - y\| (x-a),$$

$$|A^2(\bar{y}) - A^2(y)| \leq \|\lambda\| L \int_a^x |A[\bar{y}(s)] - A[y(s)]| ds \leq$$

$$(\|\lambda\| L)^2 \frac{(x-a)^2}{2!} \|\bar{y} - y\|$$

Tiếp tục quá trình này ta được

$$\|A^k(\bar{y}) - A^k(y)\| \leq \frac{[\|\lambda\| L(b-a)]^k}{k!} < 1.$$

Áp dụng định lý 1.1.1 cho ánh xạ co A^k , suy ra tồn tại duy nhất y^* sao cho $A^k y^* = y^*$. Ta lại có $A^k(A(y^*)) = A(A^k(y^*)) = Ay^*$.

Suy ra $Ay^* = y^*$. Phần đánh giá tốc độ hội tụ dành cho độc giả. □

§2. PHƯƠNG PHÁP NEWTON – KANTOROVICH

Xét phương trình tích phân

$$y(x) = \int_a^b K[x, s; y(s)] ds \quad (5)$$

trong đó $K(x, s; y)$ ($a \leq x, s \leq b, |y - y_0| \leq r$) liên tục theo ba biến và có đạo hàm bậc hai theo y liên tục. Ta áp dụng phương pháp Newton – Kantorovich để giải phương trình trên.

Đặt

$$P(y) = y(x) - \int_a^b K[x, s; y(s)] ds.$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng

$$P'[y^*(x)]y(x) = y(x) - \int_a^b K'_y[x, s; y^*(s)]y(s) ds,$$

$$P''[y^*(x)]y(x)z(x) = - \int_a^b K''_{y^2}[x, s; y^*(s)]y(s)z(s) ds,$$

Để tìm $\Gamma_0 z = P'(y_0(x))^{-1} z$ ta phải giải phương trình tích phân tuyến tính *Fredholm* loại II

$$y(x) = \int_a^b K'_y[x, s; y_0(s)]y(s) ds + z(x)$$

Giả sử hạch

$$K(x, s) = K'_y[x, s; y_0(s)]$$

có giải thức là $R(x, s)$ và

$$\int_a^b R(x, s) |ds| \leq R_0 \quad (6)$$

Khi đó

$$y(x) = \Gamma_0 z(x) = z(x) + \int_a^b R(x,s)z(s)ds$$

$$\|\Gamma_0\| \leq 1 + R_0$$

Ta có định lí sau đây :

Định lí 6.2.1. Giả sử hàm $K(x, s; y)$ ($a \leq x, s \leq b, |y - y_0| \leq r$) liên tục theo ba biến số và có đạo hàm bậc hai theo y liên tục, ngoài ra, các điều kiện sau đây được thỏa mãn

$$1) \text{ Hạch } K(x, s) = K'_y[x, s; y_0(s)]$$

có giải thức $R(x, s)$ thỏa mãn điều kiện(6)

$$2) h = (1 + R_0)^2 (b - a) K_0 K_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} (1 + R_0) K_0 \leq r,$$

trong đó

$$K_0 = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b K[x, s; y_0(s)] ds - y_0(x) \right|$$

$$K_2 = \max_{a \leq x \leq b, |y - y_0| \leq R} \int_a^b |K''_{yy^2}(x, s; y)| ds.$$

Khi đó tồn tại nghiệm y^* của phương trình (5), dãy $y_n(x)$ được xây dựng theo phương pháp Newton - Kantorovich hoặc dãy $z_n(x)$ được xây dựng theo phương pháp Newton - Kantorovich cải biên hội tụ tới nghiệm đó.

Trong đó

$$y_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^b K[x, s; y_n(s)] ds - \int_a^b R_n(x, s) y_n(s) ds +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_a^b R_n(x,s)f(s)ds + \int_a^b R_n(x,s) \left(\int_a^b K[s,t,y_n(t)]dt \right) ds \\
 z_{n+1}(x) = & f(x) + \int_a^b K[x,s;z_n(s)]ds - \int_a^b R(x,s)z_n(s)ds + \\
 & + \int_a^b R(x,s)f(s)ds + \int_a^b R(x,s) \left(\int_a^b K(s,t,z_n(t))dt \right) ds.
 \end{aligned}$$

Tốc độ hội tụ được xác định tương ứng bởi các công thức

$$\|y_n(x) - y^*(x)\| \leq \frac{1}{2^n} (2h)^{2^n} \frac{\eta}{h},$$

$$\|z_n(x) - y^*(x)\| \leq \frac{\eta}{h} (1 - \sqrt{1-2h})^{n+1} \left(h < \frac{1}{2} \right),$$

trong đó

$$\eta = (1 + R_0)K_0, \quad h = (1 + R_0)^2(b-a)K_0K_2.$$

ở đây $R_n(x,s)$ là kí hiệu giải thức của hạch $K'_y[x,s;y_n(s)]$. Để chứng minh định lý trên ta chỉ cần kiểm tra các điều kiện nêu trong phương pháp Newton - Kantorovich (xem [13]).

§3. PHƯƠNG PHÁP HẠCH SUY BIẾN

Xét phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại II.

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x) \quad (7)$$

Ta xét trường hợp khi $K(x,s)$ là hạch suy biến và trường hợp khi hạch $K(x,s)$ có thể xấp xỉ bởi một hạch suy biến.

Định nghĩa 6.3.1. Nếu hạch của phương trình tích phân được biểu diễn dưới dạng

$$K(x,s) = K_n(x,s) = \sum_{i=1}^n A_i(x)B_i(s), \quad (a \leq x, s \leq b)$$

thì ta nói hạch $K_n(x,s)$ là hạch suy biến. Ở đây $\{A_i(x)\}, \{B_i(x)\}$ ($i = \overline{1,n}$) được giả thiết là các hệ độc lập tuyến tính trong không gian $C[a, b]$.

1. Phương trình tích phân tuyến tính với hạch suy biến.

Xét phương trình tích phân

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K_n(x,s) y_n(s) ds + f(x) \quad (8)$$

trong đó $K_n(x,s)$ là một hạch suy biến ; $K_n(x,s) = \sum_{i=1}^n A_i(x) B_i(s)$.

Thay hạch $K_n(x,s)$ có biểu diễn trên vào (8) ta có

$$y_n(x) = \lambda \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b B_i(s) y_n(s) ds \right) A_i(x) + f(x) \quad (9)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (8) dưới dạng sau đây

$$y_n(x) = \lambda \sum_{i=1}^n C_i A_i(x) + f(x) \quad (10)$$

trong đó C_i ($i = \overline{1,n}$) là các hằng số cần phải xác định.

Thay (10) vào (9) ta có

$$\lambda \sum_{i=1}^n C_i A_i(x) + f(x) = \lambda \sum_{i=1}^n A_i(x) \int_a^b B_i(s) \left[\lambda \sum_{j=1}^n C_j A_j(s) + f(s) \right] ds + f(x)$$

$$\sum_{i=1}^n C_i A_i(x) =$$

$$\lambda \sum_{i=1}^n A_i(x) \int_a^b B_i(s) \left(\sum_{j=1}^n C_j A_j(s) \right) ds + \sum_{i=1}^n A_i(x) \int_a^b B_i(s) f(s) ds,$$

$$\sum_{i=1}^n C_i A_i(x) = \lambda \sum_{i=1}^n A_i(x) \sum_{j=1}^n C_j \left(\int_a^b B_i(s) A_j(s) ds \right) + \sum_{i=1}^n A_i(x) \left(\int_a^b B_i(s) f(s) ds \right).$$

Từ tính chất độc lập tuyến tính của hệ $\{A_i(x)\}$ ($i = \overline{1, n}$), ta có

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} C_j = \beta_i \quad (i = \overline{1, n}) \quad (11)$$

$$\text{trong đó } \alpha_{ij} = \int_a^b B_i(s) A_j(s) ds, \quad \beta_i = \int_a^b B_i(s) f(s) ds.$$

Giả sử định thức của hệ (11)

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \dots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1 - \lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \dots & 1 - \lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

khác không. Khi đó hệ (11) có nghiệm duy nhất. Ta kí hiệu nghiệm của hệ này là $C_1^*, \dots, C_n^*$ thì

$$y_n^*(x) = \lambda \sum_{i=1}^n C_i^* A_i(x) + f(x)$$

là nghiệm của phương trình (8).

Ta lại có

$$C_i^* = \frac{D_i}{D} \quad (i = \overline{1, n})$$

trong đó D_i có dạng sau

$$D_i = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \dots & -\lambda\alpha_{1i-1} & \beta_1 - \lambda\alpha_{1i+1} & \dots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1 - \lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda\alpha_{2i-1} & \beta_2 - \lambda\alpha_{2i+1} & \dots & -\lambda\alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \dots & -\lambda\alpha_{ni-1} & \beta_n - \lambda\alpha_{ni+1} & \dots & -\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Kí hiệu D_{ij} là phần bù đại số của phần tử (ij) trong định thức D_i .

Khi đó

$$D_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \beta_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{Do đó } C_i^* = \sum_{j=1}^n \frac{D_{ij}}{D} \beta_j \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$y_n^* = \lambda \sum_{i=1}^n A_i(x) \sum_{j=1}^n \frac{D_{ij}}{D} \beta_j + f(x).$$

$$y_n^* = \lambda \sum_{i,j=1}^n A_i(x) \frac{D_{ij}}{D} \int_a^b B_j(s) f(s) ds + f(x)$$

$$y_n^* = \lambda \int_a^b \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{D_{ij}}{D} A_i(x) B_j(s) \right) f(s) ds + f(x)$$

$$y_n^*(x) = \lambda \int_a^b R_n(x, s, \lambda) f(s) ds + f(x) \quad (12)$$

trong đó

$$R_n(x, s, \lambda) = \frac{1}{D} \sum_{i,j=1}^n D_{ij} A_i(x) B_j(s)$$

là giải thức của hạch $K_n(x, s)$.

2. Phương trình tích phân với hạch không suy biến

Xét phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại II

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x) \quad (7)$$

Giả sử

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, s) = \mathbf{K}_n(\mathbf{x}, s) + \delta_n(\mathbf{x}, s) \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x, s \leq b} |\delta_n(x, s)| = 0$$

Khi đó phương trình (7) có dạng

$$y(x) = \lambda \int_a^b K_n(x,s)y(s)ds + \lambda \int_a^b \delta_n(x,s)y(s)ds + f(x) \quad (14)$$

Vì $\delta_n(x,s)$ nhỏ tùy ý khi n đủ lớn, nên ta coi nghiệm $y_n(x)$ của phương trình tích phân tuyến tính với hạch suy biến $K_n(x,s)$

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K_n(x,s)y_n(s)ds + f(x) \quad (15)$$

là nghiệm gần đúng của phương trình tích phân tuyến tính(7).

Bây giờ ta đánh giá sai số của phương pháp hach không suy biến.

Kí hiệu

$$\varepsilon_n(x) = y(x) - y_n(x)$$

Từ (14) và (15) ta có

$$\varepsilon_n(x) = \lambda \int_a^b K_n(x,s) \varepsilon_n(s) ds + \lambda \int_a^b \delta_n(x,s) y(s) ds.$$

Đây là phương trình tích phân tuyến tính với hạch suy biến. Do đó dựa vào công thức (12) nghiệm của phương trình này được xác định bởi công thức

$$\varepsilon_n(x) = \lambda \int_a^b \delta_n(x,s)y(s)ds + \lambda^2 \int_a^b R_n(x,s,\lambda) \left(\int_a^b \delta_n(s,t)y(t)dt \right) ds$$

Do đó

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n(x)| &\leq \lambda |\delta_n N_0(b-a) + \lambda^2 R_n^* \delta_n N_0(b-a)^2| \\ |\varepsilon_n(x)| &\leq \lambda [(b-a)N_0 \delta_n [1 + \lambda |R_n^*(b-a)|]] \quad (15^*) \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \delta_n &= \max_{a \leq x, s \leq b} \delta_n(x,s), \quad N_0 = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| \\ R_n^* &= \max_{a \leq x, s \leq b} |R_n(x,s)| \end{aligned}$$

Bây giờ ta đánh giá N_0 . Ta có

$$y(x) = \lambda \int_a^b K_n(x,s)y(s)ds + f(x) - \lambda \int_a^b [K_n(x,s) - K(x,s)]y(s)ds$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b K_n(x,s)y(s)ds + F(x)$$

$$F(x) = f(x) - \lambda \int_a^b [K_n(x,s) - K(x,s)]y(s)ds.$$

Dựa vào công thức (12) ta có

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b R_n(x,s) F(s)ds.$$

Mặt khác ta lại có

$$|F(x)| \leq P_0 + \lambda |\delta_n|(b-a)N_0, \quad P_0 = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Do đó

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq P_0 + \lambda |\delta_n|(b-a)N_0 + \lambda |R_n^*(b-a)|[P_0 + \lambda |\delta_n|(b-a)N_0] \\ N_0 &\leq P_0[1 + \lambda |R_n^*(b-a)|] + \lambda |\delta_n|(b-a)[1 + \lambda |R_n^*(b-a)|]N_0 \end{aligned}$$

Giả sử

$$|\lambda| \delta_n(b-a)[1 + |\lambda| |R_n^*(b-a)|] < 1$$

Khi đó

$$N_0 \leq \frac{P_0[1 + |\lambda| |R_n^*(b-a)|]}{1 - |\lambda| \delta_n(b-a)[1 + |\lambda| |R_n^*(b-a)|]}$$

thay N_0 vào (15*) ta được

$$|y(x) - y_n(x)| \leq |\lambda| (b-a) P_0 \frac{[1 + |\lambda| |R_n^*(b-a)|]^2}{1 - |\lambda| \delta_n(b-a)[1 + |\lambda| |R_n^*(b-a)|]} \delta_n \quad (16)$$

Như vậy ta có định lý sau

Định lý 6.3.1. Giả sử điều kiện (13) được thỏa mãn, $D(\lambda) \neq 0$ và

$$|\lambda| \delta_n(b-a)[1 + |\lambda| |R_n^*(b-a)|] < 1.$$

Khi đó dãy các hàm số $y_n(x)$ được xác định theo công thức (12) hội tụ tới nghiệm của phương trình (7) và tốc độ hội tụ được đánh giá theo công thức (16).

§4. PHƯƠNG PHÁP MÔMEN VÀ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU.

Giả sử $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ là hệ các hàm độc lập tuyến tính xác định trên $[a, b]$. Ta tìm nghiệm gần đúng của phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại II

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x) \quad (17)$$

dưới dạng

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) + f(x).$$

Để xác định các hệ số C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ta tính độ chênh lệch giữa vế phải và vế trái của (17) tại giá trị $y(x) = y_n(x)$.

$$\text{Đặt} \quad \mathcal{L}y(x) = y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds - f(x).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y_n(x) &= y_n(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y_n(s)ds - f(x) = \\ &= \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)f(s)ds = \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds \right\} C_i - \lambda \int_a^b K(x,s)f(s)ds = \\ &\equiv F(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \mathcal{L}y_n(x) &= F(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned}$$

1. Phương pháp mômen

Giả sử $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$ là hệ trực giao đầy đủ trong không gian mà ta đang xét phương trình (17). Từ giáo trình giải tích hàm ta biết rằng nếu

$$\int_a^b \mathcal{L}y(x)\varphi_i(x)dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$$

thì

$$\mathcal{L}y(x) \equiv 0.$$

Vì vậy nếu các hằng số $C_1, C_2, \dots, C_n$ được xác định từ điều kiện

$$\int_a^b \mathcal{L}y_n(x)\varphi_i(x)dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

với n đủ lớn thì có thể coi

$$\mathcal{L}y_n(x) \approx 0$$

Do đó có thể coi $y_n(x)$ là nghiệm gần đúng của phương trình (17).

Phương pháp này được gọi là phương pháp mômen hay phương pháp Galerkin để giải phương trình tích phân.

Để xác định $C_1, C_2, \dots, C_n$ từ điều kiện (18) ta có

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n C_j \int_a^b \left\{ \varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_j(s) ds \right\} \varphi_i(x) dx = \\ \lambda \int_a^b \int_a^b K(x,s) f(s) \varphi_i(x) ds dx \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = \lambda \beta_i \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (19)$$

trong đó

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_a^b \left\{ \varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_j(s) ds \right\} \varphi_i(x) dx, \\ \beta_i &= \int_a^b \int_a^b K(x,s) f(s) \varphi_i(x) ds dx. \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình (19) ta xác định được $C_1, C_2, \dots, C_n$. Do đó xác định được nghiệm gần đúng $y_n(x)$ của phương trình (17).

Ta nhận thấy rằng phương pháp mômen tương đương với phương pháp thay hạch không suy biến $K(x, s)$ bởi hạch suy biến $K_n(x, s)$ theo cách sau đây. Ta phân tích hạch $K(x, s)$ như hàm theo biến x thành chuỗi Fourier theo hệ trực chuẩn $\{\varphi_i(x)\}$ ($i = 1, 2, \dots$) và $K_n(x, s)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi này

$$K_n(x, s) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \Psi_i(s)$$

trong đó

$$\Psi_i(s) = \int_a^b K(x, s) \varphi_i(x) dx.$$

Nếu bây giờ ta áp dụng phương pháp mômen vào phương trình tích phân với hạch suy biến

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K_n(x, s) y_n(s) ds + f(x)$$

thì nghiệm thu được trùng với nghiệm gần đúng của phương trình (17) được xây dựng theo phương pháp mômen. Điều này chứng tỏ rằng phương pháp mômen tương đương với phương pháp thay hạch đã cho bởi hạch suy biến bằng phương pháp đặc biệt. Do đó để đánh giá sai số của phương pháp mômen ta có thể áp dụng phương pháp đánh giá của phương pháp hạch suy biến.

2. Phương pháp bình phương tối thiểu

Xét tích phân

$$J = \int_a^b F^2(x, C_1, C_2, \dots, C_n) dx$$

Ta xác định $C_1, C_2, \dots, C_n$ từ điều kiện cực tiểu của tích phân J , nghĩa là từ điều kiện

$$\frac{\partial J}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Ta có

$$\int_a^b F(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \frac{\partial F}{\partial C_i} dx = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b F(x, C_1, C_2, \dots, C_n) [\varphi_i(s) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_i(s) ds] dx = 0 \\
 & \sum_{j=1}^n C_j \int_a^b \left[\varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_j(s) ds \right] \left[\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_i(s) ds \right] dx = \\
 & = \lambda \int_a^b \left[\int_a^b K(x, s) f(s) ds \right] \left[\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_i(s) ds \right] dx. \\
 & \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} C_j = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \tag{20}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} &= \int_a^b \left[\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_j(s) ds \right] \left[\varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_j(s) ds \right] dx \\
 \beta_i &= \lambda \int_a^b \left[\int_a^b K(x, s) f(s) ds \right] \left[\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_i(s) ds \right] dx.
 \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính (20) ta xác định được $C_1, C_2, \dots, C_n$ và do đó xác định được nghiệm gần đúng của phương trình (17).

§5. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TUYẾN TÍNH VOLTERRA - FREDHOLM

Xét phương trình tích phân tuyến tính Volterra – Fredholm :

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s) y(s) ds + \int_a^b K_0(x, s) y(s) ds \tag{21}$$

Giả sử $K(x, s)$, $K_0(x, s)$ ($a \leq x, s \leq b$) liên tục, $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) liên tục. Giả sử $K_0(x, s)$ là hạch suy biến

$$K_0(x, s) = \sum_{i=1}^m a_i(x) b_i(s).$$

Các nghiệm gần đúng của phương trình (21) được xây dựng như sau

$$y_0(x) = f(x)$$

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s) y_{n-1}(s) ds + \int_a^b \left[\sum_{i=1}^m a_i(x) b_i(s) \right] y_n(s) ds$$

(n = 1, 2, ...).

Ta kí hiệu

$$f_{n-1}(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s) y_{n-1}(s) ds.$$

Khi đó

$$y_n(x) = f_{n-1}(x) + \int_a^b \left[\sum_{i=1}^m a_i(x) b_i(s) \right] y_n(s) ds.$$

Đây là phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại II với hạch suy biến nghiệm của nó được xác định bởi công thức

$$\left. \begin{aligned} y_n(x) &= f_{n-1}(x) + \int_a^b R(x, s) f_{n-1}(s) ds \\ y_0(x) &= f(x) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

trong đó

$$R(x, s) = \frac{1}{D} \sum_{i,j=1}^m D_{ij} a_i(x) b_j(s),$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & 1 + \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & 1 + \alpha_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{ij} = - \int_a^b b_i(s) a_j(s) ds,$$

D_{ij} là phần bù đại số của phần tử (i, j) của định thức D .

Như vậy ta có

$$\begin{aligned} y_n(x) = & f(x) + \int_a^x K(x,s) y_{n-1}(s) ds + \\ & + \int_a^b R(x,s) \left[f(s) + \int_a^b K(s,\tau) y_{n-1}(\tau) d\tau \right] ds + \\ & + \int_a^b \int_a^s R(x,s) K(s,\tau) y_{n-1}(\tau) d\tau ds \end{aligned}$$

$$y_0(x) = f(x)$$

Nhờ công thức này ta xác định được tất cả các phần tử của dãy $y_n(x)$. Bây giờ ta đánh giá tốc độ hội tụ của phương pháp này.

Kí hiệu

$$\varepsilon_n(x) = y_n(x) - y^*(x),$$

trong đó $y^*(x)$ là nghiệm của phương trình (21).

Ta có

$$\begin{aligned} y^*(x) = & f(x) + \int_a^x K(x,s) y^*(s) ds + \int_a^b K_0(x,s) y^*(s) ds \\ y_n(x) = & f(x) + \int_a^x K(x,s) y_{n-1}(s) ds + \int_a^b K_0(x,s) y_n(s) ds \end{aligned}$$

Do đó

$$\varepsilon_n(x) = \int_a^x K(x,s) \varepsilon_{n-1}(s) ds + \int_a^b K_0(x,s) \varepsilon_n(s) ds$$

Kí hiệu $R(x, s)$ là giải thức của hạch $K_0(x, s)$, khi đó áp dụng công thức (12) ta có

$$\varepsilon_n(x) = F_{n-1}(x) + \int_a^b R(x, s) F_{n-1}(s) ds,$$

trong đó

$$F_{n-1}(x) = \int_a^x K(x, s) \varepsilon_{n-1}(s) ds$$

hay là

$$\varepsilon_n(x) = \int_a^x K(x, s) \varepsilon_{n-1}(s) ds + \int_a^b R(x, s) \left[\int_a^s K(s, \tau) \varepsilon_{n-1}(\tau) d\tau \right] ds$$

$$\varepsilon_n(x) = \int_a^x K(x, s) \varepsilon_{n-1}(s) ds + \int_a^b \int_a^s R(x, s) K(s, \tau) \varepsilon_{n-1}(\tau) d\tau ds.$$

Kí hiệu

$$M = \max_{a \leq x, s \leq b} |K(x, s)|, \quad R = \max_{a \leq x, s \leq b} |R(x, s)|$$

Ta có

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n(x)| &\leq M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)| ds + MR \int_a^b \int_a^s |\varepsilon_{n-1}(\tau)| d\tau ds \leq \\ &\leq M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)| ds + MR \int_a^b \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(\tau)| d\tau ds = \\ &= M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)| ds + MR \left(\int_a^x |\varepsilon_{n-1}(\tau)| d\tau \right) \int_a^b ds = \\ &= M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)| ds + MR(b-a) \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

10.2028.26
 10.09.09
 10.2028.26

$$|\varepsilon_n(x)| \leq M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)| ds + M_1 \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)| ds, \quad M_1 = MR(b-a).$$

Từ đó ta có

$$|\varepsilon_n(x)| \leq \varepsilon_0 \frac{[M(b-a)]^n}{n!} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-m-1} \frac{[M(b-a)]^m}{m!}, \quad (23)$$

trong đó

$$\varepsilon_0 = \max_{a \leq x \leq b} |\varepsilon_0(x)|,$$

$$C_k = \frac{M_1}{M} \left\{ \varepsilon_0 \frac{[M(b-a)]^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-i-1} \frac{[M(b-a)]^{i+1}}{(i+1)!} \right\}$$

Như vậy ta đã chứng minh được định lí sau đây

Định lí 6.5.1. Giả sử $K_0(x, s)$, $K(x, s)$ ($a \leq x, s \leq b$) và $f(x)$

($a \leq x \leq b$) là các hàm số liên tục. Giả sử $K_0(x, s)$ là hạch suy biến.

Giả sử $D \neq 0$.

Khi đó nghiệm của phương trình (21) là giới hạn của dãy hàm $y_n(x)$ và tốc độ hội tụ được xác định bởi bất đẳng thức (23).

BÀI TẬP

1. Giải gần đúng các phương trình sau đây bằng phương pháp lặp đơn

$$1) y(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 x s^2 y(s) ds, \quad y(x) \in [0, 1]$$

$$2) y(x) = \sin x + \frac{1}{3} \int_0^1 (x+s) y(s) ds$$

$$3) y(x) = x^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 x^s y(s) ds$$

2. Giải gần đúng phương trình Volterra

$$4) y(x) = \int_0^x y(s) ds \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$5) y(x) = x + \int_0^x e^{x-s} y(s) ds, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

3. Giải gần đúng phương trình tích phân với hạch suy biến

$$6) y(x) = \int_0^1 (1 + 2xs) y(s) ds - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$$

$$7) y(x) = \int_0^1 (1 + xs + x^2 s^2) y(s) ds - \frac{1}{10}x - \frac{1}{10}$$

4. Giải phương trình sau bằng phương pháp Newton - Kantorovic

$$8) y(x) = \int_0^1 x s y^2(s) ds - \frac{5}{12}x + 1$$

5. Giải phương trình sau bằng phương pháp hạch không suy biến

$$9) y(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xs} - 1) y(s) ds$$

$$10) y(x) = x^2 - \int_0^1 \sin(xs) y(s) ds.$$

MỘT SỐ VẤN ĐỀ HIỆN ĐẠI

Chương VII

MỘT SỐ KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

(tiếp theo)

Trong chương này chúng tôi giới thiệu thêm một số khái niệm và sự kiện về không gian metric, không gian Banach, không gian vector tôpô, không gian Sobolev và một ít về giải tích Fourier, cần thiết cho sự trình bày trong các chương ở phần hai và cho việc nghiên cứu xa hơn. Chúng tôi coi như độc giả đã quen với không gian tôpô, tích phân Lebesgue, ít ra là với một số khái niệm và sự kiện ban đầu cơ bản của các lý thuyết này (nếu chưa biết có thể xem chẳng hạn tài liệu [9] đã dịch ra tiếng Việt). Độc giả nào muốn biết nhiều hơn những điều đã đưa vào chương này, nhất là các chứng minh chi tiết, có thể xem [3, 9, 5, 12, 20, 53, 30, 55, 75, 123].

§1. KHÔNG GIAN TÔPÔ LỒI ĐỊA PHƯƠNG

Định nghĩa 7.1.1. Một tập $\Sigma \neq \emptyset$ với quan hệ $\geq$ trên Σ được nói là *định hướng* nếu quan hệ $\geq$ là i) phản xạ, tức là $\sigma \geq \sigma$, với mỗi $\sigma \in \Sigma$; ii) truyền ứng (bắc cầu), tức là với các phần tử tùy ý $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$, từ $\alpha \geq \beta$ và $\beta \geq \gamma$ suy ra $\alpha \geq \gamma$; và nếu iii) cứ hai phần tử của Σ có một phần tử làm trội chúng, tức là với hai phần tử tùy ý $\alpha, \beta \in \Sigma$ tồn tại $\gamma \in \Sigma$ sao cho $\gamma \geq \alpha, \gamma \geq \beta$.

Lưới (dãy suy rộng) là hàm được xác định trên một tập định hướng Σ các chỉ số và lấy giá trị trên một tập A . Nếu $\Sigma = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên với sự sắp thứ tự thông thường thì lưới $\{x_\sigma\}$ là dãy thông thường.

Lưới $\{y_\lambda\}$ ($\lambda \in \Lambda$) được gọi là *lưới con* của lưới $\{x_\sigma\}$ ($\sigma \in \Sigma$) nếu đối với σ tùy ý thuộc Σ tồn tại chỉ số $\lambda(\sigma) \in \Lambda$ sao cho với chỉ số tùy ý $\lambda \in \Lambda$ thỏa mãn $\lambda' \geq \lambda(\sigma)$, tìm được $\sigma' \in \Sigma$, $\sigma' \geq \sigma$ thỏa mãn $x_{\sigma'} = y_{\lambda'}$.

Với khái niệm lưới và lưới con, ta có thể mô tả tôpô của mọi không gian tôpô trong khi đó khái niệm dãy và dãy con theo nghĩa thông thường chỉ mô tả được những tính chất của không gian tôpô với tiên đề đếm được thứ nhất.

Định nghĩa 7.1.2. Lưới $\{x_\omega, \omega \in \Omega\}$ nằm trong một không gian tôpô X được nói là *hội tụ* trong tôpô τ đến điểm x và x được gọi là *giới hạn của lưới* $\{x_\omega\}$ (và viết : $\lim x_\omega = x$ hay $x_\omega \rightarrow x$) nếu đối với mọi lân cận $U \in \tau$ tồn tại chỉ số $\omega_0 = \omega_0(U)$ sao cho hệ thức $\omega \geq \omega_0$ kéo theo $x_\omega \in U$.

Mệnh đề 7.1.1. Trong không gian tách (separated) không có một lưới nào có 2 giới hạn khác nhau và mọi lưới con của một lưới hội tụ sẽ hội tụ đến cùng một giới hạn.

Định nghĩa 7.1.3. Giả sử trên tập X đối với tất cả các chỉ số $\omega \in \Omega$ của một tập Ω được định hướng bởi quan hệ $\geq$ ta có các ánh xạ $U_\omega(x)$ sao cho 1) với mỗi chỉ số $\omega \in \Omega$ với phần tử tùy ý $x \in X$ ta có $x \in U_\omega(x) \subset X$; 2) Với các chữ số tùy ý $\omega, \xi \in \Omega$, $\omega \geq \xi$, với mọi $x \in X$ thì $U_\omega(x) \subset U_\xi(x)$; 3) với mọi $\omega \in \Omega$, $\exists \xi \in \Omega$, sao cho từ $x \in U_\xi(y)$ kéo theo $y \in U_\omega(x)$; 4) Với ω tùy ý thuộc Ω , $\exists \xi \in \Omega$ sao cho từ $y \in U_\xi(x)$, và $z \in U_\xi(y)$ suy ra $z \in U_\omega(x)$. Khi đó ta

gọi *tôpô đều* trong X là tôpô mà tại mỗi điểm $x \in X$ lưới các tập $\{U_\omega(x), \omega \in \Omega\}$ là cơ sở của hệ các lân cận của x . Không gian với tôpô đều được nói là *đều* và các lân cận $U_\omega(x)$ của x được nói là *đều*.

Đối với mọi tập con M của một không gian đều X ta định nghĩa một cách tự nhiên hệ các lân cận đều theo quy tắc

$$U_\omega(M) = \bigcup_{x \in M} U_\omega(x).$$

Những lân cận đều của một compac tạo thành một cơ sở hệ các lân cận.

Mệnh đề 7.1.2. Nếu compac M và tập con đóng N của không gian đều X không có điểm chung thì tồn tại chỉ số $\omega \in \Omega$ sao cho $U_\omega(M) \cap N = \emptyset$.

Chú ý. Nếu X là không gian mêtric thì tôpô mêtric là tách, đều và thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất.

Định nghĩa 7.1.4. Giả sử X là một không gian tuyến tính.

Tập $E \subset X$ được gọi là *cân đối* nếu đối với phần tử tùy ý $x \in E$ và $\lambda \in \mathbf{R}$ sao cho $|\lambda| \leq 1$ ta có $\lambda x \in E$.

Tập E được gọi là *hấp thụ* nếu đối với phần tử tùy ý $x \in X$ tồn tại số $\lambda > 0$ sao cho $x \in \mu E$ đối với tất cả $\mu, |\mu| \geq \lambda$.

Tập $E \subset X$ được gọi là *lồi tuyệt đối* nếu đối với cặp tùy ý $x, y \in E$ và đối với các số tùy ý $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sao cho $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ ta có $\lambda x + \mu y \in E$.

Chú ý.

1. Bằng hình học, tính chất hấp thụ của E có nghĩa là trên một tia tùy ý phát xuất từ 0 có một khoảng với mút tại 0 được chứa hoàn toàn trong E.

2. Tập E lỗi tuyệt đối khi và chỉ khi E đồng thời là lỗi và cân đối.

3. Nếu E_1, E_2 là các tập con lồi của X , $\lambda \in \mathbf{R}$ thì tập $E_1 + E_2$ và λE là lồi. Điều này cũng đúng đối với các tập lồi tuyệt đối.

4. Nếu E là tập lồi tuyệt đối thì $0 \in E$, và nếu $|\lambda| \leq |\mu|$ thì $\lambda E \subset \mu E$.

Định nghĩa 7.1.5. Giả sử X là một không gian tuyến tính trên $\mathbf{R}$. Một hàm thực (hữu hạn) không âm ρ được gọi là một *sơ chuẩn* nếu ρ thỏa mãn các điều kiện :

$$1) \rho(x) \geq 0 ;$$

$$2) \rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x) ;$$

$$3) \rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y) \text{ đối với tất cả } x, y \in X, \text{ và tất cả } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Chú ý. Do 2) $\rho(0) = 0$ nhưng có thể xảy ra $\rho(x) = 0$ với $x \neq 0$.

Sơ chuẩn ρ mà $\rho(x) = 0$ kéo theo $x = 0$ là *chuẩn*. Do (3) $\rho(x) \leq \rho(y) + \rho(x - y)$, $\rho(y) \leq \rho(x) + \rho(y - x)$, nên $|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y)$.

Mệnh đề 7.1.3. Tôpô của không gian tôpô tuyến tính là đều. Mọi không gian tôpô tuyến tính có một hệ cơ bản các lân cận đóng hấp thụ. Để không gian tôpô tuyến tính X là Hausdorff, ắt có và đủ là $\bigcap_{V \in B} V = \{0\}$, trong đó B là cơ sở các lân cận của 0 trong X .

Định nghĩa 7.1.6. Giả sử X là một không gian tôpô tuyến tính tách (Hausdorff). Nếu trong X tồn tại một cơ sở của hệ các lân cận của 0 gồm các tập lồi thì X được gọi là *lồi địa phương*.

Định nghĩa 7.1.7. Không gian tuyến tính X^* tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian lồi địa phương X được gọi là *liên hợp* (tôpô) của X .

Định nghĩa 7.1.8. Trong mọi không gian lồi địa phương X có thể chỉ ra một tôpô lồi địa phương khác gọi là *tôpô yếu* và được cho bởi một cơ sở hệ các lân cận của 0 $\{x \in X : |x^*(x)| < \varepsilon, x^* \in K^*\}$ với các tập hữu hạn K^* có thể có nằm trong X^* và với các số tùy ý $\varepsilon > 0$. Tôpô lồi địa phương xuất phát của không gian X được gọi là tôpô mạnh, trội hơn tôpô yếu. Sự *hội tụ yếu của lưới* $\{x_\alpha\} \subset X$ đến phần

từ $x \in X$ không có gì khác hơn là sự hội tụ của lưới $x^*(x_\omega) \rightarrow x^*(x)$ đối với mọi phiếm hàm $x^* \in X^*$. Sự hội tụ mạnh của lưới kéo theo sự hội tụ yếu của lưới ấy đến cùng một giới hạn của lưới kéo theo sự hội tụ yếu của lưới ấy đến cùng một giới hạn nhưng ngược lại không đúng. Trên các không gian hữu hạn chiều tôpô mạnh và yếu trùng nhau.

Định nghĩa 7.1.9. Không gian *Fréchet* (F – không gian) là không gian tôpô tuyến tính X với mêtric d , đầy đủ và mêtric bất biến đối với phép trượt, tức là $d(x, y) = d(x - y, 0)$ với x, y tùy thuộc X .

Bây giờ giả sử X là một không gian tôpô. Ta kí hiệu $S(X)$ là tập tất cả các tập con khác rỗng của X , còn $C(X)$ và $\tilde{C}(X)$ tương ứng là tập các tập con compact và compact tương đối của X . Rõ ràng $C(X) \subset \tilde{C}(X) \subset S(X)$.

Định nghĩa 7.1.10. Ta gọi B -tôpô trong không gian $S(X)$ là tôpô với cơ sở mở dưới dạng họ tất cả các tập có dạng $\{M \in S(X) : M \subset U\}$, trong đó U chạy tất cả các tập mở trong X . Họ các tập có dạng $\{M \in S(X) : M \cap U \neq \emptyset\}$ với các tập U mở có thể có trong X sinh ra một Γ -tôpô trong không gian $S(X)$. Hợp các B - và Γ -tôpô được gọi là A -tôpô.

Định nghĩa 7.1.11. Nếu X là một không gian đều được sinh ra bởi một hệ đều các lân cận $\{U_\omega(x)\}$, $\omega \in \Omega, x \in X$ (xem định nghĩa 7.1.3) thì ta gọi β -tôpô trong không gian $S(X)$ là pôpô với cơ sở dưới dạng họ các tập có dạng $\{M \in S(X) : M \subset U_\omega(N)\}$ đối với tất cả $N \subset X$ và $\omega \in \Omega$ xác định một γ -tôpô. Hợp các tôpô này được gọi là α -tôpô trong không gian các tập con $S(X)$.

Sự hội tụ các tập trong một trong các tôpô nêu trên $\tau = A, B, \Gamma, \alpha, \beta, \gamma$ sẽ được kí hiệu $\xrightarrow{\tau}$

Mệnh đề 7.1.4. Nếu đối với lưới các tập $\{M_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ ta có $M_\sigma \xrightarrow{\tau} M$ trong bất kì tôpô nào trong các tôpô τ thì đối với một lưới con tùy ý $\{M_\phi, \phi \in \Phi\}$ của lưới ấy ta cũng có $M_\phi \xrightarrow{\tau} M$.

Mệnh đề 7.1.5. Nếu đối với lưới $\{M_\sigma\} \subset X$ có B - hội tụ $M_\sigma \xrightarrow{B} M \subset X$ còn $m_\sigma \subseteq M_\sigma$ đối với tất cả $\sigma \in \Sigma$ và $M \subseteq N \subset X$, thì lưới $\{m_\sigma\}$ càng B-hội tụ đến tập con N , tức là $m_\sigma \xrightarrow{B} N$. Điều này cũng đúng đối với β -hội tụ lưới các tập. Đối với Γ - và γ -hội tụ lưới các tập cũng có sự kiện tương tự, song phải thay $\subseteq$ bằng $\supseteq$.

Chú ý. Sự B - hội tụ các tập M_σ đến tập M chứng tỏ đối với mọi lân cận $U \supset M$ tất cả các tập của M_σ với các chỉ số đủ xa được chứa trong lân cận đã chọn U . Sự A - hội tụ các tập M_σ đến tập M chứng tỏ, ngoài điều đã nói, còn có thêm sự xấp xỉ mỗi phần tử của M bằng các phần tử của các tập M_σ . Sự hội tụ các tập trong β và α cũng có cùng ý nghĩa, nhưng với lân cận đều U và sự xấp xỉ đều các điểm của tập giới hạn.

Mệnh đề 7.1.6. Ta kí hiệu $\{x_\sigma\}'$ là tập tất cả các điểm giới hạn của lưới $\{x_\sigma\}$. Giả sử lưới các tập $\{M_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ trong một không gian tách X có một trong các tính chất sau đây : với mọi sự lựa chọn các phần tử $x_\sigma \in M_\sigma$ và đối với mọi lưới con $\{x_\phi\}$ của lưới xuất phát $\{x_\sigma\}$ có các quan hệ i) $\{x_\phi\}' \cap M \neq \emptyset$ hay ii), $\emptyset \neq \{x_\phi\}' \subset M$, trong đó M là một tập con của X . Khi đó ta có sự B - hội tụ $M_\sigma \xrightarrow{B} M$ và trong không gian đều sự β -hội tụ $M_\sigma \xrightarrow{\beta} M$. Ngược lại nếu tập M compact tương đối và lưới $\{M_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ B - hội tụ (hay β -hội tụ) đến M thì các tính chất i) ii) có đối với compact $\overline{M}$.

Định nghĩa 7.1.12. Một cái lọc F trong một không gian lồi địa phương X được gọi là *lọc Cauchy* nếu đối với một lân cận U F chứa một tập A sao cho $x - y \in U$ đối với tất cả $x, y \in A$. Nếu mỗi lọc Cauchy trong X mà hội tụ thì X được gọi là *đầy đủ*.

Định lý 7.1.1. Một không gian lồi địa phương $X = (X, p_\gamma)$ trong đó $\{p_\gamma\}; \gamma \in \Gamma$ là họ các sơ chuẩn xác định tôpô của X , có các tính chất :

1. X đẳng cấu với một không gian con của tích $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, trong đó mỗi X_γ là một không gian định chuẩn được xác định bởi $X_\gamma = X/p_\gamma^{-1}(0)$;
2. Đẳng cấu được xác định bởi ánh xạ $V(x) = \{V_\gamma(x)\}, x \in X$, trong đó V_γ là ánh xạ chính tắc từ X lên X_γ ;
3. $p_\gamma V = V_\gamma$ đối với tất cả $\gamma \in \Gamma$, trong đó p_γ là phép chiếu chính tắc từ $\prod_{\lambda \in \Gamma} X_\lambda$ lên X_γ .

Định lý 7.1.2. Không gian thương X/E là tách khi và chỉ khi E là một không gian con đóng trong X .

Định lý 7.1.3. Tích các tôpô yếu là một tôpô yếu.

Định lý 7.1.4. Giả sử X là tích các không gian lồi địa phương X_γ . Khi đó X là đầy đủ nếu và chỉ nếu mỗi X_γ là đầy đủ.

§2. KHÔNG GIAN MÊTRIC. KHÔNG GIAN BANACH.

Trong mục này chúng tôi đưa thêm một số khái niệm và sự kiện cũng thường được sử dụng ở một trình độ cao hơn trong phần I (một số trường hợp có thể coi là ví dụ của §1 phần II, song để giúp các độc giả chưa đọc mục ấy có thể đọc được một số phần tiếp theo, chúng tôi cũng xin nêu ở đây).

Giả sử X và Y là các không gian mêtric đầy đủ.

Định lí 7.2.1. Giả sử $M \subseteq X$.

1. M là đóng khi và chỉ khi M đóng dãy.
2. M là compac tương đối khi và chỉ khi M compac tương đối dãy
3. M là compac khi và chỉ khi M compac dãy
4. Toán tử $T : X \rightarrow Y$ liên tục tại điểm x khi và chỉ khi T liên tục dãy tại x .

Định nghĩa 7.2.1. Hai không gian Banach X và Y được nói là *đẳng cấu chuẩn* khi và chỉ khi có một toàn ánh $h : X \rightarrow Y$ sao cho $\|hx\| = \|x\|$ với tất cả $x \in X$. Hai B – không gian đẳng cấu chuẩn được coi đồng nhất với nhau.

Định nghĩa 7.2.2. Giả sử X là một không gian Banach. Ta cho tương ứng với mỗi $x \in X$ một phiếm hàm tuyến tính liên tục x^{**} trên X^* nhờ hệ thức $\langle x^{**}, f \rangle := \langle f, x \rangle, \forall f \in X^*$. Ở đây $\|x^{**}\| = \|x\|$. Đặt $h(x) = x^{**}$.

Nếu $h : X \rightarrow X^{**}$ là toàn ánh thì X được nói là *phản xạ*. Đối với không gian phản xạ X , h là một đẳng cấu chuẩn. Ta có thể đồng nhất X với X^{**} theo nghĩa đó, và ta viết ngắn gọn $X^{**} = X$ và cũng có thể đồng nhất x với x^{**} . Do đó nếu X là một không gian Banach phản xạ thì $\langle x, f \rangle = \langle f, x \rangle$, với tất cả $x \in X$ và $f \in X^*$.

Ví dụ : Không gian $L_p[0, 1]$ trong ví dụ 7 §1 chương I là B – không gian phản xạ, còn $C[0, 1]$ ở ví dụ 5 là không phản xạ. Mọi B – không gian hữu hạn chiều đều phản xạ.

Trong các không gian Banach X và X^* đối với các dãy $\{x_n\} \subset X$ và $\{f_n\} \subset X^*$, ta kí hiệu $\rightarrow$ là hội tụ mạnh, $\rightharpoonup$ là hội tụ yếu, $\rightharpoonup^*$ là hội tụ yếu * theo các nghĩa sau đây.

Định nghĩa 7.2.3. $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$;
 $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow \|f_n - f\| \rightarrow 0$;
 $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in X^*$;
 $f_n \xrightarrow{*} f \Leftrightarrow \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in X$;
 $f_n \rightharpoonup^* f \Leftrightarrow \langle F, f_n \rangle \rightarrow \langle F, f \rangle, \forall F \in X^{**}$.

Mệnh đề 7.2.1. Với các kí hiệu như trên ta có :

$$f_n \rightharpoonup f \Rightarrow f_n \xrightarrow{*} f ;$$

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \sup_n \|x_n\| < \infty \text{ và } \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in M,$$

M trù mật trong X^* ;

$$f_n \xrightarrow{*} f \Leftrightarrow \sup_n \|f_n\| < \infty, \text{ và } \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in Q,$$

Q trù mật trong X ;

$$f_n \rightarrow f \text{ và } x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle ;$$

$$f_n \xrightarrow{*} f \text{ và } x_n \rightarrow x \Rightarrow \langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle .$$

Khi X là phản xạ, ta có : $f_n \rightharpoonup f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{*} f$,

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \text{dãy } \{\langle f, x_n \rangle\} \text{ hội tụ trong } \mathbf{R}, \forall f \in X^*$$

Khi X là khả ly, mọi dãy $\{f_n\} \subset X^*$ với $\sup_n \|f_n\| < \infty$ chứa một

dãy con $\{f_{n_k}\}$ sao cho $f_{n_k} \xrightarrow{*} f$.

Khi X là một B-không gian, M là một tập lồi đóng trong X , $\{x_n\} \subset M$, nếu $x_n \rightharpoonup x$ thì $x \in M$.

Định lý 7.2.2. Nếu X là một không gian Banach thì 5 điều khẳng định sau đây tương đương

1. X là phản xạ.

2. Mọi dãy bị chặn $\{x_n\} \subset X$ có dãy con hội tụ yếu.
3. Hình cầu đơn vị đóng trong X là compac yếu.
4. Mỗi tập bị chặn đóng yếu trong X là compac yếu.
5. Mỗi tập lồi đóng bị chặn trong X là compac yếu.

Sau đây là 4 định lý cơ bản trong giải tích hàm.

Định lý (Han-Banach). Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục

$$f : L \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$$

trên một không gian con tuyến tính L của một không gian Banach X trên $\mathbb{R}$ có một ánh xạ thác triển tuyến tính liên tục

$$\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{với } \|\bar{f}\| = \|f\|$$

Định lý (Banach – Steinhaus). Giả sử X và Y là các không gian Banach trên $\mathbb{R}$. Giả sử $A_n : X \rightarrow Y$ là tuyến tính và liên tục với tất cả $n \in \mathbb{N}$. Khi đó hai điều khẳng định sau đây tương đương

1. Có một ánh xạ tuyến tính $A : X \rightarrow Y$ sao cho

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \text{ với mọi } x \in X$$

2. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ tồn tại với tất cả x trong một tập con trù mật của X và $\sup_n \|A_n\| < \infty$.

Định lý (Banach về ánh xạ mở). Giả sử X và Y là các không gian Banach trên $\mathbb{R}$. Nếu $A : X \rightarrow Y$ là tuyến tính, liên tục và toàn ánh thì

1. A ánh xạ tập mở lên tập mở
2. Nếu toán tử ngược $A^{-1} : Y \rightarrow X$ tồn tại thì A^{-1} liên tục.

Định lý (Ascoli – Arzela). Giả sử X là một không gian metric compac và $C(X)$ là B – không gian các phiếm hàm liên tục $f(x)$ với chuẩn $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Khi đó dãy $\{f_n(x)\} \subseteq C(X)$ là compac

tương đối trong $C(X)$ nếu hai điều kiện sau đây được thỏa mãn :

1. $f_n(x)$ là đẳng bị chặn (equibounded) (theo n) tức là

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{x \in X} |f_n(x)| < \infty$$

2. $f_n(x)$ đẳng liên tục (equicontinuous) (theo n) tức là

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1, d(x', x'') \leq \delta} |f_n(x') - f_n(x'')| = 0.$$

Định nghĩa 7.2.4. Không gian chuẩn X được gọi là *lỗi chặt* nếu mặt cầu đơn vị của X là $S = S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ *lỗi chặt*, tức là từ $x, y \in S$ kéo theo $\|x + y\| < 2$.

Do đó mọi mặt cầu khác cũng *lỗi chặt*. Không gian chuẩn X được gọi là *lỗi đều*, nếu hàm (modul lỗi)

$$\gamma(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in S, \|x - y\| = \varepsilon \right\}$$

đương ngặt với $\varepsilon > 0$. Trong định nghĩa modul lỗi có thể lấy $\|x\|, \|y\| \leq 1$ và thay $\|x - y\| = \varepsilon$ bằng $\|x - y\| \geq \varepsilon$. Với điểm x cố định thuộc S hàm đó được gọi là *modul lỗi địa phương* và được kí hiệu là $\gamma(\varepsilon, x)$. Nếu đối với mọi điểm $x \in S$ modul lỗi địa phương đương ngặt với $\varepsilon > 0$ thì không gian được gọi là *lỗi đều địa phương*.

Chú ý. 1. Không gian lỗi đều thì lỗi đều địa phương, mà lỗi đều địa phương thì lỗi chặt. Không gian lỗi đều thì phản xạ và do đó đầy đủ. Mọi không gian Banach đều lỗi địa phương.

2. Trong mỗi không gian Banach khả ly và trong mỗi không gian Banach phản xạ tồn tại một chuẩn tương đương mà đối với chuẩn này không gian trở thành lỗi đều địa phương.

Ví dụ. Không gian Hilbert là lỗi đều với modul lỗi

$$\gamma(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}. \text{ Không gian } L_p(a, b), 1 < p < \infty \text{ lỗi chặt.}$$

Định nghĩa 7.2.5. Không gian Banach X được gọi là không gian Ephemov – Stechkin nếu X phản xạ và có tính chất : trong X sự hội tụ yếu các phần tử $(x_n \rightharpoonup x)$ và sự hội tụ chuẩn $(\|x_n\| \rightarrow \|x\|)$ luôn kéo theo sự hội tụ mạnh $(\|x_n - x\| \rightarrow 0)$.

Ví dụ : Mọi không gian lỗi đều địa phương có tính chất vừa nêu.

§3. KHÔNG GIAN SOBOLEV

Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$ và p là một số thực, $p \geq 1$. Ta kí hiệu $L_p(\Omega)$ là tập các hàm đo được f xác định trên Ω sao cho

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \quad (1)$$

Trong $L_p(\Omega)$ ta đồng nhất các hàm bằng nhau hầu khắp (h.k.) trên Ω . Như vậy các phần tử của $L_p(\Omega)$, thực ra là các lớp tương đương các hàm đo được thỏa mãn (1) và hai hàm tương đương nếu chúng bằng nhau h.k. trên Ω . Song để tiện lợi ta sẽ không quan tâm đến sự khác biệt đó, và sẽ viết $f \in L_p(\Omega)$ nếu f thỏa mãn (1) và $f = 0$ trong $L_p(\Omega)$ nếu $f(x) = 0$ h.k. trên Ω .

Với chuẩn đã đưa vào $L_p(\Omega)$ như trong §1. Chương I,

L_p là một không gian Banach, và ta có các bất đẳng thức Hölder và Minkovski với $1 \leq p < \infty$.

Định nghĩa 7.3.1. Ta kí hiệu $L_{\infty}(\Omega)$ là không gian vector (tuyến tính) gồm các hàm u chủ yếu bị chặn trên Ω , tức là các hàm đo được trên Ω và $|f(x)| \leq K$ h.k. trên Ω (các hàm chủ yếu bị chặn cũng được đồng nhất nếu chúng bằng nhau h.k. trên Ω). Cận dưới lớn nhất các hằng số K được gọi là *essential supremum* của $|f|$ trên Ω và được viết $\text{esssup}_{x \in \Omega} |f(x)|$. Ta xác định chuẩn trong $L_{\infty}(\Omega)$ như sau

$$\|f\|_{\infty} = \text{esssup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Chú ý. Bất đẳng thức Hölder cũng đúng với $p = 1$, $p' = \infty$ và $p = \infty$, trong đó p' là số mũ liên hợp đối với p , tức là $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Định nghĩa 7.3.2. Một tập $E \subset \Omega$ được gọi là *trong nghiêm ngặt* đối với Ω và được viết $E \subset\subset \Omega$, nếu $\bar{E}$ (bao đóng của E) $\subset \Omega$.

Hàm f được xác định h.k. trên Ω được gọi là khả tích địa phương trên Ω nếu $f \in L_1(A)$ với mọi tập đo được $A \subset\subset \Omega$ và ta kí hiệu $f \in L_{1,loc}(\Omega)$.

Hệ quả 7.3.1. $L_p(\Omega) \subset L_{1,loc}(\Omega)$ với $1 \leq p \leq \infty$ và với miền Ω bất kì.

Định lý 7.3.1. $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, là một không gian Banach.

Hệ quả 7.3.2. Nếu $1 \leq p < \infty$ thì một dãy Cauchy trong $L_p(\Omega)$ bao giờ cũng có một dãy con hội tụ từng điểm h.k. trên Ω .

Định nghĩa 7.3.3. Ta gọi *giá của hàm f xác định trên Ω và kí hiệu $\text{supp} f$ là*

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Khi $\text{supp} f \subset\subset \Omega$ và $\text{supp} f$ là compac thì ta nói f có *giá compac* trên Ω .

Định lý 7.3.2. Không gian $C_0(\Omega)$ các hàm liên tục có giá compac trên Ω trù mật trong $L_p(\Omega)$, với $1 \leq p \leq \infty$.

Định lý 7.3.3. Nếu $1 \leq p \leq \infty$ thì $L_p(\Omega)$ khả ly.

Một lớp hàm đóng vai trò rất quan trọng trong lý thuyết xấp xỉ, làm tròn, đặc biệt đối với phương pháp trung bình hóa là lớp các hàm sau đây.

Giả sử $\omega(x)$ là một hàm khả vi vô hạn trong $\mathbb{R}^n$, không âm, bằng 0 với $|x| \geq 1$ và sao cho

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = \int_{|x| \leq 1} \omega(x) dx = 1 \quad (2)$$

trong đó $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$. Chẳng hạn ta có thể lấy

$$\omega(x) = \begin{cases} C e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & 0 \leq |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

trong đó $C > 0$ là hằng số được chọn sao cho (2) được thực hiện.

Định nghĩa 7.3.4. Giả sử h là một số dương tùy ý. Hàm

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h^n} \omega\left(\frac{x}{h}\right) \quad (3)$$

được gọi là *nhân trung bình hóa* (có bán kính h).

Nhân trung bình hóa có các *tính chất*

1. $\omega_h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\omega_h(x) \geq 0$ trong $\mathbb{R}^n$;

2. $\omega_h(x) = 0$ với $|x| \geq h$;

3. $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x) dx = 1$

4. Với α tùy ý, $|\alpha| \geq 0$, và với tất cả $x \in \mathbb{R}^n$

$$|D^\alpha \omega_h(|x|)| \leq \frac{C_\alpha}{h^{n+|\alpha|}} \quad (4)$$

trong đó $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$ là các số nguyên, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$,

$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}$, $D_j = i^{-1} \partial / \partial x_j$, $i = \sqrt{-1}$, còn C_α là một hằng số dương không phụ thuộc h .

Định nghĩa 7.3.5. Giả sử $h > 0$. Hàm

$$f_h(x) = \int_{\Omega} f(y) \omega_h(|x-y|) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

được gọi là *hàm trung bình* (hay *hàm trung bình hóa*, hay *hàm điều chỉnh*) đối với hàm $f(x)$

2008.2

Định lý 7.3.4. Với $h > 0$, $f \in C(\overline{\Omega})$ thì $f_h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ngoài ra $f_h(x) \equiv 0$ bên ngoài $\Omega^h := \bigcup_{x^0 \in \Omega} \{ |x - x^0| < h \}$. Hơn nữa, nếu $f \in C^k(\overline{\Omega})$ (hàm khả vi liên tục k lần) thì với $\Omega' \subset\subset \Omega$ ta có

$$\|f_h - f\|_{C^k(\overline{\Omega})} \rightarrow 0 \text{ khi } h \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$\text{trong đó } \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|$$

Bây giờ ta chuyển sang nói đến không gian Sobolev. Không gian này cũng như L_p , với $p \geq 1$, luôn là một công cụ rất có hiệu lực để nghiên cứu giải tích số phục vụ khoa học, công nghệ (xem [30, 55]).

Đầu tiên ta mở rộng khái niệm đạo hàm cho các lớp hàm không khả vi. Ta biết rằng nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên Ω và có đạo hàm liên tục trong miền ấy thì với $g(x) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ (khả vi liên tục 1 lần và có giá compact trong Ω) ta có

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \overline{g}}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \overline{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx$$

Cũng rõ ràng là đối với hàm liên tục $f(x)$ trên Ω nếu tồn tại một hàm liên tục $h_i(x)$ sao cho với hàm tùy ý $g(x) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ ta có

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \overline{g}}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} h_i(x) \overline{g(x)} dx \quad (7)$$

thì hàm $f(x)$ có trên Ω đạo hàm $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ và đối với tất cả $x \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = h_i.$$

Như vậy đối với đồng nhất thức (7) ta có thể cho một định nghĩa khác tương đương (trong lớp hàm liên tục) với định nghĩa thông

thường của đạo hàm của $f(x)$. Nếu trong (7) $f(x)$ và $h_i(x)$ không có tính liên tục mà chỉ có tính khả tích (Lebesgue) hoặc bình phương khả tích và tích phân trong (7) được hiểu theo nghĩa Lebesgue thì nhờ (7) ta có thể nói đến đạo hàm theo x_i của hàm $f(x)$ nhưng là đạo hàm theo một nghĩa đã mở rộng nào đó. Một cách tổng quát khái niệm đạo hàm suy rộng được hiểu như sau :

Định nghĩa 7.3.6. Hàm $f^\alpha(x) \in L_{2,loc}(\Omega)$ được gọi là đạo hàm suy rộng (đhsr) cấp α trong miền Ω của hàm $f(x) \in L_{2,loc}(\Omega)$, nếu đối với hàm tùy ý $g(x) \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$ ta có đẳng thức

$$\int_{\Omega} f(x) \overline{D^\alpha g(x)} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f^\alpha(x) \overline{g(x)} dx \quad (8)$$

Chú ý.

1. Hàm $f(x)$ chỉ có một đhsr.
2. Nếu hàm $f(x) \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$ thì $f(x)$ có đhsr $f^\alpha(x) = D^\alpha f(x)$.
3. Đhsr không phụ thuộc vào thứ tự lấy vi phân
4. Nếu các hàm $f_i(x)$, $i = 1, 2$ có đhsr $D^\alpha f_i$ thì $c_1 f_1 + c_2 f_2$ với c_i là các hằng số, cũng có đhsr và

$$D^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 D^\alpha f_1 + c_2 D^\alpha f_2.$$

5. Nếu $D^\alpha f$ là đhsr của f trên Ω thì $D^\alpha f$ cũng là đhsr của f trên một miền con tùy ý $\omega' \subset \Omega$.

6. Khác với đạo hàm cổ điển, đhsr $D^\alpha f$ được xác định ngay đối với cấp $|\alpha|$ không cần giả thiết các đạo hàm cấp thấp hơn tương ứng tồn tại. Các đạo hàm cấp thấp có thể không tồn tại.

Có thể xem nhiều ví dụ về phần này trong [90] (trang 55 – 57).

Định nghĩa 7.3.7. Không gian Sobolev $H^s(\Omega)$ gồm những hàm $f \in L_2(\Omega)$ sao cho $D^\alpha f \in L_2(\Omega)$ với $|\alpha| \leq s$, với chuẩn

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \quad (9)$$

trong đó s là một số nguyên không âm.

Nếu thay $L_2(\Omega)$ bằng $L_{2,loc}(\Omega)$ thì ta có không gian $H_{loc}^s(\Omega)$.

Rõ ràng $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$, $H_{loc}^0(\Omega) = L_{2,loc}(\Omega)$.

Một số tính chất ban đầu

1. $H^s(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(f, g)_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} D^{\alpha} f \overline{D^{\alpha} g} dx \quad (10)$$

2. Nếu $\Omega' \subset \Omega$ và $f \in H^s(\Omega)$ thì $f \in H^s(\Omega')$.

3. Nếu $f \in H^s(\Omega)$, $a(x) \in C^s(\overline{\Omega})$ thì $af \in H^s(\Omega)$.

4. Nếu $f \in H^s(\Omega)$, $f_h(x)$ là hàm trung bình đối với f , thì đối với miền con tùy ý Ω' , $\Omega' \subset \subset \Omega$, $\|f_h - f\|_{H^s(\Omega')} \rightarrow 0$ khi $h \rightarrow 0$.

5. Giả sử phép biến đổi $y = y(x)$ ($y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$) ánh xạ 1-1 miền Ω lên miền G và giả sử $x = x(y)$ ($x_i = x_i(y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$) là phép biến đổi ngược tương ứng. Với $s \geq 1$ ta giả thiết $y_i(x) \in C^s(\overline{\Omega})$, $x_i(y) \in C^s(\overline{G})$. Điều kiện đủ cần và đủ để hàm $F(x) = f(y(x))$, trong đó $f(y)$ là hàm cho trong G , thuộc $H^s(\Omega)$ là $f(y) \in H^s(G)$. Ngoài ra $\exists C_1, C_2$ phụ thuộc vào các hàm $y_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, sao cho

$$i) \|F\|_{H^s(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{H^s(G)}$$

$$ii) \|f\|_{H^s(G)} \leq C_2 \|F\|_{H^s(\Omega)}$$

Bây giờ ta xét thêm vài vấn đề thường gặp đối với $H^s(\Omega)$.

Giả sử hàm $f(x)$ được cho trong miền Ω và miền Ω' chứa Ω . Hàm $F(x)$ cho trong Ω' và trùng với $f(x)$ trong Ω được gọi là *thác triển* của hàm $f(x)$ vào Ω' . Rõ ràng đối với hàm tùy ý $f(x)$ bao giờ cũng tồn tại thác triển. Chẳng hạn hàm thác triển $F(x)$ có thể đặt bằng 0 trong $\Omega' \setminus \Omega$ đối với $f \in H^s(\Omega)$. Nếu hiệu biên $\partial\Omega$ của miền Ω thuộc lớp C^s , để đơn giản việc trình bày, là trong một lân cận của mỗi điểm của $\partial\Omega$, phương trình của $\partial\Omega$ được biểu diễn bằng các hàm thuộc lớp C^s (xem chi tiết trong [59, 90]), thì ta có định lý thác triển sau đây :

Định lý 7.3.5. Giả sử Ω, Ω' là các miền bị chặn, $\Omega \subset\subset \Omega'$ và $\partial\Omega \in C^s$. Giả sử $f(x) \in H^s(\Omega)$. Khi đó tồn tại thác triển tiêu hạn (tức là bằng 0 bên ngoài một tập compact) $F(x) \in H^s(\Omega')$ vào Ω' , và ta có

$$\|F\|_{H^s(\Omega')} \leq C \|f\|_{H^s(\Omega)},$$

trong đó C là hằng số dương không phụ thuộc Ω, Ω' .

Ta cũng có

Định lý 7.3.6. Giả sử $\partial\Omega \in C^s$. Khi đó $C^\infty(\overline{\Omega})$ trù mật trong $H^s(\Omega)$.

Từ trước đến đây, khi nói đến không gian Sobolev $H^s(\Omega)$ ta đã hạn chế s là số nguyên không âm. Nếu ta sử dụng phép biến đổi Fourier thì sẽ khắc phục được hạn chế này.

Ta ký hiệu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (không gian Schwartz) là không gian các hàm $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \cdot D^\beta f(x)| < +\infty$ đối với các đa chỉ số tùy ý α, β . Ví dụ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Chú ý : $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nhưng $e^{-|x|^2} \notin C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Định nghĩa 7.3.8. Giả sử $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Phép biến đổi Fourier của f được xác định bởi công thức :

$$Ff = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i(x, \xi)} f(x) dx$$

trong đó $(x, \xi) = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$. Để tiện in ấn, đôi khi sẽ không viết rõ cận lấy tích phân, nếu không có gì nhầm lẫn. Phép biến đổi Fourier ngược được cho bởi công thức

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x, \xi)} \hat{f}(\xi) d\xi$$

Định lý 7.3.7. Toán tử Fourier $F : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ là một đẳng cấu tôpô và ta có các công thức sau đây :

$$\int \hat{f} g dx = \int f \hat{g} dx$$

$$\int \hat{f} \bar{\hat{g}} d\xi = (2\pi)^n \int f \bar{g} dx \quad (\text{đẳng thức Parseval})$$

$$(\widehat{f * g}) = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$(\widehat{f \cdot g}) = (2\pi)^{-n} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

trong đó $f * g$ là tích chập các hàm f và g , tức là

$$(f * g)(x) = \int f(x - y) g(y) dy = \int f(y) g(x - y) dy.$$

Với phép biến đổi Fourier ta có thể định nghĩa không gian Sobolev $H^s(\mathbf{R}^n)$ với số thực tùy ý s .

Định nghĩa 7.3.9. Giả sử $s \in \mathbf{R}$. Không gian $H^s(\mathbf{R}^n) = H^s$ gồm các hàm $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ sao cho $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \in L_2(\mathbf{R}^n)$ và chuẩn

$$\|f\|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^{s/2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (11)$$

Một định nghĩa tương đương :

$H^s(\mathbf{R}^n)$ là không gian làm đầy của $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ theo chuẩn (11).

Chú ý. Rõ ràng với s nguyên ≥ 0 , do đẳng thức Parseval, chuẩn (11) tương đương với chuẩn (9).

Định lý 7.3.8. Không gian H^s đối ngẫu và không gian H^{-s} đối với tích vô hướng của $H^0 = L_2$ có nghĩa là, nếu $g \in H^{-s}$ thì

$$l(f) = (f, g)_0 = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi) d\xi$$

là phiếm hàm tuyến tính bị chặn trong H^s và chuẩn của phiếm hàm $l(f)$ bằng $\|g\|_{-s}$, tức là ta có hệ thức

$$\|g\|_{-s} = \sup_f \frac{(f, g)_0}{\|f\|_s}.$$

Ngược lại mỗi phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên H^s có thể biểu diễn dưới dạng $(f, g)_0$ trong đó $g \in H^{-s}$ được xác định đơn trị và chuẩn của phiếm hàm bằng $\|g\|_{-s}$.

Trên đây là một số vấn đề thường gặp của không gian Sobolev H^s ngay trong Giải tích số hiện đại. Thực ra bản thân Sobolev S.L. đã đưa vào không gian $W^{s,p} \equiv H^{s,p}$ gồm tất cả các hàm $f \in L_p(\Omega)$ sao cho $D^\alpha f \in L_p(\Omega)$, $0 \leq |\alpha| \leq s$, với chuẩn

$$\|f\|_{s,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Với $p = 2$, ta có không gian $H^s(\Omega)$ đã xét.

Đối với không gian $W^{s,p}(\Omega)$, trong đó Ω là một miền bị chặn với biên trơn từng mảnh ta có các định lý nhúng quan trọng sau đây :

Định lý 7.3.9. Giả sử $C_b^k(\Omega)$ là không gian các hàm liên tục f có các đạo hàm $D^\alpha f$ bị chặn với $0 \leq |\alpha| \leq k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Nếu $s > \frac{n}{p} + k$ thì ta có phép nhúng compact $W^{s,p}(\Omega) \subset C_b^k(\Omega)$.

Nếu $s - r \geq n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$, $s - r \geq 0$ thì ta có phép nhúng liên tục $W^{s,p}(\Omega) \subset W^{r,q}(\Omega)$.

Nếu $ps < n$ và thay dấu $\geq$ bằng dấu $>$ thì phép nhúng sau trở thành compact.

Chương VIII

PHƯƠNG TRÌNH VOLTERRA – FREDHOLM

§1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM

Giả sử X là một không gian Banach. Giả sử $x(t)$ là hàm trường tượng xác định trên đoạn $[0, T]$ và nhận giá trị trong X , nghĩa là với mỗi $t \in [0, T]$, $x(t)$ là một phần tử trong X .

Hàm trường tượng $x(t)$ được gọi là liên tục tại điểm $t_0 \in [0, T]$ nếu

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|x(t) - x(t_0)\|_X = 0$$

Kí hiệu X_T là không gian các hàm trường tượng liên tục trên đoạn $[0, T]$ với chuẩn

$$\|x\|_{X_T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|$$

Định nghĩa 8.1.1. Toán tử F tác động từ không gian X_T vào X_T được gọi là toán tử kiểu Fredholm.

Định nghĩa 8.1.2. Toán tử V_t tác động từ không gian X_t ($0 \leq t \leq T$) vào không gian X_T được gọi là toán tử kiểu Volterra.

Trong chương này ta xét phương trình Volterra – Fredholm dạng sau đây :

$$x(t) = h + Fx(t) + V(x_t) \quad (h \in X_T) \quad (1)$$

trong đó h là phần tử cho trước thuộc X_T , F là toán tử kiểu Fredholm, V là toán tử kiểu Volterra. Ta sẽ áp dụng phương pháp lặp tổng quát và phương pháp xấp xỉ hai phía để giải phương trình (1).

§2. PHƯƠNG PHÁP LẶP TỔNG QUÁT

Phương pháp lặp tổng quát hay còn được gọi là phương pháp Mamedov (xem [15]) được áp dụng để giải phương trình Volterra – Fredholm.

Định lý 8.2.1. Giả sử các điều kiện sau đây được thỏa mãn

- 1) F là toán tử tuyến tính kiểu Fredholm,
- 2) Với mỗi $f \in X_T$ phương trình $x(t) - Fx(t) = f(t)$ có nghiệm duy nhất
- 3) Toán tử $(I - F)^{-1}$ bị chặn
- 4) Toán tử $V(x_t)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz.

$$\|V(x_t) - V(y_t)\|_X \leq L \int_0^t \|x(s) - y(s)\|_X ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Khi đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh.

Đặt
$$x(t) - Fx(t) = y(t)$$

Theo điều kiện 3) của định lý, tồn tại toán tử tuyến tính bị chặn $C = (I-F)^{-1}$. Vì vậy ta có $x(t) = Cy(t)$. Thay biểu thức đó vào (1) ta được

$$y(t) = V(Cy_t) + h(t) \quad (2)$$

Giả sử $y^{(0)}(t)$ là phần tử tùy ý trong X_T . Ta xây dựng dãy $y^{(n)}(t)$ như sau

$$y^{(n)}(t) = V\left(Cy_t^{(n-1)}\right) + h(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Từ điều kiện 4) ta có

$$\begin{aligned} \|y^{(2)}(t) - y^{(1)}(t)\| &= \left\| V\left(Cy_t^{(1)}\right) - V\left(Cy_t^{(0)}\right) \right\| \\ &\leq L \|C\| \int_0^t \|y^{(1)}(s) - y^{(0)}(s)\| ds \leq \\ &\leq \|y^{(1)} - y^{(0)}\|_{X_T} Mt, \end{aligned}$$

trong đó $M = L\|C\|$.

$$\begin{aligned} \|y^{(3)}(t) - y^{(2)}(t)\| &= \left\| V\left(Cy_t^{(2)}\right) - V\left(Cy_t^{(1)}\right) \right\| \\ &\leq L \|C\| \int_0^t \|y^{(2)}(s) - y^{(1)}(s)\| ds \leq \\ &M \|y^{(1)} - y^{(0)}\|_{X_T} \int_0^t \frac{Ms}{1!} = \frac{(Mt)^2}{2!} \|y^{(1)} - y^{(0)}\|_{X_T}. \end{aligned}$$

Tương tự ta chứng minh được rằng

$$\begin{aligned} \|y^{(n+1)}(t) - y^{(n)}(t)\| &= \left\| V\left(Cy_t^{(n)}\right) - V\left(Cy_t^{(n-1)}\right) \right\| \\ &\leq M \int_0^t \|y^{(n)}(s) - y^{(n-1)}(s)\| ds \leq \dots \leq \frac{(Mt)^n}{n!} \|y^{(1)} - y^{(0)}\|_{X_T}. \end{aligned}$$

Khi đó đối với mọi số tự nhiên p ta có

$$\begin{aligned} & \|y^{(n+p)}(t) - y^{(n)}(t)\| \\ & \leq \|y^{(n+p)}(t) - y^{(n+p-1)}(t)\| + \|y^{(n+p-1)}(t) - y^{(n+p-2)}(t)\| + \dots \\ & \quad + \|y^{(n+1)}(t) - y^{(n)}(t)\| \leq \\ & \leq \left[\frac{(Mt)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} + \frac{(Mt)^{n+p-2}}{(n+p-2)!} + \dots + \frac{(Mt)^n}{n!} \right] \|y^{(1)} - y^{(0)}\|_{X_T}. \end{aligned}$$

Mặt khác chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Mt)^n}{n!}$ hội tụ đều trên đoạn $[0, T]$ cho nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(Mt)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} + \dots + \frac{(Mt)^n}{n!} \right] = 0 \text{ đều trên } [0, T]. \text{ Từ đó suy}$$

ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y^{(n+p)}(t) - y^{(n)}(t)\| = 0$ đều trên $[0, T]$. Do đó dãy $\{y^{(n)}(t)\}$ là dãy cơ bản trong không gian Banach X_T . Cho nên $\{y^{(n)}(t)\}$ hội tụ.

$$\text{Đặt } \bar{y}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y^{(n)}(t).$$

Dựa vào tính liên tục của toán tử $V(x_t)$ và C , chuyển qua giới hạn trong công thức (3) ta được

$$\bar{y}(t) = V(C\bar{y}_t) + h(t).$$

Dễ dàng chứng minh được rằng phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Thật vậy nếu $z(t)$ cũng là nghiệm của (2) thì

$$\bar{y}(t) - z(t) = V(C\bar{y}_t) - V(Cz_t).$$

$$\text{Ta có } \|\bar{y}(t) - z(t)\| \leq M \int_0^t \|\bar{y}(t_1) - z(t_1)\| dt_1 \leq \dots \leq$$

$$\leq M^k \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \left(\int_0^{t_{k-1}} \|\bar{y}(t_k) - z(t_k)\| dt_k \right) \dots dt_2 \Bigg) dt_1 \leq$$

$$\leq \frac{(Mt)^k}{k!} \|\bar{y} - z\|_{X_T}.$$

Với k đủ lớn ta có $\frac{(MT)^k}{k!} \leq q < 1$.

Từ các bất đẳng thức trên ta được

$$\|\bar{y} - z\|_{X_T} \leq q \|\bar{y} - z\|_{X_T}.$$

Do đó $\bar{y}(t) \equiv z(t)$.

Giải phương trình

$$x(t) - Fx(t) = \bar{y}(t).$$

ta được nghiệm của phương trình (1). $\square$

Bây giờ ta xây dựng các nghiệm gần đúng của phương trình (1) như sau :

$$x^{(n)}(t) = h(t) + Fx^{(n)}(t) + V(x^{(n-1)}_t) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

trong đó $x^{(0)}(t) \in X_T$ là hàm tùy ý.

Giả sử các điều kiện của định lý 8.1.1 được thực hiện. Nghĩa là phương trình tuyến tính

$$y(t) = f(t) + Fy(t) \quad (f(t) \in X_T) \quad (5)$$

có nghiệm duy nhất.

Đặt

$$R = F(I - F)^{-1}$$

Khi đó từ (5) ta có

$$y(t) = f(t) + Rf(t).$$

Do đó từ (4) ta có

$$x^{(n)}(t) = h(t) + Rh(t) + V(x_t^{(n-1)}) + RV(x_t^{(n-1)}), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

Ta chứng minh rằng dãy $x^{(n)}(t)$ được xây dựng theo công thức (6) hội tụ tới nghiệm của (1).

$$x(t) = h(t) + Rh(t) + V(x_t) + RV(x_t).$$

Ta có

$$\begin{aligned} \|x^{(n)}(t) - x(t)\| &\leq \\ &\leq L \int_0^t \|x^{(n-1)}(s) - x(s)\| ds + \|R\| \|V(x_t) - V(x_t^{(n-1)})\| \leq \\ &\leq L \int_0^t \|x^{(n-1)}(s) - x(s)\| ds + L \|R\| \int_0^T \|x^{(n-1)}(s) - x(s)\| ds. \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\|x^{(n)}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon^{(n)}(t), \quad (7)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n)}(t) &= L \int_0^t \varepsilon^{(n-1)}(s) ds + L \|R\| \int_0^T \varepsilon^{(n-1)}(s) ds, \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \varepsilon^{(0)} &\equiv \varepsilon^{(0)}(t) = \|x^{(0)}(t) - x(t)\|_{X_T} \\ \alpha^{(n-1)} &\equiv L \|R\| \int_0^T \varepsilon^{(n-1)}(s) ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8) \end{aligned}$$

Khi đó

$$\varepsilon^{(n)}(t) = \frac{(Lt)^n}{n!} \varepsilon^{(0)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(Lt)^{n-1-i}}{(n-1-i)!} \alpha^{(i)} \quad (9)$$

Từ (8) và (9) ta có

$$\alpha^{(i)} = \|R\| \left\{ \frac{(LT)^{i+1}}{(i+1)!} \varepsilon^{(0)} + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(LT)^{i-j}}{(i-j)!} \alpha^{(j)} \right\} \quad (10)$$

Từ những kết quả trên ta có định lý sau đây :

Định lý 8.2.2. Giả sử toán tử tuyến tính bị chặn F tác động trong X_T , toán tử $R = F(I - F)^{-1}$ tồn tại và bị chặn. Giả sử toán tử Volterra $V(x_t)$ tác động từ X_t vào X_T và thỏa mãn điều kiện Lipschitz. Khi đó dãy hàm trừu tượng $x^{(n)}(t)$ được xây dựng theo công thức (6) hội tụ tới nghiệm của phương trình (1). Tốc độ hội tụ được đánh giá theo công thức

$$\|x^{(n)}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon^{(n)}(T)$$

trong đó

$$\varepsilon^{(n)}(T) = \frac{(LT)^n}{n!} \|x^{(0)} - x\|_{X_T} + (LT)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha^{(i)}}{(LT)^i (n-i)!}$$

$$\alpha^{(i)} = LT \|R\| \left\{ \frac{(LT)^i}{(i+1)!} \|x^{(0)} - x\|_{X_T} + (LT)^{i-1} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\alpha^{(j)}}{(LT)^j (i-j)!} \right\}$$

Ứng dụng.

Sau đây ta xét một phương trình Volterra - Fredholm phi tuyến, trong đó toán tử Fredholm tuyến tính có dạng suy biến.

Xét phương trình

$$x(t) = h(t) + \int_0^T \left[\sum_{i=1}^m a_i(t) b_i(s) \right] x(s) ds + \int_0^t K[t, s; x(s)] ds.$$

Giả sử các hàm số $h(t)$, $a_i(t)$, $b_i(t)$ ($0 \leq t \leq T$) liên tục. Ngoài ra giả thiết rằng các hệ $\{a_i(t)\}$, $\{b_i(t)\}$ ($i = \overline{1, m}$) là các hệ độc lập

tuyến tính trong không gian $C_{[0, T]}$. Ngoài ra giả sử rằng hàm $K[t, s; x]$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến x :

$$|K(t, s; x) - K(t, s; y)| \leq L|x - y|, \quad L = \text{const}, \quad x, y \in \mathbf{R}^1, \\ (0 \leq t, s \leq T).$$

Đặt $X = \mathbf{R}^1$, $X_T = C_{[0, T]}$.

$$Fx(t) \equiv \int_0^T \left[\sum_{i=1}^m a_i(t) b_i(s) \right] x(s) ds, \quad V(x_t) \equiv \int_0^t K[t, s; x(s)] ds.$$

Dễ dàng chứng minh được rằng các toán tử này thỏa mãn điều kiện của định lý 8.1.2. Còn hạch $R = R(t, s)$ được xác định như trong §3. Chương VI.

§3. PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ HAI PHÍA

Giả sử X_T là không gian Banach nửa sắp thứ tự nhờ hình nón K_T .

Giả sử các xấp xỉ đầu tiên trên $\bar{x}^{(0)}(t)$ và xấp xỉ đầu tiên dưới $\underline{x}^{(0)}(t)$ thỏa mãn các điều kiện sau đây :

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}^{(0)}(t) &\leq h(t) + F\underline{x}^{(0)}(t) + V\left(\bar{x}_t^{(0)}\right) \\ \bar{x}^{(0)}(t) &\geq h(t) + F\bar{x}^{(0)}(t) + V\left(\underline{x}_t^{(0)}\right) \\ \underline{x}^{(0)}(t) &\leq \bar{x}^{(0)}(t) \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Các xấp xỉ tiếp theo được xây dựng như sau :

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}^{(n)}(t) &\leq h(t) + F\underline{x}^{(n)}(t) + V\left(\bar{x}_t^{(n-1)}\right) \\ \bar{x}^{(n)}(t) &\geq h(t) + F\bar{x}^{(n)}(t) + V\left(\underline{x}_t^{(n-1)}\right) \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Định lý 8.3.1. Giả sử các điều kiện sau đây được thỏa mãn

- 1) Hình nón K_T là hình nón đúng (xem [56] tr.32).
- 2) Tồn tại toán tử $(I - F)^{-1}$ hơn nữa toán tử đó bị chặn và dương.
- 3) Toán tử phi tuyến $V(x_t)$ thỏa mãn điều kiện

$$-\mathcal{L}(x_t - y_t) \leq V(x_t) - V(y_t) \leq 0 \quad (x(t) \geq y(t), \quad (0 \leq t \leq T))$$

trên miền xác định

$$\left(\underline{x}^{(0)} \leq x(t) \leq \bar{x}^{(0)}, \underline{x}^{(0)} = \min_{0 \leq t \leq T} x^{(0)}(t), \bar{x}^{(0)} = \max_{0 \leq t \leq T} \bar{x}^{(0)}(t) \right)$$

của toán tử đó.

Ở đây $\mathcal{L}x_t$ là toán tử tuyến tính dương Volterra.

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \delta^{(n)}(t) = 0,$$

trong đó

$$\left. \begin{aligned} \delta^{(n)}(t) &= (I - F)^{-1} \mathcal{L}(\delta_t^{(n-1)}) \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \delta^{(1)}(t) &= (I - F)^{-1} \mathcal{L}(\bar{x}^{(0)} - \underline{x}^{(0)}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Khi đó các xấp xỉ hai phía được xây dựng theo công thức (12) hội tụ tới nghiệm duy nhất của phương trình (1). Hơn nữa dãy $\underline{x}^{(n)}(t)$ không giảm, dãy $\bar{x}^{(n)}(t)$ không tăng. Tốc độ hội tụ được xác định từ các bất đẳng thức sau

$$\bar{x}^{(n)}(t) - \underline{x}^{(n)}(t) \leq \delta^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

trong đó $\delta^{(n)}(t)$ được xác định từ (13).

Chứng minh.

Trước tiên từ (12) ta có

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}^{(n)}(t) &= \tilde{h}(t) + (I - F)^{-1} V(\bar{x}_t^{(n-1)}) \\ \bar{x}^{(n)}(t) &= \tilde{h}(t) + (I - F)^{-1} V(\underline{x}_t^{(n-1)}) \\ \tilde{h}(t) &= (I - F)^{-1} h(t) \end{aligned} \right\}$$

Ta chứng minh rằng dãy $\underline{x}^{(n)}(t)$ không giảm, dãy $\bar{x}^{(n)}(t)$ không tăng. Từ (11) và (12) với $n = 1$ ta có

$$\underline{x}^{(1)}(t) = \tilde{h}(t) + (I - F)^{-1} V(\bar{x}_t^{(0)}) \geq \underline{x}^{(0)}(t),$$

$$\bar{x}^{(1)}(t) = \tilde{h}(t) + (I - F)^{-1} V(\underline{x}_t^{(0)}) \leq \bar{x}^{(0)}(t).$$

$$\underline{x}^{(0)}(t) \leq \underline{x}^{(1)}(t), \quad \bar{x}^{(0)}(t) \geq \bar{x}^{(1)}(t).$$

Giả sử rằng

$$\underline{x}^{(n-1)}(t) \leq \underline{x}^{(n)}(t), \quad \bar{x}^{(n-1)}(t) \geq \bar{x}^{(n)}(t).$$

Khi đó do tính chất không tăng của toán tử $V(x_t)$ ta có

$$\underline{x}^{(n+1)}(t) = \tilde{h}(t) + (I - F)^{-1} V(\bar{x}_t^{(n)}) \geq \tilde{h}(t) + (I - F)^{-1} V(\bar{x}_t^{(n-1)}) = \underline{x}^{(n)}(t)$$

$$\bar{x}^{(n+1)}(t) = \tilde{h}(t) + (I - F)^{-1} V(\underline{x}_t^{(n)}) \leq \tilde{h}(t) + (I - F)^{-1} V(\underline{x}_t^{(n-1)}) = \bar{x}^{(n)}(t)$$

$$\underline{x}^{(n+1)}(t) \geq \underline{x}^{(n)}(t), \quad \bar{x}^{(n+1)}(t) \leq \bar{x}^{(n)}(t).$$

Do đó dãy $\underline{x}^{(n)}(t)$ không giảm, dãy $\bar{x}^{(n)}(t)$ không tăng.

Bây giờ ta chứng minh rằng

$$\underline{x}^{(n)}(t) \leq \bar{x}^{(0)}, \quad \bar{x}^{(n)}(t) \geq \underline{x}^{(0)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Theo giả thiết ta có

$$\underline{x}^{(0)}(t) \leq \bar{x}^{(0)}(t) \leq \bar{x}^{(0)}, \quad \bar{x}^{(0)}(t) \geq \underline{x}^{(0)}(t) \geq \underline{x}^{(0)}.$$

Giả sử rằng

$$\underline{x}^{(n)}(t) \leq \bar{x}^{(0)}(t) \leq \bar{x}^{(0)}, \quad \bar{x}^{(n)}(t) \geq \underline{x}^{(0)}(t) \geq \underline{x}^{(0)}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \underline{x}^{(n+1)}(t) &= \tilde{h}(t) + (I - F)^{-1} V(\bar{x}_t^{(n)}) \leq \\ &\leq \tilde{h}(t) + (I - F)^{-1} V(\underline{x}_t^{(0)}) \leq \bar{x}^{(0)}(t) \leq \bar{x}^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(n+1)}(t) &= \tilde{h}(t) + (I - F)^{-1} V(\underline{x}_t^{(n)}) \geq \\ &\geq \tilde{h}(t) + (I - F)^{-1} V(\bar{x}_t^{(0)}) \geq \underline{x}^{(0)}(t) \geq \underline{x}^{(0)}. \end{aligned}$$

Do đó với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$ ta có

$$\underline{x}^{(n)}(t) \leq \bar{x}^{(0)}, \quad \bar{x}^{(n)}(t) \geq \underline{x}^{(0)}.$$

Theo giả thiết K_T là hình nón đúng do đó các dãy $\underline{x}^{(n)}(t)$ và $\bar{x}^{(n)}(t)$ là các dãy hội tụ.

Giả sử

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}^{(n)}(t) = \bar{x}(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}^{(n)}(t) = \underline{x}(t).$$

Chuyển qua giới hạn trong (12) ta được $\bar{x}(t)$ và $\underline{x}(t)$ là nghiệm của phương trình (1).

Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức (14).

Dựa vào điều kiện của định lý ta có

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(n)}(t) - \underline{x}^{(n)}(t) &= (I - F)^{-1} [V(\underline{x}_t^{(n-1)}) - V(\bar{x}_t^{(n-1)})] = \\ &= -(I - F)^{-1} [V(\bar{x}_t^{(n-1)}) - V(\underline{x}_t^{(n-1)})] \leq (I - F)^{-1} \mathcal{L}(\bar{x}_t^{(n-1)} - \underline{x}_t^{(n-1)}) \\ \bar{x}_t^{(n)} - \underline{x}_t^{(n)}(t) &\leq (I - F)^{-1} \mathcal{L}(\bar{x}_t^{(n-1)} - \underline{x}_t^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Với $n = 1$ ta có

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(1)}(t) - \underline{x}^{(1)}(t) &\leq (I - F)^{-1} \mathcal{L}(\bar{x}_t^{(0)} - \underline{x}_t^{(0)}) \leq (I - F)^{-1} \mathcal{L}(\bar{x}^{(0)} - \underline{x}^{(0)}) \leq \\ &\leq \delta^{(1)}(t). \end{aligned}$$

$$\bar{x}^{(1)}(t) - \underline{x}^{(1)}(t) \leq \delta^{(1)}(t).$$

Giả sử

$$\bar{x}^{(n)}(t) - \underline{x}^{(n)}(t) \leq \delta^{(n)}(t).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(n+1)}(t) - \underline{x}^{(n+1)}(t) &\leq (I - F)^{-1} \mathcal{L}(\bar{x}_t^{(n)} - \underline{x}_t^{(n)}) \leq \\ &\leq (I - F)^{-1} \mathcal{L}(\delta_t^{(n)}) = \delta^{(n+1)}(t). \quad \square \end{aligned}$$

Chương IX
PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI
PHÂN THUỘC LOẠI ELLIPTIC

I. SƠ ĐỒ SAI PHÂN ĐỐI VỚI
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THUỘC LOẠI ELLIPTIC
TRONG KHÔNG GIAN H^{2m} VÀ C.

§1. SỰ XẤP XỈ VÀ SỰ HỘI TỤ

1. Xấp xỉ sai phân địa phương của những toán tử vi phân đơn giản nhất.

Giả sử $\mathcal{L}$ là một toán tử vi phân. Ta thay $\mathcal{L}v$, trong đó v là hàm trơn, bằng biểu thức sai phân phụ thuộc h , tại điểm x :

$$\mathcal{L}_h v(x) = \sum_{\xi \in S(x)} A(x, \xi) v(\xi),$$

trong đó $(x, \xi) \mapsto A(x, \xi)$ là hệ tử, $\xi \mapsto v(\xi)$ là hàm lưới, $S(x)$ là một tập hợp nào đó của một số điểm nút ξ mà ta gọi là *khôn* tại điểm x , với bước $h > 0$.

Ví dụ

1) $\mathcal{L}v = \frac{dv}{dx}$. Ta lấy trên trục số, lưới đều với bước $h > 0$. Tại điểm x ta chọn hai khôn 2 điểm : $(x, x + h)$ và $(x - h, x)$. Khi đó :

$\mathcal{L}_h v(x) = \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \equiv v_x$ được gọi là *đạo hàm sai phân phải* tại x .

$$\mathcal{L}_h v(x) = \frac{v(x) - v(x-h)}{h} \equiv v_{\bar{x}} \text{ được gọi là đạo hàm sai phân trái tại } x.$$

$$\mathcal{L}_h v(x) = \frac{v_x + v_{\bar{x}}}{2} \equiv v_{\bar{x}} \text{ được gọi là đạo hàm sai phân trung tâm tại } x.$$

2) $\mathcal{L}v = \frac{d^2 v}{dx^2}, \frac{d^4 v}{dx^4}$. Tại điểm nút x của lưới trên ta chọn khuôn 3 điểm và khuôn 5 điểm :

$$(x-h, x, x+h) \text{ và } (x-2h, x-h, x, x+h, x+2h).$$

Ta được các đạo hàm sai phân tại điểm x đối với $\frac{d^2 v}{dx^2}$ và $\frac{d^4 v}{dx^4}$:

$$\mathcal{L}_h v(x) = \frac{v(x-h) - 2v(x) + v(x+h)}{h^2} \equiv v_{\bar{x}\bar{x}} \text{ và}$$

$$\mathcal{L}_h v(x) = \frac{v(x-2h) - 4v(x-h) + 6v(x) - 4v(x+h) + v(x+2h)}{h^4} \equiv v_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}}.$$

$$3) \mathcal{L}v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \equiv \Delta v, \Delta \text{ là toán tử Laplace.}$$

Ta lấy trên mặt phẳng (x_1, x_2) hai họ đường thẳng song song với các trục tọa độ được xác định bởi các phương trình :

$$x_1 = i_1 h_1, \quad x_2 = i_2 h_2 \quad (h_i > 0; i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Đối với khuôn "chữ thập" gồm 5 điểm :

$$(x_1 - h_1, x_2), (x_1 + h_1, x_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 - h_2), (x_1, x_2 + h_2)$$

ta được biểu thức sai phân đối với Δv tại điểm x :

$$\mathcal{L}_h v(x) = \frac{1}{h_1^2} [v(x_1 - h_1, x_2) - 2v(x_1, x_2) + v(x_1 + h_1, x_2)] +$$

$$\frac{1}{h_2^2} [v(x_1, x_2 - h_2) - 2v(x_1, x_2) + v(x_1, x_2 + h_2)]$$

$$\equiv v_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} + v_{\bar{x}_2 \bar{x}_2} \equiv \overset{o}{\Delta} v.$$

Định nghĩa 9.1.1. Ta gọi hàm lưới $x \mapsto \Psi(x) = \mathcal{L}_h v(x) - \mathcal{L}v(x)$ là sai số xấp xỉ sai phân của $\mathcal{L}v$ tại điểm x .

Định nghĩa 9.1.2. Ta nói rằng toán tử sai phân $\mathcal{L}_h$ xấp xỉ toán tử vi phân $\mathcal{L}$ tại điểm x đến bậc $m > 0$, nếu và chỉ nếu với $h > 0$ khá bé ($h < h_0$) :

$$\Psi(x) = \mathcal{L}_h v(x) - \mathcal{L}v(x) = O(h^m).$$

Ví dụ

Giả thiết hàm số $x \mapsto v(x)$ là khá trơn, sử dụng công thức khai triển Taylor tại x ta được :

$$v_x = v'(x) + O(h), \quad v_{\bar{x}} = v'(x) + O(h), \quad v_x^o = v'(x) + O(h^2).$$

Như vậy v_x và $v_{\bar{x}}$ xấp xỉ v' đến bậc nhất, còn v_x^o xấp xỉ v' đến bậc 2.

Bằng phương pháp tương tự ta được :

$$v_{\bar{x}x} - v'' = O(h^2) \quad \text{hoặc} \quad v_{\bar{x}x} - v'' = \frac{h^2}{12} v^{IV} + O(h^4),$$

$$v_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - v^{IV} = O(h^2) \quad \text{hoặc} \quad v_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - v^{IV} = \frac{h^2}{6} v^{VI} + O(h^4),$$

$$v_x^o - \Delta v = O(h^2) \quad \text{hoặc} \quad v_x^o - \Delta v = \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x_2^4} + O(h^4),$$

2. Xấp xỉ sai phân trên lưới.

Giả sử ω_h là một lưới nào đó phụ thuộc tham số h của miền G hữu hạn của không gian Euclide $\mathbf{R}^n$, H_h là không gian tuyến tính các hàm lưới V_h xác định trên lưới ω_h , H_0 là không gian các hàm

trơn xác định trên miền G , $\|\cdot\|_h$ và $\|\cdot\|_0$ là chuẩn nào đó của các không gian H_h và H_0 .

Ta giả thiết rằng :

1. Tồn tại toán tử tuyến tính $\mathcal{J}_h$ sao cho $\mathcal{J}_h u = u_h, \forall u \in H_0$.
2. Hai chuẩn $\|\cdot\|_h$ và $\|\cdot\|_0$ thỏa mãn điều kiện tương thích :

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\mathcal{J}_h u\| = \|u\|_0,$$

trong đó $|h|$ là chuẩn của vectơ h .

Bây giờ ta khảo sát toán tử vi phân $\mathcal{L}$ trong không gian H_0 và toán tử sai phân $\mathcal{L}_h$ trong không gian H_h :

$$\mathcal{L}_h : H_h \rightarrow H_h$$

$$v_h \mapsto \mathcal{L}_h v_h$$

Định nghĩa 9.1.3. Ta gọi hiệu số : $\Psi_h = \mathcal{L}_h v_h - (\mathcal{L}v)_h$, trong đó $v_h = \mathcal{J}_h v, (\mathcal{L}v)_h = \mathcal{J}_h(\mathcal{L}v)$, là *sai số xấp xỉ* của toán tử $\mathcal{L}$ bởi toán tử $\mathcal{L}_h$.

1) Nếu $\|\Psi_h\|_h \rightarrow 0$ khi $|h| \rightarrow 0$ thì ta nói $\mathcal{L}_h$ *xấp xỉ* $\mathcal{L}$ trong không gian H_h .

2) Nếu $\|\Psi_h\|_h = O(|h|^m)$ hoặc $\|\Psi_h\|_h \leq M(h)^m$, trong đó M là hằng số dương không phụ thuộc $|h|$, thì ta nói $\mathcal{L}_h$ *xấp xỉ* $\mathcal{L}$ đến bậc $m > 0$ trong không gian H_h .

3. Sự hội tụ và sự chính xác

Giả sử G là miền hữu hạn với mặt biên Γ của không gian Euclide $\mathbb{R}^n$. Hãy tìm nghiệm $x \mapsto u(x)$ của phương trình vi phân :

$$\mathcal{L}u = f, x = (x_1, \dots, x_n) \in G; \quad \ell u = g, x = (x_1, \dots, x_n) \in \Gamma, \quad (1)$$

trong đó $\mathcal{L}$ và ℓ là những toán tử vi phân tuyến tính đã cho, còn f và g là những hàm số đã cho trong G và trên Γ .

Sau này ta sẽ luôn luôn giả thiết rằng : Nghiệm của bài toán vi phân (1) tồn tại và duy nhất thuộc vào không gian Banach H_0 nào đó.

Bài toán sai phân (hoặc sơ đồ sai phân) tương ứng với bài toán vi phân (1) là :

$$\mathcal{L}_h y_h = \varphi_h, \quad x \in \omega_h, \quad \ell_h y_h = \chi_h, \quad x \in \gamma_h, \quad (2)$$

trong đó $\mathcal{L}_h$ và ℓ_h là những toán tử sai phân tuyến tính tương ứng với $\mathcal{L}$ và ℓ , y_h là hàm lưới chưa biết, $\varphi_h = \mathcal{R}_h f$ và $\chi_h = \mathcal{R}_h g$ là những hàm lưới đã biết, ω_h và γ_h là tập hợp những điểm nút trong và nút biên của miền $\bar{G} = G \cup \Gamma$.

Việc ứng dụng phương pháp sai phân để giải bài toán vi phân nảy sinh vấn đề cơ bản sau :

Hãy tìm nghiệm của bài toán vi phân với độ chính xác $\varepsilon > 0$ cho trước bằng một số hữu hạn phép tính số học.

Như vậy ta cần đánh giá sự chênh lệch giữa nghiệm của bài toán vi phân với nghiệm tương ứng của bài toán sai phân trong không gian H_h .

Giả sử $u \in H_0$ là nghiệm chính xác của bài toán (1), $u_h \in H_h$ là hàm lưới mà tại mỗi điểm nút của ω_h có giá trị bằng giá trị của u tại điểm nút ấy. Ta gọi hiệu số :

$$z_h = y_h - u_h$$

là sai số của sơ đồ (2) :

Thay y_h vào phương trình (2), ta được :

$$\mathcal{L}_h z_h = \Psi_h, \quad x \in \omega_h; \quad \ell_h z_h = v_h, \quad x \in \gamma_h, \quad (3)$$

trong đó $\Psi_h = \varphi_h - \mathcal{L}_h u_h$ và $v_h = \chi_h - \ell_h u_h$.

Ta gọi hàm lưới $\Psi_h(v_h)$ là *sai số xấp xỉ của bài toán (1) bởi bài toán (2) trên nghiệm u của bài toán (1)*.

Ta sẽ đưa vào không gian H_h ba chuẩn thích hợp :

$\| \cdot \|_{(1_h)}, \| \cdot \|_{(2_h)}, \| \cdot \|_{(3_h)}$, được gọi chung là những chuẩn lưới dùng để đánh giá Z_h , Ψ_h và v_h .

Định nghĩa 9.1.4. Ta nói rằng :

1) Nghiệm của bài toán sai phân (2) *hội tụ* về nghiệm của bài toán vi phân (1) nếu và chỉ nếu :

$$\| z_h \|_{(1_h)} = \| y_h - u_h \|_{(1_h)} \rightarrow 0 \text{ khi } |h| \rightarrow 0.$$

2) Sơ đồ (2) *hội tụ đến bậc* $m > 0$ (hay với tốc độ $O(|h|^m)$), hay với độ chính xác $O(|h|^m)$, nếu và chỉ nếu với $|h|$ khá bé ($|h| < h_0$) ta có :

$$\| z_h \|_{(1_h)} = \| y_h - u_h \|_{(1_h)} \leq M |h|^m,$$

trong đó M là hằng số dương không phụ thuộc $|h|$.

3) Sơ đồ (2) có *xấp xỉ bậc* $m > 0$ đối với bài toán (1) nếu và chỉ nếu :

$$\| \Psi_h \|_{(1_h)} = O(|h|^m), \quad \| v_h \|_{(3_h)} = O(|h|^m).$$

4) Sơ đồ (2) là *ổn định* nếu và chỉ nếu : $\forall \varphi_h, \forall \chi_h$, tồn tại nghiệm của bài toán (2) và

$$\| y_h \|_{(1_h)} \leq M (\| \varphi_h \|_{(2_h)} + \| \chi_h \|_{(3_h)}),$$

trong đó M là hằng số dương không phụ thuộc $|h|$, φ_h và χ_h .

Chú ý

Ký hiệu f_h và $(\mathcal{L}u)_h$ là những giá trị của f và $\mathcal{L}u$ lấy trên lưới ω_h và lưu ý rằng $(f - \mathcal{L}u)_h = 0$, lúc này ta có :

$$\Psi_h = (\varphi_h - f_h) + ((\mathcal{L}u)_h - \mathcal{L}_h u_h).$$

Nói khác đi, sai số xấp xỉ của phương trình vi phân bằng tổng của sai số xấp xỉ về phải và của toán tử vi phân.

4. Một vài công thức sai phân thường dùng

1) Đạo hàm sai phân của tích hai hàm lưới :

$$(uv)_x = u_x v + u^{(+1)} v_x = u_x v^{(+1)} + u v_x,$$

$$(uv)_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v + u^{(-1)} v_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v^{(-1)} + u v_{\bar{x}},$$

trong đó $u^{(\pm 1)} = u(x \pm h)$, $u_x = \frac{u^{(+1)} - u}{h}$, $u_{\bar{x}} = \frac{u - u^{(-1)}}{h}$.

2) Tích phân từng phần các hàm lưới :

$$(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v),$$

$$(u, v_{\bar{x}}) = u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - (u_x, v),$$

trong đó $(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h$, $(u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i h$, $[u, v) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i h$,

là những công thức tương tự sai phân công thức tích phân từng phần trong giải tích cổ điển :

$$\int_0^1 uv' dx = uv \Big|_0^1 - \int_0^1 u' v dx,$$

bằng cách chia đoạn $[0, 1]$ ra làm N đoạn bằng nhau với bước $h > 0$.

3) Công thức Green phản đối xứng :

$$a) (z, (y_{\bar{x}})_x) = -(z_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}) + zy_{\bar{x}}|_N - z_0 y_{x,0}.$$

Nếu $z_0 = z_N = 0$, thì

$$(z, \overset{0}{\Delta} y) = -(z_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}).$$

Nếu $z \equiv y$, thì

$$(y, \overset{o}{\Delta} y) = -(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}).$$

trong đó $\overset{o}{\Delta} y = y_{\bar{x}x}$.

$$b) (z, (y_x)_{\bar{x}}) = -[z_x, y_x] + zy_{\bar{x}}|_N - z_0 y_{x,0}.$$

Nếu $z_0 = z_N = 0$, thì

$$(z, (y_x)_{\bar{x}}) = -[z_x, y_x].$$

4) Công thức Green đối xứng :

$$(z, y_{\bar{x}x}) - (y, z_{\bar{x}x}) = (zy_{\bar{x}} - z_{\bar{x}}y)_N - (y_x z - z_x y)_0.$$

Nếu $y_0 = y_N = z_0 = z_N = 0$, thì

$$(\overset{o}{\Delta} y, z) = (y, \overset{o}{\Delta} z).$$

§2. HÀM RIÊNG VÀ GIÁ TRỊ RIÊNG CỦA TOÁN TỬ SAI PHÂN LAPLACE $\overset{o}{\Delta}$.

1. Hàm riêng và trị riêng.

Giả sử G là hình hộp $\subset \mathbb{R}^n$ với mặt biên Γ :

$$\bar{G} = G \cup \Gamma = \{x = (x_1, \dots, x_n) | 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha; \alpha = \overline{1, n}\}.$$

Ta đưa vào miền $\bar{G}$ lưới sai phân :

$$\begin{aligned} \bar{\omega} = \omega_h \cup \gamma_h &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{G} | x_\alpha = i_\alpha h_\alpha; \\ i_\alpha &= 0, 1, \dots, N_\alpha; N_\alpha h_\alpha = l_\alpha; \alpha = \overline{1, n}\}. \end{aligned}$$

Ta gọi ω_h là tập hợp những điểm nút trong, γ_h là tập hợp những điểm nút biên. Ta khảo sát toán tử sai phân tuyến tính $\overset{o}{\Delta}$ được xác định bởi :

$$\Delta v = v_{\bar{x}_1 x_1} + \dots + v_{\bar{x}_n x_n},$$

trong đó

$$v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha^2} [v(x_1, \dots, x_\alpha - h_\alpha, \dots, x_n) - 2v(x_1, \dots, x_\alpha, \dots, x_n) + v(x_1, \dots, x_\alpha + h_\alpha, \dots, x_n)],$$

Δ được gọi là *toán tử sai phân Laplace*.

Trước tiên ta sẽ giải bài toán về trị riêng đối với toán tử sai phân Laplace một chiều :

Tìm hàm riêng $v \neq 0$ và trị riêng λ sao cho thỏa mãn :

$$v_{\bar{x}x} + \lambda v = 0 ; v_0 = v(0) = v_N = v(l) = 0.$$

Chuyển bài toán sang bài toán dưới dạng chỉ số tương đương với nó:

$$v_{i+1} - 2\left(1 - \frac{h^2 \lambda}{2}\right)v_i + v_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Ta sẽ tìm nghiệm dưới dạng $v(x) = \sin \alpha x$, trong đó α sẽ xác định sau.

Bây giờ ta có :

$$v_{i+1} + v_{i-1} = \sin \alpha(x+h) + \sin \alpha(x-h) = 2 \sin \alpha x \cos \alpha h.$$

Thay biểu thức này vào phương trình trên, ta được :

$$2 \sin \alpha x \cos \alpha h = 2\left(1 - \frac{h^2 \lambda}{2}\right) \sin \alpha x.$$

Vì ta tìm nghiệm không tầm thường $v(x) = \sin \alpha x \neq 0$, nên từ đẳng thức trên suy ra :

$$1 - \frac{h^2 \lambda}{2} = \cos \alpha h,$$

• hoặc
$$\lambda = \frac{2}{h^2} (1 - \cos \alpha h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha h}{2}.$$

Tham số α được chọn sao cho $v(x) = \sin \alpha x$ thỏa mãn các điều kiện biên :

$$v_0 = v(0) = v_N = v(l) = 0.$$

Ta tìm được :

$$\sin \alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = \alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Vậy ta được các hàm riêng và các trị riêng đối với toán tử sai phân Laplace một chiều là :

$$v^{(k)}(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}; \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2l}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

MỘT SỐ TÍNH CHẤT :

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{8}{l^2} \leq \lambda_1 &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N-1} = \\ &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h(N-1)}{2l} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l} < \frac{4}{h^2}. \end{aligned}$$

2) Các hàm riêng tương ứng với các trị riêng khác nhau thì trực giao với nhau theo nghĩa tích vô hướng : $\sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h = (u, v).$

Thật vậy, theo công thức Green đối xứng :

$$0 = (v_{xx}^{(k)}, v^{(m)}) - (v^{(k)}, v_{xx}^{(m)}) = (\lambda_m - \lambda_k)(v^{(k)}, v^{(m)}),$$

suy ra với $\lambda_m \neq \lambda_k$ thì $(v^{(k)}, v^{(m)}) = 0.$

$$3) \text{ Chuẩn của các hàm riêng } v^{(k)} \text{ là : } \|v^{(k)}\| = \sqrt{\frac{l}{2}}.$$

Thật vậy, ta có :

$$\begin{aligned}\|v^{(k)}\|^2 &= \sum_{s=1}^{N-1} (v^{(k)}(x_s))^2 h = \sum_{s=1}^{N-1} h \sin^2 \frac{k\pi x_s}{l} = \\ &= \sum_{s=1}^{N-1} \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{2k\pi x_s}{l} \right).\end{aligned}$$

Ta đặt $q_k = \exp\left(i \frac{2k\pi h}{l}\right)$, vậy : $q_k^s = \exp\left(i \frac{2k\pi}{l} x_s\right)$, $q_k^N = 1$.

Ta được :

$$\sum_{s=1}^{N-1} h \cos \frac{2k\pi}{l} x_s = \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{N-1} h q_k^s = \operatorname{Re} . h \frac{q_k^N - q_k}{q_k - 1} = \operatorname{Re} . h \frac{1 - q_k}{q_k - 1} = -h.$$

Thay biểu thức này vào biểu thức $\|v^{(k)}\|^2$, ta được :

$$\|v^{(k)}\|^2 = \frac{h(N-1)}{2} + \frac{h}{2} = \frac{hN}{2} = \frac{l}{2}.$$

Vậy hệ thống các hàm riêng $\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} v^{(k)}(x) \right\} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}$

($k = 1, 2, \dots, N-1$) làm thành một hệ thống trực chuẩn theo nghĩa

$$\text{tích vô hướng } (u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h.$$

Bây giờ ta phát biểu bài toán về trị riêng đối với toán tử sai phân Laplace n chiều :

Tìm các hàm riêng $v \neq 0$ thỏa mãn :

$$\overset{o}{\Delta} v + \lambda v = 0, \quad x \in \omega_h; \quad v = 0, \quad x \in \gamma_h.$$

Ta sẽ tìm các hàm riêng v dưới dạng tích các hàm lưới $X^{(\alpha)}$:

$$v(x_1, \dots, x_n) = X^{(1)}(x_1) \dots X^{(n)}(x_n),$$

trong đó ta giả thiết $X^{(\alpha)}$ chỉ phụ thuộc x_α .

Bằng phương pháp tách biến quen thuộc và sử dụng kết quả của bài toán về trị riêng đối với toán tử sai phân Laplace một chiều, ta được các hàm riêng và các trị riêng đối với toán tử sai phân Laplace

n chiều Λ là :

$$v = v_{k_1 \dots k_n} = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{l_1 \dots l_n}} \sin \frac{k_1 \pi x_1}{l_1} \dots \sin \frac{k_n \pi x_n}{l_n},$$

$$\lambda = \lambda_{k_1 \dots k_n} = 4 \left(\frac{1}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} + \dots + \frac{1}{h_n^2} \sin^2 \frac{k_n \pi h_n}{2l_n} \right),$$

trong đó $k_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1$; $x_\alpha = i_\alpha h_\alpha$; $i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1$; $\alpha = \overline{1, n}$.

Rõ ràng nếu các cạnh l_α ($\alpha = \overline{1, n}$) của hình hộp G là hữu tỷ với nhau thì ta sẽ nhận được cùng một trị riêng λ với những số tự nhiên K_α khác nhau và như thế sẽ được các hàm riêng khác nhau.

2. Một số tính chất quan trọng của các hàm riêng và trị riêng của toán tử Λ .

1) Đối với các trị riêng ta có các đánh giá :

$$\delta_0 = 8 \left(\frac{1}{l_1^2} + \dots + \frac{1}{l_n^2} \right) \leq \lambda_{1 \dots 1} \leq \dots \leq \lambda_{N_1 - 1 \dots N_n - 1} \leq$$

$$\leq 4 \left(\frac{1}{h_1^2} + \dots + \frac{1}{h_n^2} \right) = \Delta_0.$$

2) Số lượng các hàm riêng là $N = (N_1 - 1) \dots (N_n - 1)$ và chúng làm thành một hệ thống trực chuẩn theo nghĩa tích vô hướng .

$$(v, w) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n-1} v_{i_1 \dots i_n} w_{i_1 \dots i_n} h_1 \dots h_n ; \|v\|^2 = (v, v)$$

3) Nếu f là một hàm lưới xác định trên ω_h và triệt tiêu trên γ_h , thì bấy giờ tồn tại duy nhất khai triển theo hệ thống các hàm riêng $\{v_{k_1 \dots k_n}\}$:

$$f = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} C_{k_1 \dots k_n} v_{k_1 \dots k_n},$$

trong đó $c_{k_1 \dots k_n} = (f, v_{k_1 \dots k_n})$.

Ngoài ra tồn tại đẳng thức Parseval :

$$\|f\|^2 = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} C_{k_1 \dots k_n}^2.$$

§3. TƯƠNG TỰ SAI PHÂN ĐỊNH LÝ NHÚNG SOBOLEV.

Trong hình hộp n chiều của $\mathbb{R}^n$

$$\bar{G} = G \cup \Gamma = \{x = (x_1, \dots, x_n) | 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha; \alpha = \overline{1, n}\},$$

với lưới

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{G} | x_\alpha = i_\alpha h_\alpha;$$

$i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha; N_\alpha h_\alpha = l_\alpha; \alpha = \overline{1, n}\}$, ta gọi H_h là không gian tuyến

tính các hàm lưới v xác định trên ω_h và triệt tiêu trên biên γ_h với tích vô hướng và chuẩn :

$$(v, w) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n-1} v_{i_1 \dots i_n} w_{i_1 \dots i_n} h_1 \dots h_n; \|v\|^2 = (v, v).$$

Định lý 9.3.1 (nhúng không gian $H^{2m}(G)$ vào không gian $C(G)$: $H^{2m}(G) \subset C(G)$).

$\forall v \in H_h$, nếu $n < 4m$ ($m \in \mathbb{N}^*$, n là số chiều $\mathbb{R}^n$) thì tồn tại tương tự sai phân định lý nhúng Sobolev :

$$\|v\|_C \leq M \| \overset{\circ}{A}^m v \|, \quad (4)$$

trong đó $\|v\|_C = \max_{x \in \omega_h} |v(x)|$, $\overset{\circ}{A} = -\overset{\circ}{\Delta}$, $\overset{\circ}{\Delta} v = v_{\bar{x}_1 x_1} + \dots + v_{\bar{x}_n x_n}$,

$$\overset{\circ}{A}^m = \underbrace{\overset{\circ}{A} \dots \overset{\circ}{A}}_m,$$

M là hằng số dương không phụ thuộc v :

$$M = \frac{l_0^{2m}}{2^{2m - \frac{n}{2}} \sqrt{l_1 \dots l_n}} \sqrt{\frac{1}{(2n)^{2m}} + \frac{S_1}{2^n ((4m - n))}}, \quad (5)$$

trong đó $l_0 = \max\{l_1, \dots, l_n\}$, $S_1 = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ là diện tích mặt cầu đơn vị

n chiều.

Chứng minh :

Sử dụng các tính chất của hàm riêng và trị riêng của toán tử sai phân Laplace $\overset{\circ}{\Delta}$ ở §2, ta khai triển hàm lưới v theo hệ thống các hàm riêng trực chuẩn $\{v_{k_1 \dots k_n}\}$, ta được các đẳng thức và bất đẳng thức sau :

$$v = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} C_{k_1 \dots k_n} v_{k_1 \dots k_n},$$

$$\overset{\circ}{A} v = \sum_{k_1 \dots k_n} C_{k_1 \dots k_n} \lambda_{k_1 \dots k_n} v_{k_1 \dots k_n},$$

$$\overset{\circ}{A}^m v = \sum_{k_1 \dots k_n} C_{k_1 \dots k_n} \lambda_{k_1 \dots k_n}^m v_{k_1 \dots k_n},$$

$$\|A^m v\|^2 = \sum_{k_1 \dots k_n} C_{k_1 \dots k_n}^2 \lambda_{k_1 \dots k_n}^{2m},$$

$$|v| \leq \left(\sum_{k_1 \dots k_n} |C_{k_1 \dots k_n}| \right) \max_{k_1 \dots k_n} |v_{k_1 \dots k_n}|,$$

$$|v| \leq \frac{2^{n/2}}{\sqrt{l_1 \dots l_n}} \sum_{k_1 \dots k_n} |C_{k_1 \dots k_n}|,$$

$$\text{hay } |v| \leq \frac{2^{n/2}}{\sqrt{l_1 \dots l_n}} \sum_{k_1 \dots k_n} |(C_{k_1 \dots k_n} \lambda_{k_1 \dots k_n}^m) \lambda_{k_1 \dots k_n}^{-m}|.$$

Sử dụng bất đẳng thức C.Schwarz, ta được :

$$\|v\|_C = \max_{x \in \omega_n} |v(x)| \leq \frac{2^{n/2}}{\sqrt{l_1 \dots l_n}} \|A^m v\| \left(\sum_{k_1 \dots k_n} \lambda_{k_1 \dots k_n}^{-2m} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Ta cần đánh giá tổng :

$$T = \sum_{k_1 \dots k_n} \lambda_{k_1 \dots k_n}^{-2m} = \lambda_{1 \dots 1}^{-2m} + \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1 + \dots + k_n > n}}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} \lambda_{k_1 \dots k_n}^{-2m}.$$

Sử dụng tính chất của trị riêng $\lambda_{k_1 \dots k_n}$, ta được các đánh giá sau :

$$\lambda_{1 \dots 1} \geq \delta_0 = 8 \left(\frac{1}{l_1^2} + \dots + \frac{1}{l_n^2} \right) \geq \frac{8n}{l_0^2} \Leftrightarrow \lambda_{1 \dots 1}^{-2m} \leq \frac{l_0^{4m}}{(8n)^{2m}},$$

$$\begin{aligned} \lambda_{k_1 \dots k_n} &= \frac{\pi^2 k_1^2}{l_1^2} \left(\frac{\sin \varphi_1}{\varphi_1} \right)^2 + \dots + \frac{\pi^2 k_n^2}{l_n^2} \left(\frac{\sin \varphi_n}{\varphi_n} \right)^2 \geq \\ &\geq 4 \left(\frac{k_1^2}{l_1^2} + \dots + \frac{k_n^2}{l_n^2} \right) \geq \frac{4}{l_0^2} (k_1^2 + \dots + k_n^2), \end{aligned}$$

trong đó $\varphi_\alpha = \frac{k_\alpha \pi h_\alpha}{2l_\alpha}$ ($\alpha = \overline{1, n}$), $l_0 = \max\{l_1, \dots, l_n\}$ (vì $\frac{\sin \varphi}{\varphi} \geq \frac{2}{\pi}$

trong $[0, \frac{\pi}{2}]$).

Vậy ta được :

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} \lambda_{k_1 \dots k_n}^{-2m} &\leq \frac{l_0^{4m}}{2^{4m}} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} \frac{1}{(k_1^2 + \dots + k_n^2)^{2m}} \leq \\ &\leq \frac{l_0^{4m}}{2^{4m}} \underbrace{\int_1^\infty \dots \int_1^\infty}_{n} \frac{d\tau}{(k_1^2 + \dots + k_n^2)^{2m}} \leq \frac{l_0^{4m}}{2^{4m}} \left(\int_{r \geq 1}^n \frac{d\tau}{r^{4m}} \right) \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

trong đó $r^2 = k_1^2 + \dots + k_n^2$.

Như ta đã biết, tích phân suy rộng n lớp sẽ hội tụ nếu $n < 4m$, nhưng điều kiện này được thỏa mãn do giả thiết của định lý.

Chuyển việc tính tích phân suy rộng n lớp sang tọa độ cực, ta được :

$$\begin{aligned} d\tau &= r^{n-1} dr ds, \\ \int_{r \geq 1} \int \frac{d\tau}{r^{4m}} &= \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{4m+n-1}} \int_{(S_1)} ds = \frac{S_1}{4m-n}, \end{aligned}$$

trong đó (S_1) là mặt cầu đơn vị của $\mathbb{R}^n$, S_1 (là diện tích mặt cầu đơn

$$vị) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Vậy :

$$\sum_{k_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} \lambda_{k_1 \dots k_n}^{-2m} \leq \frac{l_0^{4m}}{2^{4m+n}} \cdot \frac{S_1}{4m-n},$$

$$\text{và} \quad T \leq \frac{l_0^{4m}}{2^{4m}} \left[\frac{1}{(2n)^{2m}} + \frac{S_1}{2^n(4m-n)} \right].$$

thay T vào (6), định lý được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Hệ quả 9.3.1

Từ định lý tổng quát trên, trong một số trường hợp đặc biệt, suy ra một số bất đẳng thức được ứng dụng trong thực hành ở các công trình [2], [18], [24], [29] :

1. Nếu $n = 1$ và $m = 1$, thì

$$\|v\|_C \leq \frac{l_0^{3/2}}{3} \|A^0 v\|. \quad (7)$$

2. Nếu $n = 2$ và $m = 1$, thì

$$\|v\|_C \leq \frac{l_0^2}{2\sqrt{l_1 l_2}} \|A^0 v\|. \quad (8)$$

3. Nếu $n = 3$ và $m = 1$, thì

$$\|v\|_C \leq \frac{l_0^2}{2\sqrt{l_1 l_2 l_3}} \|A^0 v\|. \quad (9)$$

4. Nếu $n = 2$ và $m = 2$, thì

$$\|v\|_C \leq \frac{l_0^4}{30\sqrt{l_1 l_2}} \|A^2 v\|. \quad (10)$$

5. Nếu $n = 3$ và $m = 2$, thì

$$\|v\|_C \leq \frac{2}{25} \cdot \frac{l_0^4}{2\sqrt{l_1 l_2 l_3}} \|A^2 v\|. \quad (11)$$

Chú ý : A^2 là toán tử sai phân của toán tử song điều hòa Δ^2 :

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}.$$

$$\overset{\circ}{A}^2 v = v \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 + 2v \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2 + v \bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2.$$

Định lí 9.3.2. (nhúng không gian : $H^{2m}(G) \subset H^{2(m-1)}(G)$ và $H^2(G) \subset L_2(G)$).

$\forall v \in H_h, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại tương tự sai phân định lí nhúng Sobolev :

$$\begin{aligned} \|\overset{\circ}{A}^{m-1} v\| &\leq \frac{1}{\delta_0} \|\overset{\circ}{A}^m v\|, \\ \|v\| &\leq \frac{1}{\delta_0} \|\overset{\circ}{A} v\|, \end{aligned} \quad (12)$$

trong đó $\delta_0 = 8 \left(\frac{1}{l_1^2} + \dots + \frac{1}{l_n^2} \right)$; $\overset{\circ}{A}$ là toán tử sai phân đã xác định ở định lí 9.3.1 ;

$$\overset{\circ}{A}^0 \equiv E \text{ toán tử đơn vị.}$$

Định lí 9.3.3

$\forall v \in H_h$, tồn tại các bất đẳng thức sau :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_0^{m-2}} \|\overset{\circ}{A}^{m-1} v\|^2 &\leq (\overset{\circ}{A}^m v, v) \leq \frac{1}{\Delta_0^{m-2}} \|\overset{\circ}{A}^{m-1} v\|^2 \text{ nếu } m \leq 2 \\ \frac{1}{\Delta_0^{m-2}} \|\overset{\circ}{A}^{m-1} v\|^2 &\leq (\overset{\circ}{A}^m v, v) \leq \frac{1}{\delta_0^{m-2}} \|\overset{\circ}{A}^{m-1} v\|^2 \text{ nếu } m \geq 3 \end{aligned} \quad (13)$$

trong đó $\delta_0 = 8 \left(\frac{1}{l_1^2} + \dots + \frac{1}{l_n^2} \right)$, $\Delta_0 = 4 \left(\frac{1}{h_1^2} + \dots + \frac{1}{h_n^2} \right)$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Chúng minh 2 định lí 9.3.2. và 9.3.3 dành cho độc giả.

Hệ quả 9.3.2 (xem [24]).

1. Nếu $m = 1$, thì

$$\delta_0 \|v\|^2 \leq (\overset{\circ}{A} v, v) \leq \Delta_0 \|v\|^2. \quad (14)$$

Bất đẳng thức bên trái chứng tỏ $\overset{\circ}{A}$ là toán tử xác định dương.

2. Nếu $m = 1$ và $n = 1$, thì

$$\frac{8}{l^2} \|v\|^2 \leq \|v_x^-\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|v\|^2, \quad (15)$$

hoặc

$$\frac{h^2}{4} \|v_x^-\|^2 \leq \|v\|^2 \leq \frac{l^2}{8} \|v_x^-\|^2,$$

trong đó $\|v_x^-\|^2 = (v_x^-, v_x^-)$; $(v, v) = \sum_{i=1}^N v_i^2 h$.

3. Nếu $m = 2$, thì

$$\|\overset{\circ}{A} v\|^2 \leq (\overset{\circ}{A}^2 v, v) \leq \|\overset{\circ}{A} v\|^2,$$

hoặc

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{A}^2 v, v) &= (\overset{\circ}{A} v, \overset{\circ}{A} v), \text{ đặt } w = \overset{\circ}{A} v, \text{ ta được:} \\ (\overset{\circ}{A} w, v) &= (w, \overset{\circ}{A} v). \end{aligned} \quad (16)$$

Đẳng thức (16) chứng tỏ $\overset{\circ}{A}$ là toán tử tự liên hợp.

Bây giờ ta sẽ chứng minh một định lý có tầm quan trọng trong việc ứng dụng nó cùng với định lý nhúng 9.3.1, chứng minh sự hội tụ đều của các sơ đồ sai phân có bậc chính xác cao.

Giả sử A là toán tử sai phân tuyến tính tự liên hợp sao cho $\mathcal{D}(A) = H_h$, $\mathcal{R}(A) \subseteq H_h$.

Định lý 9.3.4

Nếu A là toán tử sai phân tuyến tính tự liên hợp và giao hoán với toán tử $\overset{\circ}{A}$ (tức là $\overset{\circ}{A}A = A\overset{\circ}{A}$, $\overset{\circ}{A}$ là toán tử sai phân tuyến tính tự liên hợp đã xác định trên), ngoài ra $\forall v \in H_h$, bất đẳng thức sau được thỏa mãn :

$$C_1(\overset{\circ}{A}v, v) \leq (Av, v) \leq C_2(\overset{\circ}{A}v, v), \quad (17)$$

trong đó $0 < C_1 < C_2$ là hai hằng số dương nào đó, thế thì tồn tại bất đẳng thức sau :

$$C_1 \|\overset{\circ}{A}v\| \leq \|Av\| \leq C_2 \|\overset{\circ}{A}v\|. \quad (18)$$

Chứng minh.

Do giả thiết $\overset{\circ}{A}A = A\overset{\circ}{A}$, suy ra hai toán tử tự liên hợp $\overset{\circ}{A}$ và A có chung hệ thống các hàm riêng và nó chính là hệ thống các hàm riêng trực chuẩn $[v_{k_1 \dots k_n}]$ của toán tử $\overset{\circ}{A}$ đã biết.

$\forall v \in H_h$ thỏa mãn (17), vậy nếu v là một hàm riêng bất kỳ chung của $\overset{\circ}{A}$ và A , ta sẽ có :

$$C_1(\overset{\circ}{A}v_{k_1 \dots k_n}, v_{k_1 \dots k_n}) \leq (Av_{k_1 \dots k_n}, v_{k_1 \dots k_n}) \leq C_2(\overset{\circ}{A}v_{k_1 \dots k_n}, v_{k_1 \dots k_n})$$

hoặc

$$C_1 \lambda_{k_1 \dots k_n} \leq \bar{\lambda}_{k_1 \dots k_n} \leq C_2 \lambda_{k_1 \dots k_n},$$

trong đó $\lambda_{k_1 \dots k_n}$ là trị riêng đã biết của $\overset{\circ}{A}$, $\bar{\lambda}_{k_1 \dots k_n}$ là trị riêng chưa biết của A . Từ đây dễ dàng chứng minh được (18). Dễ dàng chứng minh định lý sau :

Định lý 9.3.5

Với những giả thiết của định lý 9.3.4, nếu

$$C_1(\overset{o}{A}^m v, v) \leq (Av, v) \leq C_2(\overset{o}{A}^m v, v),$$

thì
$$C_1 \|\overset{o}{A}^m v\| \leq \|Av\| \leq C_2 \|\overset{o}{A}^m v\|$$

Nhận xét chung

Các định lý đã chứng minh trên vẫn còn có hiệu lực đối với miền hình bậc thang, được tạo thành bởi một số hữu hạn các hình hộp n chiều có các cạnh song song với các trục tọa độ của không gian Euclide R^n .

Thật vậy, ta giả thiết rằng các cạnh của những hình hộp n chiều tạo thành miền G là hữu tỷ đối với nhau.

Như vậy ta có thể xây dựng được lưới ω_h với bước h_α ($\alpha = \overline{1, n}$), sao cho biên giới của lưới trùng với biên giới của miền G (h.9.1).

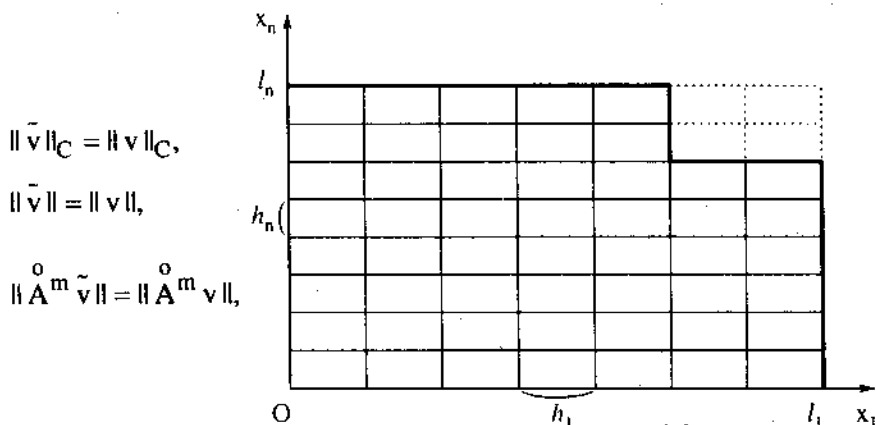
Ta bổ sung miền G thành hình hộp n chiều, ký hiệu $\tilde{G}$, và lưới ω_h thành lưới $\tilde{\omega}_h$ tương ứng.

Giả sử v là hàm lưới xác định trên lưới ω_h và triệt tiêu trên biên γ_h .

Ta định nghĩa hàm lưới $\tilde{v}$ xác định trên lưới $\tilde{\omega}_h$ như sau :

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x), & \text{nếu } x \in \omega_h \\ 0 & , \text{ nếu } x \in \tilde{\omega}_h \setminus \omega_h \end{cases}$$

Rõ ràng các biểu thức khai triển của 2 hàm lưới v và $\tilde{v}$ theo hệ thống các hàm riêng trực chuẩn $\{v_{k_1 \dots k_n}\}$ là như nhau. Do đó ta được :



$$\|\tilde{v}\|_C = \|v\|_C,$$

$$\|\tilde{v}\| = \|v\|,$$

$$\|\overset{o}{A} \tilde{v}\| = \|\overset{o}{A} v\|,$$

§4. ỨNG DỤNG

Ta sẽ chứng minh sự hội tụ của một số sơ đồ sai phân đối với bài toán biên thuộc loại phương trình elliptic trong các chuẩn lưới $\|\cdot\|_{L_2}$, $\|\cdot\|_{H^1}$ và $\|\cdot\|_C$.

1. Bài toán sai phân Dirichlet trong miền hình chữ nhật

Trong miền hình chữ nhật

$$\overline{G} = G \cup \Gamma = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha; \alpha = 1, 2\},$$

ta khảo sát bài toán Dirichlet đối với phương trình Poisson :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \quad x \in G; \quad u = g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (19)$$

Ta đưa vào miền $\overline{G}$ lưới sai phân :

$$\omega_h = \omega_h \cup \gamma_h = \{x = (x_1, x_2) \in \overline{G} \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha;$$

$$i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha; \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha; \quad \alpha = 1, 2\}.$$

trong đó ω_h là tập hợp các điểm nút trong, γ_h là tập hợp các điểm nút biên.

Nếu ta giả thiết bài toán (19) có nghiệm $u \in C^{(4)}(\overline{G})$, thì ta có ngay :

$$\overset{o}{A} u = u_{x_1 x_1}^- + u_{x_2 x_2}^- = \Delta u + \Psi(x) |h|^2,$$

trong đó $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, $\psi(x)$ là hàm bị chặn trên $\overline{G}$, tức là

$$|\Psi(x)| |h|^2 \leq M |h|^2 = O(|h|^2).$$

Bây giờ ta khảo sát tương ứng với bài toán vi phân (19), bài toán sai phân (hoặc sơ đồ sai phân) :

$$\overset{\circ}{\Delta} y = -f(x), x \in \omega_h; y = g(x), x \in \gamma_h. \quad (20)$$

Đối với sai số $z = y - u$ của sơ đồ (20), ta được bài toán sai phân mới :

$$\overset{\circ}{\Delta} z = -\overline{\Psi}, x \in \omega_h; z = 0, x \in \gamma_h,$$

trong đó $\overline{\Psi} = \overset{\circ}{\Delta} u + f = \overset{\circ}{\Delta} u - \Delta u = \Psi(x) |h|^2$.

Bài toán sai phân mới này được viết dưới dạng của toán tử $\overset{\circ}{A}$ như sau :

$$\overset{\circ}{A} z = \overline{\Psi}, x \in \omega_h; z = 0, x \in \gamma_h, \quad (21)$$

trong đó $\overset{\circ}{A} = -\overset{\circ}{\Delta}$, $\overline{\Psi} = \Psi(x) |h|^2$.

Sử dụng tương tự sai phân định lý nhúng Sobolev (bất đẳng thức (8), trường hợp $n = 2, m = 1$), ta được ngay kết quả :

$$\begin{aligned} \|z\|_C &\leq \frac{l_0^2}{2\sqrt{l_1 l_2}} \|\overset{\circ}{A} z\| = \frac{l_0^2}{2\sqrt{l_1 l_2}} \|\overline{\Psi}\| = \\ &= \frac{l_0^2}{2\sqrt{l_1 l_2}} \|\Psi(x) |h|^2\| = O(|h|^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Vậy :

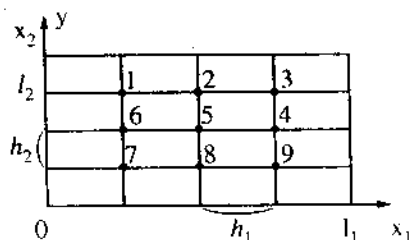
Định lý 9.4.1

Nếu nghiệm của bài toán Dirichlet đối với phương trình Poisson (19) $u \in C^{(4)}(\overline{G})$, thì sơ đồ sai phân (20) sẽ hội tụ đều với tốc độ $O(|h|)^2$ tức là :

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C = O(|h|^2).$$

Nhân đây ta tìm hiểu thêm về ma trận hệ số của hệ affine (20). Giả sử lưới ω_h gồm 9 điểm trong, được đánh số thứ tự từ 1 đến 9. (h.9.2).

Sơ đồ (20) tương ứng với hệ affine có vế phải là các trị đã biết của f và g mà ta ký hiệu là $a, b, \dots, i, k, l, m$.



Hình 9.2

$$\left. \begin{aligned}
 & -2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y_1 + \frac{y_2}{h_1^2} + \frac{y_6}{h_2^2} = a \\
 & \frac{y_1}{h_1^2} - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y_2 + \frac{y_3}{h_1^2} + \frac{y_5}{h_2^2} = b \\
 & \frac{y_2}{h_1^2} - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y_3 + \frac{y_4}{h_2^2} = c \\
 & \frac{y_3}{h_2^2} - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y_4 + \frac{y_5}{h_1^2} + \frac{y_9}{h_2^2} = d \\
 & \frac{y_2}{h_1^2} + \frac{y_4}{h_2^2} - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y_5 + \frac{y_6}{h_1^2} + \frac{y_8}{h_2^2} = e \\
 & \frac{y_1}{h_1^2} + \frac{y_5}{h_2^2} - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y_6 + \frac{y_7}{h_1^2} = i \\
 & \frac{y_6}{h_2^2} - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y_7 + \frac{y_9}{h_1^2} = k \\
 & \frac{y_1}{h_2^2} + \frac{y_7}{h_1^2} - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y_8 + \frac{y_9}{h_1^2} = l \\
 & \frac{y_4}{h_2^2} + \frac{y_8}{h_1^2} - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y_9 = m
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Để giải hệ (23) có nhiều thuật toán hữu hiệu, song ta không đề cập ở đây, mà ta chú ý đến một tính chất lý thú của ma trận hệ số của hệ (23), kể cả trong trường hợp không gian n chiều $\mathbf{R}^n$ và số điểm trong của lưới ω_h là khá lớn. Đó là ma trận cấp n của toán tử tuyến tính xác định dương $\overset{\circ}{A}$ (do bất đẳng thức (14)), nên nó luôn luôn có ma trận nghịch đảo, tức hệ (23) có nghiệm duy nhất.

Đối với hệ (23), giả sử $h_1 = h_2 = h$, ta chuyển h sang vế phải, ta được ma trận hệ số của hệ (23) mới có dạng 3 đường chéo chính và 2 đường chéo phụ.

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Tùy theo sự đánh số thứ tự của các điểm nút trong của ω_h mà ma trận của toán tử tuyến tính xác định dương $\overset{\circ}{A}$ sẽ có nhiều dạng khác nhau. Sự tồn tại ma trận nghịch đảo của những ma trận có

dạng như thế, không phải là một bài toán dễ, nếu ta không biết nó là ma trận của một toán tử tuyến tính xác định dương !

2. Sơ đồ sai phân có bậc chính xác cao đối với phương trình loại elliptic có đạo hàm hỗn hợp.

Người ta gọi những sơ đồ sai phân có tốc độ hội tụ lớn hơn 2 là những sơ đồ sai phân có bậc chính xác cao.

Trong miền hình chữ nhật

$$\overline{G} = G \cup \Gamma = \{x = (x_1, x_2) |, \quad 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha; \alpha = 1, 2\},$$

ta khảo sát bài toán vi phân

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f, \quad x \in G,$$

$$u = g, \quad x \in \Gamma. \quad (24)$$

Ta giả thiết a_{12} là hằng số và $|a_{12}| < 1$ để điều kiện elliptic của toán tử $\mathcal{L}$ được thỏa mãn: $\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 \geq C_0(\xi_1^2 + \xi_2^2)$, trong đó $C_0 = 1 - |a_{12}| > 0$.

Ta giả thiết trong miền hình chữ nhật $\bar{G}$ có thể đưa vào lưới sai phân hình vuông:

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h = \{x = (x_1, x_2) \in \bar{G} \mid x_\alpha = i_\alpha h; i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha; N_\alpha h = l_\alpha; \alpha = 1, 2\}.$$

Phần trình bày tiếp theo ta sẽ sử dụng ví dụ của A.A Xamarski [24] trang 264 - 267, song ta sẽ chứng minh sơ đồ hội tụ với tốc độ $O(h^4)$ trong các chuẩn lưới L_2 , H^1 và C .

Ta đưa vào các toán tử sai phân tuyến tính được xác định như sau:

$$\Lambda_\alpha u = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2; \quad \Lambda_{12}^- u = 0,5(u_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + u_{x_1 x_2});$$

$$\Lambda_{12}^+ u = 0,5(u_{x_1 \bar{x}_2} + u_{\bar{x}_1 x_2}).$$

Với giả thiết $u \in C^{(6)}(\bar{G})$, dễ dàng chứng minh các công thức sau:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{12}^- u &= \mathcal{L}_{12} u - \frac{h^2}{4} \mathcal{L}_{12}^2 u + \frac{h^2}{6} \mathcal{L}_{12} (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) u + O(h^4), \\ \Lambda_{12}^+ u &= \mathcal{L}_{12} u + \frac{h^2}{4} \mathcal{L}_{12}^2 u + \frac{h^2}{6} \mathcal{L}_{12} (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) u + O(h^4), \\ \Lambda_\alpha u &= \mathcal{L}_\alpha u + \frac{h^2}{12} \mathcal{L}_\alpha^2 u + O(h^4), \\ u &= u(x_1, x_2), \quad \mathcal{L}_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \mathcal{L}_{12} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Ta khảo sát toán tử sai phân tuyến tính Λ được xác định như sau:

$$\Lambda y = (\Lambda_1 + 2\alpha_{12}\Lambda_{12} + \Lambda_2)y, \quad (26)$$

trong đó $\Lambda_{12} = \Lambda_{12}^{-1}$, nếu $a_{12} < 0$,

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{12}^{+}, \text{ nếu } a_{12} > 0.$$

Ta sẽ tìm sai số xấp xỉ của toán tử $\mathcal{L}$ bởi toán tử Λ trên nghiệm u của phương trình (24). Sử dụng các công thức (25), ta được :

$$\Lambda u = \mathcal{L}u + \frac{h^2}{12}[\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + 4a_{12}\mathcal{L}_{12}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) + 6|a_{12}|\mathcal{L}_{12}^2]u + O(h^4). \quad (27)$$

Từ phương trình vi phân (24), ta được :

$$\mathcal{L}_1 u = -f - 2u - 2a_{12} \mathcal{L}_{12} u,$$

$$\mathcal{L}_2 u = -f - \mathcal{L}_1 u - 2a_{12} \mathcal{L}_{12} u,$$

$$\mathcal{L}_1 u + \mathcal{L}_2 u = -f - 2a_{12} \mathcal{L}_{12} u.$$

Ta biến đổi biểu thức trong dấu ngoặc vuông của (27), ta được :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2)u + 4a_{12}\mathcal{L}_{12}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)u + 6|a_{12}|\mathcal{L}_{12}^2 u = \\ & = \mathcal{L}_1 f - \mathcal{L}_2 f - 2\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 u + 2a_{12}\mathcal{L}_{12}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)u + 6|a_{12}|\mathcal{L}_{12}^2 u \\ & = -\mathcal{L}f - 2(1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}|)\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 u. \end{aligned}$$

Do đó, từ (27), suy ra sơ đồ sai phân :

$$\Lambda' y = -\varphi, \quad x \in \omega_h; \quad y = g, \quad x \in \gamma_h \quad (28)$$

trong đó $\Lambda' = \Lambda + \frac{h^2 b}{6} \Lambda_1 \Lambda_2$, $b = 1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}|$, Λ được xác định

bởi (26), $\varphi = f + \frac{h^2}{12} \Lambda f$, có xấp xỉ bậc 4 trên nghiệm u của bài toán

vi phân (24). Đối với sai số $z = y - u$, ta được bài toán sai phân mới:

$$\Lambda'z = -\psi, x \in \omega_h; z = 0, z \in \gamma_h, \quad (29)$$

trong đó $\psi = \Lambda'u + \varphi = O(h^4)$.

Để dàng chứng minh các công thức và các đánh giá sau :

$$(\Lambda_{12}^- z, z) = -(z_{x_1}^-, z_{x_2}^-), (\Lambda_{12}^+ z, z) = -(z_{x_1}^-, z_{x_2}^-),$$

$$|(\Lambda_{12}^- z, z)| \leq \|z_{x_1}^-\| \|z_{x_2}^-\| \leq \frac{1}{2}(\|z_{x_1}^-\|^2 + \|z_{x_2}^-\|^2) \leq \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\Lambda} z, z),$$

$$|(\Lambda_{12}^+ z, z)| \leq \|z_{x_1}^-\| \|z_{x_2}^-\| \leq \frac{1}{2}(\|z_{x_1}^-\|^2 + \|z_{x_2}^-\|^2) \leq \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\Lambda} z, z),$$

trong đó $\overset{\circ}{\Lambda} z = (\Lambda_1 + \Lambda_2)z = z_{x_1 x_1}^- + z_{x_2 x_2}^-$.

Ta đưa vào các toán tử sai phân :

$$A' = -\Lambda', A = -\overset{\circ}{\Lambda}, \overset{\circ}{A} = -\overset{\circ}{\Lambda}, A_1 = -\Lambda_1, A_2 = -\Lambda_2, A_{12} = \Lambda_{12}$$

và ta sẽ chứng minh, tồn tại $c_\alpha > 0$ thỏa mãn :

$$C_1(\overset{\circ}{A} z, z) \leq (A' z, z) \leq C_2(\overset{\circ}{A} z, z), \quad (30)$$

trong đó $C_1 = 1 - |a_{12}| - \frac{|b|}{3} > 0, C_2 = 1 + |a_{12}| + \frac{|b|}{3} > 0,$

$$b = 1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}|.$$

Thật vậy, do các đánh giá đối với $(\Lambda_{12}^\pm z, z)$, ta được :

$$(Az, z) = (\overset{\circ}{A} z, z) - 2a_{12}(A_{12} z, z) \geq (1 - |a_{12}|)(\overset{\circ}{A} z, z)$$

và $(Az, z) \leq (1 + |a_{12}|)(\overset{\circ}{A} z, z).$

Hơn nữa ta có đánh giá :

$$(A_1 A_2 z, z) \leq \frac{2}{h^2}(\overset{\circ}{A} z, z), \quad (31)$$

được suy ra từ hệ thức :

$$\begin{aligned} (z_{x_1 x_1}^-, z) &= \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} h^2 (z_{x_1 x_2}^-(i_1 h, i_2 h))^2 \leq \\ &\leq \frac{2}{h^2} \left[\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h^2 (z_{x_1}^-(i_1 h, i_2 h))^2 + \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} h^2 (z_{x_2}^-(i_1 h, i_2 h))^2 \right]. \end{aligned}$$

Do (31), ta được :

$$\begin{aligned} (A'z, z) &= (Az - \frac{h^2 b}{6} A_1 A_2 z, z) \geq (Az, z) - \frac{|b|}{3} (Az, z) \geq \\ &\quad \left(1 - |a_{12}| - \frac{|b|}{3} \right) (Az, z), \end{aligned}$$

$$(A'z, z) = (Az, z) + \frac{|b|}{3} (Az, z) \leq (1 + |a_{12}| + \frac{|b|}{3}) (Az, z) = C_2 (Az, z).$$

Ta còn phải chứng minh : $C_1 = 1 - |a_{12}| - \frac{|b|}{3} > 0$.

Thật vậy, nếu $|a_{12}| \leq 0,5$ thì $b = 1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}| \geq 0$, do đó

$$C_1 = 1 - |a_{12}| - \frac{1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}|}{3} = \frac{2}{3} (1 - a_{12}^2) > 0,$$

Nếu $|a_{12}| > 0,5$ thì $b < 0$, do đó

$$C_1 = 1 - |a_{12}| + \frac{1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}|}{3} = \frac{2}{3} (2 + a_{12}^2 - 3|a_{12}|) > 0 \text{ với } |a_{12}| < 1.$$

Vậy bất đẳng thức (30) đã được chứng minh hoàn toàn.

Bây giờ ta sẽ chứng minh sơ đồ (28) hội tụ với tốc độ $O(h^4)$ trong các chuẩn lưới $\|\cdot\|_{L_2}$, $\|\cdot\|_{H^1}$ và $\|\cdot\|_C$.

a) Trong chuẩn lưới $\|\cdot\|$ ($\equiv \|\cdot\|_{L_2} \equiv \|\cdot\|_{H^0}$).

Từ (29) ta viết lại bài toán sai phân đối với sai số $z = y - u$:

$$A'z = \psi, x \in \omega_h; z = 0, x \in \gamma_h, \quad (32)$$

trong đó $\psi = O(h^4)$, $A' = A - \frac{h^2 b}{6} A_1 A_2$, $A = \overset{\circ}{A} - 2a_{12} A_{12}$.

Từ vế trái của bất đẳng thức (30), thay $A'z$ bởi Ψ , ta được :

$$C_1 (\overset{\circ}{A} z, z) \leq (A' z, z) = (\Psi, z).$$

Sử dụng vế trái của bất đẳng thức (14), thay v bởi z , ta được :

$$\delta_0 \|z\|^2 \leq (\overset{\circ}{A} z, z), \text{ trong đó } \delta_0 = 8 \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right).$$

Kết hợp hai kết quả vừa nhận được, suy ra :

$$C_1 \delta_0 \|z\|^2 \leq (\psi, z) \leq \|\psi\| \|z\|,$$

$$\|z\| \leq \frac{\|\Psi\|}{C_1 \delta_0}, \text{ trong đó } C_1 = 1 - \|a_{12}\| - \frac{|b|}{3} > 0, \psi = O(h^4).$$

Vậy $\|z\| = \|y - u\| = O(h^4)$.

b) Ta biết chuẩn của hàm số u trong không gian $H^1(G)$ là :

$$\|u\|_{H^1(G)}^2 = \iint_G \left(|u|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 \right) dx_1 dx_2.$$

Đối với hàm lưới $z \in H_h$ có chuẩn tương thích với chuẩn trên là :

$$\begin{aligned} \|z\|_{H^1(\omega_h)}^2 &= \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h^2 z^2(i_1 h, i_2 h) + \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h^2 z_{x_1}^2(i_1 h, i_2 h) + \\ &+ \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} h^2 z_{x_2}^2(i_1 h, i_2 h) = \|z\|^2 + (\overset{\circ}{A} z, z). \end{aligned}$$

Từ các bất đẳng thức nhận được ở a), suy ra

$$\|z\|_{H^1} \leq \frac{\sqrt{1+\delta_0}}{C_1\delta_0} \|\Psi\|.$$

$$\text{Vậy } \|z\|_{H^1} \leq \|y - u\|_{H^1} = O(h)^4.$$

c) Dễ dàng nhận ra ngay toán tử A' là tự liên hợp (vì A' là tổ hợp tuyến tính các toán tử tự liên hợp) và giao hoán với toán tử $\overset{\circ}{A}$.

Hai toán tử A' và $\overset{\circ}{A}$ là giao hoán và điều kiện (30), nên áp dụng được định lý 9.3.4, ta được :

$$C_1 \|\overset{\circ}{A}z\| \leq \|A'z\| = \|\Psi\|.$$

Áp dụng tiếp định lý nhúng 9.3.1 (bất đẳng thức (8), trường hợp $n = 2, m = 1$), ta được :

$$\|z\|_C \leq \frac{l_0^2}{2\sqrt{l_1 l_2}} \|\overset{\circ}{A}z\| \leq \frac{l_0^2}{2c_1\sqrt{l_1 l_2}} \|\Psi\|.$$

$$\text{Vậy } \|z\|_C = \|y - u\|_C = O(h^4).$$

Định lý 9.4.2

Đối với bài toán vi phân (24), nếu nghiệm $u \in C^{(6)}(\overline{G})$ và hàm $f \in C^{(4)}(G)$ thì sơ đồ sai phân (28) sẽ hội tụ với tốc độ $O(h^4)$ trong các chuẩn lưới L_2 , H^1 và C , tức là :

$$\|y - u\| = O(h^4), \quad \|y - u\|_{H^1} = O(h^4), \quad \|y - u\|_C = O(h^4).$$

II. SƠ ĐỒ SAI PHÂN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THUỘC LOẠI ELLIPTIC TRONG KHÔNG GIAN $H^{2m,p}$ VÀ C .

Phần I còn bị hạn chế bởi ta chỉ khảo sát các sơ đồ sai phân đối với phương trình vi phân loại elliptic trong không gian H^{2m} và C , bây giờ ta sẽ mở rộng việc nghiên cứu các sơ đồ sai phân đối với

phương trình vi phân loại elliptic trong không gian $H^{2m,p}$ và C . Tuy nhiên sự mở rộng này không được tương ứng một - một như ở phần I, vì ta phải đưa vào những định nghĩa mới về không gian và chuẩn, mà trong trường hợp $p = 2$ thì ta được lại các kết quả của phần I [2], [24].

§5. KHÔNG GIAN $\bar{L}_p(\omega_h)$ VÀ $\bar{H}^{2m,p}(\omega_h)$ [115, 116, 117]

Trong miền hình hộp $G \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{G} = G \cup \Gamma = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$ với lưới

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h =$$

$$= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{G} \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha; N_\alpha h_\alpha = l_\alpha; \alpha = \overline{1, n}\};$$

Gọi H_h là không gian tuyến tính các hàm lưới xác định trên ω_h và triệt tiêu trên biên γ_h với tích vô hướng và chuẩn:

$$(v, w) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n-1} v_{i_1 \dots i_n} w_{i_1 \dots i_n} h_1 \dots h_n; \|v\|^2 = (v, v).$$

Trong phần I ta đã khảo sát bài toán về trị riêng đối với toán tử sai phân Laplace $\overset{\circ}{\Delta}$:

$$\overset{\circ}{\Delta} v + \lambda v = 0, \quad x \in \omega_h; \quad v = 0, \quad x \in \gamma_h,$$

trong đó $\overset{\circ}{\Delta} v = \sum_{\alpha=1}^n v_{x_\alpha x_\alpha}$.

Ta đã được hệ thống các hàm riêng trực chuẩn $\{v_{k_1 \dots k_n}\}$:

$$v = \{v_{k_1 \dots k_n}\} \equiv \frac{2^{n/2}}{\sqrt{l_1 \dots l_n}} \prod_{\alpha=1}^n \sin \frac{k_\alpha \pi x_\alpha}{l_\alpha},$$

và các trị riêng:

$$\lambda = \{\lambda_{k_1 \dots k_n}\} \equiv 4 \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{k_\alpha \pi h_\alpha}{2l_\alpha},$$

trong đó $k_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1$; $x_\alpha = i_\alpha h_\alpha$; $i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1$; $\alpha = \overline{1, n}$.

Khi đó, $\forall v \in H_h$, ta có khai triển :

$$v = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} C_{k_1 \dots k_n} v_{k_1 \dots k_n}, \quad (33)$$

trong đó $C_{k_1 \dots k_n} = (v, v_{k_1 \dots k_n})$

và đẳng thức Parseval :

$$\|V\|^2 = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} C_{k_1 \dots k_n}^2.$$

Bây giờ, nếu ta xem mỗi hàm lưới $v \in H_h$ là vectơ của không gian tuyến tính $(N_1 - 1) \dots (N_n - 1)$ chiều, thì hệ thống $\{C_{k_1 \dots k_n}\}$ chính là các tọa độ của v .

Định nghĩa 9.5.1 (về không gian mới $\bar{L}_p(\omega_h)$).

Nếu $p \in \mathbf{R}$ thỏa mãn $1 \leq p < +\infty$ thì tập hợp những hàm lưới $v \in H_h$ với chuẩn được xác định bởi :

$$\|v\|_{\bar{L}_p} = \left(\sum_{k_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} |C_{k_1 \dots k_n}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (34)$$

được gọi là không gian $\bar{L}_p(\omega_h)$, trong đó $C_{k_1 \dots k_n}$ được xác định bởi (33).

Chú ý

1. Nếu $p = 2$ thì $\bar{L}_p(\omega_h) \equiv L_2(\omega_h) \equiv H^0(\omega_h)$ tức là :

$$\|v\|_{\bar{L}_2} = \left(\sum_{k_1 \dots k_n} |C_{k_1 \dots k_n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i_1 \dots i_n} |v_{i_1 \dots i_n}|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Nếu $p \neq 2$ thì $\|v\|_{L_p} \neq \|v\|_{L_p}$, trong đó chuẩn của hàm lưới $v \in H_h$ trong không gian $L_p(\omega_h)$ được xác định bởi :

$$\|v\|_{L_p(\omega_h)} = \left(\sum_{i_1 \dots i_n} |v_{i_1 \dots i_n}|^p h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Hơn nữa, ta lại có (từ phần I) với $m \in \mathbb{N}^*$ và $\forall v \in H_h$:

$$A^m v = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} C_{k_1 \dots k_n} \lambda_{k_1 \dots k_n}^m v_{k_1 \dots k_n}. \quad (35)$$

Định nghĩa 9.5.2. (về không gian mới $\bar{H}^{2m,p}(\omega_h)$).

Nếu $p \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $1 \leq p < +\infty$ thì tập hợp những hàm lưới $v \in H_h$ với chuẩn được xác định bởi :

$$\|v\|_{\bar{H}^{2m,p}} \equiv \|A^m v\|_{L_p} = \left(\sum_{k_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} |C_{k_1 \dots k_n} \lambda_{k_1 \dots k_n}^m|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (36)$$

được gọi là không gian $\bar{H}^{2m,p}(\omega_h)$ trong đó $C_{k_1 \dots k_n} \lambda_{k_1 \dots k_n}^m$ được xác định bởi (35), $m \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý. Nếu $p = 2$ thì $\bar{H}^{2m,2}(\omega_h) \equiv H^{2m}(\omega_h)$, tức là :

$$\|v\|_{\bar{H}^{2m,2}} \equiv \|A^m v\|_{L_2} \equiv \|A^m v\|.$$

Dễ dàng chứng minh rằng các chuẩn mới (34) và (36) thỏa mãn các tiên đề và chuẩn của không gian tuyến tính định chuẩn hữu hạn chiều và các không gian $\bar{L}_p$ và $\bar{H}^{2m,p}$ đẳng cấu với không gian $l_p^{(N)}$ ($N = (N_1 - 1) \dots (N_n - 1)$).

Định lý 9.5.1 (so sánh chuẩn)

$\forall v \in H_h$, nếu $p_1 \leq p_2$ thì

$$\|v\|_{L_{p_2}} \leq \|v\|_{L_{p_1}}; \|\overset{\circ}{A}^m v\|_{L_{p_2}} \leq \|\overset{\circ}{A}^m v\|_{L_{p_1}}. \quad (37)$$

Chúng minh dành cho độc giả.

Định lý 9.5.2. (nhúng không gian $\bar{H}^{2m,p}$ vào không gian C).

$\forall v \in H_h$, nếu $1 \leq p < \frac{n}{n-2m}$ ($m \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{R}$, n là số chiều của

$\mathbb{R}^n$), thì tồn tại bất đẳng thức sau :

$$\|v\|_C \leq M \|\overset{\circ}{A}^m v\|_{L_p},$$

hoặc
$$\|v\|_C \leq M \|v\|_{H^{2m,p}}, \quad (38)$$

trong đó $\|v\|_C = \max_{x \in \omega_h} |v(x)|$, $\overset{\circ}{A} = -\overset{\circ}{\Delta}$, $\overset{\circ}{A} v = \sum_{\alpha=1}^n v_{x_\alpha} x_\alpha$, $\overset{\circ}{A}^m = \underbrace{\overset{\circ}{A} \dots \overset{\circ}{A}}_m$,

M là hằng số dương không phụ thuộc v :

Với $p > 1$:

$$M = \frac{l_0^{2m}}{2^{2m-\frac{n}{2}} \sqrt{l_1 \dots l_n}} \left[\frac{1}{(2n)^{\frac{mp}{p-1}}} + \frac{S_1}{2^n \left(\frac{2mp}{p-1} - n \right)} \right]^{\frac{p-1}{p}}, \quad (39)$$

Với $p = 1$:
$$M = \frac{l_0^{2m}}{n^m 2^{3m-\frac{n}{2}} \sqrt{l_1 \dots l_n}},$$

trong đó $l_0 = \max \{l_1, \dots, l_n\}$, $S_1 = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ là diện tích mặt cầu đơn vị

n chiều.

Việc chứng minh định lý 9.5.2 được tiến hành tương tự như khi chứng minh định lý 9.3.1, chỉ cần lưu ý, để được bất đẳng thức (6) trong định lý 9.3.1 ta đã dùng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz thì bây giờ ta phải dùng bất đẳng thức Hölder.

Chú ý. Định lý 9.5.2 là tổng quát hóa định lý 9.3.1 khi $p = 2$ thì định lý 9.5.2 trở thành định lý 9.3.1. Song việc ứng dụng định lý 9.5.2 chưa phải dễ dàng khi $p \neq 2$, vì ta chưa biết mối liên hệ như thế nào giữa chuẩn $\bar{L}_p$ của không gian mới với các chuẩn quen thuộc của không gian Sobolev.

Dễ dàng tổng quát hóa các định lý 9.3.2, 9.3.4, 9.3.5 trong phần I, mà ở đây ta chỉ phát biểu, không cần chứng minh.

Định lý 9.5.3. $\forall V \in H_h, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại các bất đẳng thức

$$\|A^{o_{m-1}} v\|_{L_p} \leq \frac{1}{\delta_\infty} \|A^{o_m} v\|_{L_p}$$

$$\text{v\grave{a}} \quad \|v\|_{L_p}^- \leq \frac{1}{\delta_n} \|A v\|_{L_p}^0, \quad (40)$$

trong đó $\delta_0 = 8 \left(\frac{1}{l_1^2} + \dots + \frac{1}{l_p^2} \right)$, $p \geq 1$.

Định lý 9.5.4. Nếu A là toán tử sai phân tuyến tính tự liên hợp và giao hoán với toán tử $\overset{\circ}{A}$ ($\overset{\circ}{A}A = A\overset{\circ}{A}$), ngoài ra, $\forall v \in H_h$ bất đẳng thức sau được thỏa mãn :

$$C_1 \overset{0}{(Av, v)} \leq (Av, v) \leq C_2 \overset{0}{(Av, v)}, \quad (41)$$

trong đó $0 < C_1 < C_2$ là hai hằng số dương nào đó, thì tồn tại bất đẳng thức sau :

$$C_1 \|\overset{\circ}{A} v\|_{L_p}^- \leq \|Av\|_{L_p}^- \leq C_2 \|\overset{\circ}{A} v\|_{L_p}^-, \quad (42)$$

trong đó $p \geq 1$.

Định lý 9.5.5 Với những giả thiết của định lý 9.5.4, nếu

$$C_1 (\overset{0}{A}^m v, v) \leq (Av, v) \leq C_2 (\overset{0}{A}^m v, v), \quad (43)$$

$$\text{thì} \quad C_1 \|\overset{0}{A}^m v\|_{\bar{L}_p} \leq \|Av\|_{\bar{L}_p} \leq C_2 \|\overset{0}{A}^m v\|_{\bar{L}_p}, \quad (44)$$

trong đó $p \geq 1$.

§6. LIÊN HỆ GIỮA KHÔNG GIAN $L_p(G)$ VÀ KHÔNG GIAN $\bar{L}_p(\omega_h)$.

Giả sử $\bar{G} = G \cup \Gamma = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha; \alpha = \overline{1, n}\}$

và $L_p(G)$ là tập hợp các hàm thực u khả tích Lebesgue bậc p với

$$\int_G |u|^p dx < +\infty \quad (1 \leq p < +\infty).$$

Trong miền $\bar{G}$ ta đưa vào lưới quen thuộc :

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h =$$

$$= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{G} \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha; i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha; N_\alpha h_\alpha = l_\alpha; \alpha = \overline{1, n}\}.$$

Trên lưới ω_h ta đưa vào các ô sơ cấp :

$$\Delta_{i_1 \dots i_n} = \{y = (y_1, \dots, y_n) \mid (i_\alpha - \frac{1}{2})h_\alpha < y_\alpha < (i_\alpha + \frac{1}{2})h_\alpha; i_\alpha = 1, \dots,$$

$$N_\alpha - 1; \alpha = \overline{1, n}\}.$$

Bổ đề 9.6.1 Giả sử $u \in L_p$ và $u \equiv 0, x \in \bar{G}$. Ta xây dựng hàm lưới v thỏa mãn các điều kiện sau :

$$v(x) = \Delta_{i_1 \dots i_n}^{-1} \int_{\Delta_{i_1 \dots i_n}} u(y) dy, \quad x \in \omega_h; \quad v(x) = 0, \quad x \in \gamma_h,$$

320
12.03.26

trong đó $\Delta_{i_1 \dots i_n}^{-1} = (\text{mes } \Delta_{i_1 \dots i_n})^{-1} = (h_1 \dots h_n)^{-1}$.

Xuất phát từ hàm lưới v đã xây dựng, ta xây dựng tiếp hàm hằng từng khúc $\tilde{v}$ được xác định trên mỗi ô sơ cấp $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ như sau :

$$\tilde{v}(y) = \begin{cases} v(x), & y \in \Delta_{i_1 \dots i_n} \text{ (} \Delta_{i_1 \dots i_n} \text{ là ô sơ cấp chứa điểm } x \in \omega_n \text{)} \\ 0, & y \notin \Delta_{i_1 \dots i_n} \end{cases}$$

Thế thì bây giờ ta có :

$$\| \tilde{v}(x) - u(x) \|_{L_p(G)} \rightarrow 0 \text{ khi } |h| \rightarrow 0, \quad (|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^n h_\alpha^2).$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \| \tilde{v}(x) - u(x) \|_{L_p}^p = & \sum_{G \setminus G_{\frac{h_\alpha}{2}}} \int_{\Delta_{i_1 \dots i_n}} \left| \Delta_{i_1 \dots i_n}^{-1} \int_{\Delta_{i_1 \dots i_n}} u(y) dy - u(x) \right|^p dx + \int_{G_{\frac{h_\alpha}{2}}} |u|^p dx. \end{aligned}$$

trong đó $G_{\frac{h_\alpha}{2}}$ là dải biên của miền G (tức là tập hợp những điểm

của miền G cách biên giới Γ không quá $\frac{h_\alpha}{2}$ tương ứng với trục tọa độ x_α).

Hơn nữa, sử dụng bất đẳng thức Hölder ta được :

$$\begin{aligned} \| \tilde{v}(x) - u(x) \|_{L_p}^p & \leq \sum_{G \setminus G_{\frac{h_\alpha}{2}}} \Delta_{i_1 \dots i_n}^{-1} \int_{\Delta_{i_1 \dots i_n}} \int_{\Delta_{i_1 \dots i_n}} |u(y) - u(x)|^p dy dx + \int_{G_{\frac{h_\alpha}{2}}} |u|^p dx. \\ & \leq 2^{-n} \max_{\substack{|x_\alpha| \leq \frac{h_\alpha}{2} \\ \alpha=1, n}} \int_{R^n} |u(x+\xi) - u(x)|^p dx + \int_{G_{\frac{h_\alpha}{2}}} |u|^p dx. \end{aligned}$$

Vì $u \in L_p(\mathbb{R}^n)$, nên theo định lý về liên tục tuyệt đối và liên tục trung bình của tích phân Lebesgue, vế phải của bất đẳng thức trên tiến tới không khi $|h| \rightarrow 0$. Bỏ để được chứng minh. $\square$

Chú ý : Qua bổ đề 9.6.1. ta biết cách xây dựng hàm lưới $v \in H_h$ đối với hàm $u \in L_p(G) (p \geq 1)$ và ta sẽ nói nếu $u \in L_p(G)$ thì $v \in L_p(\omega_h)$.

Định lý 9.6.1. (Liên hệ giữa hai không gian $\bar{L}_p(\omega_h)$ và $L_p(\omega_h)$)

1. Nếu $u \in L_2(G)$, thì với $p \geq 2$ ta có :

$$\|v\|_{\bar{L}_p} \leq M_1, \quad (p \geq 2). \quad (45)$$

2. Nếu $u \in L_1(G)$, và đạo hàm suy rộng $\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \in L_1(G)$, thì với

$$p > 1 \text{ ta có : } \|v\|_{\bar{L}_p} \leq M_2, \quad (p > 1). \quad (46)$$

3. Nếu $u \in L_2(G)$, và đạo hàm suy rộng $\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \in L_2(G)$, thì với

$$p \geq 1 \text{ ta có : } \|v\|_{\bar{L}_p} \leq M_3, \quad (p \geq 1). \quad (47)$$

Ở đây v là hàm lưới tương ứng với u , còn M_1, M_2, M_3 là các hằng số dương không phụ thuộc vào $|h|$ khi $|h| \rightarrow 0$.

Chú ý : Nếu hàm số $x \mapsto \psi(x)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý 9.6.1. thì ta đặt :

$$\|\psi(x)\|_{\bar{L}_p} = \sup_{|h|} \|v\|_{\bar{L}_p}.$$

Rõ ràng, ta có :

$$\|v\|_{\bar{L}_p} \leq \|\psi(x)\|_{\bar{L}_p} \leq M, \quad M = \max\{M_1, M_2, M_3\}.$$

Còn nếu Ψ có dạng $\psi(x)|h|^k$, thì :

$$\|\psi(x)|h|^k\|_{\bar{L}_p} \leq M|h|^k, \quad (k > 0).$$

Để chứng minh định lý 9.6.1 ta phải dựa trên bổ đề 9.6.1. và hai bổ đề tiếp theo.

Bổ đề 9.6.2. Nếu $u \in L_1(G)$ và đạo hàm suy rộng $\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \in L_1(G)$, thì với $p > 1$, chuỗi số

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \left| \bar{c}_{k_1 \dots k_n} \right|^p \quad (p > 1), \quad (48)$$

trong đó

$$\bar{c}_{k_1 \dots k_n} = \int_G u(x) \frac{2^{n/2}}{\sqrt{l_1 \dots l_n}} \prod_{\alpha=1}^n \sin \frac{k_{\alpha} \pi x_{\alpha}}{l_{\alpha}} dx, \quad (49)$$

hội tụ.

Chứng minh

Gọi G_{h_0} là dải biên của miền G có chiều rộng $h_0 > 0$, rõ ràng $\text{mes } G_{h_0} \rightarrow 0$ khi $h \rightarrow 0$, ta lập hàm phụ được xác định bởi :

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in G \setminus G_{h_0} \\ 0, & x \in G_{h_0} \end{cases}$$

Rõ ràng $\bar{u} \in L_1(G)$. Ta lập hàm trung bình u_h của $\bar{u}$ với bán kính trung bình h ($h < h_0$). Rõ ràng u_h là hàm tiêu hạn trong G (tức là khả vi vô hạn lần trong G và triệt tiêu trên dải biên $G_{h_0 \setminus h}$).

Ta khảo sát tích phân :

$$\bar{\bar{c}}_{k_1 \dots k_n} = \int_G u_h(x) \frac{2^{n/2}}{\sqrt{l_1 \dots l_n}} \prod_{\alpha=1}^n \sin \frac{k_{\alpha} \pi x_{\alpha}}{l_{\alpha}} dx. \quad (50)$$

Tích phân từng phần n lần, ta được :

$$\bar{\bar{c}}_{k_1 \dots k_n} = \int_G \frac{\partial^n u_h}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \frac{2^{n/2} \sqrt{l_1 \dots l_n}}{\pi^n k_1 \dots k_n} \prod_{\alpha=1}^n \cos \frac{k_{\alpha} \pi x_{\alpha}}{l_{\alpha}} dx. \quad (51)$$

Sử dụng các tính chất của hàm trung bình, ta đi đến đánh giá sau:

$$|\overline{C}_{k_1 \dots k_n}| \leq \frac{M_4}{k_1 \dots k_n}, \quad (52)$$

trong đó $M_4 = \frac{2^{n/2}}{\pi^n} \sqrt{l_1 \dots l_n} \left\| \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right\|_{L_1(G)}$ là hằng số xác định.

Từ các công thức (49) và (50), ta lập hiệu :

$$\begin{aligned} \overline{C}_{k_1 \dots k_n} - \overline{\overline{C}}_{k_1 \dots k_n} &= \frac{2^{n/2}}{\sqrt{l_1 \dots l_n}} \int_G (\overline{u}(x) - u_h(x)) \prod_{\alpha=1}^n \sin \frac{k_\alpha \pi x_\alpha}{l_\alpha} dx + \\ &+ \frac{2^{n/2}}{\sqrt{l_1 \dots l_n}} \int_{G_{h_0}} u(x) \prod_{\alpha=1}^n \sin \frac{k_\alpha \pi x_\alpha}{l_\alpha} dx \end{aligned}$$

Ta được đánh giá :

$$|\overline{C}_{k_1 \dots k_n} - \overline{\overline{C}}_{k_1 \dots k_n}| \leq \frac{2^{n/2}}{\sqrt{l_1 \dots l_n}} \left[\|\overline{u}(x) - u_h(x)\|_{L_1(G)} + \|u(x)\|_{L_1(G_{h_0})} \right].$$

Do $\|\overline{u}(x) - u_h(x)\|_{L_1(G)} \rightarrow 0$ khi $h \rightarrow 0$ và $\|u(x)\|_{L_1(G_{h_0})} \rightarrow 0$ khi $mes G_{h_0} \rightarrow 0$, suy ra với $\varepsilon > 0$ tùy ý, h và h_0 khá bé ($h < h_0 < \delta$), ta được :

$$|\overline{C}_{k_1 \dots k_n} - \overline{\overline{C}}_{k_1 \dots k_n}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall k_\alpha \in N^*.$$

Từ đây rút ra :

$$|\overline{C}_{k_1 \dots k_n}| \leq |\overline{\overline{C}}_{k_1 \dots k_n}| + \varepsilon, \quad \forall k_\alpha \in N^*. \quad (53)$$

Do bất đẳng thức (52), ta được :

$$\overline{C}_{k_1 \dots k_n} \leq \frac{M_4}{k_1 \dots k_n} + \varepsilon, \quad \forall k_\alpha \in N^*.$$

Vì $\varepsilon > 0$ tùy ý, $\overline{C}_{k_1 \dots k_n}$ và $\frac{M_4}{k_1 \dots k_n}$ không phụ thuộc ε , nên suy ra :

$$|\overline{C}_{k_1 \dots k_n}| \leq \frac{M_4}{k_1 \dots k_n}. \quad (54)$$

Ta biết chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ hội tụ với $p > 1$, suy ra chuỗi số

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^p \dots k_n^p} \text{ hội tụ. Do bất đẳng thức (54), suy ra chuỗi số}$$

(48) hội tụ với $p > 1$. **Bổ đề 9.6.2.** đã được chứng minh. $\square$

Bổ đề 9.6.3. Nếu $u \in L_2(G)$ và đạo hàm suy rộng

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \in L_2(G) \text{ thì chuỗi (48) trong bổ đề 9.6.2 hội tụ với } p = 1.$$

Chứng minh. Ta đặt :

$$b_{k_1 \dots k_n} = \int_G \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \cdot \frac{2^{n/2}}{\sqrt{l_1 \dots l_n}} \prod_{\alpha=1}^n \cos \frac{k_{\alpha} \pi x_{\alpha}}{l_{\alpha}} dx$$

Nhờ bất đẳng thức Besssel và tính chất hàm trung bình ta được chuỗi số :

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |b_{k_1 \dots k_n}|^2 \leq \left\| \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right\|_{L_2(G)}^2$$

hội tụ. Đẳng thức (51) được viết lại dưới dạng :

$$\overline{C}_{k_1 \dots k_n} = \frac{l_1 \dots l_n}{\pi^n} \frac{b_{k_1 \dots k_n}}{k_1 \dots k_n}.$$

Từ đây ta được

$$|\overline{C}_{k_1 \dots k_n}| \leq \frac{1}{2} \frac{l_1 \dots l_n}{\pi^n} \left(|b_{k_1 \dots k_n}|^2 + \frac{1}{k_1^2 \dots k_n^2} \right),$$

suy ra chuỗi số

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |\overline{C}_{k_1 \dots k_n}| \text{ hội tụ (vì } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6})$$

Vì $u \in L_2(G) \subset L_1(G)$, nên ta có thể sử dụng bất đẳng thức (53),

suy ra chuỗi số $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |\overline{C}_{k_1 \dots k_n}|$ hội tụ. Bổ đề 9.6.3 đã được

chứng minh. $\square$

Nhờ 3 bổ đề, ta đã có thể dễ dàng chứng minh định lý 9.6.1.

Chẳng hạn để chứng minh bất đẳng thức (45) của định lý 9.6.1, sử dụng định lý 9.5.1. và bổ đề 9.6.1, ta được dãy bất đẳng thức :

$$\begin{aligned} \|v\|_{\overline{L}_p} &\leq \|v\|_{\overline{L}_2} = \|v\| = \left(\sum_{i_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n-1} |v_{i_1 \dots i_n}|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n-1} \int_{\Delta_{i_1 \dots i_n}} |\tilde{v}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{G \setminus G_{\frac{h_{\alpha}}{2}}} |\tilde{v}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\int_G |\tilde{v}(x) - u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_G |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon + M \leq M_1. \end{aligned}$$

Ở đây M_1 là hằng số dương không phụ thuộc h_l khi $h_l \rightarrow 0$.

Còn chứng minh 2 bất đẳng thức (46) và (47) dành cho độc giả.

Chú ý : Các định lý ở phần II này vẫn còn hiệu lực đối với miền hình bậc thang như ta đã có nhận xét chung ở phần I.

Để dàng nhận được :

$$\overset{o}{\Lambda} u - \mathcal{L} u = \sum_{\alpha=1}^n \frac{h_{\alpha}^2}{12} \mathcal{L}_{\alpha}^2 u + O(|h|^4) \text{ nếu } D^6 u \in M(G), \quad (56)$$

trong đó $\overset{o}{\Lambda} u = \sum_{\alpha=1}^n \Lambda_{\alpha} u$, $\Lambda_{\alpha} = u_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}}$, $\mathcal{L}_{\alpha}^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_{\alpha}^4}$, $|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^n h_{\alpha}^2$,

$M(G)$ là tập hợp các hàm số thực bị chặn trên G .

Từ phương trình vi phân (55), dễ dàng suy ra :

$$\overset{o}{\Lambda} u = \mathcal{L} u - \sum_{\alpha=1}^n \frac{h_{\alpha}^2}{12} \mathcal{L}_{\alpha} f - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^n \frac{h_{\alpha}^2 + h_{\beta}^2}{12} \mathcal{L}_{\alpha} \mathcal{L}_{\beta} u + O(|h|^4). \quad (57)$$

Do $\Lambda_{\alpha} \Lambda_{\beta} u = \mathcal{L}_{\alpha} \mathcal{L}_{\beta} u + O(|h|)^2$, suy ra sơ đồ sai phân :

$$\Lambda' y = -\varphi, \quad x \in \omega_h; \quad y = g(x), \quad x \in \gamma_h, \quad (58)$$

trong đó $\Lambda' = \overset{o}{\Lambda} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^n \frac{h_{\alpha}^2 + h_{\beta}^2}{12} \Lambda_{\alpha} \Lambda_{\beta}$,

$$\varphi = f + \sum_{\alpha=1}^n \frac{h_{\alpha}^2}{12} \Lambda_{\alpha} f,$$

có xấp xỉ bậc 4 trên nghiệm u của bài toán vi phân (55) nếu $D^6 u \in M(G)$ và $D^4 f \in M(G)$.

Chú ý : Nếu $D^6 u \in L_p(G)$ và $D^4 f \in L_p(G)$ ($p \geq 1$) thì lúc này sơ đồ sai phân (58) cũng có xấp xỉ bậc 4 trên nghiệm u của bài toán (55) trong chuẩn lưới $L_p(\omega_h)$.

Đối với sai số $z = y - u$, ta được bài toán sai phân mới từ (58) :

$$\Lambda' Z = \bar{\Psi}, \quad x \in \omega_h; \quad Z = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad (59)$$

trong đó $A' = \overset{\circ}{\Lambda} - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^n \frac{h_{\alpha}^2 + h_{\beta}^2}{12} \in A_{\alpha} A_{\beta}$,

$$A' = -\Lambda', \quad \overset{\circ}{A} = -\overset{\circ}{\Lambda}, \quad A_{\alpha} = -\Lambda_{\alpha}, \quad \bar{\psi} = \Lambda' u + \varphi = O(|h|)^4$$

Bổ đề 9.7.1. $\forall v \in H_h$, tồn tại các bất đẳng thức sau :

$$0 < (A_{\alpha} A_{\beta} v, v) \leq \frac{4}{h_{\alpha}^2} (A_{\beta} v, v), \quad (60)$$

$$\frac{4-n}{3} (\overset{\circ}{A} v, v) \leq (A' v, v) < (\overset{\circ}{A} v, v). \quad (61)$$

Chúng minh (60) nhờ khai triển hàm lưới $v \in H_h$ theo hệ thống các hàm riêng trực chuẩn của toán tử $\overset{\circ}{\Lambda}$. Còn chứng minh (61), chú ý đến đẳng thức toán tử :

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^n (A_{\alpha} + A_{\beta}) = (n-1) \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha}.$$

Như đã biết, toán tử $\overset{\circ}{A}$ là xác định dương (bất đẳng thức (14) phần I). Do bất đẳng thức (61) của bổ đề, A' chỉ xác định dương nếu $n \leq 3$.

Trong trường hợp $n \geq 4$, thì toán tử A' không còn xác định dương nữa, do đó ta sẽ thay toán tử A' bởi toán tử A'' được xác định bởi :

$$A'' = \sum_{\alpha=1}^n \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n (E - \frac{h_{\beta}^2}{12} A_{\beta}) A_{\alpha}, \quad (62)$$

$$\text{tương ứng với toán tử} \quad A'' = \sum_{\alpha=1}^n \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n (E + \frac{h_{\beta}^2}{12} \Lambda_{\beta}) \Lambda_{\alpha}, \quad (63)$$

$$\text{Rõ ràng ta có} \quad \Lambda'' y = \Lambda' y + O(|h|^4). \quad (64)$$

Dễ dàng chứng minh bổ đề sau :

Bổ đề 9.7.2. $\forall v \in H_h$, tồn tại các bất đẳng thức sau :

$$\frac{2}{3}(A_\alpha v, v) \leq (E - \frac{h_\beta^2}{12} A_\beta) A_\alpha v, v) < (A_\alpha v, v), \quad (65)$$

$$(\frac{2}{3})^{n-1} (A^n v, v) \leq (A^n v, v) < (A^n v, v). \quad (66)$$

Cuối cùng ta được bài toán sai phân tương ứng với bài toán vi phân (55) :

Hãy tìm hàm lưới y thỏa mãn các điều kiện sau :

$$A'' y = \varphi, \quad x \in \omega_h; \quad y = g(x), \quad x = \gamma_h. \quad (67)$$

trong đó
$$A'' = \sum_{\alpha=1}^n \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n (E - \frac{h_\beta^2}{12} A_\beta) A_\alpha,$$

$$\varphi = f - \sum_{\alpha=1}^n \frac{h_\alpha^2}{12} A_\alpha f.$$

Đối với sai số $z = y - u$ của sơ đồ (67), ta được bài toán sai phân :

$$A'' z = \bar{\psi}, \quad x \in \omega_h; \quad z = 0, \quad x \in \gamma_h. \quad (68)$$

trong đó $\bar{\psi} = \psi(x) |h|^4$, $\psi \in M(G)$ nếu $D^6 u \in M(G)$ và $D^4 f \in M(G)$

hoặc $\Psi = L_p(G)$ nếu $D^6 u \in L_p(G)$ và $D^4 f \in L_p(G)$ ($p \geq 1$) (69)

Định lý 9.7.1. Đối với nghiệm z của bài toán (68), tồn tại các bất đẳng thức sau :

$$\|z\|_{L_2(\omega_h)} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \frac{\|\bar{\psi}\|}{\delta_0}; \quad \|z\|_{H^1(\omega_h)} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \frac{\sqrt{1+\delta_0}}{\delta_0} \|\bar{\psi}\| \quad (70)$$

330.002.000.224

trong đó

$$\delta_0 = 8 \left(\frac{1}{l_1^2 + \dots + l_n^2} \right), \|z\|_{H^1(\omega_h)} = \|z\|^2 + (\overset{\circ}{A}z, z), \|\cdot\|_{L_2(\omega_h)} \equiv \|\cdot\|$$

Chứng minh : Nhân vô hướng hai vế của (68) cho z , sử dụng bất đẳng thức (66) và bất đẳng thức (14) phần I, ta sẽ nhận được các bất đẳng thức (70). $\square$

Định lý 9.7.2 Nếu $D^6u \in L_2(G)$ và $D^4f \in L_2(G)$ thì sơ đồ sai phân (67) sẽ hội tụ với tốc độ $O(h^4)$ trong các chuẩn lưới L_2 và H^1 , tức là :

$$\|y - u\|_{L_2} = O(h^4); \quad \|y - u\|_{H^1} = O(h^4) \quad (71)$$

Ngoài ra nếu $n \leq 3$ thì sơ đồ (67) hoặc sơ đồ (58) sẽ hội tụ đều với tốc độ $O(h^4)$, tức là :

$$\|y - u\|_C = O(h^4). \quad (72)$$

Chứng minh : Vì $D^6u \in L_2(G)$ $D^4f \in L_2(G)$ nên từ (69) : $\bar{\psi} = \psi(x)h^4$, $\psi \in L_2(G)$, thay $\bar{\psi}$ vào (70) ta được ngay (71).

Để chứng minh (72), ta sẽ viết lại (68) dưới dạng :

$$A''Z = \psi(x)h^4, \quad x \in \omega_h; \quad z = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad (73)$$

trong đó $\psi \in L_2(G)$, ($n \leq 3$) và :

$$A'' = \sum_{\alpha=1}^n \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \left(E - \frac{h_\beta^2}{12} A_\beta \right) A_\alpha.$$

Vì A_α ($\alpha = \overline{1, n}$), là những toán tử liên hợp, từng cặp giao hoán, do đó:

$$\overset{\circ}{A} A'' = A'' \overset{\circ}{A},$$

trong đó $\overset{\circ}{A} = \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha.$

Trên cơ sở bất đẳng thức (66) của bổ đề 9.7.2, ta có thể ứng dụng định lý 9.3.4, ta được :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \|\overset{\circ}{A}z\| \leq \|A''z\| < \|\overset{\circ}{A}z\|.$$

Như thế $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \|\overset{\circ}{A}z\| \leq \|\psi(x)|h|^4\|$. Theo định lý nhúng 9.3.1

(bất đẳng thức (4), trường hợp $m = 1, n \leq 3, p=2$), tồn tại :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \|z\|_C \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M \|\overset{\circ}{A}z\| \leq M \|\psi(x)|h|^4\|,$$

$$\text{hoặc } \|z\|_C \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} M \|\psi(x)|h|^4\| = O(|h|^4). \quad \square$$

Định lý 9.7.3. Khi $n \geq 4$ nếu $D^6u \in L_1(G)$, $D^4f \in L_1(G)$ và các đạo hàm suy rộng $D^{(6+n)}u \in L_1(G)$, $D^{(4+n)}f \in L_1(G)$ thì sơ đồ sai phân (67) sẽ hội tụ đều với tốc độ $O(|h|^4)$, tức là :

$$\|y - u\|_C = O(|h|^4). \quad (74)$$

Chứng minh. Theo giả thiết, ta có thể viết lại sơ đồ (73) dưới dạng :

$$A''Z = \psi(x)|h|^4, \quad x \in \omega_h; \quad z=0, x \in \gamma_h, \quad (75)$$

trong đó $\psi \in L_1(G)$ và đạo hàm suy rộng $D^n\psi \in L_1(G)$.

Chứng minh định lý 9.7.3 trên những nét cơ bản trùng với chứng minh sự hội tụ đều của định lý 9.7.2. Thay việc ứng dụng định lý 9.3.4 và định lý nhúng 9.3.1, ta ứng dụng định lý 9.5.4 và định lý nhúng 9.5.2 cùng với định lý 9.6.1 trường hợp $1 < p < \frac{n}{n-2}$.

Chú ý : 1) Ta biết trong không gian Sobolev, điều kiện để không gian $H^{2m,p}$ nhúng vào không gian các hàm liên tục C là $n < 2mp$, thì ở đây qua định lý 9.7.3 điều kiện đó được thỏa mãn vì : $n < (6+n).1 = 6+n$, một sự trùng hợp lý thú !

2) Nếu các cạnh của hình hộp n -chiều $\bar{G} \subset \mathbb{R}^n$ là hữu tỷ với nhau, thì lúc này ta có thể đưa vào miền $\bar{G}$ lưới đều với bước $h_\alpha = h(\alpha = \overline{1, n})$.

Ta có thể chứng minh rằng sơ đồ sai phân :

$$\Lambda^* y = -\varphi^*, \quad x \in \omega_h; \quad y = g(x), \quad x \in \gamma_h,$$

trong đó

$$\Lambda^* = \sum_{\alpha=1}^n \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \left(E + \frac{h^2}{12} \Lambda_\beta \right) \Lambda_\alpha + \frac{h^4}{80} \sum_{\alpha=1}^{n-2} \sum_{\beta=\alpha+1}^{n-1} \sum_{\delta=\beta+1}^n \Lambda_\alpha \Lambda_\beta \Lambda_\delta,$$

$$\varphi^* = f + \frac{h^2}{12} \mathcal{L}f + \frac{h^4}{360} (\mathcal{L}^2 f + 2 \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^n \mathcal{L}_\alpha \mathcal{L}_\beta f),$$

có xấp xỉ bậc 6 trên nghiệm u của bài toán vi phân (55) trong các chuẩn lưới C và L_p và hội tụ với tốc độ $O(h^6)$ trong các chuẩn lưới L_2, H^1 và C .

Chương X

XẤP XỈ BẰNG SPLINE VÀ SÓNG NHỎ

Trong những năm gần đây phương trình vi phân, vi tích phân, phương trình đạo hàm riêng cũng như phương trình giả vi phân được nghiên cứu ngày càng nhiều bằng các phương pháp xấp xỉ spline và sóng nhỏ. Lý thuyết các hàm spline, các hàm sóng nhỏ có nhiều mối liên quan chặt chẽ với lý thuyết các hàm suy rộng và giải tích Fourier. Các hàm B - spline cơ bản là những hàm đơn giản nhất có giá bé. Cho nên việc sử dụng các hàm spline và hàm sóng nhỏ để nghiên cứu các loại phương trình trên có nhiều thuận lợi và hiệu quả. Chính vì vậy các phương pháp giải tích ứng dụng hàm spline và "giải tích sóng nhỏ" đang được phát triển rất mạnh. Trong chương này chúng tôi sẽ giới thiệu một số kết quả mới nhất trong việc nghiên cứu xấp xỉ một số lớp phương trình vi tích phân, đạo hàm riêng, phương trình giả vi phân bằng phương pháp xấp xỉ spline và sóng nhỏ.

I. XẤP XỈ BẰNG SPLINE

§1 PHƯƠNG PHÁP SPLINE COLLOCATION ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN, PHƯƠNG TRÌNH VI TÍCH PHÂN

1. Xét phương trình vi phân

$$\mathcal{L}x(t) \equiv x''(t) - \sigma(t)x(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b \quad (1)$$

với điều kiện $x(a) = x(b) = 0,$ (2)

ở đây $\sigma(t) > 0$ với $t \in [a, b]$, $\sigma(t) \in C[a, b]$

Chúng ta sẽ giải phương trình (1) với điều kiện (2) bằng phương pháp spline collocation.

Giả sử $\{t_i\}_{i=0}^n$ là các điểm trong một phân hoạch đều của $[a, b]$ (π_n):

$$\pi_n : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \quad t_{i+1} - t_i = h = \frac{1}{n}$$

Trên $[a, b]$ xây dựng các hàm B - spline cơ bản như sau :

$$B_i(t) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (t - t_{i-2})^3 & \text{nếu } t \in [t_{i-2}, t_{i-1}], \\ h^3 + 3h^2(t - t_{i-1}) + 3h(t - t_{i-1})^2 - 3(t - t_{i-1})^3, & \text{nếu } t \in [t_{i-1}, t_i] \\ h^3 + 3h^2(t_{i+1} - t) + 3h(t_{i+1} - t)^2 - 3(t_{i+1} - t)^3, & \text{nếu } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ (t_{i+2} - t)^3, & \text{nếu } t \in [t_{i+1}, t_{i+2}], \\ 0 & \text{nếu } t \text{ không thuộc các trường hợp bên trên} \end{cases}$$

Khi ta bổ sung thêm bốn điểm lưới cách đều khác :

$$t_{-2} < t_{-1} < t_0 \text{ và } t_{n+2} > t_{n+1} > t_n \text{ thì có hệ}$$

$\{B_i(t)\}_{i=-1}^{n+1}$ gồm $n + 3$ hàm B-spline độc lập tuyến tính trên $[a, b]$.

Xác định hệ $\{\hat{B}_i(t)\}_{i=0}^n$ bằng cách

$$\begin{cases} \hat{B}_i(t) = B_i(t), \quad 2 \leq i \leq n-2, \quad \hat{B}_0(t) = B_0(t) - 4B_{-1}(t), \\ \hat{B}_1(t) = B_0(t) - 4B_1(t), \quad \hat{B}_{n-1}(t) = B_n(t) - 4B_{n-1}(t) \\ \hat{B}_n(t) = B_n(t) - 4B_{n+1}(t). \end{cases} \quad (3)$$

Khi đó $\hat{B}_i(a) = \hat{B}_i(b) = 0, \quad i = 0, \dots, n.$

Tìm nghiệm $x_n(t)$ xấp xỉ cho bài toán (1), (2) dưới dạng

$$x_n(t) = \sum_{i=-1}^{n+1} a_i B_i(t), \quad x_n(t) \text{ thỏa mãn các điều kiện :}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}x_n(t_i) = f(t_i), \quad i = 0, \dots, n \\ x_n(a) = x_n(b) = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên tương đương với

$$\begin{cases} a_{-1} + 4a_0 + a_1 = 0, \\ (h^2\sigma_0 - 6)a_{-1} + (4h^2\sigma_0 + 12)a_0 + (h^2\sigma_0 - 6)a_1 = h^2f(t_0), \\ (h^2\sigma_i - 6)a_{i-1} + (4h^2\sigma_i + 12)a_i + (h^2\sigma_i - 6)a_{i+1} = h^2f(t_i), \quad i = 1, \dots, n, \\ a_{n-1} + 4a_n + a_{n+1} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

với $\sigma_i = \sigma(t_i)$, $i = 0, \dots, n$. Từ hai phương trình đầu tiên và hai phương trình cuối cùng của (4) ta được

$$36a_0 = h^2f(t_0), \quad 36a_n = h^2f(t_n).$$

Cũng từ (4) rút ra :

$$Ay = b, \quad (5)$$

trong đó $y = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T$, $b = (h^2f(t_0), h^2f(t_1), \dots, h^2f(t_n))^T$

$$A = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h^2\sigma_1 - 6 & 4h^2\sigma_1 + 12 & h^2\sigma_1 - 6 & & \\ 0 & h^2\sigma_1 - 6 & 4h^2\sigma_1 + 12 & h^2\sigma_1 - 6 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & h^2\sigma_{n-1} - 6 & 36 \end{bmatrix}$$

với $\sigma(t) > 0$ thì A là ma trận có đường chéo trội.

Vậy hệ phương trình (5) có nghiệm duy nhất, do đó hệ (4) có nghiệm duy nhất. Sử dụng tính chất của hệ $\{B_i\}_{i=1}^{n+1}$ và các phương trình của (5) ta chứng minh được :

$$\text{nếu } f \in C^2[a, b] \text{ thì } \|x - x_n\| \leq Mh^2,$$

với h đủ nhỏ, M là hằng số dương không phụ thuộc h , $\| \cdot \|$ là chuẩn trong $C[a, b]$. Vậy ta có định lý sau

Định lý 10.1.1. Nghiệm spline trong không gian các hàm spline lập phương (sinh bởi hệ cơ sở $\{B_i(t)\}_{i=-1}^{n+1}$) xấp xỉ bài toán (1), (2) là duy nhất. Nếu $f \in C^2[a, b]$ thì với h đủ nhỏ ta có ước lượng :

$$\|x - x_n\| \leq Mh^2.$$

2. Xét phương trình

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x(t) \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} a_{m-1-j}(t)x^{(m-1-j)}(t) + \lambda \int_a^b K_1(t,s)x(s)ds + \\ + \int_a^t K_2(t,s)x(s)ds = f(t), \end{aligned} \quad (6)$$

thỏa mãn m điều kiện biên độc lập

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{ik} x^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{ik} x^{(k)}(b) = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (7)$$

trong đó $a_k(t) \in C[a, b]$, $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \lambda \in \mathbf{R}$, $k = 0, \dots, m-1$,

$i = 1, \dots, m$, $a \leq t, s \leq b$, $K_j(t, s) \in C(\Omega)$, $\Omega \equiv [a, b] \times [a, b]$, $j = 1, 2$.

Không làm mất tính tổng quát chúng ta có thể giả sử $\gamma_i = 0$, $i = 1, \dots, m$. Do vậy chúng ta sẽ giải phương trình (6) với m điều kiện biên độc lập.

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{ik} x^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{ik} x^{(k)}(b) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Giả sử $\pi_n : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ là một phân hoạch của $[a, b]$.
Đặt $h_i = t_{i+1} - t_i, i = 0, \dots, n-1, h_n = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$ chúng ta luôn giả thiết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0.$$

Kí hiệu $S_n = \{\xi_i \mid \xi_i \in [a, b], i = 1, \dots, N_n\}$ là tập hợp các điểm collocation trên $[a, b]$.

$Sp(\pi_n, p, q) = \{v(t) \in C^q[a, b] \mid v(t)|_{[t_i, t_{i+1}]} \in Q_p, i = 0, \dots, n-1\}$, với p, q là các số tự nhiên thỏa mãn $0 \leq q \leq p-1, p \geq 1, Q_p$ là tập hợp các đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng p .

$$Sp^0(\pi_n, p, q) = \{v(t) \in Sp(\pi_n, p, q) \mid v(t) \text{ thỏa mãn (8)}\};$$

Chúng ta biết rằng nếu bài toán

$$\begin{cases} x^{(m)}(t) = 0 \\ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{ik} x^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{ik} x^{(k)}(b) = 0, i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (9)$$

chỉ có nghiệm tầm thường và $G(t, s)$ là hàm Grin của nó thì bài toán

$$\begin{cases} x^{(m)}(t) = v(t) \\ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{ik} x^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{ik} x^{(k)}(b) = 0, i = 1, \dots, m \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) v(s) ds. \quad (10)$$

Đặt $U : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$

$$v \mapsto Uv = \int_a^b G(t, s) v(s) ds.$$

Tính $x^{(k)}(t)$ từ phương trình (10) rồi thay vào (6) sau khi biến đổi ta được :

$$(I + T)v = f, \quad (11)$$

ở đây $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$

$$v \mapsto Tv.$$

$$Tv = \int_a^b \left[\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j(t) \frac{\partial^j G(t,s)}{\partial t^j} + \lambda \int_a^b K_1(t,\xi) G(\xi,s) d\xi + \right. \\ \left. + \int_a^b K_2(t,\xi) G(\xi,s) d\xi \right] v(s) ds,$$

I là toán tử đồng nhất trên $C[a,b]$. Chúng ta sẽ xấp xỉ nghiệm của phương trình (11) bằng một phần tử $v_n \in S_p(\pi_n, p, q)$ sao cho

$$(I + T) v_n(\xi_i) = f(\xi_i), \quad \xi_i \in S_n;$$

Bổ đề 10.1.1. Giả sử $a_j(t) \in C[a,b]$, $j = 0, \dots, m-1$,

$K_i(t,s) \in C(\Omega)$, $i = 1, 2$ và $P_n : C[a,b] \rightarrow S_p(\pi_n, p, q)$ là phép chiếu tuyến tính liên tục thỏa mãn :

$$P_n f(\xi_i) = f(\xi_i), \quad \forall i \in S_n$$

$$\|P_n f - f\| \leq M \omega(f, h_n), \quad \forall f \in C[a,b],$$

trong đó M là hằng số dương độc lập với n , $\omega(f, h_n)$ là modul liên tục của f ứng với h_n , $\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$.

Khi đó ta có

i) Dãy P_n hội tụ tới toán tử đồng nhất I của $C[a, b]$.

ii) Dãy $P_n T$ hội tụ tới toán tử T trong không gian $\mathcal{L}(X, X)$, $X = C[a, b]$.

Định lý 10.1.2. Giả sử chúng ta có các giả thiết nói trong bổ đề 10.1.1. Ngoài ra ta có phương trình (11) tồn tại toán tử nghịch đảo bị chặn $(I+T)^{-1}$ và (9) chỉ có nghiệm tầm thường. Khi đó

i) Với n đủ lớn tồn tại nghiệm collocation duy nhất $x_n \in S_p^0(\pi_n, m+p, q+m)$ cho bài toán (6), (8).

ii) Tốc độ hội tụ của nghiệm xấp xỉ tới nghiệm đúng cho bởi

$$\|x - x_n\| \leq \beta \omega(x^{(m)}, h_n),$$

với β là hằng số dương không phụ thuộc n .

Chứng minh bổ đề 10.1.1, định lý 10.1.2 cũng như áp dụng định lý 10.1.2. vào các không gian $Sp^0(\pi_n, m+p, q+m)$ có thể xem trong [64].

§2. PHƯƠNG PHÁP SPLINE COLLOCATION ĐỐI VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN PHI TUYẾN FREDHOLM-VOLTERRA

Xét hệ phương trình dạng

$$x(t) = \int_a^{b(1)} K(t,s,x(s))ds + \int_a^{b(2)} K(t,s,x(s))ds + f(t), \quad (12)$$

với $a \leq t, s \leq b$, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$,
 $x_i(t), f_i(t) \in C[a, b]$, $i = 1, \dots, m$,

$$K^{(j)}(t,s,x(s)) = (K_1^{(j)}(t,s,x(s)), \dots, K_m^{(j)}(t,s,x(s))), \quad j=1,2.$$

Đặt $C = C[a, b] \times \dots \times C[a, b]$, (m lần), chuẩn trong C được xác định

$$\|x\|_C = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{a \leq t \leq b} |x(t)_i|.$$

Xây dựng toán tử $T : C \rightarrow C$ với

$$x \mapsto Tx = \int_a^{b(1)} K(t,s,x(s))ds + \int_a^{t(2)} K(t,s,x(s))ds + f(t),$$

khi đó hệ (12) có thể viết được dưới dạng

$$Tx = x, \quad x \in C. \quad (13)$$

Giả sử $\pi_n : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ là một phân hoạch của $[a, b]$.

Đặt $h_i = t_{i+1} - t_i, \quad i = 0, \dots, n-1,$

$$h_n = \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i.$$

Chúng ta luôn giả sử rằng dãy phân hoạch trên có tính chất $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$.

Kí hiệu $S_n = \{\xi_i \mid \xi_i \in [a, b], \quad i = 1, \dots, N_n, N_n \in \mathbb{N}\},$

$$X_n = S_p(\pi_n, p, q) = \{v(t) \in C^q[a, b] \mid v(t)|_{[t_i, t_{i+1}]} \in Q_p\},$$

Q_p là tập hợp các đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng p .

Giả sử: $X = X_n \times \dots \times X_n$ (m lần) và

$$P_n : C \rightarrow X \subset C \quad (14)$$

$x = (x_1(t), \dots, x_m(t)) \mapsto P_n x = (v_1(t), \dots, v_m(t)) \in X$, là một phép chiếu tuyến tính liên tục từ C vào X , hội tụ điểm tới toán tử đồng nhất P trong C , ngoài ra $P_n x(\xi_i) = x(\xi_i), \forall x \in C, \forall (\xi_i) \in S_n$.

Chúng ta sẽ xấp xỉ nghiệm của (13) bằng $v \in X$ sao cho

$$v(\xi_i) = Tv(\xi_i), \quad \forall \xi_i \in S_n \quad (15)$$

Từ (13) có:

$$P_n Tv = P_n v, \quad v \in X,$$

vì P_n là phép chiếu từ C vào X nên

$$P_n v = v, \quad \forall v \in X,$$

khi đó nếu tìm được $v \in X$ sao cho

$$v = P_n T v, \quad (16)$$

thì v sẽ thỏa mãn (15), do đó v là nghiệm cần tìm.

Định lý 10.2.1. Giả sử P_n là các phép chiếu được xác định trong (14) và (13) có một nghiệm $x^{(0)}(t) = (x_1^{(0)}(t), \dots, x_n^{(0)}(t))$,

$$(x_i^{(0)}(t) \in C^{l_i}[a, b], \quad 0 \leq l_i \leq p, \quad (p \text{ là hằng số dương, } l_i \in \mathbb{N}),$$

$$i=1, \dots, m, \quad K^{(j)}(t, s, x), \quad \frac{\partial K^{(j)}(t, s, x)}{\partial x}, \quad j = 1, 2 \text{ liên tục trong miền}$$

$$a \leq t, \quad s \leq b, \quad \|x - x^{(0)}\|_C \leq \sigma_1, \quad (17)$$

σ_1 là hằng số dương. Ngoài ra chúng ta giả sử phương trình

$$u(t) - \int_a^b \frac{\partial K^{(1)}(t, s, x^{(0)}(s))}{\partial x} u(s) ds - \int_a^t \frac{\partial K^{(2)}(t, s, x^{(0)}(s))}{\partial x} u(s) ds = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường, với

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)), u_{i(t)} \in C[a, b],$$

$$\frac{\partial K^{(j)}(t, s, x^{(0)})}{\partial x} u(s) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial K_1^{(j)}(t, s, x^{(0)}(s))}{\partial x_i} u_i, \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial K_m^{(j)}(t, s, x^{(0)}(s))}{\partial x_i} u_i \right).$$

Khi đó chúng ta có các kết luận sau

i) Tồn tại một hằng số $r > 0$ sao cho $x^{(0)}$ là nghiệm duy nhất của phương trình (13) trong hình cầu

$$\|x - x^{(0)}\|_C \leq r.$$

ii) Với n đủ lớn phương trình (16) có một nghiệm duy nhất $v_n(t) = (v_{n,1}(t), \dots, v_{n,m}(t))$, $(v_{n,i}(t) \in X_n, i = 1, \dots, m)$ trong hình cầu trên.

iii) Dãy $\{v_n(t)\}$ hội tụ tới nghiệm $x^{(0)}$, tốc độ hội tụ được ước lượng bằng :

$$\|v_n - x^{(0)}\|_C \leq ME^0(x^{(0)}),$$

$$E^0(x^{(0)}) = \max_{1 \leq i \leq n} E_i(x_i^{(0)}),$$

$$E_i(x_i^{(0)}) = \inf_{z_i \in X_n} \|x_i^{(0)} - z_i\| = O\left((h_n^k \omega(x_i^{(0)})^{(k)}, h_n)\right)$$

$\omega(x^{(0)(t_i)}, h_n)$ là mô đun liên tục của đạo hàm bậc l_i , của hàm $x_i^{(0)}$, tương ứng với h_n ; M là một hằng số dương độc lập với n .

Chứng minh định lý 10.2.2 và áp dụng nó vào các không gian X_n cụ thể có thể xem trong [63].

§3. CÁC THUẬT TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH SPLINE COLLOCATION. THUẬT TOÁN SONG SONG

Trong mục này chúng ta sử dụng phương pháp spline collocation để xây dựng các thuật toán giải các hệ phương trình tuyến tính. Các hệ phương trình này xuất hiện khi sử dụng phương pháp spline collocation để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình elliptic trong không gian hai chiều.

Các thuật toán này sử dụng được phép tính song song, đem lại hiệu quả cao cho quá trình tính toán.

1. Bài toán giá trị riêng spline collocation trực giao

Giả sử $\{x_k\}_{k=0}^N$ là một phân hoạch đều của $[a, b]$,

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

Kí hiệu $Sp(3,1)$ là không gian các hàm lập phương từng đoạn trên $[a, b]$,

$$Sp(3,1) = \{v \in C^1[a,b] \mid v|_{[x_k, x_{k+1}]} \in Q_3, k = 0, \dots, N-1\},$$

Q_3 là tập các đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng 3 ;

$$Sp^0(3,1) = \{v \in Sp(3,1) \mid v'(a) = v'(b) = 0\}$$

Khi đó $Sp^0(3,1)$ là không gian con $2N$ chiều của không gian tuyến tính thực $Sp(3,1)$.

Trong $Sp^0(3,1)$ chọn hệ cơ sở $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{2N-1}$ với các tính chất sau

$$\Phi_n(x_k) = \delta_{nk}, \quad \Phi'_n(x_k) = 0, \quad n, k = 0, \dots, N$$

và

$$\Phi_{n+N}(x_k) = 0, \quad \Phi'_{n+N}(x_k) = \frac{1}{h} \delta_{nk}, \quad n, k = 0, \dots, N \quad (18)$$

(δ_{nk} là delta Kronecker).

Kí hiệu $\{\xi_m\}_{m=1}^{2N}$ là tập hợp các điểm Gauss của $[a, b]$ xác định

$$\xi_{2k+1} = x^{(k+\frac{1}{2})} - \frac{h}{2\sqrt{3}}, \quad \xi_{2k+2} = x^{(k+\frac{1}{2})} + \frac{h}{2\sqrt{3}}, \quad (19)$$

với
$$x^{(k+\frac{1}{2})} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Xét bài toán giá trị riêng sau :

Tim $U \in Sp(3,1)$ sao cho

$$\begin{cases} -U''(\xi_m) = \lambda U(\xi_m), & m = 1, \dots, 2N, \\ U'(a) = U'(b) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Định lý 10.3.1. Bài toán giá trị riêng (20) có $2N$ giá trị riêng không âm phân biệt cho bởi

$$\lambda_j^\pm = 12 \left[\frac{8 + \eta_j \pm \mu_j}{7 - \eta_j} \right] h^{-2}, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_N = 9h^{-2},$$

với $\eta_j = \cos \frac{j\pi}{N}$, $\mu_j = \sqrt{43 + 40\eta_j - 2\eta_j^2}$; $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N-1$,

các hàm riêng tương ứng được cho bởi

$$\begin{aligned} U_j^\pm(x) = & C_j^\pm \left\{ [-(1 + \eta_j)(19 - \eta_j \mp 2\mu_j) + 6(1 - \eta_j)(2 + \eta_j \mp \mu_j)\rho_k(x) + \right. \\ & + 36(1 - \eta_j^2)\rho_k^2(x) + 8(1 - \eta_j)(4 + 5\eta_j \pm \mu_j)\rho_k^3(x)] \cos \frac{kj\pi}{N} + \\ & + \sqrt{1 - \eta_j^2} [19 - \eta_j \mp 2\mu_j + 6(2 + \eta_j \mp \mu_j)\rho_k(x) - \\ & \left. - 36(1 - \eta_j)\rho_k^2(x) + 8(4 + 5\eta_j \pm \mu_j)\rho_k^3(x)] \sin \frac{kj\pi}{N} \right\} \\ U_0(x) = & C_0, \quad U_N(x) = (-1)^k C_N \rho_k(x) [4\rho_k^2(x) - 3], \end{aligned} \quad (21)$$

$C_0, C_j^\pm, C_N$ là các hằng số tùy ý khác 0, $\rho_k(x) = \frac{x - x^{(k+\frac{1}{2})}}{h}$.

Hệ quả 10.3.1. Giả sử $U_j^\pm(x)$, $j = 1, \dots, N-1$, $U_0(x)$, $U_N(x)$ là các hàm riêng của bài toán giá trị riêng (20) được cho bởi (21). Nếu chọn

$$C_j^\pm = \frac{3}{2} \left[\frac{3}{2(b-a)} \right]^{\frac{1}{2}} \theta_j^\pm, \quad C_0 = \left[\frac{1}{2(b-a)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad C_N = \frac{3}{4} \left[\frac{3}{2(b-a)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

với $\theta_j^\pm = [27(1 + \eta_j)(8 + \eta_j \mp \mu_j)^2 + (1 - \eta_j)(11 + 7\eta_j \mp 4\mu_j)^2]^{-1/2}$

thì hệ $M = \{U_j^\pm(x), j = 1, \dots, N-1, U_o(x), U_N(x)\}$ là hệ trực chuẩn

với tích trong $\langle u, v \rangle = h \sum_{m=1}^{2N} u(\xi_m)v(\xi_m)$.

Chứng minh định lý 10.3.1 và $m = 1$ hệ quả 10.3.1 có thể xem trong [114].

Bây giờ chúng ta giả sử $\{\Phi_n\}_{n=0}^{2N-1}$ là cơ sở của $S_p^0(3, 1)$ và

$$U(x) = \sum_{n=0}^{2N-1} Z_n \Phi_n(x)$$

thì bài toán giá trị riêng (20) trở thành bài toán giá trị riêng

$$A\bar{Z} = \lambda B\bar{Z}, \quad (22)$$

$$\text{với } \bar{Z} = (z_o, \dots, z_{2N-1})^T, A = (a_{mn})_{m=1, n=0}^{2N, 2N-1} \quad (23)$$

$$B = (b_{mn})_{m=1, n=0}^{2N, 2N-1}, a_{mn} = -\Phi_n''(\xi_m), b_{mn} = \Phi_n(\xi_m).$$

Định lý 10.3.2. Giả sử $\lambda_j^\pm, j = 1, \dots, N-1, \lambda_o, \lambda_N$ là các giá trị riêng của (20) cho bởi hệ quả 10.3.1. Giả sử $U_j^\pm(x), U_o(x), U_N(x)$ là các hàm riêng trực chuẩn tương ứng cho bởi hệ quả 10.3.1.

$$U_j^\pm(x) = \sum_{n=0}^{2N-1} z_{n,j}^\pm \Phi_n(x), U_o(x) = \sum_{n=0}^{2N-1} z_{n,o} \Phi_n(x),$$

$$U_N(x) = \sum_{n=0}^{2N-1} z_{n,o} \Phi_n(x).$$

Đặt

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1^-, \dots, \lambda_{N-1}^-, \lambda_0, \lambda_1^+, \dots, \lambda_{N-1}^+, \lambda_N) \quad (24)$$

$$Z = h^{1/2}(\bar{Z}_1^-, \dots, \bar{Z}_{N-1}^-, \bar{Z}_0, \bar{Z}_1^+, \dots, \bar{Z}_{N-1}^+, \bar{Z}_N)$$

với $\bar{Z}_j^\pm = (z_{0,j}^\pm, \dots, z_{2N-1,j}^\pm), \bar{Z}_0 = (z_{0,0}, \dots, z_{2N-1,0})^T,$

$$\bar{Z}_N = (z_{0,N}, \dots, z_{2N-1,N})^T, \text{ thì}$$

$$AZ = BZA, Z^T B^T BZ = I, (I \text{ là ma trận đơn vị cấp } 2N)..$$

Chứng minh xem [114].

Bây giờ chúng ta đi tính một ma trận Z cụ thể làm cơ sở cho thuật toán sẽ xây dựng.

Chọn hệ cơ sở (18) của $Sp(3,1)$. Khi đó giả sử ta có

$$U_j^\pm(x) = \sum_{n=0}^N z_{n,j}^\pm \Phi_n(x) + \sum_{n=1}^{N-1} z_{n+N,j}^\pm \Phi_{N+n}(x).$$

Sử dụng tính chất của $\Phi_n(x)$ ta tìm được

$$Z = -3 \left(\frac{6}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\tilde{C} \Lambda_\alpha^-}{S \Lambda_\beta^- | \vec{0} } \left| \frac{C \Lambda_\alpha^+}{S \Lambda_\beta^+ | \vec{0} } \right] \right], \quad (25)$$

với $\vec{0}$ là véc tơ cột 0, $N-1$ chiều

$$\Lambda_\alpha^- = \text{diag}(\alpha_1^-, \dots, \alpha_{N-1}^-), \Lambda_\alpha^+ = \text{diag}\left(-\frac{1}{6\sqrt{3}}, \alpha_1^+, \dots, \alpha_{N-1}^+, -\frac{1}{8}\right),$$

$$\Lambda_\beta^\pm = \text{diag}(\beta_1^\pm, \dots, \beta_{N-1}^\pm), S = \left(\sin \frac{kj\pi}{N} \right)_{k,j=1}^{N-1}$$

$$\tilde{C} = \left(\cos \frac{kj\pi}{N} \right)_{k=0,j=1}^{N,N-1} \quad C = \left(\cos \frac{kj\pi}{N} \right)_{k,j=0}^N$$

2. Một thuật toán song song giải hệ phương trình tuyến tính spline collocation trực giao

Xét bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega \equiv (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (26)$$

Với $c, a_i, b_i, i = 1, 2$ là các hằng số, $\frac{\partial u}{\partial n}$ là đạo hàm theo pháp tuyến ngoài, Δ là toán tử Laplat, f liên tục trên Ω ;

Giả sử $\{x_k^i\}_{k=0}^{N_i}$ là lưới đều của $[a_i, b_i]$, $h_i = \frac{b_i - a_i}{N_i}$, $S_p^{o(i)}(3,1)$ là không gian của các hàm spline lập phương từng đoạn trên $[a_i, b_i]$ thỏa mãn $v'(a_i) = v'(b_i) = 0, i = 1, 2$, xác định như trong $S_p^o(3,1)$. Giả sử $\{\Phi_{n_i}^{(i)}\}_{n_i=0}^{2N_i-1}$ là một cơ sở của $S_p^{o(i)}(3,1)$ xác định như trong (18).

Với x_k, h, N thay thế tương ứng bằng $x_k^{(i)}, h_i, N_i$.

Khi đó nghiệm xấp xỉ spline collocation trực giao tìm dưới dạng

$$U(x_1, x_2) = \sum_{n_1=0}^{2N_1-1} \sum_{n_2=0}^{2N_2-1} u_{n_1, n_2} \Phi_{n_1}^{(1)}(x_1) \Phi_{n_2}^{(2)}(x_2). \quad (27)$$

Để xấp xỉ cho bài toán (26) chúng ta giải hệ phương trình

$$-\Delta U(\xi_{m_1}^{(1)}, \xi_{m_2}^{(2)}) + cU(\xi_{m_1}^{(1)}, \xi_{m_2}^{(2)}) = f(\xi_{m_1}^{(1)}, \xi_{m_2}^{(2)}) \quad (28)$$

với $m_i = 1, \dots, 2N_i$, $\{\xi_{m_i}^{(i)}\}_{m_i=1}^{2N_i}$ là tập các điểm Gauss trên $[a_i, b_i]$ cho

bởi (19) với x_k, h, N được thay thế tương ứng bằng $x_k^{(i)}, h_i, N_i$.

Đặt $\vec{u} = (u_{0,0}, \dots, u_{0,2N_2-1}, \dots, u_{2N_1-1,0}, \dots, u_{2N_1-1,2N_2-1})^T$

$\vec{f} = (u_{1,1}, \dots, u_{1,2N_2}, \dots, u_{2N_1,1}, \dots, u_{2N_1,2N_2})^T$, $f_{m_1, m_2} = f(\xi_{m_1}^{(1)}, \xi_{m_2}^{(2)})$.

Hệ phương trình (28) được viết dưới dạng

$$(A_1 \otimes B_2 + B_1 \otimes A_2) + cB_1 \otimes B_2 \vec{u} = \vec{f}, \quad (29)$$

Với $A_i, B_i, i = 1, 2$ được xác định như trong (23) trong đó Φ_n, ξ_m, N được thay thế tương ứng bằng $\Phi_{n_i}, \xi_{m_i}^i, N_i$.

Theo định lý 10.3.2 ta có

$$Z_i^T B_i^T A_i Z_i = \Lambda_i, \quad Z_i^T B_i^T B_i Z_i = I_i, \quad i = 1, 2, \quad (30)$$

trong đó I_i là ma trận đơn vị cấp $2N_i$.

Do vậy phương trình (29) tương đương với

$$(\tilde{\Lambda}_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes \Lambda_2) (Z_1^{-1} \otimes Z_2^{-1}) \vec{u} = (Z_1^T B_1^T \otimes Z_2^T B_2^T) \vec{f} \quad (31)$$

$$\tilde{\Lambda}_1 = \Lambda_1 + cI_1.$$

Sử dụng (31) chúng ta có thuật toán sau để giải (29)

Thuật toán song song

1) Tính $\tilde{g} = (Z_1^T B_1^T \otimes Z_2^T B_2^T) \vec{f}$.

2) Giải hệ phương trình

$$(\tilde{\Lambda}_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes \Lambda_2) \vec{v} = \tilde{g};$$

3) Tính $\vec{u} = (Z_1 \otimes Z_2) \vec{v}$.

Số các phép toán cần thiết trong thuật toán là $O(N_1 N_2 \log N_1 N_2)$. Các bước của thuật toán rất thích hợp với phép tính song song. Do vậy thuật toán có hiệu quả cao trong tính toán.

Một số bài toán khái quát hơn bài toán (26) có thể bằng các thuật toán tương tự xem [114].

§4. HÀM SPLINE VỚI PHƯƠNG TRÌNH GIẢ VI PHÂN

Giả sử f là một hàm tuần hoàn trong $\mathbf{R}^n$, tức là

$$f(x+k) = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad k \in \mathbf{Z}^n.$$

Rõ ràng chúng ta có thể đồng nhất các hàm tuần hoàn với các hàm xác định trên một cái xuyên $T^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$.

Mỗi hàm suy rộng u khả tích địa phương có khai triển Fourier

$$u(x) = \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^n} \tilde{u}(\xi) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle}$$

trong đó hệ số Fourier $\tilde{u}(\xi)$ được xác định

$$\tilde{u}(\xi) = \int_{[0,1]^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} u(x) dx,$$

với $\langle \xi, x \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$. Kí hiệu $H^s(T^n)$, $s \in \mathbf{R}$ là không gian Sobolev

gồm các hàm suy rộng u với chuẩn

$$\|u\|_s = (|\tilde{u}(0)|^2 + \sum_{0 \neq \xi \in \mathbf{Z}^n} |\xi|^{2s} |\tilde{u}(\xi)|^2)^{1/2}.$$

Chúng ta kí hiệu toán tử sai phân trước riêng phần $\Delta_{(j)}$

$\Delta_{(j)} f(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n) = f(\xi_1, \dots, \xi_j+1, \dots, \xi_n) - f(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n)$,
 $\xi_j \in \mathbf{Z}^n$, và $\Delta^\alpha = \Delta_{(1)} \alpha_1 \dots \Delta_{(n)} \alpha_n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Giả sử $m \in \mathbf{R}$. Ta kí hiệu $S^m(T^n)$ là tập hợp tất cả các hàm $\sigma \in C^\infty(T^n \times \mathbf{Z}^{n-})$ thỏa mãn

$$|\partial_x^\beta \Delta_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|},$$

$$\forall x \in T^n, \quad \xi \in \mathbf{Z}^n.$$

Hàm $\sigma \in S^m(T^n)$ được gọi là một biểu trưng toàn cục cấp m trên T^n .

Chúng ta xét một toán tử giả vi phân trên T^n có dạng

$$A = \sigma(x, D) + K, \quad (32)$$

trong đó $\sigma(x, D)$ gọi là toán tử giả vi phân toàn cục cấp m trên T^n được xác định bởi

$$\sigma(x, D) u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} \sigma(x, \xi) \bar{u}(\xi),$$

với biểu trưng $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \in S^m(T^n)$, $\sigma_1 \in S^{m'}(T^n)$, $m' < m$ còn biểu trưng chính σ_0 được giả thiết là thuần nhất dương bậc μ , $\text{Re } \mu = m$, theo biến ξ (tức là $\sigma_0(x, t\xi) = t^\mu \sigma_0(x, \xi)$, $t > 0$, $\xi \neq 0$) và thỏa mãn $\sigma_0(x, 0) = 1$, $x \in T^n$. Toán tử K là một toán tử tích phân với hạch là một hàm thuộc C^∞ .

Trên T^n chúng ta đưa vào một lưới chữ nhật

$$\square^N = \left\{ x_k = \frac{k}{n}, k = (k^1, \dots, k^n), 0 \leq k^j < N, 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Giả sử $x_j \rightarrow \phi_0^{1,0}(x_j)$ là hàm đặc tính của khoảng $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Chúng ta xác định các B-spline bằng một tích chập d^j lần :

$$\phi_0^{1,d^j}(x_j) = \phi_0^{1,0}(x^j) * \dots * \phi_0^{1,0}(x^j)$$

và tích tensor $\phi_0^{1,d}(x) = \prod_{j=1}^n \phi_0^{1,d^j}(x^j)$,

trong đó $d = (d^1, \dots, d^n)$. Giả sử $S^{N,d}(\square^N)$ là không gian được sinh bởi các hàm tuần hoàn $\phi_k^{N,d}(x) = \phi_0^{1,d}(Nx - k)$.

Giả sử $\varepsilon = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$, với $0 \leq \varepsilon^j < 1, 1 \leq j \leq n$.

Chúng ta chỉ sử dụng phương pháp ε -collocation được xác định bởi các phương trình

$$Au_N \left(x_k + \frac{\varepsilon}{N} \right) = f \left(x_k + \frac{\varepsilon}{N} \right), \quad x_k \in \square^N, \quad (33)$$

để xác định nghiệm xấp xỉ $u_N \in S^{N,d}(\square^N)$ của phương trình giả vi phân sau :

$$Au = f \text{ trên } T^n, \quad (34)$$

với A được xác định như trong (32).

Khi một cơ sở cho $S^{N,d}(\square^N)$ đã được chọn thì dễ dàng dẫn (33) về một $N \times N$ hệ tuyến tính đối với các hệ số chưa biết của u_N .

Chúng ta có định lý sau với các lưới chữ nhật.

Định lý 10.4.1. Giả sử $m \leq \underline{d} = \min \{d^j : 1 \leq j \leq n\}$ nếu các điểm collocation $x_k + \frac{\varepsilon}{N}$ không nằm trong giá kỳ dị của tất cả các u_N và $m < \underline{d} + \frac{1}{2}$ nếu không phải như vậy. Giả thiết $m \leq s < \underline{d} + \frac{1}{2}$. Nếu toán tử giả vi phân

$A : H^s(T^n) \rightarrow H^{s-m}(T^n)$ là khả đảo thì phương pháp collocation (33) ổn định khi và chỉ khi biểu trưng số α^c được xác định bởi

$$\alpha^c(x, \eta) = e^{2\pi i \langle x, \eta \rangle} \cdot \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \sigma(x, \xi + \eta) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \cdot \prod_{j=1}^n \left(\frac{(-1)^{\xi^j} \sin \pi \eta^j}{\pi(\eta^j + \xi^j)} \right)^{d^j+1},$$

là elliptic, tức là bất đẳng thức

$$|\alpha^c(x, \eta)| \geq c|\eta|^m, \quad (35)$$

đúng với tất cả $x \in T^n$, $-\frac{1}{2} < \eta^j < \frac{1}{2}$, $j = 1, \dots, n$, $\eta \neq 0$, c là một hằng số dương.

(Giá trị của v , được kí hiệu $\text{singsupp } v$ là phần bù của tập mở trên đó v trơn).

Sử dụng định lý này cùng với các tính chất ngược của $S^{N,d}(\square^N)$ và các kỹ thuật tính toán thông dụng ta được :

Định lý 10.4.2. Giả sử các giả thiết trong định lý 10.4.1 và điều kiện (35) được thỏa mãn. Khi đó tồn tại $N_0 > 0$ sao cho với $N \geq N_0$ và với hàm f liên tục các phương trình collocation (33) sẽ giải được duy nhất với $u_N \in S^{N,d}(\square^N)$. Ngoài ra nếu $s, t \in \mathbf{R}$ thỏa mãn $m \leq s \leq t \leq \underline{d} + 1$, $s \leq \underline{d} + \frac{1}{2}$, $m + \frac{n}{2} < t$, và nghiệm u của (34) thuộc $H^t(T^n)$ thì chúng ta có ước lượng sai số tối ưu sau

$$\|u - u_N\|_s \leq cN^{s-1} \|u\|_t.$$

§5. XẤP XỈ KHÔNG GIAN SOBOLEV BẰNG $\mathcal{L}$ -SPLINE

Giả sử Δ là một phân hoạch của $[a, b]$ với các điểm lưới x_i ,
 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$.

Chúng ta kí hiệu $\mathcal{A}(a, b)$ là tập hợp tất cả các phân hoạch của $[a, b]$.

Đặt $\pi = \max_{0 \leq i \leq N-1} (x_{i+1} - x_i)$ và $\underline{\pi} = \min_{0 \leq i \leq N-1} (x_{i+1} - x_i)$,

$$\mathcal{A}_\sigma(a, b) = \{\Delta \in \mathcal{A}(a, b) \mid \frac{\pi}{\underline{\pi}} \leq \sigma, \sigma \geq 1 \text{ cho trước}\}.$$

Bây giờ giả sử ta có toán tử vi phân tuyến tính $\mathcal{L}$ bậc m

$$\mathcal{L} u(x) = \sum_{j=0}^m c_j(x) D^j u(x), \quad m \geq 1, \quad D^j = \left(\frac{d}{dx} \right)^j,$$

với $c_j \in C^j[a, b]$, $0 \leq j \leq m$, $c_m(x) \geq \delta > 0$, $\forall x \in [a, b]$. Giả sử z là số tự nhiên $1 \leq z \leq m$. Khi đó không gian $\mathcal{L}$ -spline là tập hợp các hàm giá trị thực ω xác định trên $[a, b]$ sao cho

$$\mathcal{L}^* \mathcal{L} \omega(x) = 0, \forall x \in (a, b) - \{x_i\}_{i=1}^{N-1},$$

$$D_{\omega}^k(x_i-) = D^k \omega(x_i+) \text{ với } 0 \leq k \leq 2m - 1 - z, \quad 0 < i < N,$$

trong đó $\mathcal{L}^*$ là toán tử liên hợp với $\mathcal{L}$ có nghĩa

$$\mathcal{L}^* v \equiv \sum_{j=0}^m (-1)^j D^j \{c_j(x)v(x)\}.$$

Sau đây chúng ta trình bày một số kết quả về nội suy $\mathcal{L}$ -spline.

Nếu $g \in C^{m-1}[a, b]$ sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn ta có thể chứng minh được tồn tại duy nhất $S \in \text{Sp}(\mathcal{L}, \Delta, z)$ (không gian các hàm $\mathcal{L}$ -spline) nội suy g theo nghĩa

$$D^j(g - S)(x_i) = 0, \quad 0 \leq j \leq z - 1, \quad 0 < i < N,$$

$$D^j(g - S)(a) = D^j(g - S)(b) = 0, \quad 0 \leq j \leq m - 1 \quad (36)$$

Định lý 10.5.1. Giả sử $g \in W_2^{2m}[a, b]$ và $\Delta \in \mathcal{P}_{\sigma}(a, b)$,

$S \in S_p(\mathcal{L}, \Delta, z)$ là hàm $\mathcal{L}$ -spline duy nhất nội suy g theo nghĩa (36). Khi đó với $2 \leq q \leq \infty$ ta có

$$\|D^j(g - S)\|_{L_q[a, b]} \leq k\pi^{2m-j-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}} \|g\|_{W_2^{2m}[a, b]}, \quad 0 \leq j \leq 2m - z. \quad (37)$$

Đối với spline đa thức thì trong (37) ta có thể thay $\|g\|_{W_2^{2m}[a, b]}$ bằng

$$\|D^{2m}g\|_{L_2[a, b]}.$$

Định lý 10.5.2. Giả sử $g \in C^k[a, b]$ với $0 \leq k \leq 2m$, $\Delta \in \mathcal{P}_\sigma(a, b)$ có số điểm lưới ít nhất là $2m$. Ngoài ra giả sử $S \in \text{Sp}(\mathcal{L}, \Delta, z)$ là phần tử nội suy duy nhất cho g theo nghĩa

$$D^j(S - \mathcal{P}_{2m-1,j}g)(x_i) = 0, \quad 0 \leq j \leq z-1, \quad 0 < i < N$$

$D^j(S - \mathcal{P}_{2m-1,0}g)(a) = D^j(S - \mathcal{P}_{2m-1,N}g)(b) = 0, \quad 0 \leq j \leq m-1$, trong đó $\mathcal{P}_{2m-1,j}g$ là đa thức nội suy Lagrange của g tại $2m$ điểm $x_{j_1}, x_{j_1+1}, \dots, x_{j_1+2m-1}, x_i \in [x_{j_1}, x_{j_1+2m-1}]$.

Khi đó với $2 \leq q \leq \infty$ ta có

$$\begin{aligned} & k\pi^{\frac{k-j}{2} + \frac{1}{q}} \{ \omega(D^k g, \pi) + \pi^{2m-k} \|g\|_{W_2^k[a,b]} \} \geq \\ & \geq \begin{cases} \|D^j(g-S)\|_{L_q[a,b]} & \text{nếu } 0 \leq j \leq \min(k, 2m-z), \\ \|D^j S\|_{L_q[a,b]} & \text{nếu } \min(k, 2m-z) \leq j \leq 2m-z, \end{cases} \end{aligned}$$

với $\omega(f, h)$ là môđun liên tục của f với h .

Sử dụng các kết quả trên ta sẽ trình bày nội suy các không gian Sobolev bằng $\mathcal{L}$ -spline.

Giả sử X_0 và X_1 là hai không gian Banach với chuẩn $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1$, $X_0, X_1 \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ là không gian tuyến tính Hausdorfs sao cho các ánh xạ đồng nhất của X_i vào $\mathcal{X}$ là liên tục, $i = 0, 1$.

Kí hiệu $X_0 + X_1 = \{f \in \mathcal{X} \mid f = f_0 + f_1, f_i \in X_i, i = 0, 1\}$ thì $X_0 \cap X_1$ và $X_0 + X_1$ là các không gian Banach với chuẩn

$$\|f\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|f\|_0, \|f\|_1\},$$

$$\|f\|_{X_0 + X_1} = \inf\{\|f\|_0, \|f\|_1 \mid f = f_0 + f_1, f_i \in X_i, i = 0, 1\}.$$

Từ đó rút ra

$$X_0 \cap X_1 \subset X_i \subset X_0 + X_1 \subset \mathcal{X}, \quad i = 0, 1;$$

Trong mục này chúng ta hiểu các bao hàm thức theo nghĩa các ánh xạ đồng nhất liên tục.

Mỗi không gian Banach $X \subset \mathcal{X}$ gọi là không gian trung gian của các không gian X_0 và X_1 nếu thỏa mãn

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1 \subset \mathcal{X}. \quad (38)$$

Bây giờ chúng ta xây dựng các không gian trung gian của X_0 và X_1 ;

$\forall t > 0, \forall f \in (X_0 + X_1)$ ta định nghĩa

$$K(t, f) = \inf \{ \|f_0\|_0 + t \|f_1\|_1 \mid f = f_0 + f_1, f_i \in X_i, i = 0, 1 \}.$$

Cho $0 < \theta < 1, 1 \leq q \leq \infty$, giả sử $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ là tập con của tập các hàm $f \in (X_0 + X_1)$ với chuẩn

$$\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, q}} = \begin{cases} \left\{ \int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, f)]^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{-\theta} K(t, f), & q = \infty \end{cases}$$

là hữu hạn. Khi đó ta có

Định lý 10.5.3. Với $0 < \theta < 1, 1 \leq q \leq \infty$ thì $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ là không gian Banach trung gian của X_0, X_1 và thỏa mãn (38). Trường hợp riêng $(X, X)_{\theta, q} = X$ (X là không gian Banach).

Giả sử Y_0 và Y_1 là hai không gian Banach chứa trong không gian tuyến tính Hausdorff Y . T là biến đổi tuyến tính

$$T : (X_0 + X_1) \rightarrow (Y_0 + Y_1)$$

$$\text{thỏa mãn} \quad \|Tf\|_i \leq M_i \|f\|_i, \forall f \in X_i, i = 0, 1. \quad (39)$$

Khi đó chúng ta có các kết quả lý thú sau (xem [119])

Định lý 10.5.4. Giả sử T là một biến đổi tuyến tính từ $(X_0 + X_1)$ vào $(Y_0 + Y_1)$ thỏa mãn (39), thì với mỗi $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$, T là biến đổi tuyến tính bị chặn từ không gian $(X_0 + X_1)_{\theta, q}$ vào

$$(Y_0, Y_1)_{\theta, q}. \quad \text{Đặt } M = \sup_{\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, q}}} \|Tf\|_{(Y_0, Y_1)_{\theta, q}}, \text{ thì } M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

Định nghĩa 10.5.1. Không gian Besov $B_p^{\theta, q}[a, b]$ được xác định $(L_p[a, b], W_p^n[a, b])_{\theta, q} \equiv B_p^{\theta, q}[a, b]$, với $0 < \theta < 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

Định lý 10.5.5.

1) Nếu $1 \leq p \leq \infty$ và m là số nguyên dương thì

$$B_p^{m, 1}[a, b] \subset W_p^m[a, b] \subset B_p^{m, \infty}[a, b].$$

2) Nếu $1 \leq q_1 < q_2 \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, $\sigma > 0$ thì

$$B_p^{\sigma, q_1}[a, b] \subset B_p^{\sigma, q_2}[a, b].$$

3) Nếu $0 < \sigma_2 < \sigma_1$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ và $1 \leq p \leq \infty$ thì

$$B_p^{\sigma_1, q_1}[a, b] \subset B_p^{\sigma_2, q_2}[a, b].$$

4) Nếu $\sigma_0 \neq \sigma_1$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$ và $1 \leq p \leq \infty$, với các chuẩn tương đương thì

$$(B_p^{\sigma_0, q_0}[a, b], B_p^{\sigma_1, q_1}[a, b])_{\theta, q} = B_p^{\sigma, q}[a, b], \quad (40)$$

$\sigma = \theta\sigma_1 + (1 - \theta)\sigma_0$, và với giá trị nguyên của σ_i một trong các không gian $B_p^{\sigma_i, q_i}[a, b]$ trong (40) có thể thay bằng $W_p^{\sigma_i}[a, b]$.

Trường hợp riêng

$$(W_p^m[a, b], W_p^{2m}[a, b])_{\theta, q} = B_p^{\sigma, q}, \quad \sigma = (1 + \theta)m.$$

II. XẤP XỈ BẰNG SÓNG NHỎ

§6. SÓNG NHỎ

Sự phát triển chủ đề về sóng nhỏ tương tự với sự phát triển về hàm suy rộng. Cả hai đều bắt đầu trong khi tìm giải những bài toán nảy sinh trong công nghệ bằng những kỹ thuật mới. Hàm suy rộng bắt đầu với các phép tính hàm Heaviside $\theta(x)$ (tức là hàm bằng 1 nếu $x \geq 0$, bằng 0 nếu $x < 0$) và sử dụng hình thức hàm Dirac trong vật lý, kỹ thuật. Còn sóng nhỏ bắt đầu khi đi tìm một kỹ thuật phân tích địa chấn tốt hơn.

Đến nay sóng nhỏ đang được sử dụng rất rộng rãi trong khoa học (tự nhiên, xã hội) và công nghệ.

Đối với sóng nhỏ chúng tôi chủ yếu hạn chế trong trường hợp một chiều. Chúng tôi sẽ chuyển sang nhiều chiều trong vài vấn đề về sau.

Đầu tiên chúng tôi giới thiệu một ít về giải tích Fourier.

Giả sử $L_2(0, 2\pi)$ là không gian các hàm $f(x)$ bình phương khả tích có chu kỳ 2π , tức là $f(x) = f(x - 2\pi)$ và

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Với $f \in L^2(0, 2\pi)$ ta có thể biểu diễn f thành chuỗi Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}, \quad (41)$$

trong đó các hằng số C_n được gọi là các hệ số Fourier của f , và được xác định

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (42)$$

$$\|f(2^j - k)\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(2^j x - k)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

Do đó nếu $\psi \in L_2(\mathbf{R})$ có độ dài đơn vị thì tất cả các hàm $\psi_{j,k}$ được xác định bởi

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (49)$$

cũng có đồ dài đơn vị

$$\|\psi_{j,k}\|_2 = \|\psi\|_2 = 1, \quad j, k \in \mathbf{Z} \quad (50)$$

Nhắc lại ký hiệu Kronecker

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{với } j = k \\ 0 & \text{với } j \neq k \end{cases}$$

Định nghĩa 10.6.1. Một hàm $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ được gọi là một sóng nhỏ trực giao (sntg), nếu họ $\{\psi_{j,k}\}$ được xác định bởi (49) là một cơ sở trực giao của $L_2(\mathbb{R})$, tức là

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}. \quad (51)$$

và mọi $f \in L_2(\mathbf{R})$ viết được

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (52)$$

trong đó sự hội tụ của chuỗi trong (52) là trong $L_2(\mathbf{R})$, tức là

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=-M_2}^{N_2} \sum_{k=-M_1}^{N_1} C_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2 = 0$$

Ví dụ đơn giản nhất về sóng trực giao là hàm Haar ψ_H được xác định bởi

$$\psi_H(x) := \begin{cases} 1 & \text{với } 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ -1 & \text{với } \frac{1}{2} \leq x < 1; \\ 0 & \text{nếu khác trên.} \end{cases} \quad (53)$$

Biểu diễn chuỗi của f trong (52) được gọi là *chuỗi sóng nhỏ*. Tương tự với khái niệm hệ số Fourier trong [5] *hệ số sóng nhỏ* $C_{j,k}$ được cho bởi

$$C_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle. \quad (54)$$

Như vậy nếu ta xác định một phép biến đổi tích phân W_ψ trên $L_2(\mathbf{R})$ bởi

$$(W_\psi f)(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx, \quad f \in L_2(\mathbf{R}), \quad (55)$$

thì hệ số sóng nhỏ trong (52) và (54) trở thành

$$C_{j,k} = (W_\psi f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right). \quad (56)$$

Phép biến đổi tuyến tính W_ψ được gọi là *phép biến đổi sóng nhỏ tích phân đối với sóng nhỏ cơ sở ψ* .

Một chú ý lý thú là trong giải tích Fourier, phép biến đổi Fourier và chuỗi Fourier không có mối liên quan cơ bản, còn trong giải tích sóng nhỏ phép biến đổi sóng nhỏ tích phân (55) và chuỗi sóng nhỏ (52), có một hệ thức cơ bản là (56).

Trong [55] và tài liệu trích dẫn ở đó đã nói lý thuyết các toán tử giả vi phân (một cách tổng quát là toán tử tích phân Fourier) là một công cụ toán học cực kỳ mạnh. Mà các toán tử giả vi phân được biểu diễn bằng các phép biến đổi Fourier (ngược). Ở đây ta lại thấy phép biến đổi Fourier có rất nhiều ý nghĩa vật lý trong ứng dụng.

Chẳng hạn, nếu $f \in L_2(\mathbf{R})$ được xem như một *tín hiệu tương tự* với *năng lượng hữu hạn* được xác định bởi chuẩn $\|f\|_2$ thì phép biến đổi Fourier

$$\hat{f}(\omega) := (\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} f(t) dt$$

của f biểu thị *phổ* của tín hiệu ấy. Trong phân tích tín hiệu, những tín hiệu tương tự được xác định trong *miền thời gian* và thông tin phổ của các tín hiệu ấy được cho trong *miền tần số*. Để tiện trình bày ta thừa nhận các tần số âm. Như vậy cả hai, miền thời gian và miền tần số là cả đường thẳng thực $\mathbf{R}$.

Định nghĩa 10.6.2. Một hàm không tầm thường $w \in L_2(\mathbf{R})$ được gọi là *một hàm của số* nếu $xw(x) \in L_2(\mathbf{R})$. Tâm t^* và bán kính Δ_w của hàm của số w được xác định tương ứng như sau :

$$t^* := \frac{1}{\|w\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |w(x)|^2 dx \quad (57)$$

và
$$\Delta_w := \frac{1}{\|w\|_2^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x - t^*)^2 |w(x)|^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (58)$$

Độ rộng của hàm của số w được xác định là $2\Delta_w$.

Chú ý rằng bên trên ta đã dùng từ "sóng cơ sở" nhưng chưa có định nghĩa. Tạm coi một sóng nhỏ trực giao bất kỳ là một sóng cơ sở. Trong mọi trường hợp bất cứ một hàm của số sóng cơ sở đều phải thỏa mãn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (59)$$

Giả sử ψ là một sóng cơ sở bất kỳ sao cho cả ψ lẫn phép biến đổi Fourier của nó là $\hat{\psi}$ đều là hàm cửa sổ với các tâm và bán kính tương ứng là t^* , ω^* , Δ_ψ , $\Delta_{\hat{\psi}}$. Khi đó phép biến đổi sóng nhỏ tích phân

$$(W_\psi f)(b, a) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \quad (60)$$

của tín hiệu tương tự f địa phương hóa tín hiệu với một "cửa sổ thời gian"

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi],$$

trong đó tâm của cửa sổ nằm tại $b + at^*$ với độ rộng là $2a\Delta_\psi$.

Điều này được nói là "địa phương hóa thời gian" trong phân tích tín hiệu. Một phía khác nếu đặt

$$\eta(\omega) := \hat{\psi}(\omega + \omega^*) \quad (61)$$

thì η cũng là một hàm cửa sổ với tâm tại 0 và bán kính là $\Delta_{\hat{\psi}}$ và do đẳng thức Parseval phép biến đổi tích phân sóng nhỏ (60) trở thành :

$$(W_\psi f)(b, a) = \frac{|a|^{-1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right)} d\omega, \quad (62)$$

Như vậy nếu bỏ đi phép nhân với $|a|^{-1/2}$ và một phép giản pha tuyến tính của $e^{ib\omega}$, đại lượng $(W_\psi f)(b, a)$ cũng cho ta một thông tin địa phương hóa của phổ $\hat{f}(\omega)$ của tín hiệu $f(t)$ với "cửa sổ tần số"

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\psi}} \right],$$

có tâm tại ω^*/a với độ rộng $2\Delta_{\hat{\psi}}/a$. Điều này được gọi là "địa phương hóa tần số". Từ (60), (62) ta có "cửa sổ tần số - thời gian"

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}} \right] \quad (63)$$

cho phân tích tần số thời gian trong tình huống trên.

Bây giờ ta chuyển sang các công thức ngược.

Một công thức biểu diễn mọi $f \in L_2(\mathbf{R})$ qua $(W_\psi f)(b, a)$ được gọi là *công thức ngược* và hàm (hạch) $\tilde{\psi}$ được dùng trong công thức ấy được gọi là "*đối ngẫu*" của sóng cơ sở ψ . Vì vậy trong thực tế ψ có thể được sử dụng như một *sóng cơ sở chỉ khi công thức ngược tồn tại*.

Ta sẽ tìm f với một tình huống của $W_\psi f$ như sau.

Tìm f từ $(W_\psi f)(b, a)$, $a, b \in \mathbf{R}$

Giả sử

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (64)$$

Tính hữu hạn của C_ψ hạn chế lớp hàm $\psi \in L_2(\mathbf{R})$ được coi là sóng cơ sở. Đặc biệt nếu ψ cũng phải là một hàm cửa sổ thì ψ cần

thuộc $L_1(\mathbf{R})$, tức là $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)| dx < \infty$ sao cho $\hat{\psi}$ là hàm liên tục

trong $\mathbf{R}$, do đó phải có $\hat{\psi}(0) = 0$, có nghĩa là

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (65)$$

Với C_ψ như trên, ta có

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{\mathbb{R}^2} \{(W_\psi f)(b, a)\} \left\{ |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\} \frac{da db}{a^2}, f \in L_2(\mathbb{R}), \quad (66)$$

Chú ý rằng với cùng hạch $|a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$, không kể lượng liên hợp phức, được sử dụng để xác định cả phép biến đổi sóng nhỏ tích phân (55) lẫn công thức ngược (66), cho nên $\bar{\psi}$ có thể được gọi là "đối ngẫu" của sóng cơ sở ψ . Dĩ nhiên đối ngẫu này không phải là duy nhất.

§7. PHÉP BIẾN ĐỔI SÓNG NHỎ TÍCH PHÂN

Trong §6 chúng tôi đã giới thiệu sơ lược vài khái niệm ban đầu về sóng nhỏ. Từ đây về sau ta sẽ chuyển sang vài vấn đề được nghiên cứu gần đây. Đầu tiên ta nghiên cứu phép biến đổi sóng nhỏ tích phân trong $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Trong [107] đã nghiên cứu phép biến đổi này trong không gian Sobolev H^S , tức là trong L_2 . Trong L_p , không có tích vô hướng, không có đẳng thức Parseval, đó là những khó khăn cơ bản. Để khắc phục điều đó chúng tôi đã sử dụng các hàm nguyên loại mũ, định lý nhúng Sobolev, và một số sự kiện trong [94].

Trước tiên chúng tôi nhắc lại một số điều trong [30, 9, 20, 53, 55, 107] để tiện cho đọc giả.

Một hàm $\psi(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ là một *sóng nhỏ giải tích* (analyzing wavelet) nếu phép biến đổi Fourier $\hat{\psi}(\xi)$ (xem §3 chương VI) giảm đến 0 sao cho

$$C_1(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|^{2n}} d\xi < \infty. \quad (67)$$

Nếu $\int_{\mathbf{R}^n} |\psi(x)|^2 (1+|x|)^{n+\alpha} dx < \infty$ với một α dương nào đó thì

$$\psi \in L_1(\mathbf{R}^n).$$

Nếu một sóng nhỏ giải tích $\psi \neq 0$ khả tích thì ψ được gọi là một *sóng cơ sở*.

Nếu ψ là một sóng cơ sở thì ta có thể xác định

$$L_\psi f(b, a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_2(\psi)}} \frac{1}{\sqrt{|a|^n}} \int_{\mathbf{R}^n} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} f(t) dt, \quad (68)$$

trong đó $f \in L_p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, $(b, a) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^o$, $\mathbf{R}^o = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

và

$$C_2(\psi) = (2\pi)^n \int_{\mathbf{R}^n} \frac{|\hat{\psi}(z)|^2}{|z|^n} dz \quad (69)$$

Rõ ràng với mỗi $a \in \mathbf{R}^o$, $L_\psi f(\cdot, a) \in L_p(\mathbf{R}^n)$.

Giả sử $\varphi \in L_1(\mathbf{R}^n)$ sao cho $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) dx = A$. Với $\varepsilon > 0$ ta xác định

φ_ε như sau :

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Có thể khẳng định với $f \in L_p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, ta có

$$f * \varphi_\varepsilon \rightarrow Af \text{ trong } L_p(\mathbf{R}^n), \quad (70)$$

Khi $\varepsilon \rightarrow 0$, trong đó ký hiệu $*$ chỉ tích chập (xem §3 chương VI).

Bổ đề 10.7.1. [20]. Giả sử $f \in L_p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, và phép biến đổi Fourier $\hat{f}$ có giá được chứa trong hình cầu $|z| \leq d$. Khi đó f khả vi vô hạn và với mọi $k \in \mathbf{N}^n$ ta có ước lượng

$$\|\partial^\alpha f\|_p \leq d^{|\alpha|} \|f\|_p,$$

trong đó $\partial^k = \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$ và $\|\cdot\|_p$ là chuẩn trong $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Như trong [20] ta đưa vào các ký hiệu sau đây :

Giả sử $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Hàm $g(z) = g_\mu(z) = g_{\mu_1 \dots \mu_n}(z_1, \dots, z_n)$, với $z \in \mathbb{C}^n$ (không gian phức n chiều : $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}}_{n \text{ lần}}$), được gọi là *hàm nguyên loại mũ*,

nếu g thỏa mãn :

i) g là hàm nguyên theo tất cả các biến, tức là g khai triển được thành chuỗi lũy thừa

$$g(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k = \sum_{k_i \geq 0, i=1, \dots, n} a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$$

trong đó a_k là các hằng số, và chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối với tất cả $z \in \mathbb{C}^n$.

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0$ sao cho

$$|g(z)| \leq A_\varepsilon \exp \sum_{j=1}^n (\mu_j + \varepsilon) |z_j|, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Ta ký hiệu $\mathcal{H}_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ là tập tất cả các hàm nguyên loại mũ μ mà với tư cách là hàm biến $x \in \mathbb{R}^n$ thì nó bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và thuộc $L_p(\mathbb{R}^n)$. Trong [20] đã chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{H}_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ thì f có giá trong $\Delta\mu$, trong đó

$$\Delta\mu = \{\xi : |\xi_j| \leq \mu_j \mid \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)\}.$$

Đặt

$$\Lambda_{\psi}f(b, a) = (\psi_a * f)(b) = \frac{1}{a^n} \int_{\mathbf{R}^n} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) dt,$$

trong đó

$$\psi_a(t) = \frac{1}{a^n} \psi\left(\frac{t}{a}\right), \quad a \neq 0.$$

Mệnh đề 10.7.1. Nếu $f \in \mathcal{M}_{\mu, p}(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$,

$\psi \in L_1(\mathbf{R}^n) \cap L_q(\mathbf{R}^n)$, trong đó q là số mũ liên hợp của p , và $\partial^k \psi \in L_1(\mathbf{R}^n) \cap L_q(\mathbf{R}^n)$, thì

$$\partial^k [\Lambda_{\psi}f(., a)] = \Lambda_{\psi}(\partial^k f)(., a) = a^{-|k|} (\Lambda_{\partial^k \psi} f)(., a)$$

Chứng minh. Vì $f \in \mathcal{M}_{\mu, p}(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, ta có $\text{supp } f \subset \Delta_{\mu}$. Do đó từ Bổ đề 1 suy ra $f \in C^{\infty}$ và $\partial^k f \in L_p(\mathbf{R}^n)$. Do $\partial^k \psi \in L_q(\mathbf{R}^n)$ và nhờ bất đẳng thức Hölder dễ dàng thấy $\partial^k (\psi_a * f)$ tồn tại với mọi $x \in \mathbf{R}^n$ và

$$\partial^k (\psi_a * f)(.) = (\psi_a * \partial^k f)(.) = \Lambda_{\psi}(\partial^k f)(., a)$$

và

$$\partial^k (\psi_a * f)(.) = (\partial^k \psi_a * f) = a^{-|k|} (\Lambda_{\partial^k \psi} f)(., a). \quad \square$$

Bây giờ ta xét vài tính chất của phép biến đổi sóng nhỏ trong $L_p(\mathbf{R}^n)$.

Bổ đề sau đây là mở rộng của Bổ đề 3.3 trong L_p .

Bổ đề 10.7.2. Nếu ψ, φ là các sóng cơ sở, $f, g \in L_p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, thì ta có

$$\begin{aligned} & \|L_\psi f(\cdot, a) - L_\phi g(\cdot, a)\|_p \leq \\ & \leq |a|^{\frac{n}{2}} \left(\|f\|_p \left\| \frac{\psi}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{C_2(\psi)}} - \frac{\phi}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{C_2(\phi)}} \right\|_1 + \|f - g\|_p \left\| \frac{\phi}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{C_2(\phi)}} \right\|_1 \right). \end{aligned}$$

Chứng minh của bổ đề này cũng như của Hệ quả tiếp theo không có gì khó khăn, dành cho độc giả.

Hệ quả 10.7.1. Nếu ψ là một sóng cơ sở, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, thì

$$\|L_\psi f\|_p = O(|a|^{n/2}).$$

Định lý 10.7.1. Nếu hàm ψ thỏa mãn

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{n+2} |\psi(x)|^2 dx < \infty, \text{ và } \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0$$

thì với mỗi $f \in W_p^s(\mathbb{R}^n)$, trong đó $sp > n > (s-1)p$, ta có ước lượng

$$|L_\psi f(b, a)| \leq C |a|^{\frac{n}{2} + \lambda},$$

với $\lambda = s - \frac{n}{p}$ và $L_\psi(b, a)$ được xác định bởi (68).

Chứng minh. Rõ ràng ψ là một sóng cơ sở và ta có thể dựng toán tử $L_\psi f$.

$$\text{Chú ý rằng } \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+2-2\lambda)} dx < \infty,$$

vì $0 < \lambda = s - \frac{n}{p} < 1$ do bất đẳng thức Schwartz và nhờ giả thiết đối với ψ ta có ngay

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^\lambda |\psi(x)| dx < \infty.$$

Do giả thiết đối với s, p, λ ta được phép nhúng Sobolev

$$W_p^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\mathbb{R}^n),$$

trong đó $\dot{C}^{0,\lambda}$ là không gian Hölder các hàm bị chặn với số mũ λ . Vì vậy ta có

$$|f(x) - f(y)| \leq C_3 |x - y|^\lambda.$$

Nhờ giả thiết thứ 2 đối với ψ suy ra được

$$\begin{aligned} |L_\psi f(b, a)| &= \frac{1}{2\sqrt[n]{C_2(\psi)}} \frac{1}{\sqrt{|a|^n}} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt[n]{C_2(\psi)}} \frac{1}{\sqrt{|a|^n}} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) |f(t) - f(b)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt[n]{C_2(\psi)}} \frac{1}{\sqrt{|a|^n}} \int_{\mathbf{R}^n} \left| \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) \right| C_3 |t-b|^\lambda dt \\ &= \frac{C_3}{2\sqrt[n]{C_2(\psi)}} |a|^{\frac{n}{2}+\lambda} \int_{\mathbf{R}^n} |\bar{\psi}(u)| |u|^\lambda du. \quad \square \end{aligned}$$

Bây giờ ta chứng minh thêm một số sự kiện quan trọng.

Định nghĩa 10.7.1. [94, tr. 21]. Một phân tích đa phân giải (analyse multirésolution) trong $L_2(\mathbf{R}^n)$ là một dãy tăng V_j , $j \in \mathbf{Z}$, các không gian vectơ con đóng của $L_2(\mathbf{R}^n)$ có các tính chất

$$1) \bigcap_{-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}, \bigcup_{-\infty}^{\infty} V_j \text{ trù mật trong } L_2(\mathbf{R}^n)$$

$$2) \forall f \in L_2(\mathbf{R}^n), \forall j \in \mathbf{Z}:$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$$

3) Tồn tại hàm $g(x) \in V_0$ sao cho dãy $g(x - k)$, $k \in \mathbf{Z}^n$ là một cơ sở Riesz của không gian V_0 .

Cũng theo [94, tr. 27] từ g ta luôn có thể tìm một hàm ϕ sao cho dãy $\phi(x - l)$, $l \in \mathbf{Z}^n$, là một cơ sở trực giao của V_0 .

Bổ đề 10.7.3. Nếu $\rho \neq 0$, $\rho \in H^\beta(\mathbb{R}^n)$, $\beta \geq 1$, thì $\partial^k \rho$ thỏa mãn các tính chất

i) $0 \neq \partial^k \rho \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{\partial^k \rho(\omega)}|^2}{|\omega|^n} d\omega < \infty$ với $1 \leq |k| \leq \beta$

Chứng minh. Rõ ràng chỉ có 0 là hàm hằng trong $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$. Cho nên $\partial^k \rho \neq 0$, $1 \leq |k| \leq \beta$. Ngoài ra vì $\beta - |k| \geq 0$ nên $\partial^k \rho \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Cuối cùng vì

$$\widehat{\partial^k \rho(\cdot)} = i^{|k|}(\cdot)^k \hat{\rho}(\cdot)$$

ta có

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{\partial^k \rho(\omega)}|^2}{|\omega|^n} d\omega &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\omega|^{2|k|-n} |\hat{\rho}(\omega)|^2 d\omega \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\omega|^2)^{|k|-n/2} |\hat{\rho}(\omega)|^2 d\omega \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\omega|^2)^\beta |\hat{\rho}(\omega)|^2 d\omega = \|\rho\|_\beta^2 < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Định lý 10.7.2. Giả sử $f \in \mathcal{H}_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, và $\psi \in H^\beta(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_q(\mathbb{R}^n)$, $\beta \geq 1$, là các hàm thực và $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) dt = 1$. Ngoài

ra $\partial^k \psi \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_q(\mathbb{R}^n)$ ít ra là đối với một $|k| \in \{1, 2, \dots, [\beta]\}$, trong đó $[\beta]$ là phần nguyên của β . Khi đó

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left\| \frac{L_{\partial^k \psi} f(\cdot, -a)}{a^{|k|+\frac{n}{2}}} - \frac{1}{2^n \sqrt{C_2(\partial^k \psi)}} \partial^k f(\cdot) \right\|_p = 0,$$

trong đó $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 10.7.3, $\partial^k \psi$ là một sóng cơ sở. Với $\alpha > 0$ ta có

$$L_\psi f(., -a) = \frac{a^{n/2}}{2\sqrt[n]{C_2(\psi)}} \Lambda_\psi f(., a).$$

Nếu $f \in \mathcal{M}_{\mu,p}(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ và $\psi \in L_1(\mathbf{R}^n)$, thì rõ ràng

$$\Lambda_\psi f(., a) = (\psi_a * f)(.) \in \mathcal{M}_{\mu,p}(\mathbf{R}^n).$$

Vì vậy từ Bổ đề 10.7.1 và Mệnh đề 10.7.1. suy ra

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{L_{\partial^k \psi} f(., -a)}{a^{|k|+n/2}} - \frac{1}{2\sqrt[n]{C_2(\partial^k \psi)}} \partial^k f(.) \right\|_p = \\ & = \frac{1}{2\sqrt[n]{C_2(\partial^k \psi)}} \|\partial^k [\lambda_\psi f(., a) - f(.)]\|_p \leq \\ & \leq \frac{C}{2\sqrt[n]{C_2(\partial^k \psi)}} \|\Lambda_\psi f(., a) - f(.)\|_p \text{ (vì } \Lambda_\psi f(., a) - f(.) \in \mathcal{M}_{\mu,p}(\mathbf{R}^n)) \end{aligned}$$

trong đó C là một hằng số số hạng cuối cùng dẫn đến 0 do (70). $\square$

Bổ đề sau đây sẽ cần cho về sau.

Bổ đề 10.7.4. Giả sử ψ là một hàm sao cho $\{\phi(x-l), l \in \mathbf{Z}^n\}$ là một cơ sở trực giao của V_0 . Ngoài ra ϕ thỏa mãn điều kiện

$$|\phi(x)| \leq C(1+|x|)^{-n-\varepsilon}$$

với một số nào đó $\varepsilon > 0$.

Khi đó tồn tại hai hằng số $C_2 > C_1 > 0$ sao cho với $p \in [1, +\infty]$ và với mỗi tổng hữu hạn

27822-002
 27822-002
 27822-002

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \alpha(l) \phi(x-l)$$

ta có

$$C_1 \|f\|_p \leq \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} |\alpha(l)|^p \right)^{1/p} \leq C_2 \|f\|_p.$$

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng tỏ $C(\phi) := \sup_x \sum_l |\phi(x-l)| < \infty$.

Thật vậy

$$\begin{aligned} |\phi(x-l)| &\leq \frac{C}{(1+|x-l|)^{n+\varepsilon}} \leq \\ &\leq C \frac{1}{(1+|x_1-l_1|)^{1+1/n}} \frac{1}{(1+|x_2-l_2|)^{1+1/n}} \dots \frac{1}{(1+|x_n-l_n|)^{1+1/n}} \end{aligned}$$

trong đó $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Do đó chỉ cần chứng minh trường hợp $n = 1$, nhưng trường hợp này đã được chứng minh chi tiết trong [73, tr. 310]. Cuối cùng vì $C(\phi) < \infty$ nên tương tự như ở Bổ đề 8 trong [94], ta có thể hoàn thành chứng minh Bổ đề 10.7.4. $\square$

Ngoài ra để chứng minh hai định lý tiếp theo ta sẽ sử dụng các $V_j(p)$, $j \in \mathbb{Z}$, được xác định trong [115, tr. 31]. Nếu ϕ thỏa mãn điều kiện của Bổ đề 8.7.4 thì ta có thể coi $V_j(p)$, $j \in \mathbb{Z}$ như là một phân tích đa phân giải của $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ theo nghĩa là: nếu E_j là phép chiếu trực giao của $L_2(\mathbb{R}^n)$ lên V_j thì với mọi hàm $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $E_j(f)$ hội tụ đến f cả trong $L_p(\mathbb{R}^n)$ theo chuẩn, lẫn hầu khắp nơi.

Nhờ Bổ đề 10.7.4 tương tự như ở Bổ đề 8 trong [94, tr. 30] ta sẽ chứng minh được

Định lý 10.7.3. Giả sử $V_j, j \in \mathbf{Z}$ là phân tích đa phân giải của $L_2(\mathbf{R}^n)$. Giả sử ϕ là một hàm sao cho $\{\phi(x-l), l \in \mathbf{Z}^n\}$ là một cơ sở trực giao của V_0 thỏa mãn

$$|\partial^k \phi(x)| \leq C(k)(1+|x|)^{-n-\varepsilon(k)} \quad (71)$$

với mọi $k \in \mathbf{N}^n$ sao cho $|k| \leq r \in \mathbf{N}$ và với $\varepsilon(k) > 0$ nào đó. Khi đó tồn tại hằng số C sao cho với $1 \leq p < \infty, j \in \mathbf{Z}, f \in V_j(p)$ và $|k| \leq r$, ta được

$$\|\partial^k f\|_p \leq C.2^{|k|j} \|f\|_p.$$

Định lý 10.7.4. Giả sử hàm thực $\psi \in H^\beta(\mathbf{R}^n) \cap L_1(\mathbf{R}^n) \cap L_q(\mathbf{R}^n)$, $\beta \in \mathbf{R}, \beta \geq 1$, sao cho

$$\int_{\mathbf{R}^n} \psi(t) dt = 1 \text{ và } \partial^k \psi \in L_1(\mathbf{R}^n) \cap L_q(\mathbf{R}^n)$$

ít ra với một $|k| \in \{1, 2, \dots, [\beta]\}$.

Giả sử $V_j, j \in \mathbf{Z}$ là một phân tích đa giải thức của $L_2(\mathbf{R}^n)$ và $V_j(p), 1 \leq p < \infty$, là phân tích đa giải thức của $L_p(\mathbf{R}^n)$, trong đó hàm g trong Định nghĩa 10.7.1 thỏa mãn các điều kiện trong Định lý 10.7.3. Khi đó ta có

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{L_{\partial^k \psi} f(., a)}{a^{|k|+n/2}} = \frac{1}{2^n \sqrt{C_2(\partial^k \psi)}} \partial^k f(.) \quad (72)$$

trong $L_p(\mathbf{R}^n), 1 \leq p < \infty$, với tất cả các hàm thực $f \in V_j(p), j \in \mathbf{Z}$.

Chứng minh. Với Định lý 10.7.3 rõ ràng $\partial^k f \in L_p(\mathbf{R}^n), 1 \leq p < \infty$, với tất cả các $f \in V_j(p)$. Do đó như trong chứng minh Mệnh đề 10.7.1 ta được

$$\partial^k [A_\psi f(., a)] = (\partial^k \psi_a * f) = (\psi_a * \partial^k f)(.).$$

Vì

$$L_{\partial^k \psi} f(., a) = \frac{a^{|k| + \frac{n}{2}}}{2^n \sqrt{C_2(\partial^k \psi)}} \partial^k (\Lambda_\psi f)(., a)$$

nên

$$\frac{L_{\partial^k \psi} f(., a)}{a^{|k| + n/2}} = \frac{1}{2^n \sqrt{C_2(\partial^k \psi)}} (\psi_a * \partial^k f)(.).$$

Sử dụng (71) ta sẽ có (72). $\square$

§8. XẤP XỈ SỐNG NHỎ ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH GIẢ VI PHÂN

Trong mục này chúng tôi giới thiệu một phương pháp xấp xỉ sóng nhỏ đối với phương trình giả vi phân.

Định nghĩa 10.8.1. Giả sử $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^n)$. Hàm φ được gọi là *hàm lọc được* (refinable) nếu nó thỏa mãn phương trình lọc sau đây

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} a_k \varphi(2x - k), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (73)$$

trong đó *cái mạng* (mask) $a = \{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}^n}$ là một dãy cố định trong $l_1(\mathbf{Z}^n)$.

Để nhấn mạnh sự phụ thuộc vào a của hàm φ đôi khi ta cũng nói φ là a -lọc được. Giả thiết φ có giá compact.

Định nghĩa 10.8.2. Một phép dịch chuyển nguyên hàm φ được gọi là *độc lập tuyến tính đại số* nếu ánh xạ

$$\lambda \rightarrow \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \lambda_k \varphi(., -k)$$

là đơn ánh trong không gian các dãy phức trị λ xác định trên $\mathbf{Z}^n$.

Chẳng hạn tích tenxơ các B-spline cơ bản hay, tổng quát hơn, các spline lập phương có tính chất vừa nêu.

Có thể chứng minh rằng *tính độc lập tuyến tính đại số gây nên tính ổn định* theo nghĩa sau đây

$$\|\lambda\|_{l_2(\mathbb{Z}^n)} \sim \|\Sigma \lambda_K \varphi(\cdot - k)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

trong đó $A \sim B$ có nghĩa là tồn tại hai hằng số dương C_1, C_2 sao cho các bất đẳng thức $C_1 A \leq B \leq C_2 A$ thực hiện đều tương ứng với tất cả các tham biến mà A và B phụ thuộc, còn $\|\lambda\|_{l_2(\mathbb{Z}^n)}^2 = \Sigma |\lambda_k|^2$.

Bên cạnh $L_2(\mathbb{R}^n)$ ta đưa vào không gian

$$\mathcal{L}_2 := \{f \in L_2(\mathbb{R}^n) : \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(\cdot - k)| \in L_2([0, 1]^n)\}.$$

Rõ ràng bất cứ $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ có giá compact, hay $\int_{k+[0,1]^n} |\varphi(x)|^2 dx$

giảm mũ khi $|k| \rightarrow \infty$, cũng thuộc $\mathcal{L}_2$.

Hơn nữa $\mathcal{L}_2 \subseteq L_1(\mathbb{R}^n)$, nên $\hat{\varphi}$ liên tục và từ (108) ta thấy :

$$\hat{\varphi}(y) = \left(\prod_{j=1}^l 2^{-n} a(2^{-j} y) \right) \hat{\varphi}(2^{-l} y), \quad \forall l \in \mathbb{N}, \quad (74)$$

trong đó

$$a(y) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{-i2\pi(x,k)}.$$

Do đó $\hat{\varphi}$ và từ đó φ đồng nhất bằng 0 nếu $a(0) < 2^n$ và khi

$$2^n = a(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k \quad (75)$$

$\prod_{j=1}^l 2^{-n} a(2^{-j}y)$ hội tụ đều trên các tập compac trong $\mathbf{R}^n$. Vì vậy

bất cứ nghiệm không tầm thường nào của (73) cũng phải thỏa mãn $\hat{\varphi}(0) \neq 0$. Cho nên, không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết

$$\hat{\varphi}(0) = 1 \quad (76)$$

và ta luôn có (75).

Mệnh đề sau đây đã được chứng minh.

Mệnh đề 10.8.1. Giả thiết φ là a -lọc được khi có (75), (76). Khi đó

i) Nếu $\varphi \in C^d(\mathbf{R}^n)$ và $x^v \varphi(x) \in L_1(\mathbf{R}^n)$ với $v \in \mathbf{N}_0^n$, $|v| \leq d$, thì φ thỏa mãn các điều kiện Fix - Strang cấp d , tức là

$$(\partial^\alpha \hat{\varphi})(k) = 0, \quad |\alpha| \leq d, \quad k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\} \quad (77)$$

ii) Nếu $\varphi \in C^d(\mathbf{R}^n)$ có giá compact thì tồn tại một số thực dương $\rho = \rho(a) < 1$ và một hằng số C chỉ phụ thuộc mạng a sao cho

$$|\partial^\alpha \varphi(x) - \partial^\alpha \varphi(y)| \leq C |x - y|^\rho, \quad x, y \in \mathbf{R}^n, \quad |\alpha| = d, \quad (78)$$

iii) Nếu $\varphi \in C^d(\mathbf{R}^n)$ và có giá compact thì với mọi $P \in \Pi_d(\mathbf{R}^n)$ (không gian các đa thức có cấp cao lắm là d trên $\mathbf{R}^n$), tồn tại một đa thức duy nhất $Q \in \Pi_d(\mathbf{R}^n)$ sao cho

$$P(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} Q(k) \varphi(x - k), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (79)$$

và

$$P - Q \in \Pi_{d-1}(\mathbf{R}^n).$$

Nhờ phép biến đổi Fourier có thể chứng minh tính ổn định của φ tương đương với

$$[\hat{\varphi}\hat{\varphi}](\omega) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} |\hat{\varphi}(\omega + k)|^2 > 0 \quad \text{với tất cả } \omega \in [0, 1]^n,$$

trong đó đối với

$$(f, g) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx$$

ta định nghĩa :

$$\begin{aligned} [\hat{f}\hat{g}](\omega) &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\omega + k) \overline{\hat{g}(\omega + k)} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (f, g(\cdot - k)) e^{2\pi i(\omega, k)} \end{aligned} \quad (80)$$

Chú ý. 1) Khi $f, g \in \mathcal{L}_2$ thì chuỗi lượng giác ở vế phải của (80) hội tụ tuyệt đối.

2) Trong các mục tiếp theo thường ta sẽ giả thiết φ là lọc được, có giá compact và thuộc $C^d(\mathbb{R}^n)$, ngoài ra, phép dịch chuyển nguyên của φ độc lập tuyến tính đại số.

Nói tắt là φ thỏa mãn C_0^d .

3) Có thể chứng minh rằng tính độc lập tuyến tính của phép dịch chuyển nguyên của một hàm có giá compact kéo theo sự tồn tại một phiếm hàm F trong một miền bị chặn A sao cho

$$F(\varphi(\cdot - k)) = \delta_{0,k}, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad (81)$$

và

$$|F(g)| \leq c \left(\int_A |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad g \in L_2(\mathbb{R}^n), \quad (82)$$

trong đó hằng số c độc lập với g .

Bây giờ ta chuyển sang lớp các hàm tuần hoàn, tức là hàm f thỏa mãn $f(x + k) = f(x)$, với tất cả $k \in \mathbb{Z}^n$. Ta sẽ đồng nhất hàm này với hàm trên một xuyên n - chiều $\mathcal{F}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$. Toán tử tuần hoàn hóa

$$[f](x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x + k), \quad (83)$$

ánh xạ $\mathcal{L}_2$ vào $L_2(\mathcal{F}^n)$. Ta sẽ đồng nhất lớp $[x] : x + \mathbb{Z}^n, x \in \mathbb{R}^n$ với đại diện của nó là $x \in [0, 1]^n$. Với bất cứ $\phi \in \mathcal{L}_2$ ta xác định

$$\phi_k^j := 2^{\frac{jn}{2}} [\phi(2^j \cdot - k)], \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad (84)$$

Với bất cứ hàm lọc được $\phi \in \mathcal{L}_2$ ta xác định các không gian hữu hạn chiều

$$V^j := \text{span}\{\phi_k^j : k \in \mathbb{Z}^{n,j}\}, \quad (85)$$

trong đó

$$\mathbb{Z}^{n,j} := \mathbb{Z}^n / (2^j \mathbb{Z}^n).$$

Do (73) và (84)

$$\begin{aligned} \phi_k^j &= 2^{\frac{nj}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l [\phi(2^{j+1} \cdot - 2k - l)] \\ &= 2^{-n/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_{m-2k} \phi_m^{j+1} \end{aligned}$$

ta kết luận

$$V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^j \subset V^{j+1} \subset \dots \subset L_2(\mathcal{F}^n) \quad (86)$$

Tương tự với trường hợp không tuần hoàn ta có thể khẳng định rằng với các giả thiết như trên

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} V^j} = L_2(\mathcal{F}^n). \quad (87)$$

Ta sẽ nói dãy $\{V^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ là *phân tích đa giải thức* (multiresolution analysis) tuần hoàn được sinh bởi ϕ .

Giả sử với bất cứ hai hàm tuần hoàn u, v

$$(u, v)_0 := \int_{[0,1]^n} u(x) \overline{v(x)} dx$$

Chú ý rằng với bất cứ $g \in \mathcal{S}_2$, $u \in L_2(\mathcal{F}^n)$

$$([g], u)_0 = (g, u) \quad (88)$$

sao cho với bất cứ $f, g \in \mathcal{L}_2$

$$([f], [g])_0 = (f, [g]) = ([f], g). \quad (89)$$

Mệnh đề 10.8.2. Giả sử $f, g \in \mathcal{L}_2$ thỏa mãn

$$(f, g(\cdot - \xi)) = \delta_{0, \xi}, \quad \xi \in \mathbb{Z}^n$$

Khi đó

$$(f_k^j, g_l^j)_0 = \delta_{k, l}, \quad k, l \in \mathbb{Z}^{n, j}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Tổng quát hơn, nếu η là một phiếm hàm có giá compact thỏa mãn

$$\eta(g(\cdot + \xi)) = \delta_{0, \xi}, \quad \xi \in \mathbb{Z}^n,$$

thì

$$\eta_k^j(v) := 2^{-\frac{nj}{2}} \eta(v(2^{-j}(\cdot + k))), \quad (90)$$

thỏa mãn

$$\eta_k^j(g_l^j) = \delta_{k, l}, \quad k, l \in \mathbb{Z}^{n, j}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Từ (81), (82) và Mệnh đề 10.8.2 ta có

Bổ đề 10.8.1. Nếu $\varphi \in C_0^d$ thì với $F_k^j(v) := 2^{-\frac{nj}{2}} F(v(2^{-j}(\cdot + k)))$, trong đó F thỏa mãn (81), (82) ta có

$$F_k^j(\varphi_l^j) = \delta_{k, l}, \quad k, l \in \mathbb{Z}^{n, j}, \quad (91)$$

và

$$|F_k^j(u^j)| \leq c \left(\int_{2^{-j}(k+A)} |u^j(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (92)$$

trong đó c độc lập với j, k và $u^j \in V^j$.

Bây giờ ta chuyển sang xét một lớp phương trình giả vi phân tuần hoàn.

Phép biến đổi Fourier trên $\mathcal{F}^n$ thường được nói là phép biến đổi Fourier rời rạc của một hàm $f \in L_1(\mathcal{F}^n)$, được xác định bởi

$$\tilde{f}(\zeta) = \mathcal{F}_{\mathcal{F}^n} f(\zeta) = \int_{\mathcal{F}^n} e^{2\pi i(x, \zeta)} f(x) dx, \quad \zeta \in \mathbb{Z}^n, \quad (93)$$

và ngược lại, do công thức phép biến đổi ngược, f , với các giả thiết về độ trơn thích hợp, có thể tìm được bằng chuỗi Fourier

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \tilde{f}(\xi) e^{2\pi i(\xi, x)}, \quad x \in \mathcal{F}^n, \quad (94)$$

Giả sử $e^j = (\delta_{jl})_{l=1}^n$ chỉ vector tọa độ thứ j và xác định

$$\Delta := (\tau_1 - 1, \dots, \tau_n - 1)^T$$

trong đó

$$(\tau_j f)(x) := f(x + e^j).$$

Để chỉ Δ^α tác động lên biến ξ ta ký hiệu $\Delta_{(\xi)}^\alpha$.

Giả sử $r \in \mathbb{R}$, và $S^r(\mathcal{F}^n)$ là tập tất cả các hàm $\sigma \in C^\alpha(\mathcal{F}^n \times \mathbb{Z}^n)$ thỏa mãn

$$|\partial_x^\beta \Delta_{(\xi)}^\alpha \sigma(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{r - |\alpha|}, \quad \forall x \in \mathcal{F}^n, \xi \in \mathbb{Z}^n, \quad (95)$$

Hàm $\sigma \in S^r(\mathcal{F}^n)$ được gọi là symbol toàn cục cấp r trên $\mathcal{F}^n$.

Với $\partial \in S^r(\mathcal{F}^n)$ cho trước ta xác định toán tử giả vi phân toàn cục $\sigma(x, D)$ như sau :

$$\sigma(x, D)u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i(\xi, x)} \sigma(x, \xi) \tilde{u}(\xi), \quad u \in C^\infty(\mathcal{F}^n), \quad (96)$$

Symbol của một toán tử giả vi phân toàn cục trên $\mathcal{F}^n$ được xác định một cách duy nhất bởi một hàm trơn thuộc $S^{-\infty}(\mathcal{F}^n) = \bigcap_{r \in \mathbf{R}} S^r(\mathcal{F}^n)$. Ta ký hiệu $\Sigma^\mu(\mathcal{F}^n)$, $\mu \in \mathbf{C}$, $\text{Re} \mu = r$,

là lớp các symbols $\sigma \in S^r(\mathcal{F}^n)$ có thể phân tích $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$, trong đó $\sigma_1 \in S^{r_1}(\mathcal{F}^n)$ với một r_1 nào đó bé hơn r , và $\sigma_0 \in C^\infty(\mathcal{F}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$. Ta giả thiết $\sigma_0(x, 0) = 1$ và σ_0 thuần nhất dương bậc μ , tức là

$$\sigma_0(x, \lambda \xi) = \lambda^\mu \sigma_0(x, \xi), \text{ với } \lambda > 0, \xi \neq 0, \quad (97)$$

Vì $\text{Re} \mu = r$, $\sigma_0 \in S^r(\mathcal{F}^n)$. Còn lớp các toán tử giả vi phân có dạng $A = \sigma(x, D) + K$, trong đó $\sigma \in S^r(\mathcal{F}^n)(\Sigma^\mu(\mathcal{F}^n))$, và K được cho bởi $Ku(x) = \int_{\mathcal{F}^n} k(x, y)u(y)dy$, với $k \in C^\infty(\mathcal{F}^n \times \mathcal{F}^n)$ (là toán tử

làm trơn), được ký hiệu là $\psi^r(\mathcal{F}^n)(\phi^\mu(\mathcal{F}^n))$.

Định nghĩa 10.8.3. Với $\sigma \in S^r(\mathcal{F}^n)$ toán tử giả vi phân $\sigma(x, D)$ được nói là elliptic nếu $\exists C, R > 0$ sao cho

$$|\sigma(x, \xi)| \geq C|\xi|^r, \text{ với } |\xi| > R, x \in \mathcal{F}^n, \quad (98)$$

Một ví dụ đơn giản và bổ ích của một toán tử elliptic là toán tử được cảm sinh bởi hàm $\xi \mapsto \langle \xi, \xi \rangle$, $\xi \in \mathbf{Z}^n$, trong đó, $\langle \xi, \xi \rangle = |\xi|$ nếu $\xi \neq 0$. Ta đặt $\langle \xi \rangle = 1$ nếu $\xi = 0$. Ta có thể định nghĩa các không gian Sobolev $H^s(\mathcal{F}^n)$ với $s \in \mathbf{R}$ như sau.

Định nghĩa 10.8.4.

$$H^s(\mathcal{F}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathcal{F}^n) : \langle D \rangle^s u \in L^2(\mathcal{F}^n)\}, \quad (99)$$

với chuẩn

$$\|u\|_s = \left(\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^n} \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{u}(\xi)|^2 \right)^{1/2}. \quad (100)$$

và tích vô hướng

$$(u, v)_s = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^{2s} \tilde{u}(\xi) \overline{\tilde{v}(\xi)} \quad (101)$$

Chú ý rằng $H^{-s}(\mathcal{F}^n)$ có thể đồng nhất với không gian đối ngẫu của $H^s(\mathcal{F}^n)$ đối với dạng nửa song tuyến tính (sesquilinear) $(f, u)_0$.

Định lý 10.8.1. Giả sử toán tử giả vi phân $A \in \Psi^r(\mathcal{F}^n)$. Khi đó

$$A : H^s(\mathcal{F}^n) \rightarrow H^{s-r}(\mathcal{F}^n), s \in \mathbb{R}, \quad (102)$$

một cách bị chặn.

Ta sẽ giải xấp xỉ phương trình giả vi phân

$$Au = f \quad (103)$$

trên $\mathcal{F}^n$, với $u \in H^s(\mathcal{F}^n)$, trong đó $A \in \Psi^r(\mathcal{F}^n)$, $\text{Re } r = r$, $f \in H^{s-r}(\mathcal{F}^n)$.

Giả sử các không gian V^j được xác định bởi (85) tương ứng với một hàm lọc được cố định φ nào đó. Ta sẽ nghiên cứu một lớp khá tổng quát các lược đồ số học để giải (103) dựa trên một hàm suy rộng cố định có giá compac

$$\eta \in H^{-s'}(\Gamma), \quad (104)$$

trong đó $s' \geq 0$ thỏa mãn $AV^j \subset H^{s'}(\mathcal{F}^n)$, còn $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ là một miền cố định nào đó, như khối lập phương. Như vậy với $g \in H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ ta xác định

$$\eta_k^j(g) := 2^{-\frac{nj}{2}} \eta(g(s^{-j}(\cdot + k))), \quad (105)$$

Khi đó không gian

$$X^j := \text{span} \left\{ \eta_k^j : k \in \mathbb{Z}^{n,j} \right\}, \quad (106)$$

được chứa trong $(AV^j)'$, đối ngẫu của AV^j . Lựa đồ Galerkin - Petrov bấy giờ được cho bởi

$$\eta_k^j(Au^j) = \eta_k^j, \quad k \in \mathbb{Z}^{n,j} \quad (107)$$

Nếu chọn $\eta = \delta(\cdot - \omega_0)$, tức là

$$\eta(g) := g(\omega_0), \quad (108)$$

thì ta được lựa đồ collocation đã được nghiên cứu.

Dưới đây ta sẽ xét tính ổn định của lựa đồ (107) đối với toán tử hệ số hằng

Xét phương trình

$$\sigma(D)u = f \quad (109)$$

trong đó $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $\sigma(0) = 1$, là thuần nhất dương bậc $\mu \in \mathbb{C}$,

$\operatorname{Re} \mu = r$, tức là $\sigma|_{\mathbb{Z}^n} \in \Sigma^\mu(\mathcal{F}^n)$. Ta sẽ sử dụng một hàm lọc được

cố định và ổn định trong $H^s(\mathbb{R}^n)$ có thêm một số tính chất sẽ nêu khi cần thiết. Ta ký hiệu

$$u^j := (u_k^j : k \in \mathbb{Z}^{n,j}), \quad u^j * \varphi^j \sum_{k \in \mathbb{Z}^{n,j}} u_k^j \varphi_k^j \in V^j.$$

(109) cho ta một hệ tuyến tính tạo nên một ma trận luân hoàn

$$\Lambda^j := (a_{k,m}^j)_{k,m \in \mathbb{Z}^{n,j}} = (a_{[k-m]}^j)_{k,m \in \mathbb{Z}^{n,j}} \quad (110)$$

trong đó

$$a_k^j := \eta_k^j \left(\sigma(D) \varphi_0^j \right), \quad k \in \mathbb{Z}^{n,j} \quad (111)$$

và $[k] := (k-m) \bmod 2^j$. Ta biết rằng ma trận đơn vị

$$F := \left(2^{-jn/2} e^{-2\pi i 2^{-j} \langle k, m \rangle} \right)_{k,m \in \mathbb{Z}^{n,j}} \quad (112)$$

chéo hóa Λ^j , tức là

$$F^{-1} A^j F = (\alpha_k \delta_{k,m})_{k,m \in \mathbb{Z}^{n,j}}. \quad (113)$$

trong đó

$$\alpha_k := \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n,j}} a_m^j e^{-2\pi i 2^{-j} \langle k, m \rangle} \quad (114)$$

Ta sẽ ký hiệu $\hat{\eta}$ là phép biến đổi Fourier của η theo nghĩa hàm suy rộng, tức là $\hat{\eta}(\phi) = \overline{\eta(\hat{\phi})}$, $\forall \phi \in \mathcal{S}$.

Định lý 10.8.2. Giả thiết chuỗi

$$\alpha(\omega) := \left[\sigma \hat{\phi} \hat{\eta} \right](\omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \sigma(\omega + m) \hat{\phi}(\omega + m) \overline{\hat{\eta}(\omega + m)} \quad (115)$$

hội tụ tuyệt đối với $\omega \in \mathcal{F}^n$. Khi đó các giá trị riêng α_k (114) có được từ lược đồ Galerkin Petrov (107) được cho bởi

$$\alpha_0 = 1, \alpha_k = 2^{j\mu} \alpha(2^{-j}k), k \in \mathbb{Z}^{n,j}, j \in \mathbb{N}_0. \quad (116)$$

Chứng minh. Do (84), (88) ta có

$$\varphi_0^j(\xi) = 2^{-nj/2} \hat{\phi}(2^{-j}\xi), \xi \in \mathbb{Z}^n, \quad (117)$$

sao cho, do (96)

$$(A\varphi_0^j)(x) = 2^{-nj/2} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \sigma(\xi) \hat{\phi}(2^{-j}\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \quad (118)$$

Nhờ (111), (90) và (118) ta được

$$\begin{aligned} a_k^j &= 2^{-nj/2} \eta(A\varphi_0^j(2^{-j}(\cdot + k))) \\ &= 2^{-nj} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \sigma(\xi) \hat{\phi}(2^{-j}\xi) e^{2\pi i 2^{-j} \langle k, \xi \rangle} \eta(e^{2\pi i 2^{-j} \langle \cdot, \xi \rangle}) \\ &= 2^{-nj} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \sigma(\xi) \hat{\phi}(2^{-j}\xi) \overline{\hat{\eta}(2^{-j}\xi)} e^{2\pi i 2^{-j} \langle k, \xi \rangle} \end{aligned} \quad (119)$$

Sử dụng tính thuần nhất của $\sigma \in \Sigma^\mu(\mathcal{F}^n)$, (119) và (114)

$$\alpha_k = 2^{-nj} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n,j}} \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \sigma(\xi) \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \overline{\hat{\eta}(2^{-j}\xi)} e^{2\pi i 2^{-j} \langle m, \xi \rangle} \right) e^{2\pi i 2^{-j} \langle m, k \rangle}$$

Nhờ giả thiết ta có thể hoán vị phép cộng trong tổng kép bên trên sao cho hệ thức trực giao

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^{n,j}} e^{-2\pi i 2^{-j} \langle m, k - \xi \rangle} = \begin{cases} 2^{nj} & \text{nếu } \xi = k + 2^j \xi \text{ với } \xi \in \mathbb{Z}^n \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

cho ta

$$\alpha_k = 2^{j\mu} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \sigma(\xi + 2^{-j}k) \hat{\varphi}(\xi + 2^{-j}k) \overline{\hat{\eta}(\xi + 2^{-j}k)}. \square$$

Hàm α được xác định bởi (115) được nói là *symbol số* của phương pháp xấp xỉ (107)

Bây giờ ta đưa vào không gian Sobolev rời rạc và chuẩn Sobolev rời rạc.

Giả sử $\theta(\omega)$ là symbol của toán tử sai phân phía trước Δ , tức là thành phần thứ l của $\theta(\omega)$ được cho bởi

$$\theta_l(\omega) = e^{2\pi i \omega_l} - 1 \quad (120)$$

Ta xác định

$$\lambda^s(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \omega = 0 \\ |\theta(\omega)|^2 & \text{nếu } \omega \in \mathcal{F}^n \setminus \{0\} \end{cases} \quad (121)$$

$$\text{Đặt} \quad \Lambda^{s,j} := F^{-1}(\text{diag}(2^{sj} \Lambda^s(2^{-j}v)))F, \quad (122)$$

tức là

$$(\Lambda^{s,j})_{k,m} = 2^{-nj} \sum_{v \in \mathbb{Z}^{n,j}} 2^{js} \Lambda^s(2^{-j}v) e^{2\pi i 2^{-j} \langle k-m, v \rangle}$$

Ta xác định chuẩn

$$\|u^j\|_{s,j} := \|\Lambda^{s,j} u^j\|_{L_2(\mathbb{Z}^{n,j})}, u^j \in C^{2^n} \quad (123)$$

Định nghĩa 10.8.5. Không gian C^{2^n} được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_{s,j}$ được kí hiệu là $h^s(\mathbb{Z}^{n,j})$. Không gian $h^s(\mathbb{Z}^{n,j})$ được nói là *không gian Sobolev rời rạc* và $\|\cdot\|_{s,j}$ được nói là *chuẩn Sobolev rời rạc*.

Ta lại dùng kí hiệu $\eta^j(g) := \{\eta_k^j(g)\}_{k \in \mathbb{Z}^{n,j}}$

Chú ý rằng $\eta^j(A(u^j * \phi^j)) = A^j u^j$. Ta có thể định nghĩa tính ổn định của lược đồ (107) như sau

Định nghĩa 10.8.6. Lược đồ (107) được nói là (s, r) – ổn định, nếu tồn tại một hằng số dương c sao cho ta có

$$\|A^j u^j\|_{s-r,j} \geq c \|u^j\|_{s,j} \quad (124)$$

với tất cả $u^j \in h^s(\mathbb{Z}^{n,j})$, đều theo $j \in \mathbb{N}_0$.

Để thuận tiện trong việc thiết lập tính $(s, -r)$ – ổn định đối với lược đồ (107) ta đưa thêm định nghĩa.

Định nghĩa 10.8.7. Bộ ba (σ, ϕ, η) được nói là *thừa nhận được*, nếu

- i) chuỗi (115) hội tụ tuyệt đối và
- ii) nếu

$$|\hat{\phi}(\xi + \omega)| |\hat{\eta}(\xi + \omega)| = O(|\omega|^r), \omega \rightarrow 0 \quad (125)$$

đều theo $\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, trong đó r là bậc của σ .

Chú ý. Nếu $\eta * \phi \in C^d(\mathbb{R}^n)$ cũng lọc được và $|x|^{d'} (\eta * \phi)(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ thì do Mệnh đề 10.8.1 $\eta * \phi$ thỏa mãn các điều kiện Fix–Strang cấp d' . Do đó có (125) với $r < d'$. Ngoài ra nếu ϕ thỏa mãn điều kiện C_0^d

sao cho $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ với $s < d + \rho(a)$ thì từ (77) và do $\hat{\varphi}$ nguyên, ta có thể khẳng định bộ ba $(\langle \cdot \rangle^2, \varphi, \varphi)$ là thừa nhận được.

Mệnh đề sau đây cho ta quan hệ giữa không gian Sobolev rời rạc, liên tục và (124).

Mệnh đề 10.8.3. Giả thiết với $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^n)$, bộ ba $(\langle \xi \rangle^{2s}, \varphi, \varphi)$ thừa nhận được và φ ổn định. Khi đó

$$\|u^j * \varphi^j\|_s \sim \|u^j\|_{s,j}, u^j \in C^{2j_n}, \quad (126)$$

đều theo $j \in N_0$.

Thêm một định nghĩa cần thiết.

Định nghĩa 10.8.8. Symbol số α của một toán tử giả vi phân thuần nhất cấp r được nói là elliptic nếu tồn tại một hằng số $c > 0$ sao cho

$$\inf_{\omega \in \mathcal{F}^n \setminus \{0\}} \frac{|\alpha(\omega)|}{|\theta(\omega)|^r} \geq c. \quad (127)$$

Bây giờ ta có thể chứng minh định lý quan trọng sau đây.

Định lý 10.8.3. Nếu $\varphi \in H^s(\mathcal{F}^n)$ và (σ, φ, η) là thừa nhận được thì lược đồ Galerkin – Petrov tương ứng là (s, r) – ổn định nếu và chỉ nếu symbol số tương ứng là elliptic.

Chứng minh. Do (123)

$$\|A^j u^j\|_{s-r,j} = \|\Lambda^{s-r,j} A^j \Lambda^{-s,j} v^j\|_{l_2(\mathbb{Z}^{n,j})},$$

trong đó $v^j := \Lambda^{s,j} u^j$. Chú ý rằng giá trị riêng của ma trận

$$(\Lambda^{s-r,j} A^j \Lambda^{-s,j}) * (\Lambda^{s-r,j} A^j \Lambda^{-s,j})$$

được cho bởi $\beta_0 = 1$ và

$$\beta_k = \left| 2^{jr} \alpha(2^{-j}k) \lambda^{s-r}(2^{-j}k) \lambda^{-s}(2^{-j}k) 2^{-jr} \right|^2, \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}. \quad (128)$$

Rõ ràng các giá trị riêng (128) bị chặn dưới đều bởi một hằng số dương nếu và chỉ nếu symbol số $\alpha(\omega)$ là elliptic. Do đó

$$\left\| \Lambda^{s-r} A^j \Lambda^{-s,j} v^j \right\|_{l_2(\mathbb{Z}^{n,j})} \geq C \left\| v^j \right\|_{l_2(\mathbb{Z}^{n,j})}, \quad (129)$$

chúng tỏ tính elliptic của symbol sẽ kéo theo tính (s, r) - ổn định.

Ngược lại, giả thử α không elliptic. Khi đó tồn tại một dãy $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$, $k_j \in \mathbb{Z}^{n,j}$ sao cho

$$\alpha(2^{-j}k_j) \left| 2^{-j}k_j \right|^{-r} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \quad (130)$$

Chú ý rằng

$$v^j := 2^{-jn/2} (e^{2\pi i \langle k_j, 2^{-j}k \rangle})_{k \in \mathbb{Z}^{n,j}},$$

là vectơ riêng chuẩn hóa ứng với giá trị riêng $\sqrt{\beta_{k_j}}$ được cho bởi (128), (130).

Đặt

$$u^j := \Lambda^{-s,j} v^j,$$

ta sẽ thu được

$$\begin{aligned} 1 &= \|u^j\|_{j,s} = \|v^j\|_{l_2(\mathbb{Z}^{n,j})} \\ &\leq c \|\Lambda^{s-r,j} A^j \Lambda^{-s,j} v^j\|_{l_2(\mathbb{Z}^{n,j})} = c \sqrt{\beta_{k_j}} \end{aligned} \quad (131)$$

Do (130) ta thấy $\beta_{k_j} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$, trái với (131). $\square$

Đối với trường hợp tổng quát khi symbol biến thiên với nguyên lý cố định hệ số thông thường có thể thu được một định lý tương tự định lý 10.8.3.

Chương XI

GIẢI XẤP XỈ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ

Trong chương này ta sẽ sử dụng phương pháp lặp ẩn, phương pháp điều chỉnh Tikhonov, phương pháp không khớp để giải gần đúng một số lớp phương trình toán tử, một số lớp bất đẳng thức biến phân. Các toán tử được nghiên cứu có thể là tuyến tính, phi tuyến, compact, không compact, đơn trị, đa trị. Các không gian được sử dụng có thể là không gian Banach, không gian metric, không gian vectơ tôpô lỗi địa phương. Đây là các kết quả nghiên cứu đã được công bố trong [42, 43, 58, 86, 97, 87].

§1. PHÉP LẶP ẨN. TOÁN TỬ CÔ ĐẶC (condensing)

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu lớp phương trình

$$x = T(x, x), \quad (1)$$

và cách giải xấp xỉ bằng một phương pháp lặp ẩn.

Rõ ràng phương trình này chứa phương trình $x = T(x)$ là một trường hợp đặc biệt. Như trên đã thấy đối với phương trình toán tử, để nghiên cứu xấp xỉ, phép lặp hiện Picard thường được sử dụng. Ở đây một phép lặp ẩn

$$x_n = T(x_n, x_{n-1}) \quad (2)$$

sẽ được dùng để giải xấp xỉ phương trình (1). Chú ý rằng phép lặp ẩn này đã phát triển phép lặp của Sokolov trong [112]. Phép lặp ẩn nhiều khi có hiệu lực hơn phép lặp hiện. Chúng tôi sẽ nêu ví dụ chứng tỏ có trường hợp phép lặp hiện không hội tụ nhưng phép lặp ẩn hội tụ.

Chúng tôi sẽ chứng minh một định lý mở rộng định lý Edelstein về điểm bất động đối với toán tử không giãn, và sẽ chứng minh định

lý về sự hội tụ của phép lặp ẩn đối với một lớp toán tử cô đặc (condensing) rộng và lý thú hơn nhiều. Đây là những kết quả đã công bố trong [42, 43].

1. Định lý điểm bất động Edelstein mở rộng

Định lý 11.1.1. Giả sử D là một tập con đóng, bị chặn của không gian chuẩn X , T là toán tử liên tục từ $D \times D$ vào D , thỏa mãn điều kiện không giãn sau :

$$\|T(x, y) - T(z, t)\| \begin{cases} < \max\{\|x - z\|, \|y - t\|\}, \text{ nếu } (x, y) \neq (z, t) \\ \text{và } x \neq y \text{ hay } z \neq t \\ \leq \|x - z\| = \|y - t\|, \text{ nếu } x = y \text{ và } z = t \end{cases} \quad (3)$$

đối với tất cả $x, y, z, t \in D$. Hơn nữa ta giả thiết rằng hoặc D là compact hoặc T ánh xạ $D \times D$ vào tập con compact của D .

Khi đó phương trình (1) có nghiệm trên D . Ngoài ra mọi phương trình $x_n = T(x_n, x_{n-1})$ có nghiệm x_n duy nhất, $n \geq 1$, và dãy $\{x_n\}$ được xác định như vậy hội tụ đến nghiệm của (1) đối với mọi $x_0 \in D$.

Chứng minh. Đối với $v \in D$ cố định bất kỳ, giả sử $T_v(x) = T(x, v)$. Từ (3) ta có thể thấy rằng toán tử $T_v : D \rightarrow D$ là không giãn ngặt, nghĩa là

$$\|T_v(x) - T_v(y)\| < \|x - y\|, \forall x, y \in D, x \neq y. \quad (4)$$

Ngoài ra, $T_v(D)$ là tập compact trong trường hợp $T(D, D)$ là compact. Do đó theo định lý Edelstein [77] chỉ tồn tại một điểm bất động $\bar{x}$ của T_v với $\bar{x} = T_v(\bar{x}) = T(\bar{x}, v)$. Như vậy $x_n = T(x_n, x_{n-1})$ có nghiệm x_n duy nhất đối với $x_0 \in D$ cố định tùy ý, $n \geq 1$.

Đặt $a_n = \|x_{n+1} - x_n\|$. Nếu đối với một số m nào đó, $x_{m+1} = x_m$, thì x_m là nghiệm của (1). Giả sử $x_{m+1} \neq x_m \forall m$. Khi đó

$$a_n = \|T(x_{n+1}, x_n) - T(x_n, x_{n-1})\|$$

$$< \max \{ \|x_{n+1} - x_n\|, \|x_n - x_{n-1}\| \} = \max \{ a_n, a_{n-1} \},$$

do đó $a_n < a_{n-1}$, vì vậy $a_n \rightarrow a_0 \geq 0$. Từ tính compact của D (hay $T(D, D)$) tồn tại các dãy con của $\{x_n\}$ hội tụ :

$$x_{n_i} \rightarrow u, \quad x_{n_i+1} \rightarrow u_1, \quad x_{n_i-1} \rightarrow u_{-1}.$$

Nếu $a_0 > 0$ thì $a_0 = \lim_i a_{n_i} = \lim_i \|x_{n_i+1} - x_{n_i}\| = \|u_1 - u\|,$

mặt khác :

$$\|u_1 - u\| = \|T(u_1, u) - T(u, u_{-1})\| < \max \{ \|u_1 - u\|, \|u - u_{-1}\| \}$$

do đó

$$\|u_1 - u\| < \|u - u_{-1}\| = \lim_i \|x_n - x_{n_i-1}\| = \lim_i a_{n_i} = a_0.$$

điều này mâu thuẫn. Vậy $a_0 = 0$ và $u_1 = u_{-1} = u$ là nghiệm của $x = T(x, x)$.

Bây giờ lại từ điều kiện (3) rõ ràng rằng

$$\|x_n - u\| < \|x_{n-1} - u\|.$$

suy ra rằng $\lim_n \|x_n - u\|$ tồn tại. Vì $a_0 = 0$, ta có $\lim_i \|x_{n_i} - u\| = 0$
 $\lim_n \|x_n - u\| = 0.$

Chú ý 1. Không khó khăn gì thấy rằng nếu với các giả thiết của định lý 11.1.1 ta dùng phép lặp Picard đối với $T^*(x) = T(x, x)$ (đã được M. Edelstein [77], L. P. Belluce và W.A. Kirk [90], F.E. Browder [50], W.V. Petryshyn và T. E. Williamson [105] nghiên cứu) thì ta không thể khẳng định sự tồn tại nghiệm của phương trình (1) hoặc nghiệm xấp xỉ của chúng.

Tương tự như định lý 11.1.1 ta có

Định lý 11.1.2. Giả sử D là tập con đóng, bị chặn của không gian metric (X, d) , $g(., .)$ là một hàm từ $D \times D$ vào $(0, \infty)$ có các tính chất :

- 1) $g(x, y) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y, \forall x, y \in D$,
- 2) g là hàm liên tục theo cặp (x, y) ,
- 3) Nếu $g(x, y) \rightarrow 0$ thì $d(x, y) \rightarrow 0$.

Giả sử T là toán tử từ $D \times D$ vào D thỏa mãn điều kiện không giãn :

$$g(T(x, y), T(z, t)) \begin{cases} < \max \{g(x, z), g(y, t)\}, & \text{nếu } (x, y) \neq (z, t) \\ \text{và } x \neq y \text{ hay } z \neq t \\ \leq g(x, z) = g(y, t), & \text{nếu } x = y \text{ và } z = t \end{cases} \quad (5)$$

đối với tất cả $x, y, z, t \in D$. Hơn nữa ta giả thiết rằng hoặc D là compact hoặc T ánh xạ $D \times D$ vào tập con compact của D .

Khi đó kết luận của định lý 11.1.1 vẫn còn đúng.

Chú ý 2. Hàm g không cần là một metric. Thật vậy, g có thể không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác, hay thậm chí không thỏa mãn đồng nhất thức $g(x, y) = g(y, x)$.

Ví dụ : $g(x, y) = (x - y)^2$ hay $g(x, y) = |\exp(x - y) - 1|$,

$$D = [0, 1] \subset \mathbb{R}.$$

Hệ quả 11.1.1. Giả sử $T = U + S$, trong đó U và S là các toán tử từ D vào D , D là một tập con của không gian metric tuyến tính X , sao cho $T(x, y) = U(x) + S(y)$ thỏa mãn điều kiện (5) với $g(., .)$ của định lý 11.1.2. Giả thiết thêm rằng hoặc D là compact hoặc D là đóng, bị chặn và U, S là compact.

Khi đó T có điểm bất động trên D . Ngoài ra, các điểm bất động của T được xấp xỉ bởi phương pháp chiếu lặp.

2. Toán tử cô đặc (condensing)

Trong mục này ta sẽ xét những trường hợp tổng quát hơn, khi T là toán tử không giãn và cô đặc. B. N. Sadovsky [109] đầu tiên đã đưa vào khái niệm toán tử cô đặc với độ đo cầu không compact $\chi(\Omega)$ của một tập Ω ($\chi(\Omega) = 0$ khi và chỉ khi Ω là compact) và sau đó M.Furi và A.Vignoli [79] với độ đo tập không compact $\gamma(\Omega)$ (định nghĩa, sự khác nhau và các tính chất chung giữa hai độ đo ấy có thể tìm trong [109], [104]).

Với những lập luận sau này của chúng tôi đối với toán tử cô đặc, một trong hai độ đo nói trên đều sử dụng được. Vì vậy chúng tôi chỉ sử dụng độ đo γ . W.V. Petryshyn trong [104] đã chứng minh sự hội tụ của một xấp xỉ liên tiếp đến điểm bất động của một ánh xạ không giãn ngặt (hoặc không giãn, nếu X là lồi ngặt) và γ – cô đặc. Ở đây ta sẽ xét toán tử $T : D \times D \rightarrow D$ và sẽ không dùng phép lặp đơn mà dùng phép lặp ẩn.

Định lý 11.1.3. Giả sử D là một tập con lồi, đóng, bị chặn của không gian Banach X . Giả thiết rằng toán tử $T : D \times D \rightarrow D$ thỏa mãn điều kiện không giãn (3) và các điều kiện cô đặc (condensing)

$$\gamma(T(U, U)) < \gamma(U), \text{ đối với mỗi } U \text{ của } D \text{ mà } \gamma(U) > 0, \quad (6)$$

$$\gamma(T(U, x)) < \gamma(U), \quad (7)$$

đối với mỗi U của D mà $\gamma(U) > 0$ và mỗi điểm x trên D .

Khi đó mọi phương trình $x_n = T(x_n, x_{n-1})$ có nghiệm x_n duy nhất, $n \geq 1$, và dãy $\{x_n\}$ được xác định như vậy hội tụ đến nghiệm của (1) đối với $x_0 \in D$ bất kỳ.

Chứng minh. Đối với $v \in D$ cố định bất kỳ, do (3) và (4) ta thấy rằng toán tử $T_v : D \rightarrow D$, trong đó $T_v(x) = T(x, v)$, là không giãn ngặt và γ -condensing. Do đó nghiệm duy nhất của phương trình $\bar{x} = T_v(\bar{x})$ suy từ [109].

Để kiểm tra sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$ đến nghiệm của (1) chỉ cần chỉ ra tính compact của nó rồi áp dụng định lý 11.1.1 vào phần cuối của chứng minh. Giả sử $\gamma(\{x_n\}_0^\infty) > 0$ và đặt $C = \{x_n\}_1^\infty$. Từ (6) và (7) và từ các tính chất của độ đo γ ta có :

$$\begin{aligned} \gamma(\{x_n\}_0^\infty) &= \gamma(C) = \gamma(\{T(x_n, x_{n-1})\}_1^\infty) \\ &\leq \gamma\left(T\left(\{x_n\}_1^\infty, \{x_{n-1}\}_1^\infty\right)\right) = \gamma(T(C, C) \cup T(C, x_0)) \\ &= \max\{\gamma(T(C, C)), \gamma(T(C, x_0))\} < \gamma(C), \end{aligned}$$

điều này mâu thuẫn, vậy $\gamma(\{x_n\}_0^\infty) = 0$ tức $\{x_n\}$ là tập compact. $\square$

Bây giờ ta xét toán tử cô đặc không giãn trong không gian Banach lồi đều, trong đó điều kiện đối với T trong định lý 11.1.3 có thể giảm nhẹ.

Định lý 11.1.4. Giả sử D là một tập con lồi, đóng, bị chặn của không gian Banach lồi đều X , T là toán tử liên tục từ $D \times D$ vào D thỏa mãn các điều kiện :

$$\|T(x, y) - T(z, t)\| \begin{cases} < \max\{\|x - z\|, \|y - t\|\} & \text{nếu } \|x - z\| \neq \|y - t\| \\ \leq \|x - z\| = \|y - t\| & \end{cases} \quad (8)$$

đối với tất cả $x, y, z, t \in D$.

$$\gamma(T(U, V)) < \max\{\gamma(U), \gamma(V)\} \quad (9)$$

đối với các tập con U, V của D sao cho $\gamma(U \cup V) > 0$.

Khi đó tồn tại các số λ_n , $0 < a < \lambda_n < b < 1$, $n \geq 1$, trong đó a , b là các hằng số, sao cho dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi

$$x_n = \lambda_n x_{n-1} + (1 - \lambda_n) \bar{x}_n, \quad (10)$$

trong đó $\bar{x}_n = T(\bar{x}_n, x_{n-1})$, hội tụ đến nghiệm của (1) đối với $x_0 \in D$ bất kỳ.

Chứng minh. Với $v \in D$ là điểm bất kỳ, toán tử $T_v : D \rightarrow D$ là không giãn ngặt suy từ (8) và chú ý từ (9) suy ra (7), do đó T_v là γ -condensing, $\bar{x}_n$ được xác định duy nhất bởi x_{n-1} .

Bây giờ ta sẽ chỉ ra số λ_n tồn tại sao cho $\bar{x}_n \neq x_m$, $\forall n, m$. Đối với $n \geq 1$ bất kỳ ta có thể chọn số $\lambda_n \in (a, b)$ sao cho $\lambda_n \leq \lambda_{n-1}$ và $x_n \neq \bar{x}_m$, $\forall m = 1, 2, \dots, n-1$, tức là $\bar{x}_n \neq x_m$, $\forall m > n$. Như trong chứng minh của định lý 11.1.1 ta có thể giả sử rằng $\bar{x}_n \neq x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Sử dụng tính lồi đều của X và định lý F. Browder [50] dẫn đến T có các nghiệm trên D . Giả sử p là một trong những nghiệm đó. Từ (6) và từ tính lồi ngặt của X đối với $n \geq 1$ bất kỳ ta có

$$\|\bar{x}_n - p\| = \|T(\bar{x}_n, x_{n-1}) - T(p, p)\| \leq \|x_{n-1} - p\| \quad (11)$$

và

$$\|x_n - p\| = \|\lambda_n(x_{n-1} - p) + (1 - \lambda_n)(\bar{x}_n - p)\| < \|x_{n-1} - p\|.$$

Do đó $\|\bar{x}_n - p\| \leq \|x_{n-1} - p\| < \|x_m - p\|$, $m = 0, 1, \dots, n-2$, suy ra

$$\bar{x}_n \neq x_m, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ngoài ra $\bar{x}_n \neq x_n$, ta có $\bar{x}_n \neq x_m$, $\forall n, m$.

Bây giờ ta chứng tỏ các tập $\{\bar{x}_n\}$ và $\{x_n\}$ là các tập compact. Trước tiên chú ý rằng dãy $\{\lambda_n\}$ hội tụ đến $\lambda \in [a, b]$ nào đó vì $\lambda_n \leq \lambda_{n-1}$. Do đó

$$\begin{aligned}\gamma(\{\lambda_n x_{n-1}\}) &\leq \gamma(\{(\lambda_n - \lambda)x_{n-1}\}) + \gamma(\{\lambda x_{n-1}\}) \\ &= \gamma(\{\lambda x_{n-1}\}) = \lambda \gamma(\{x_{n-1}\}).\end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$\gamma(\{(1 - \lambda_n)\bar{x}_n\}) \leq (1 - \lambda)\gamma(\{\bar{x}_n\}).$$

Do đó

$$\begin{aligned}\gamma(\{x_n\}_0^\infty) &= \gamma(\{x_n\}_1^\infty) = \gamma(\{\lambda_n x_{n-1} + (1 - \lambda_n)\bar{x}_n\}_1^\infty) \\ &\leq \gamma(\{\lambda_n x_{n-1}\}) + \gamma(\{(1 - \lambda_n)\bar{x}_n\}) \\ &\leq \lambda \gamma(\{x_n\}_0^\infty) + (1 - \lambda)\gamma(\{\bar{x}_n\}_1^\infty).\end{aligned}$$

Như vậy $\gamma(\{x_n\}) \leq \gamma(\{\bar{x}_n\})$.

Một mặt khác nếu $\{\bar{x}_n\}$ không phải là tập compact, tức là $\gamma(\{\bar{x}_n\}) > 0$, khi đó theo (9)

$$\begin{aligned}\gamma(\{\bar{x}_n\}) &= \gamma(\{T(\bar{x}_n, x_{n-1})\}) \leq \gamma(T(\{\bar{x}_n\}, \{x_n\})) \\ &< \max\{\gamma(\{\bar{x}_n\}), \gamma(\{x_n\})\} \leq \gamma(\{\bar{x}_n\}),\end{aligned}$$

điều này mâu thuẫn. Do đó $\gamma(\{\bar{x}_n\}) = 0$ và do đó $\gamma(\{x_n\}) = 0$.

Như vậy cả $\{\bar{x}_n\}$ và $\{x_n\}$ là compact.

Dễ dàng thấy rằng tồn tại một dãy con chỉ số n_i sao cho

$$x_{n_i} \rightarrow u, x_{n_i-1} \rightarrow u_{-1}, \bar{x}_{n_i} \rightarrow \bar{u}, \lambda_{n_i} \rightarrow \lambda \text{ khi } i \rightarrow \infty.$$

Từ (10) ta có $\bar{u} = \lambda u_{-1} + (1 - \lambda)\bar{u}$ và $\bar{u} = T(\bar{u}, u_{-1})$.

Ta sẽ chứng tỏ rằng $u = u_{-1} = \bar{u}$.

Giả sử ngược lại $\bar{u} \neq u_{-1}$, khi đó từ (11) ta có

$$\begin{aligned}\|\bar{u} - p\| &\leq \|u_{-1} - p\| = \lim_i \|x_{n_i-1} - p\| = \lim_n \|x_n - p\| \\ &= \lim_i \|x_{n_i} - p\| = \|u - p\|\end{aligned}$$

Do tính lồi chặt

$$\|u - p\| = \|\lambda(u_{-1} - p) + (1 - \lambda)(\bar{u} - p)\| < \|u_{-1} - p\| = \|u - p\|,$$

điều này mâu thuẫn, vậy $\bar{u} = u_{-1} = u$ là nghiệm của (1).

Cuối cùng thay vì p ta lấy u ta thu được

$$\lim_n \|x_n - u\| = \lim_i \|x_{n_i} - u\| = 0.$$

3. Ví dụ

Ví dụ 1. Giả sử ta xét tập $D = [0, 1]$ và

$$T(x, y) = \sin \frac{x+y}{2}$$

không khó khăn gì chỉ ra toán tử T thỏa mãn tất cả các điều kiện của định lý 11.1.1. Chú ý T không là toán tử co.

Ví dụ 2. Giả sử $D = l_p$, $1 < p < \infty$, $T(x, y) = \frac{\tau y}{\exp(\|x - y\|)}$

trong đó $x = (x_1, x_2, \dots) \rightarrow \tau x = (0, x_1, x_2, \dots)$, $x \in l_p$. Không có gì khó khăn ta thấy rằng với phần tử tùy ý $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots)$, $x_{01} \neq 0$, dãy được xác định bởi

$$x_n = T(x_n, x_{n-1})$$

hội tụ đến 0 khi $n \rightarrow \infty$, nhưng dãy được xây dựng bởi

$$x_n = T(x_{n-1}, x_{n-1})$$

thì không hội tụ.

§2. PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU CHỈNH. BÀI TOÁN BIẾN PHÂN ĐA TRỊ PHI TUYẾN

Bên cạnh phương pháp không khớp, phương pháp điều chỉnh cũng là một phương pháp rất có hiệu lực để giải xấp xỉ các phương trình toán tử, các bất đẳng thức biến phân, tựa biến phân, đặc biệt là phương pháp điều chỉnh Tikhonov [28]. Phương pháp này đang được hoàn thiện trong các công trình mới đây [12].

Dưới đây là nội dung trong công trình [58], [97].

1. Bài toán

Giả sử X là không gian Banach thực, phản xạ, X^* là không gian liên hợp của X , A là một toán tử phi tuyến đơn điệu hemi liên tục tác dụng từ X vào X^* , f là một hàm số nửa liên tục dưới từ X vào $(-\infty, +\infty]$, $f \not\equiv +\infty$ và D là một tập con lồi đóng của miền xác định $D(A)$ của A , y_0 là một phần tử cho trước trong X^* .

Ta xét bài toán sau đây :

Tìm $x_0 \in D$ sao cho

$$(Ax_0 - y_0, x - x_0) \geq f(x_0) - f(x), \forall x \in D, \quad (12)$$

trong đó (x^*, x) là giá trị của x^* tại điểm $x \in X$. Ta ký hiệu tập các nghiệm x_0 của bài toán này là U_0 . Lớp các bất đẳng thức vừa nêu thường được gọi là bất đẳng thức biến phân phi tuyến chứa các phương trình toán tử đơn điệu, các bài toán biến phân trên các tập lồi, các bất đẳng thức toán tử đơn điệu trên các tập lồi, v.v... làm trường hợp đặc biệt.

Giả thiết đối với toán tử chính xác A và phần tử cho trước y_0 tập U_0 các nghiệm của (12) là khác rỗng. Ta sẽ tìm nghiệm xấp xỉ của nghiệm $x_0 \in U_0$ khi được cho xấp xỉ $y_\delta \in X^*$ và $A_h : D(A) \rightarrow X^*$ với các điều kiện :

$$\|y_\delta - y_0\| \leq \delta, \text{ và } \|A_h x - Ax\| \leq h g(\|x\|), \forall x \in D(A), \quad (13)$$

trong đó $g(t)$ là hàm cho trước thực, liên tục, không âm và tăng không nhanh hơn một hàm tuyến tính cố định, tức là tồn tại các số $M, N \geq 0$ sao cho

$$0 \leq g(t) \leq Mt + N, \forall t \geq 0.$$

Ta cũng sẽ nghiên cứu tính ổn định của (12) khi có nhiều (13) bằng phương pháp điều chỉnh Tikhonov.

Các nhà toán học Liskovetz [13]. Nguyễn Văn Kính và tác giả thứ nhất quyển sách này [58] v.v... cũng đã nghiên cứu bài toán (12) khi $f \equiv 0$. Bài toán (12) cũng được giáo sư nổi tiếng F. E. Browder nghiên cứu ngay từ giữa thập kỷ bảy mươi trong [45] nhưng với những phương pháp và kết quả khác với các tác giả nêu trên. Những kết quả đưa vào dưới đây là những kết quả đã công bố trong [58] [97].

2. Bài toán điều chỉnh với tham biến bé. Trường hợp $g(t) \equiv 1$

Ở đây giả thiết X là không gian Banach thực, phản xạ có các tính chất sau đây:

Tồn tại một ánh xạ đơn điệu hemi liên tục U từ X vào X^* ánh xạ các tập giới nội trong X thành các tập giới nội trong X^* và sao cho:

$$1) \text{ với mỗi } x_1 \in X, \frac{(Ux, x - x_1)}{\|x\|} \rightarrow +\infty \text{ khi } \|x\| \rightarrow +\infty;$$

2) nếu $\{x_n\}$ là dãy bị chặn trong X , $x \in X$ và nếu

$$(Ux_n - Ux, x_n - x) \rightarrow 0 \text{ thì } \{x_n\} \text{ hội tụ mạnh đến } x \text{ trong } X.$$

Chú ý rằng nếu X là không gian lồi đều, X^* lồi ngặt thì ánh xạ đối ngẫu từ X vào X^* có các tính chất vừa nêu [7].

Điều kiện (13) bây giờ là

$$\|y_\delta - y_0\| \leq \delta \text{ và } \|A_h x - Ax\| \leq h, \forall x \in D(A), \quad (14)$$

và bài toán điều chỉnh với tham biến bé đối với (12) là

$$\begin{cases} x_0 \in D \\ (A_h x_0 + \alpha U x_0 - y_\delta, x - x_0) \geq f(x_0) - f(x) - \varepsilon \|x - x_0\|, \forall x \in D, \\ \varepsilon, \alpha > 0 \end{cases} \quad (15)$$

Ta ký hiệu tập tất cả các nghiệm x_0 của (15) là U_Δ^α , $\Delta = (\varepsilon, h, \delta)$.

Hai bổ đề sau đây sẽ cần để chứng minh các định lý tiếp sau.

Bổ đề 11.2.1. [45] Giả sử A là một toán tử hemi liên tục từ một miền lõm $D(A)$ trong X vào X^* và f là một hàm số lõm từ X vào $(-\infty, \infty]$ với $f \neq +\infty$. Điều kiện đủ để phần tử $x_0 \in D(A)$ là nghiệm của hệ bất đẳng thức

$$(Ax_0 - \omega, x - x_0) \geq f(x_0) - f(x), \forall x \in D(A)$$

là phần tử x_0 là nghiệm của hệ các bất đẳng thức

$$(Ax - \omega, x - x_0) \geq f(x_0) - f(x), \forall x \in D(A)$$

Nếu T còn là đơn điệu thì hai hệ các bất đẳng thức nói trên tương đương.

Bổ đề 11.2.2. [13] Giả sử $g(t)$ là một hàm số thực liên tục, A là một toán tử từ một tập con lõm $D(A)$ trong X vào X^* hemi liên tục tại $x_0 \in D(A)$ và ε là một số thực cố định.

Nếu $(Ax - \omega, x - x_0) \geq \varepsilon g(\|x\|)\|x - x_0\|$, $\forall x \in D(A)$

thì $(Ax_0 - \omega, x - x_0) \geq \varepsilon g(\|x\|)\|x - x_0\|$, $\forall x \in D(A)$.

Định lý sau đây khẳng định sự tồn tại nghiệm của (15).

Định lý 11.2.1. Với các giả thiết đã nêu. Nếu $\varepsilon \geq h$ thì $U_\Delta^\alpha \neq \emptyset$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức biến phân sau đây

$$(Ax_0 + \alpha U x_0 - y_\delta, x - x_0) \geq f(x_0) - f(x), \forall x \in D(A) \quad (16)$$

có nghiệm.

Vì $f \neq +\infty$ và $U_0 \neq \emptyset$ nên tồn tại phần tử $x_1 \in D$ sao cho $f(x_1) < +\infty$. Do tính chất 1) của ánh xạ U nêu trong phần đầu, nên tồn tại một hàm số thực không âm $\gamma(t)$ mà $\gamma(t) \rightarrow +\infty$ khi $t \rightarrow +\infty$ sao cho

$$(Ux, x - x_1) \geq \gamma(\|x\|) \|x\|, \forall x \in X \quad (17)$$

Vì hàm số f nửa liên tục dưới và lồi nên tồn tại một số thực cố định $k > 0$ sao cho

$$f(x) \geq -k\|x\| + f(0), \forall x \in X \quad (18)$$

Sử dụng tính đơn điệu của A

$$(Ax, x - x_1) = (Ax - Ax_1, x - x_1) + (Ax_1, x - x_1) \geq -\|Ax_1\| \|x - x_1\| \quad (19)$$

Do (16), (17), (18)

$(Ax + \alpha Ux, x - x_1) + f(x) \geq [\gamma(\|x\|) - \|Ax_1\| - k]\|x\| - \|Ax_1\| \|x_1\| + f(0)$,
kéo theo

$$\frac{(Ax + \alpha Ux, x - x_1) + f(x)}{\|x\|} \rightarrow +\infty \text{ khi } \|x\| \rightarrow +\infty \quad (20)$$

Trong trường hợp D không bị chặn, do (9) và do tính đơn điệu của ánh xạ $A + \alpha U$, sử dụng [52], ta thấy (5) có nghiệm.

Trong trường hợp D bị chặn (5) có nghiệm là do [96]

Như vậy (16) có nghiệm thuộc D .

Bây giờ ta sẽ chứng tỏ mỗi nghiệm x_0 của (16) là một nghiệm của (15).

Thật vậy, rõ ràng là

$$(A_h x_0 + \alpha U x_0 - y_\delta, x - x_0) = (A_h x_0 - A x_0, x - x_0) + (A x_0 + \alpha U x_0 - y_\delta, x - x_0) \geq$$

$$\geq -\|A_h x_0 - A x_0\| \|x - x_0\| + f(x_0) - f(x) \geq$$

$$\geq -\varepsilon \|x - x_0\| + f(x_0) - f(x), \forall x \in D.$$

Như vậy x_0 là một nghiệm của (4) tức là $U_\Delta^\alpha \neq \emptyset$. $\square$

Khi D không bị chặn, định lý sau đây sẽ cho ta tính bị chặn đều của họ các tập U_Δ^α .

Định lý 11.2.2. Với các giả thiết của định lý 11.2.1. nếu $\frac{\varepsilon + h + \delta}{\alpha} < K$ (hằng số) thì họ các tập U_Δ^α bị chặn đều.

Chứng minh. Vì $\varepsilon \geq h$ nên $U_\Delta^\alpha \neq \emptyset$ với tất cả Δ, α (định lý 10.8.1). Với mỗi Δ, α , giả sử x_Δ^α là một phần tử tùy ý trong U_Δ^α . Rõ ràng là

$$(A_h x_\Delta^\alpha + \alpha U x_\Delta^\alpha - y_\delta, x - x_\Delta^\alpha) \geq f(x_\Delta^\alpha) - f(x) - \varepsilon \|x - x_\Delta^\alpha\|, \forall x \in D$$

do đó

$$\begin{aligned} h\|x - x_\Delta^\alpha\| + \delta\|x - x_\Delta^\alpha\| + (A x_\Delta^\alpha - y_\delta, x - x_\Delta^\alpha) + \alpha(U x_\Delta^\alpha, x - x_\Delta^\alpha) \geq \\ \geq f(x_\Delta^\alpha) - f(x) - \varepsilon\|x - x_\Delta^\alpha\|, \forall x \in D \end{aligned} \quad (21)$$

Nếu $x \in U_0$ thì

$$(A x_\Delta^\alpha - y_\delta, x - x_\Delta^\alpha) \leq f(x_\Delta^\alpha) - f(x).$$

Trong bất đẳng thức (10) thay x bằng $x_1 \in U_0$ sẽ có

$$\frac{\varepsilon + h + \delta}{\alpha} \|x_1 - x_\Delta^\alpha\| \geq (U x_\Delta^\alpha, x_\Delta^\alpha - x_1), \forall x_\Delta^\alpha \in U_\Delta^\alpha,$$

do đó

$$K\|x_\Delta^\alpha - x_1\| \geq (U x_\Delta^\alpha, x_\Delta^\alpha - x_1), \forall x_\Delta^\alpha \in U_\Delta^\alpha.$$

Vì K không phụ thuộc vào $\varepsilon, h, \delta, \alpha$ nên với tính chất 1) của ánh xạ U nêu trong phần đầu mục (2, §2) ta khẳng định được các tập U_Δ^α bị chặn đều.

Hai định lý tiếp theo cho ta tính ổn định của bất đẳng thức biến phân (12) với nhiễu (14).

Định lý 11.2.3. Với các giả thiết của định lý 11.2.2. dãy các tập $\{U_\Delta^\alpha\} \subset B$ hội tụ yếu đến U_0 khi $\alpha \rightarrow 0$.

Chứng minh. Trong mỗi U_Δ^α giả sử x_Δ^α là một phần tử tùy ý. Nhờ định lý 11.2.2 dãy $\{x_\Delta^\alpha\}$ bị chặn đều. Do đó tồn tại một dãy con $\{x_\Delta^\beta\}$ của dãy $\{x_\Delta^\alpha\}$ hội tụ yếu đến $x_0 \in D$ (D là một tập lồi đóng và $x_\Delta^\alpha \in D$). Ta sẽ chứng tỏ $x_0 \in U_0$.

Trong bất đẳng thức (21) thay x_Δ^α bằng x_Δ^β và sử dụng tính đơn điệu của toán tử A và của ánh xạ U ta thu được

$$(\varepsilon + h + \delta) \|x - x_\Delta^\beta\| + (Ax - y_0, x - x_\Delta^\beta) \geq f(x_\Delta^\beta) - f(x) + \beta(Ux, x_\Delta^\beta - x),$$

$$\forall x \in D \quad (22)$$

Vì f nửa liên tục dưới và $\frac{\varepsilon + h + \delta}{\alpha} < K$ (hằng số) nên cho $\beta \rightarrow 0$ trong (21) ta có

$$(Ax - y_0, x - x_0) \geq f(x_0) - f(x), \quad \forall x \in D.$$

Do bổ đề 11.2.1

$$(Ax_0 - y_0, x - x_0) \geq f(x_0) - f(x), \quad \forall x \in D.$$

Như vậy $x_0 \in U_0$ và $\{U_\Delta^\alpha\} \subset B$ hội tụ yếu đến U_0 khi $\alpha \rightarrow 0$. $\square$

Bây giờ ta đưa thêm ký hiệu

$$U_0^* = \{x_0 \in U_0 : (Ux_0, x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in U_0\}$$

Do tính coerciv của ánh xạ U trên tập lồi đóng U_0 nên tập $U_0^* \neq \emptyset$.

Định lý 11.2.4. Nếu $\varepsilon \geq h$, $\frac{\varepsilon+h+\delta}{\delta} \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ thì dãy $\{U_{\Delta}^{\alpha}\}$

B-hội tụ mạnh đến U_0^* .

Chứng minh. Vì $\frac{\varepsilon+h+\delta}{\alpha} \rightarrow 0$ nên $\frac{\varepsilon+h+\delta}{\alpha}$ có thể đủ nhỏ và ta đã thấy các tập U_{Δ}^{α} bị chặn đều (định lý 11.2.2). Với mỗi U_{Δ}^{α} lấy một phần tử tùy ý x_{Δ}^{α} . Vì X là không gian phản xạ nên tồn tại dãy con $\{x_{\Delta}^{\beta}\}$ của dãy $\{x_{\Delta}^{\alpha}\}$ hội tụ yếu đến $x_1 \in D$ khi $\beta \rightarrow 0$. Ngoài ra $x_1 \in U_0$. Do (21) nên

$$\frac{\varepsilon+h+\delta}{\beta} \|x - x_{\Delta}^{\beta}\| \geq (Ux_{\Delta}^{\beta}, x_{\Delta}^{\beta} - x) \geq (Ux, x_{\Delta}^{\beta} - x), \forall x \in U_0 \quad (23)$$

Trong (23) cho $\beta \rightarrow 0$, $\frac{\varepsilon+h+\delta}{\beta} \rightarrow 0$ ta được

$$(Ux, x_1 - x) \leq 0, \forall x \in U_0$$

$$(Ux_1, x_1 - x) \leq 0, \forall x \in U_0$$

Như vậy $x_1 \in U_0^*$.

Sử dụng tính đơn điệu của ánh xạ U , thay x bằng x_1 trong (23) sẽ có :

$$\frac{\varepsilon+h+\delta}{\beta} \|x_1 - x_{\Delta}^{\beta}\| + (Ux_1, x_1 - x_{\Delta}^{\beta}) \geq (Ux_{\Delta}^{\beta} - Ux_1, x_{\Delta}^{\beta} - x_1) \geq 0 \quad (24)$$

Trong (24) cho $\beta \rightarrow 0$, $\frac{\varepsilon+h+\delta}{\beta} \rightarrow 0$, ta đi đến

$$(Ux_{\Delta}^{\beta} - Ux_1, x_{\Delta}^{\beta} - x_1) \rightarrow 0.$$

Do tính chất 2) của ánh xạ U nên trong phần đầu mục (2, §2), suy ra dãy $\{x_{\Delta}^{\beta}\}$ hội tụ mạnh đến x_1 . Từ đó $\{U_{\Delta}^{\alpha}\}$ B-hội tụ mạnh đến U_0^* khi

$$(Ax + \alpha Ux - y_\delta, x - x_0) \geq f(x_0) - f(x), \forall x \in D \quad (27)$$

Có nghĩa là (27) có nghiệm.

Bây giờ ta chứng tỏ rằng mỗi nghiệm x_0 của (27) là một nghiệm của (25). Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (A_h + \alpha Ux - y_\delta, x - x_0) &= (A_h x - Ax, x - x_0) + (Ax + \alpha Ux - y_\delta, x - x_0) \geq \\ &\geq -hg(\|x\|)\|x - x_0\| + f(x_0) - f(x) \geq \\ &\geq f(x_0) - f(x) - \varepsilon g(\|x\|)\|x - x_0\|, \forall x \in D. \end{aligned}$$

Như vậy $x_0 \in V_\Delta^\alpha$. $\square$

Khi D không bị chặn, định lý sau đây cho ta tính bị chặn đều của họ tập V_Δ^α .

Định lý 11.2.6. Với các giả thiết như đã nêu, nếu $\varepsilon \geq h$,

$\frac{M(\varepsilon+h)}{\alpha} < K_1 < 1$, $\frac{\delta}{\alpha} < K_2$ (K_1, K_2 là 2 hằng số) thì các tập V_Δ^α bị chặn đều.

Trong mỗi V_Δ^α lấy một phần tử tùy ý x_Δ^α . Ta có

$$(A_h x + \alpha Ux - y_\delta, x - x_\Delta^\alpha) \geq f(x_\Delta^\alpha) - \varepsilon g(\|x\|)\|x - x_\Delta^\alpha\|, \forall x \in D.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} [(\varepsilon + h)g(\|x\|) + \delta]\|x - x_\Delta^\alpha\| + (Ax - y_0, x - x_\Delta^\alpha) + \alpha(Ux, x - x_\Delta^\alpha) \geq \\ \geq f(x_\Delta^\alpha) - f(x), \forall x \in D. \end{aligned} \quad (28)$$

Sử dụng các bổ đề 11.2.1, 11.2.2 từ (28) ta được

$$\begin{aligned} [(\varepsilon + g)g(\|x\|) + \delta]\|x - x_\Delta^\alpha\| + (Ax_\Delta^\alpha - y_0, x - x_\Delta^\alpha) + \alpha(Ux_\Delta^\alpha, x - x_\Delta^\alpha) \geq \\ \geq f(x_\Delta^\alpha) - f(x), \forall x \in D. \end{aligned} \quad (29)$$

Do tính đơn điệu của Toán tử A từ (29) suy ra

$$[(\varepsilon + h)g(\|x\|) + \delta]\|x - x_\Delta^\alpha\| + (Ax_\Delta^\alpha - y_0, x - x_\Delta^\alpha) + \alpha(Ux_\Delta^\alpha, x - x_\Delta^\alpha) \geq f(x_\Delta^\alpha) - f(x), \quad \forall x \in D. \quad (30)$$

Do (30)

$$\left[\frac{\varepsilon + h}{\alpha} g(\|x_\Delta^\alpha\|) + \frac{\delta}{\alpha} \right] \|x - x_\Delta^\alpha\| \geq (Ux_\Delta^\alpha, x_\Delta^\alpha - x), \quad \forall x \in U_0. \quad (31)$$

Như vậy

$$\left[\frac{M(\varepsilon + h)}{\alpha} - 1 \right] \|x_\Delta^\alpha\|^2 + \left[\frac{\varepsilon + h}{\alpha} (N + M\|x\|) + \frac{\delta}{\alpha} + \|x\| \right] \|x_\Delta^\alpha\| + \left[\frac{N(\varepsilon + h)}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} \right] \|x\| \geq 0, \quad \forall x \in U_0. \quad (32)$$

Với giả thiết $\frac{M(\varepsilon + h)}{\alpha} < K_1 < 1$ và $\frac{\delta}{\alpha} < K_2$ từ (21) suy ra các tập

V_Δ^α bị chặn đều. $\square$

Định lý tiếp theo sẽ cho ta tính ổn định của bài toán (12) với nhiều (13) nghiên cứu bằng phương pháp điều chỉnh Tikhonov.

Định lý 11.2.7. Với các giả thiết của định lý 11.2.6, dãy các tập $\{V_\Delta^\alpha\}$ B-hội tụ yếu đến U_0 khi $\alpha \rightarrow 0$.

Chứng minh. Trong mỗi U_Δ^α lấy một phần tử tùy ý x_Δ^α . Dãy $\{x_\Delta^\alpha\}$ bị chặn (định lý 11.2.6). Mà X là không gian phản xạ nên tồn tại dãy con $\{x_\Delta^\beta\}$ hội tụ yếu đến $x_0 \in D$.

Một mặt khác trong bất đẳng thức (28) thay x_Δ^α bằng x_Δ^β và α bằng β ta sẽ thấy khi $\beta \rightarrow 0$.

$$(Ax - y_0, x - x_0) \geq f(x_0) - f(x), \quad \forall x \in D.$$

Do bổ đề 11.2.1. ta có

$$(Ax_0 - y_0, x - x_0) \geq f(x_0) - f(x), \forall x \in D.$$

Như vậy $x_0 \in U_0$ và dãy $\{V_\Delta^\alpha\}$ B-hội tụ yếu đến U_0 khi $\alpha \rightarrow 0$. $\square$

Bây giờ ta đưa thêm ký hiệu

$$U_\infty^* = \text{Arg min } U_0 := \{x_* \in U_0 : \|x_*\| = \min_{x \in U_0} \|x\|\}.$$

Do tập U_0 là lồi và đóng trong không gian Banach phản xạ X nên $U_\infty^* \neq \emptyset$.

Định lý 11.2.8. Nếu $\varepsilon \geq h$, $\frac{\varepsilon + h + \delta}{\alpha} \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ thì dãy $\{V_\Delta^\alpha\}$ B-hội tụ yếu đến U_∞^* .

Hơn nữa nếu x_Δ^α là một phần tử tùy ý trong mỗi V_Δ^α thì dãy $\{\|x_\Delta^\alpha\|\}$ hội tụ đến $\|x_*\|$, $x_* \in U_\infty^*$.

Chứng minh. Như khi chứng minh định lý 11.2.7 ta thấy tồn tại dãy con $\{x_\Delta^\beta\}$ của dãy $\{x_\Delta^\alpha\}$ hội tụ yếu đến $x_* \in D$ khi $\alpha \rightarrow 0$. Ta sẽ chứng tỏ $x_* \in U_\infty^*$.

Thật vậy, do U đơn điệu, từ (31) suy ra

$$\left[\frac{\varepsilon + h}{\beta} g(\|x_\Delta^\beta\|) + \frac{\delta}{\beta} \right] \|x - x_\Delta^\beta\| + (Ux, x - x_\Delta^\beta) \geq 0, \forall x \in U_0. \quad (33)$$

Vì $\{x_\Delta^\beta\}$ bị chặn còn hàm số $g(t)$ thì liên tục nên $\{g(\|x_\Delta^\beta\|)\}$ bị chặn. Như vậy trong bất đẳng thức (33) cho $\frac{\varepsilon + h + \delta}{\beta} \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ ta thu được $(Ux, x - x_0) \geq 0$, $\forall x \in U_0$.

Do đó $\|x_*\| \leq \|x\|$, $\forall x \in U_0$.

Từ đó suy ra $x_* \in U_\infty^*$.

Một mặt khác

$$\begin{aligned} \left(\|x_*\| - \|x_\Delta^\beta\| \right)^2 &\leq (Ux_* - Ux_\Delta^\beta, x_* - x_\Delta^\beta) = (Ux_*, x_* - x_\Delta^\beta) + \\ &+ (Ux_\Delta^\beta, x_\Delta^\beta - x_*) \leq (Ux_*, x_* - x_\Delta^\beta) + \left[\frac{\varepsilon + h}{\beta} \right] g(\|x_\Delta^\beta\|) + \frac{\delta}{\beta} \|x_\Delta^\beta - x_*\|. \end{aligned} \quad (34)$$

Cho $\beta \rightarrow 0$, $\frac{\varepsilon + h + \delta}{\beta} \rightarrow 0$ ta có $\|x_\Delta^\beta\| \rightarrow \|x_*\|$.

Rõ ràng dãy $\{\|x_\Delta^\alpha\|\}$ có một điểm giới hạn duy nhất $\|x_*\|$ nên định lí 11.2.8 được chứng minh. 1

Hệ quả 11.2.2. Để dãy $\{V_\Delta^\alpha\}$ B-hội tụ yếu đến một tập con bị chặn trong X khi $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\varepsilon + h + \delta}{\alpha} \rightarrow 0$ điều kiện ấy có và đủ là bất đẳng thức biến phân (1) có nghiệm.

Chú ý. Với trường hợp $f = 0$ các kết quả nêu trên đã thu được trong [58]. Với $f = 0$, $D = X$, $g(t) \equiv 1$ còn các toán tử A_h là hemi liên tục thì các kết quả đã nêu được chứng minh trong [13].

Bây giờ ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân sau đây :

Tìm $x_0 \in D$ sao cho

$$(A_h x_0 + \alpha Ux_0 - y_\delta, x - x_0) \geq f(x_0) - f(x) - \varepsilon g(\|x_0\|) \|x - x_0\|, \quad \forall x \in D$$

$$\varepsilon, \alpha > 0, \quad (35)$$

trong đó các giả thiết đối với A_h , f , g vẫn giữ như trong phần đầu của mục này.

Ở đây ta kí hiệu tập tất cả các nghiệm của bài toán (35) là W_Δ^α . Sử dụng các chứng minh tương tự như phần trên (với những biến đổi không có gì phức tạp) ta cũng sẽ thu được các định lí như vậy đối với W_Δ^α .

4. Ví dụ

Giả sử $K(s, t)$ là một hàm thực liên tục không âm trên hình vuông $0 \leq s, t \leq 1$ và $\rho(s, t)$ là một hàm thực được xác định với $0 \leq s \leq 1$ và với t tùy ý. Ngoài ra $\rho(s, t)$ liên tục theo s , t không tăng theo t và thỏa mãn điều kiện :

$$\|\rho(s, t)\| \leq a(s) + b\|t\|,$$

trong đó $a(s) \in L_2[0, 1]$ và b là một số dương.

Ta xét toán tử sau đây

$$Ax = \int_0^1 K(s, t)\rho(s, x(s))ds, \quad x \in L_2[0, 1] \quad (36)$$

Rõ ràng

$$A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$$

và A là liên tục. Hơn nữa có thể viết

$$A = BH$$

trong đó $B : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$,

và B là toán tử tích phân tuyến tính với nhân $K(s, t)$ và H là toán tử Nemitski

$$Hx = \rho(s, x(s))$$

$$H : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1].$$

Tương tự trong [3] sử dụng định lí 15.1 và chú ý 15.2 (xem [3] trang 353 - 355) ta có thể chứng minh A là toán tử đơn điệu.

Bây giờ giả sử $K_h(s, t)$ và $\rho_h(s, t)$ là các hàm thực đo được, được xác định trong cùng miền với K và ρ và thỏa mãn các điều kiện

$$\|K_h(s, t) - K(s, t)\| \leq h, \quad 0 \leq t, s \leq 1,$$

$$\|\rho_h(s, t) - \rho(s, t)\| \leq h[C(s) + d\|t\|], \quad 0 \leq s \leq 1, \forall t.$$

trong đó $C(s) \in L_2[0, 1]$ và d là một số dương.

Ở đây xét toán tử A_h như sau

$$A_h x = \int_0^1 K_h(s, t) p_h(s, x(s)) ds, \quad x(\cdot) \in L_2[0, 1],$$

Rõ ràng $A_h : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$

và A_h không nhất thiết đơn điệu.

Ta thu được ước lượng

$$\|A_h x - Ax\| \leq h[(b + hd + K_0 d) \|x\| + A_0 + (h + K_0)C_0]$$

trong đó $\| \cdot \|$ là L_2 -chuẩn.

$$A_0 = \|a\|, \quad C_0 = \|C\|, \quad K_0 = \max_{0 \leq t \leq 1} K(s, t).$$

Với $h < 1$ ta có

$$\|A_h x - A_x\| \leq h[(b + d + K_0 d) \|x\| + A_0 + (1 + K_0)C_0].$$

Đặt $g(t) = (b + d + d K_0)t + A_0 + (1 + K_0)C_0$,

ta thu được $\|A_h x - A_x\| \leq hg(\|x\|)$.

Như vậy các điều kiện đủ trong 11.2.1 được thỏa mãn và ta có thể sử dụng phương pháp đã được nghiên cứu trong đó để nghiên cứu xấp xỉ phương trình (36).

Bài toán (12) - (13) trong trường hợp A là một ánh xạ đa trị cũng có thể giải quyết bằng phương pháp điều chỉnh Tikhonov như sau

Dưới đây là các kết quả đã công bố trong [97]. Giả sử X là không gian Banach phản xạ thực, X^* là không gian liên hợp lồi chặt, $A : X \rightarrow 2^{X^*}$ là ánh xạ đa trị J -đơn điệu, tức là $\langle Tx - Ty, J(x - y) \rangle \geq 0, \forall x, y \in X$, T nửa liên tục trên X^* (với tô pô yếu),

(Xem [47, 48]). $y_0 \in X^*$, T ánh xạ một tập bị chặn thành tập bị chặn, $J : X \rightarrow X$ là toán tử tuyến tính liên tục. Ta lại sử dụng toán tử đối ngẫu $U : X \rightarrow X^*$ và hàm liên tục $g(t)$, $0 \leq g(t) \leq Mt + N$, $M, N > 0$, $\forall t > 0$ như khi giải quyết bài toán (12) - (13).

Bây giờ ta xét bất đẳng thức biến phân

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ (w_0 - y_0, J(x - x_0)) \geq f(x_0) - f(x), \forall x \in X \end{cases} \quad (37)$$

trong đó $w_0 \in Tx_0$.

Ta kí hiệu U_0 là tập các nghiệm của (37). Giả thiết $U_0 \neq \emptyset$.

Bài toán biến phân (116) được nghiên cứu xấp xỉ bằng bài toán

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ (w_h + \alpha UJx - y_\delta, J(x - x_0)) \geq f(x_0) - f(x) \\ -\varepsilon g(\|Jx\|) \|J(x - x_0)\|, \end{cases} \quad (38)$$

trong đó $h, \varepsilon, \alpha > 0$, $w_h \in T_h x$, T_h không nhất thiết đơn điệu hay liên tục, $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty)$, $f(x) \neq +\infty$, $f(0) = 0$, f là một hàm lồi, nửa liên tục dưới, có minimum tại 0, $\|y_\delta - y_0\| \leq \delta$, $d_H(T_h x, Tx) \leq hg(\|Jx\|)$, $d_H(A, B)$ là khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A, B .

Ta kí hiệu U_Δ^α , $\Delta = (\varepsilon, h, \delta)$ là tập các nghiệm của (38).

Với những lập luận tương tự đối với bài toán (12) - (13), ta cũng sẽ thu được những kết quả như trên. Chẳng hạn ta cũng chứng minh được rằng $U_\Delta^\alpha \neq \emptyset$. Một cách chính xác ta thu được :

Định lý 11.2.9. Với các giả thiết như vừa nêu bên trên. Ngoài ra, giả thiết rằng $\exists R > 0$ sao cho đối với tất cả $x \in X$, $\|x\| \geq R$ và đối

với tất cả $w \in Tx$, $(J^*(T + \alpha U)x, f(x)) + (w - J^*y_\delta, x) \geq 0$. Khi đó với $\varepsilon \geq h$, tập $U_\Delta^\alpha \neq \emptyset$.

§3. PHƯƠNG PHÁP KHÔNG KHỚP TRONG KHÔNG GIAN TÔ PÔ LỖI ĐỊA PHƯƠNG

1. Giải xấp xỉ bằng phương pháp không khớp

Ta xét phương trình toán tử loại một sau đây :

$$Ax = y_0, y_0 \in R(A) \subset Y, x \in X, \quad (39)$$

trong đó X, Y là các không gian vectơ tô pô lỗi địa phương, Y có tính Hausdorff, $A : X \rightarrow Y$ là một toán tử tuyến tính liên tục yếu và sao cho toán tử ngược A^{-1} xác định trên miền giá trị $R(A)$ của A . Giả sử ta được cho một cơ sở lọc của y_0 gồm các tập con lỗi đóng $\{V_\delta\}$. Ta cần tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình (39) sao cho $x_n \rightarrow x_0$, trong đó x_0 là một nghiệm chính xác của (39).

Định nghĩa 11.3.1. Với các X, Y, A, y_0 cho trước ta gán một cơ sở lọc $\{V_\delta\}$ với dãy nghiệm xấp xỉ $\{x_\delta\}$ và kí hiệu bài toán vừa nói là $\alpha [X, Y, A, x_0, \{V_\delta(y_0)\}]$. Nếu ta dựng được các nghiệm xấp xỉ x_δ bằng phương pháp không khớp và $x_\delta \rightarrow x_0$ thì ta nói phương pháp không khớp này *ổn định bài toán*.

Giả sử $\{p_\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$ là họ các sơ chuẩn xác định tô pô của X . Giả sử $V(x) = (V_\gamma(x))$, trong đó V_γ là ánh xạ chính tắc từ X lên $X_\gamma = X/p_\gamma^{-1}(0)$.

Định nghĩa 11.3.2. Ta nói không gian lỗi địa phương $X = (X, p_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ thỏa mãn điều kiện (Q) nếu

- 1) Ánh xạ V là một đẳng cấu từ X lên $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$;

- 2) X là đầy đủ yếu,
- 3) Với mỗi lưới $\{x_\omega\}$ với $x_\omega \rightarrow x$ và $p_\gamma(x_\omega) \rightarrow p_\gamma(x)$, $\forall \gamma \in \Gamma$, ta có $x_\omega \rightarrow x$.
- 4) Nếu $p_\gamma(x_1 + x_2) = p_\gamma(x_1) + p_\gamma(x_2)$, với $\gamma \in \Gamma$, thì tồn tại một số λ_γ sao cho $p_\gamma(x_1 - \lambda_\gamma x_2) = 0$.

Chú ý

- 1) Nếu $X = \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ trong đó mỗi X_γ là một không gian Hilbert thì không gian X thỏa mãn điều kiện (Q).
- 2) Không gian thỏa mãn điều kiện (Q) thì tách.
- 3) Nếu X là một không gian lỗi địa phương thỏa mãn điều kiện (Q) thì mỗi $X_\gamma = X/p_\gamma^{-1}(0)$ là một ES - không gian.

Trong [47] đã đưa ra điều kiện (A) gần như tương tự điều kiện (Q) và xét $A : X \rightarrow Y$, với Y là một không gian lỗi địa phương metric hóa được, A là toán tử tuyến tính liên tục, và đã nghiên cứu được tính ổn định của phương pháp không khớp đối với bài toán $\alpha[X, Y, A, x_0, \{V_\delta(y_0)\}]$.

Để giải quyết được vấn đề này khi A liên tục yếu, định nghĩa sau đây là cần thiết.

Định nghĩa 11.3.3. Giả sử $\Omega \subset \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, trong đó mỗi X_γ là một không gian định chuẩn. Ta nói rằng phần tử x thực hiện một *cực tiểu* của Ω nếu x thỏa mãn điều kiện :

$$\|pr_\gamma(x)\| = \inf_{y \in \Omega} \|pr_\gamma(y)\| \text{ với tất cả } \gamma \in \Gamma.$$

Với bài toán $\alpha[X, Y, A, x_0, \{V_\delta(y_0)\}]$, đặt

$$\Omega_\delta^\gamma = V_\gamma[A^{-1}(V_\delta)] \text{ và } \Omega_\delta = \prod_{\gamma \in \Gamma} \Omega_\delta^\gamma.$$

Nghiệm xấp xỉ của phương trình (39), phụ thuộc V_δ được dựng bằng phương pháp không khớp là phân tử x_δ sao cho $x_\gamma = V^{-1}(y_\delta)$ trong đó y_δ thực hiện một cực tiểu của Ω_δ . Nếu $x_\delta \rightarrow x_0$ ta nói phương pháp không khớp ổn định bài toán.

Bây giờ ta xét sự tồn tại nghiệm xấp xỉ của phương trình (39) bằng phương pháp không khớp.

Định lý 11.3.1. Nếu X là một không gian lồi địa phương thỏa mãn điều kiện (Q) thì tồn tại một nghiệm xấp xỉ duy nhất của phương trình (39) với mỗi V_δ tương ứng với bài toán $\alpha[X, Y, A, x_0, \{V_\delta(y_0)\}]$.

Chứng minh. Với mỗi $\gamma \in \Gamma$, đặt $\mu^\gamma = \inf_{y \in \Omega_\delta} \|\text{pr}_\gamma(y)\|$.

Khi đó tồn tại một dãy $\{y_k\} \subset \Omega_\delta$ sao cho

$$\|y_k^\gamma\| \rightarrow \mu^\gamma \text{ khi } k \rightarrow \infty, \quad (40)$$

trong đó $y_k^\gamma = \text{pr}_\gamma(y_k)$.

Vì X_γ là một ES - không gian, do (40) ta có thể giả thiết

$$y_k^\gamma \rightarrow y_\delta^\gamma \in X_\gamma. \quad (41)$$

Ta xét phân tử $y_\delta = (y_\delta^\gamma)$. Ta sẽ chứng minh y_δ thực hiện một cực tiểu của Ω_δ . Thật vậy, nếu $y_\delta \in \Omega_\delta$, thì tồn tại $\gamma_0 \in \Gamma$ sao cho

$$y_{\delta}^{\gamma_0} \notin \Omega_\delta \quad (42)$$

Vì ánh xạ $V_{\gamma_0} = \text{pr}_{\gamma_0} V$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục mở từ X lên X_{γ_0} nên tập $\Omega_{\delta}^{\gamma_0} = V_{\gamma_0}[A^{-1}(V_\delta)]$ có ít nhất là một điểm trong,

tức là $\text{int}(\Omega_{\delta}^{y_0}) \neq \emptyset$. Do định lí Hahn-Banach tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \in X_{y_0}^*$ sao cho

$$f(y_{\delta}^{y_0}) > 1 \text{ và } f(y^{\gamma_0}) \leq 1 \text{ đối với tất cả } y^{\gamma_0} \in \Omega_{\delta}^{y_0} \quad (43)$$

Điều này trái với (41). Như vậy

$$y_{\delta} \in \Omega_{\delta} \quad (44)$$

Từ (44) suy ra

$$\mu^{\gamma} \leq \|y_{\delta}^{\gamma}\| \text{ với tất cả } \gamma \in \Gamma. \quad (45)$$

Từ (41) do định lí Banach-Steinhaus ta có

$$\|y_{\delta}^{\gamma}\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k^{\gamma}\| = \mu^{\gamma} \quad (46)$$

Do (45) và (46)

$$\|y_{\delta}^{\gamma}\| = \mu^{\gamma} \text{ với tất cả } \gamma \in \Gamma \quad (47)$$

Từ (44) và (47) suy ra y_{δ} là một cực tiểu của Ω_{δ} . Tính duy nhất của cực tiểu của Ω_{δ} có được là do Ω_{δ} lồi trong $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_{\gamma}$ và mỗi X_{γ} là một ES - Không gian.

Như vậy nghiệm xấp xỉ x_{δ} của phương trình (39) tồn tại và duy nhất và được xác định bởi $x_{\delta} = V^{-1}(y_{\delta})$. $\square$

Định nghĩa 11.3.4. Ta nói toán tử tuyến tính liên tục yếu $A : X \rightarrow Y$ có A^{-1} thuộc tập $\alpha[X, Y]$ nếu và chỉ nếu phương pháp không khớp ổn định mọi bài toán $\alpha[X, Y, A, x_0, \{V_{\delta}(y_0)\}]$.

Ta sẽ tìm điều kiện để $A \in \alpha[X, Y]$.

Ta xét bài toán $\alpha[X, Y, A, x_0, \{V_{\delta}(y_0)\}]$. Đặt

$$U_{\delta} = \{x \in X : Ax \in V_{\delta}(y_0) - Ax_0\}$$

Do [108] tồn tại một tô pô (T) trong X sao cho X cùng với (T) là một không gian lỗi địa phương. Ngoài ra họ $\{U_\delta\}$ trở thành một cơ sở lọc của các lân cận của gốc trong X . Ta kí hiệu $X_{(T)}$ là không gian có được.

Định lý 11.3.2. Không gian thương $X_{(T)}/p_Y^{-1}(0)$ là tách khi và chỉ khi mọi tập $A(p_Y^{-1}(0))$ là đóng yếu trong $R(A)$.

Chứng minh. Điều kiện cần : Giả sử $X_{(T)}/p_Y^{-1}(0)$ là tách. Do định lý 7.1.2 $p_Y^{-1}(0)$ là một tập con đóng trong $X_{(T)}$. Một mặt khác $p_Y^{-1}(0)$ là lỗi trong $X_{(T)}$. Do đó $p_Y^{-1}(0)$ là tập con đóng yếu trong $X_{(T)}$. Rõ ràng toán tử $A^{-1} : R(A) \rightarrow X_{(T)}$ là liên tục nên nó liên tục yếu. Vì vậy $A(p_Y^{-1}(0))$ đóng yếu trong $R(A)$.

Điều kiện đủ. Vì toán tử là 1-1 nên

$$A^{-1} = [A(p_Y^{-1}(0))] = p_Y^{-1}(0). \quad (48)$$

Rõ ràng A liên tục trong tô pô (T) . Do đó A liên tục yếu. Nhờ (10) và nhờ A liên tục yếu nên $p_Y^{-1}(0)$ là đóng yếu trong $X_{(T)}$. Vậy nó đóng trong $X_{(T)}$. Dùng Định lý 6.1.2 ta khẳng định $X_{(T)}/p_Y^{-1}(0)$ là tách. $\square$

2. Tính ổn định của phương pháp không khớp

Trước khi đi đến một định lý quan trọng về tính ổn định của phương pháp không khớp chúng tôi sẽ đưa thêm hai bổ đề sau đây cần trong quá trình chứng minh định lý ấy.

Bổ đề 11.3.1. [108] Giả sử X là không gian compact và $\{E_\delta\}$ là một cái lọc trong X (hay một cơ sở lọc). Nếu $\{E_\delta\}$ có điểm giới hạn duy nhất x thì (E_δ) hội tụ đến x .

Bổ đề 11.3.2. Giả sử ánh xạ $A : X \rightarrow Y$ có đồ thị đóng và với một điểm cố định $y_0 \in Y$ tồn tại một phần tử duy nhất $x_0 \in X$ sao cho $Ax_0 = y_0$, trong đó X là một không gian compact và Y là một không gian tô pô. Nếu $\{V_\delta\}$ là một cái lọc các lân cận của y_0 , thì $\{E_\delta\}$ là một cơ sở lọc hội tụ của x_0 , trong đó $E_\delta = A^{-1}(V_\delta)$.

Chứng minh. Rõ ràng $\{E_\delta\}$ là một cơ sở lọc trong X . Vì X là một không gian compact, $\{E_\delta\}$ có điểm giới hạn $\bar{x}$ [72]. Ta sẽ chứng tỏ $\bar{x}$ trùng với x_0 và $E_\delta \rightarrow x_0$. Thật vậy, do định nghĩa, ta thấy tồn tại cái lọc $\{Q_\gamma\}$ trong X sao cho nó làm trội $\{E_\delta\}$ và hội tụ đến $\bar{x}$. Như vậy $\{A(Q_\gamma)\}$ làm trội $\{V_\delta\}$. Từ đó suy ra $\{A(Q_\gamma)\}$ cũng hội tụ đến y_0 . Và ta thu được

$$Q_\gamma \rightarrow \bar{x} \text{ và } A(Q_\gamma) \rightarrow y_0. \quad (49)$$

Vì đồ thị của A đóng, nhờ (49) $A\bar{x} = y_0$. Do đó $x_0 = \bar{x}$ và $E_\delta \rightarrow x_0$. $\square$

Định lý 11.3.3. Giả sử $A : X \rightarrow Y$ là một toán tử tuyến tính liên tục yếu từ một không gian lồi địa phương $X = (X, p_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, vào một không gian lồi địa phương tách Y và có toán tử ngược A^{-1} thuộc $\alpha[X, Y]$ khi và chỉ khi mỗi $A(p_\gamma^{-1}(0))$ là đóng yếu trong $R(A)$.

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử A là toán tử tuyến tính liên tục yếu từ X vào Y . Giả thiết A^{-1} tồn tại và $A \in \alpha[X, Y]$. Ta sẽ chứng tỏ $A(p_\gamma^{-1}(0))$ đóng yếu trong $R(A)$. Thật vậy, nếu không thế, thì tồn tại $\gamma_0 \in \Gamma$ sao cho $A(p_{\gamma_0}^{-1}(0))$ không đóng yếu trong $R(A)$. Ta cần dựng bài toán $\alpha[X, Y, A, x_0, \{V_\delta(y_0)\}]$ sao cho phương pháp không khớp không ổn định bài toán này.

Giả sử $\{V_\delta(0)\}$ là một cơ sở lọc các lân cận của gốc trong Y sao cho mỗi $\{V_\delta(0)\}$ là lỗi, đóng trong Y . Vì Y tách $X_{(T)}$ cũng tách. Do $A(p_Y^{-1}(0))$ không đóng yếu trong $R(A)$, nhờ định lí 11.3.2, ta khẳng định $X_{(T)}/p_Y^{-1}(0)$ không tách. Như vậy

$$\bigcap_{\delta} V_{Y_0}(U_\delta) \neq \{0\}, \quad (50)$$

trong đó $U_\delta = A^{-1}(V_\delta(0))$ và $V(x) = (V_Y(x))$ là đẳng cấu trong định lí 7.1.1.

Một mặt khác ta có $V_{Y_0} = \text{pr}_{Y_0} V$. Như vậy tồn tại phần tử $y^{Y_0} \neq 0$, $y^{Y_0} \in X_{Y_0}$ sao cho $y^{Y_0} \in \bigcap_{\delta} \text{pr}_{Y_0} V(U_\delta)$.

Ta chọn phần tử $y^Y \in \prod_{Y \in \Gamma} X_Y$ sao cho

$$\text{pr}_{Y_0}[(y^Y)] = y^{Y_0}. \quad (51)$$

Giả sử $x_0 = V^{-1}((y^Y))$. Ta xét bài toán $\alpha[X, Y, A, x_0, \{V_\delta(0) + A(x_0)\}]$.

Vì $A \in \alpha[X, Y]$ phương pháp không khớp ổn định bài toán. Do đó dãy các nghiệm xấp xỉ x_δ của (39) được dựng bằng phương pháp không khớp hội tụ đến x_0 .

$$x_\delta \rightarrow x_0 \quad (52)$$

Hơn nữa ta có

$$\|\text{pr}_{Y_0} V(x_\delta)\| = \inf_{x_{Y_0} \in V_{Y_0}(U_\delta) - y^{Y_0}} \|x_{Y_0}\| \leq \|y^{Y_0} - y^{Y_0}\| = 0 \quad (53)$$

$$\|\text{pr}_{Y_0} V(x_0)\| = \|y^{Y_0}\| > 0 \quad (54)$$

Do (15) và (16) $x_\delta \rightarrow x_0$, trái với (14).

Như vậy $A(p_Y^{-1}(0))$ đóng yếu trong $R(A)$.

Điều kiện đủ

Giả thiết $A : X \rightarrow Y$ là toán tử tuyến tính liên tục yếu sao cho A^{-1} tồn tại và mọi $A(p_\gamma^{-1}(0))$ đóng yếu trong $R(A)$. Ta sẽ chứng tỏ $A \in \alpha[X, Y]$. Ta giả thử $A \notin \alpha[X, Y]$. Khi đó tồn tại một bài toán $\alpha[X, Y, A, x_0, \{V_\delta(y_0)\}]$ sao cho nó không ổn định theo phương pháp không khớp. Vì X là một không gian thỏa mãn điều kiện (Q) nên ta có $\gamma_0 \in \Gamma$ và một dãy con $\{x_{\delta_n}\}$ của dãy $\{x_\delta\}$ được dựng bằng một phương pháp không khớp sao cho

$$\|pr_{\gamma_0} V(x_{\delta_n}) - pr_{\gamma_0} V(x_0)\| \geq \varepsilon > 0 \quad (55)$$

trong đó ε là một số thực cố định.

Ta xét một toán tử $M_{\gamma_0} : X_{\gamma_0} \rightarrow Y$ được xác định bởi $M_{\gamma_0} = AV^{-1}j_{\gamma_0}$, trong đó j_{γ_0} là phép nhúng chính tắc X_{γ_0} vào $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ và V là đẳng cấu trong định lí 7.1.1.

Rõ ràng M_{γ_0} là toán tử tuyến tính liên tục yếu và 1-1 từ X_{γ_0} vào Y . Trong $R(M_{\gamma_0})$ ta xét họ các tập con $F_{\delta_n}^{\gamma_0} = M_{\gamma_0} V_{\gamma_0}(U_{\delta_n})$, trong đó $U_{\delta_n} = \{x \in X : Ax \in V_{\delta_n} - Ax_0\}$.

Do [51] tồn tại một tô pô (T_{γ_0}) trong $R(M_{\gamma_0})$ sao cho $R(M_{\gamma_0})$ cùng với (T_{γ_0}) trở thành một không gian lồi địa phương và $\{F_{\delta_n}^{\gamma_0}\}$ trở thành một cơ sở lọc các lân cận của gốc trong $R(M_{\gamma_0})$. Ta kí hiệu không gian này là $R(M_{\gamma_0})(T_{\gamma_0})$.

Nếu coi M_{γ_0} là một ánh xạ từ X_γ lên $R(M_{\gamma_0})(T_{\gamma_0})$ thì M_{γ_0} là tuyến tính liên tục. Do đó nó liên tục yếu.

Đặt $h_0 = M_{\gamma_0} V_{\gamma_0}(x_0)$ và $F_{\delta_n}^{\gamma_0}(h_0) = h_0 + F_{\delta_n}^{\gamma_0}$.

Rõ ràng $h_0 \in R(M_{\gamma_0})(T_{\gamma_0})$. Cũng không có gì khó khăn trong việc chứng minh $\{F_{\delta_n}^{\gamma_0}(h_0)\}$ là một cơ sở lọc các lân cận của h_0 trong không gian $R(M_{\gamma_0})(T_{\gamma_0})$. Vì vậy nó cũng là cơ sở lọc các lân cận yếu của h_0 trong $R(M_{\gamma_0})(T_{\gamma_0})$.

Ta xét hình cầu $B^{\gamma_0}(x_0)$ trong X_{γ_0} được xác định bởi

$$B^{\gamma_0}(x_0) = \{x \in X_{\gamma_0} : \|x\| \leq \|V_{\gamma_0}(x_0)\| \}.$$

Vì X_{γ_0} phản xạ nên $B^{\gamma_0}(x_0)$ compact yếu trong X_{γ_0} . Đặt $E_{\delta_n}^{\gamma_0} = B^{\gamma_0}(x_0) \cap M_{\gamma_0}^{-1}[F_{\delta_n}^{\gamma_0}(h_0)]$. Rõ ràng $V_{\gamma_0}(x_0) \in E_{\delta_n}^{\gamma_0}$.

Vì M_{γ_0} là liên tục yếu và $\{F_{\delta_n}^{\gamma_0}(h_0)\}$ là một cơ sở lọc các lân cận yếu của h_0 , nên $\{E_{\delta_n}^{\gamma_0}\}$ là một cơ sở lọc hội tụ yếu của $V_{\gamma_0}(x_0)$.

Cũng dễ dàng chứng tỏ $\Omega_{\delta_n}^{\gamma_0} \cap B^{\gamma_0} \subset E_{\delta_n}^{\gamma_0}$, trong đó $\Omega_{\delta_n}^{\gamma_0} = V_{\gamma_0}[A^{-1}(V_{\delta_n})]$.

Vì $\text{pr}_{\gamma_0} V(x_{\delta_n}) \in \Omega_{\delta_n}^{\gamma_0} \cap B^{\gamma_0}(x_0)$, nên $\text{pr}_{\gamma_0} V(x_{\delta_n}) \in E_{\delta_n}^{\gamma_0}$.

Do định lí Steinhaus-Banach

$$\|\text{pr}_{\gamma_0} V(x_0)\| \leq \lim_k \|\text{pr}_{\gamma_0} V(x_{\delta_{n_k}})\| \quad (56)$$

Một phía khác

$$\|\text{pr}_{\gamma_0} V(x_{\delta_{n_k}})\| \leq \|\text{pr}_{\gamma_0} V(x_0)\| \text{ đối với tất cả các } k.$$

Vì thế

$$\lim_k \|\text{pr}_{\gamma_0} V(x_{\delta_{n_k}})\| \leq \|\text{pr}_{\gamma_0} V(x_0)\|. \quad (57)$$

Từ (56) và (57) suy ra

$$\lim_k \|\text{pr}_{\gamma_0} V(x_{\delta_{n_k}})\| = \|\text{pr}_{\gamma_0} V(x_0)\|.$$

Vì X_{γ_0} là một ES-không gian nên

$$\lim_k \|pr_{\gamma_0} V(x_{\delta_{n_k}})\| = pr_{\gamma_0} V(x_0)$$

Điều này trái với (55). Vì vậy $x_\delta \rightarrow x_0$. $\square$

Sau đây nêu một ví dụ về sự tồn tại toán tử $A \in \alpha[X, Y]$.

Ví dụ. Giả sử $X = Y$ là tích các không gian Hilbert X_γ , $\gamma \in \Gamma$ và $A_\gamma : X_\gamma \rightarrow X_\gamma$ là các toán tử tuyến tính, 1-1, liên tục yếu.

Toán tử $A : X \rightarrow X$ được xác định bởi

$$A[(x_\gamma)] = (A_\gamma(x_\gamma)), \quad (x_\gamma) \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma.$$

Rõ ràng $A \in \alpha[X, Y]$.

3. Tính B-ổn định

Bây giờ ta chuyển sang xét tính B-ổn định của phương pháp không khớp đối với phương trình toán tử.

Ta xét phương trình toán tử loại một sau đây

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad (58)$$

trong đó X là một không gian lỗi địa phương tách, Y là không gian lỗi địa phương métric hóa được tương ứng métric ρ bất biến đối với phép dịch chuyển và thỏa mãn

$$\rho(\lambda y, 0) \leq g(\lambda)\rho(y, 0), \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall y \in Y,$$

trong đó g là một hàm thực cố định tăng trên $[0, 1]$ sao cho $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ và $g(\lambda) + g(1 - \lambda) \leq 1$, $\forall \lambda \in [0, 1]$.

Toán tử A được giả thiết là liên tục yếu.

Giả sử tập X_0 các nghiệm của phương trình (57) ứng với (A_0, y_0) là khác rỗng. Giả sử (A_0, y_0) không xác định được chính xác mà chỉ xác định được xấp xỉ bởi (A_h, y_δ) , trong đó toán tử A_h tác dụng từ X vào Y , được xác định trên Y và liên tục yếu, còn $y_\delta \in Y$.

Ngoài ra (A_h, y_δ) thỏa mãn các điều kiện

$$d_M(A_h, A_0) \leq h, \quad \rho(y_\delta, y_0) \leq \delta, \quad \forall h, \delta \geq 0;$$

$$\tau^s h + \delta \leq \varphi_\tau(h, \delta), \quad \varphi_\tau(h, \delta) \rightarrow 0 \text{ khi } h, \delta \rightarrow 0,$$

trong đó τ cố định và $\tau > \inf_{x \in X_0 \cap \text{dom}\Omega} \Omega(x)$ $\varphi_\tau(h, \delta)$ là một hàm

thực không âm các biến h, δ còn d_M là tựa metric các toán tử được xác định như sau

$$d_M(A_h, A_0) = \sup \frac{\rho(A_h x, A_0 x)}{\Omega^s(x)}, \quad s > 0, \quad M \subset X$$

và Ω là một phiếm hàm ổn định, tức là phiếm hàm xác định trên $\text{dom}\Omega$ thỏa mãn các điều kiện

$$\Omega(x) > 0, \quad \forall x \in \text{dom}\Omega \quad (59)$$

$$X_0 \cap \text{dom}\Omega \neq \emptyset \quad (60)$$

$$\Omega_c = \{x \in \text{dom}\Omega : \Omega(x) \leq c\} \text{ là tập compact trong } X, \quad \forall c > 0 \quad (61)$$

Ta cũng sử dụng các kí hiệu sau đây

$$M_{\varphi\tau}(h, \delta) = \{x \in X : \rho(A_h x, y_\delta) \leq \varphi_\tau(h, \delta)\},$$

$$D_{\varphi\tau}(h, \delta) = M_{\varphi\tau}(h, \delta) \cap \text{dom}\Omega,$$

$$X_{\varphi\tau}(h, \delta) = \text{Arg} \min_{x \in D_{\varphi\tau}(h, \delta)} \Omega(x),$$

$$\text{trong đó } \text{Arg} \min_f = \left\{ x \in M : f(x) = \min_M f \right\}.$$

Các bổ đề sau đây sẽ cần cho về sau.

Bổ đề 11.3.3. [12]. Phiếm hàm ổn định $\Omega(x)$ nửa liên tục dưới, tức là nếu mỗi dãy $\{x_n\} \subset \text{dom}\Omega$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ và } \liminf_{n \rightarrow \infty} \Omega(x_n) = b < \infty$$

thì $x \in \text{dom}\Omega$ và $\Omega(x) \leq b$.

Bổ đề 11.3.4. Hình cầu đóng $B(y_0, r)$ với tâm y_0 , bán kính $r > 0$ trong không gian lồi địa phương metric hóa được (Y, ρ) xác định như trong (58) là một tập lồi đóng trong Y .

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng tỏ $B(y_0, r)$ là lồi. Vì metric ρ bất biến đối với phép dịch chuyển, nên ta chỉ cần chứng minh rằng hình cầu đóng $B(0, r)$ là tập lồi đóng.

Giả sử y_1, y_2 là hai phần tử tùy ý thuộc $B(0, r)$, khi đó

$$\rho(y_1, 0) \leq r, \rho(y_2, 0) \leq r \text{ và}$$

$$\begin{aligned} \rho(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, 0) &\leq \rho(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, (1-\lambda)y_2) + \rho((1-\lambda)y_2, 0) \\ &\leq \rho(\lambda y_1, 0) + \rho((1-\lambda)y_2, 0) \leq g(\lambda)\rho(y_1, 0) + g(1-\lambda)\rho(y_2, 0) \\ &\leq r(g(\lambda) + g(1-\lambda)) \leq r \end{aligned}$$

do đó $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in B(0, r)$. Như vậy hình cầu $B(0, r)$ lồi.

Còn hình cầu này đóng là rõ ràng. $\square$

Bổ đề 11.3.5. Nếu $A_h, h \geq 0$, liên tục yếu thì tập

$$X_{\varphi\tau}(h, \delta) \neq \emptyset.$$

Chứng minh. Do (22) và $\tau > \inf_{x \in X_0 \cap \text{dom}\Omega} \Omega(x)$,

tồn tại phần tử $x_0 \in X_0 \cap \text{dom}\Omega$ sao cho $\Omega(x_0) \leq \tau$,

Ta có

$$\begin{aligned} \rho(A_h x_0, y_\delta) &\leq \rho(A_h x_0, A_0 x_0) + \rho(A_0 x_0, y_\delta) \leq \\ &\leq \Omega^s(x_0)h + \delta \leq \tau^s h + \delta \leq \varphi_\tau(h, \delta). \end{aligned}$$

Vì thế $x_0 \in M_{\varphi\tau}(h, \delta)$. Mà $x_0 \in \text{dom}\Omega$ nên $x_0 \in D_{\varphi\tau}(h, \delta)$.

Ngoài ra phẩm hàm $\Omega(x)$ bị chặn dưới nên tồn tại

$$m_{h\delta} = \inf_{x \in D_{\varphi\tau}(h, \delta)} \Omega(x). \text{ Đương nhiên } m_{h\delta} \leq \Omega(x_0).$$

Nếu $m_{h\delta} = \Omega(x_0)$ thì $x_0 \in X_{\varphi\tau}(h, \delta)$.

Nếu $m_{h\delta} < \Omega(x_0)$ thì tồn tại dãy $\{x_n\} \cap D_{\varphi\tau}(h, \delta)$ sao cho

$$\Omega(x_n) \leq \Omega(x_0), \forall n, \text{ và } \Omega(x_n) \rightarrow m_{h\delta} \text{ khi } n \rightarrow \infty \quad (62)$$

Từ (62) suy ra $x_n \in \Omega_c$, $\forall n$, $c = \Omega(x_0)$. Mà tập Ω_c compac nên tồn tại dãy con của $\{x_n\}$ hội tụ đến $x \in \Omega_c$, và không mất tính tổng quát, ta có thể coi dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x .

Do Bổ đề 11.3.4 hình cầu $B(y_\delta, \varphi_\tau(h, \delta))$ lõi đóng trong Y , nên nó đóng yếu [108].

Ta có

$$A_h^{-1}[B(y_\delta, \varphi_\tau(h, \delta))] = M_{\varphi\tau}(h, \delta)$$

Vì A_h , với $h \geq 0$, liên tục yếu nên tập $M_{\varphi\tau}(h, \delta)$ đóng yếu trong X .

Một mặt khác $x_n \in D_{\varphi\tau}(h, \delta) \leq M_{\varphi\tau}(h, \delta)$ và $x_n \rightarrow x$ nên $x \in M_{\varphi\tau}(h, \delta)$.

Do (62) và Bổ đề 11.3.3, $x \in \text{dom } \Omega$. Vì vậy

$$x \in D_{\varphi\tau}(h, \delta), \quad (63)$$

Lại do (62)

$$m_{h\delta} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \Omega(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega(x_n) \geq \Omega(x) \quad (64)$$

Từ (63), (64) suy ra $\Omega(x) = m_{h\delta}$. Do đó $x \in X_{\varphi\tau}(h, \delta)$.

Như vậy $X_{\varphi\tau}(h, \delta) \neq \emptyset$. $\square$

Bây giờ ta chuyển sang thiết lập định lý về tính B-ổn định.

Định lý 11.3.4. Với các giả thiết của Bổ đề 11.3.3, dãy $X_{\varphi\tau}(h, \delta)$ B-hội tụ đến $X_0 \cap \text{dom } \Omega$ khi $h, \delta \rightarrow 0$.

Chứng minh. Do Bổ đề 11.3.3, $X_{\varphi\tau}(h, \delta) \neq \emptyset$. Chọn tùy ý $x_{\varphi\tau} \in X_{\varphi\tau}(h, \delta)$ và dựng lưới $\{x_{\varphi\tau}, h, \delta \rightarrow 0\}$.

Tương tự khi chứng minh Bổ đề 11.3.3 ta thấy tồn tại $x_0 \in X_0 \cap \text{dom} \Omega$ sao cho $x_0 \in D_{\varphi\tau}(h, \delta)$, $\forall \delta, h$, do đó $x_{\varphi\tau} \in \Omega_c$, $c = \Omega(x_0)$. vì Ω_c compac, nên tồn tại một lưới con của lưới $\{x_{\varphi\tau}, h, \delta \rightarrow 0\}$ sao cho lưới con này hội tụ tới $\bar{x} \in \Omega_c$. Không giảm tính tổng quát, ta có thể coi chính lưới $\{x_{\varphi\tau}, h, \delta \rightarrow 0\}$ hội tụ đến $\bar{x}$.

Ta sẽ chứng tỏ $\bar{x} \in X_0 \cap \text{dom} \Omega$. Ta có

$$\begin{aligned} \rho(A_0 x_{\varphi\tau}, y_0) &\leq \rho(A_0 x_{\varphi\tau}, A_h x_{\varphi\tau}) + \rho(A_h x_{\varphi\tau}, y_\delta) + \rho(y_\delta, y_0) \leq \\ &\leq \Omega(x_{\varphi\tau})h + \varphi_\tau(h, \delta) + \delta \leq r^s h + \varphi_\tau(h, \delta) + \delta \leq 2\varphi_\tau(h, \delta). \end{aligned} \quad (65)$$

Vế phải của (65) hội tụ tới 0 khi $h, \delta \rightarrow 0$, do đó $A_0 x_{\varphi\tau} \rightarrow y_0$ khi $h, \delta \rightarrow 0$, vì vậy $A_0 x_{\varphi\tau} \rightarrow y_0$. Ta thu được

$$x_{\varphi\tau} \rightarrow \bar{x}, A_0 x_{\varphi\tau} \rightarrow y_0. \quad (66)$$

Mà X là không gian lồi địa phương tách nên giới hạn yếu phải duy nhất, Từ (66) ta có $A_0 \bar{x} = y_0$. Như vậy $\bar{x} \in X_0$, mà $\bar{x} \in \text{dom} \Omega$ nên $\bar{x} \in X_0 \cap \text{dom} \Omega$.

Do Mệnh đề 7.1.6, lưới $\{X_{\varphi\tau}(h, \delta), h, \delta \rightarrow 0\}$ B-hội tụ đến $X_0 \cap \text{dom} \Omega$ khi $h, \delta \rightarrow 0$. $\square$

4. Sự tương đương của hai bài toán biến phân.

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu sự tương đương của hai bài toán biến phân được gọi là bài toán biến phân 1 và bài toán biến phân 2.

Bài toán biến phân 1 :

$$\tau = \min \{ \Omega(x) : \rho(A_h x, y_\delta) \leq \tau^s h + \delta \}$$

Bài toán biến phân 2 :

$$\min \{ \Omega(x) : \rho(A_h x, y_\delta) \leq \Omega^s(x)h + \delta \}$$

Định nghĩa 11.3.3. Bài toán biến phân 1 (hay 2) được gọi là *giải được* nếu tập nghiệm của chúng khác rỗng, tức là

$$\bar{X}_{h\delta} = \arg \left\{ \tau = \min \left\{ \Omega(x) : \rho(A_h x, y_\delta) \leq \tau^s h + \delta \right\} \right\} \neq \emptyset, \forall h, \delta \geq 0,$$

(hay $X_{h\delta} = \arg \min \left\{ \Omega(x) : \rho(A_h x, y_\delta) \leq \Omega^s(x)h + \rho \right\} \neq \emptyset$)

Hai bài toán biến phân 1 và 2 được gọi là *tương đương* nếu chúng giải được và hai tập $\bar{X}_{h\delta}, X_{h\delta}$ là đồng nhất, $\forall h, \delta \geq 0$.

Bổ đề sau đây là rõ ràng

Bổ đề 11.3.6. Nếu $0 < r_{n+1} \leq r_n, \forall n, r_n \rightarrow r$ khi $n \rightarrow \infty$ và $B_n = \{y \in Y : \rho(y, y_0) \leq r_n\}$ (là một hình cầu có bán kính r_n và tâm y_0 trong Y), thì $B_n \supset B_{n+1}, \forall n$ và

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B(y_0, r).$$

Bổ đề 11.3.7. Nếu $y_n \in B_n$ và dãy $\{y_n\}$ hội tụ yếu đến $y \in Y$ thì $y \in B_n, \forall n$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, có nghĩa là tồn tại n_0 sao cho $y \notin B_{n_0}$ thì $y \notin B_n, \forall n \geq n_0$.

Đặt $B'_n = B_n - y_0$. Ta có $B'_n = \{v \in Y : \rho(v, 0) \leq r_n\}$.

Tập B'_n lồi đóng trong Y (Bổ đề 11.3.4), và cân đối, vì nếu $v \in B'_n$ thì $v \in B'_n$ và $\lambda B'_n \in B'_n, 0 \leq \lambda \leq 1$.

Tập B'_n như vậy là đóng, lồi tuyệt đối và $y - y_0 \in B'_n, \forall n \geq n_0$.

Do đó với định lý Hahn - Banach ta thấy tồn tại một phiếm hàm liên tục tuyến tính xác định trên X sao cho $f(y - y_0) > 1$ và

$$\|f(v)\| \leq 1, \forall v \in B'_{n_0}. \text{ Vì vậy}$$

$$f(y - y_0) > 1 \geq f(y_n - y_0), \forall n \geq n_0, f(y) > 1 + f(y_0) \geq f(y_n), \forall n \geq n_0.$$

Như vậy $y_n \not\rightarrow y$, trái với giả thiết. Do đó $y \in B_n, \forall n. \square$

Sau đây là định lý khẳng định tính giải được của bài toán biến phân 2.

Định lý II.3.5. Nếu phiếm hàm Ω thỏa mãn điều kiện : mỗi dãy $\{x_n\} \subset \text{dom}\Omega, x_n \rightarrow x, \liminf_{n \rightarrow \infty} \Omega(x_n) = b < \infty$ kéo theo $\Omega(b) = b$,

thì bài toán biến phân 2 giải được.

Chứng minh,

Đặt $M_{h\delta} = \{x \in X : \rho(A_h x, y_\delta) \leq \Omega^S(x)h + \delta\}$ và $D_{h\delta} = M_{h\delta} \cap \text{dom}\Omega$.

Nếu $x_0 \in X_0 \cap \text{dom}\Omega$ thì

$$\rho(A_h x_0, y_\delta) \leq \rho(A_h x_0, A_0 x_0) + \rho(A_0 x_0, y_\delta) \leq \Omega^S(x_0)h + \delta.$$

Như vậy $x_0 \in M_{h\delta}$, hơn nữa $x_0 \in D_{h\delta} \neq \emptyset$. Ta có :

$$m_{h\delta} = \inf_{x \in D_{h\delta}} \Omega(x).$$

Với x_0 bên trên thuộc $D_{h\delta}$ ta có $m_{h\delta} \leq \Omega(x_0)$.

Nếu $m_{h\delta} = \Omega(x_0)$ thì $x_0 \in X_{h\delta} \neq \emptyset$

Nếu $m_{h\delta} < \Omega(x_0)$ thì tồn tại dãy $\{x_n\} \subset D_{h\delta}$ sao cho

$$0 < \Omega(x_{n+1}) \leq \Omega(x_n) \leq \Omega(x_0), \forall n \quad (67)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega(x_n) = m_{h\delta} \quad (68)$$

Từ (67) ta có $x_n \in \Omega_c, \forall n, c = \Omega(x_0)$.

Vì Ω_c compac nên tồn tại một dãy con của dãy $\{x_n\}$ mà ta có thể coi chính là dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $x \in \Omega_c$. Như vậy nó hội tụ yếu đến x khi $n \rightarrow \infty$.

Vì A_0 liên tục yếu nên $y_n = A_0 x_n \rightarrow A_0 x$.

Một mặt khác ta có

$$y_n \in B_n = \{y \in Y : \rho(y, y_\delta) \leq r_n, r_n = \Omega^S(x_n)h + \delta\} \quad (69)$$

Do (67), (69) và Bổ đề 11.3.7 và sự duy nhất của giới hạn yếu ta thấy $x \in M_{h\delta}$. Như vậy $x \in M_{h\delta} \cap \text{dom}\Omega = D_{h\delta}$, và vì thế $x \in X_{h\delta} \neq \emptyset$. $\square$

Chú ý. Tập $X_{h\delta}$ cũng được gọi là tập các nghiệm xấp xỉ của phương trình (58).

Dưới đây ta sẽ chứng minh tính B-hội tụ của lưới $\{X_{h\delta}\}$ và chứng minh sự tương đương của hai bài toán 1, 2.

Định lý 11.3.6. Với các giả thiết của định lý 11.3.5, lưới $\{X_{h\delta}, h, \delta \rightarrow 0\}$ B-hội tụ đến $X_0 \cap \text{dom}\Omega$ khi $h, \delta \rightarrow 0$.

Chứng minh. Do định lý 11.3.5, $X_{h\delta} \neq \emptyset, \forall h, \delta \geq 0$.

Giả sử $x_{h\delta} \in X_{h\delta}$. Ta dựng lưới $\{x_{h\delta}, h, \delta \rightarrow 0\}$. Rõ ràng $x_0 \in X_0 \cap \text{dom}\Omega$, kéo theo $x_0 \in D_{h\delta}, \forall h, \delta \geq 0$. Như vậy $x_{h\delta} \in \Omega_c, c = \Omega(x_0)$.

Vì Ω_c compac nên tồn tại lưới con của lưới $\{x_{h\delta}, h, \delta \rightarrow 0\}$ mà ta có thể coi chính lưới $\{x_{h\delta}, h, \delta \rightarrow 0\}$ hội tụ đến $\bar{x}$ khi $h, \delta \rightarrow 0$;
 $x_{h\delta} \rightarrow \bar{x}$ khi $h, \delta \rightarrow 0$. (70)

Ta sẽ chứng minh rằng $\bar{x} \in X_0 \cap \text{dom}\Omega$.

$$\begin{aligned} \text{Do} \quad \Omega(x_{h\delta}) &\leq \Omega(x_0) \\ \lim_{h, \delta \rightarrow 0} \inf \Omega(x_{h\delta}) &\leq \Omega(x_0). \end{aligned} \quad (71)$$

Do (70), (71) và do tính nửa liên tục dưới của phiếm hàm Ω ta thấy $\bar{x} \in \text{dom}\Omega$.

Ngoài ra

$$\begin{aligned} \rho(A_0 x_{h\delta}, y_0) &\leq \rho(A_0 x_{h\delta}, A_h x_{h\delta}) + \rho(A_h x_{h\delta}, y_\delta) + \rho(y_\delta, y_0) \\ &\leq \Omega^s(x_{h\delta})h + \Omega^s(x_{h\delta})h + \delta \leq \\ &\leq 2[\Omega^s(x)h + \delta] \leq 2[\Omega^s(x_0)h + \delta] \end{aligned} \quad (72)$$

Vế phải của (72) hội tụ đến 0 khi $h, \delta \rightarrow 0$. Do đó

$$A_0 x_{h\delta} \rightarrow y_0 \text{ khi } h, \delta \rightarrow 0 \quad (73)$$

Sử dụng (70), (73) và tính liên tục yếu của toán tử A_0 ta được $A_0 \bar{x} = y_0$, vì thế $\bar{x} \in X_0 \cap \text{dom} \Omega$. Sử dụng Mệnh đề 6.1.10 ta thấy lưới $\{X_{h\delta}, h, \delta \rightarrow 0\}$ B-hội tụ đến $X_0 \cap \text{dom} \Omega$ khi $h, \delta \rightarrow 0$. $\square$

Định lý 11.3.7. Với các giả thiết của Định lý 11.3.5. hai bài toán biến phân 1, 2 tương đương.

Chứng minh. Do định lý 11.3.5 bài toán biến phân 2 giải được và do định lý 11.3.6 lưới $\{X_{h\delta}, h, \delta \rightarrow 0\}$ B-hội tụ đến $X_0 \cap \text{dom} \Omega$. Bây giờ sử dụng Mệnh đề 7.1.5 ta thấy lưới ấy hội tụ đến X_0 . Vì vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\bar{X}_{h\delta} = X_{h\delta}, \forall h, \delta$$

Với mỗi cặp (h, δ) ta đặt

$$\tau_{h\delta}^0 = \Omega(x_{h\delta}), x_{h\delta} \in X_{h\delta} \text{ (chú ý } X_{h\delta} \neq \emptyset).$$

Xét sự biến thiên của τ tương ứng trong bài toán biến phân

1) Nếu $0 \leq \tau < \tau_{h\delta}^0$ thì tập

$$\text{Arg} \left\{ \tau = \min \left\{ \Omega(x) : \rho(A_h x, y_\delta) \leq \tau^s h + \delta \right\} \right\}$$

là rỗng. Thật vậy nếu không, có nghĩa là tồn tại phần tử $x_{h\delta}^\tau$ thuộc tập này. Khi đó ta có

$$\rho(A_h x_{h\delta}^\tau, y_\delta) \leq \tau^s h + \delta \leq \Omega^s(x_{h\delta}^\tau) h + \delta \quad (74)$$

Từ đó $x_{h\delta}^\tau \in D_{h\delta}$.

Một mặt khác thì

$$\begin{aligned} \tau &= \Omega(x_{h\delta}^\tau) < \tau_{h\delta}^0 = \inf \left\{ \Omega(x) : \rho(A_h x, y_\delta) \leq \Omega^s(x) h + \delta \right\} \\ &= \inf_{x \in D_{h\delta}} \Omega(x), \end{aligned}$$

điều này là không thể được. Như vậy tập nói trên là rỗng.

2) Nếu $\tau > \tau_{h\delta}^0$ thì tập

$$\text{Arg}\{\tau = \min\{\Omega(x) : \rho(A_h x, y_\delta) \leq \tau^s h + \delta\}\}$$

cũng rỗng. Thật vậy, giả sử ngược lại có một phần tử $x_{h\delta}^\tau$ thuộc tập ấy. Khi đó ta cũng sẽ có một hệ thức tương tự (36). Mà

$$\{x : \rho(A_h x, y_\delta) \leq \Omega^s(x_{h\delta}^\tau)h + \delta\} \supset \{x : \rho(A_h x, y_\delta) \leq (\tau_{h\delta}^0)^s h + \delta\} \quad (75)$$

Rõ ràng giá trị cực tiểu của $\Omega(x)$ trên tập được xác định bởi vế trái của (75) là $\Omega(x_{h\delta}^\tau)$ còn tập được xác định bởi vế phải của (75) chứa phần tử $x_{h\delta} \in X_{h\delta}$. Như vậy $\tau = \Omega(x_{h\delta}^\tau) \leq \tau_{h\delta}^0$. Điều này không đúng. Vậy tập nói bên trên đúng là rỗng.

3) Nếu $\tau = \tau_{h\delta}^0$, ta lấy một phần tử tùy ý $x_{h\delta} \in X_{h\delta}$. Rõ ràng rằng phần tử $x_{h\delta}$ như vậy thuộc tập sau đây

$$\bar{X}_{h\delta}^\tau = \text{Arg}\{\tau = \min\{\Omega(x) : \rho(A_h x, y_\delta) \leq \tau^s h + \delta\}\} \quad (76)$$

Ngược lại, ta chọn tùy ý phần tử $x_{h\delta}^\tau$ thuộc tập (76) ta được $\Omega(x_{h\delta}^\tau) = \tau_{h\delta}^0$ và

$$\rho(A_h x_{h\delta}^\tau, y_\delta) \leq (\tau_{h\delta}^0)^s h + \delta \quad (77)$$

Do (77) và $\tau_{h\delta}^0 = \min_{x \in D_{h\delta}} \Omega(x)$ ta thấy

$$x_{h\delta}^\tau \in X_{h\delta}. \text{ Như vậy } \bar{X}_{h\delta}^\tau = X_{h\delta}.$$

Cùng với hai trường hợp đã xét ta có thể khẳng định

$$\bar{X}_{h\delta} = X_{h\delta}, \forall h, \delta.$$

Như vậy hai bài toán biến phân 1, 2 tương đương, và lưới $\{X_{h\delta}, h, \delta \rightarrow 0\}$ cũng B-hội tụ đến $X_0 \cap \text{dom} \Omega$. $\square$

Chú ý. Nếu X là ES-không gian, Y là không gian Banach và A liên tục thì hai bài toán biến phân 1, 2 tương đương.

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI TẬP

CHƯƠNG I

3. a) Bạn đọc tự chứng minh.

b) Bạn đọc tự chứng minh A là toán tử tuyến tính. Dưới đây ta tính chuẩn của A , với $a = 0$, $b = 1$, nghĩa là $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, xác định bởi

$$Ax = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds.$$

$$\text{Để thấy } \|Ax\| = \max_t \left| \int_0^1 K(t, s)x(s)ds \right| \leq \max_t \int_0^1 |K(t, s)|ds \cdot \|x\|$$

$$\text{từ đó có } \|Ax\| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |K(t, s)|ds.$$

Vì $\int_0^1 |K(t, s)|ds$ là hàm liên tục nên nó đạt cực đại tại $t_0 \in [0, 1]$, ta kí hiệu $x_0(s)$

$= \text{sign } K(t_0, s)$. Gọi $x_n(s)$ là hàm số liên tục sao cho $|x_n(s)| \leq 1$, và

$$x_n(s) = x_0(s), \forall s \in [0, 1] \setminus E_n \text{ với độ đo của } E_n \leq \frac{1}{2Mn}, M = \max |K(t, s)|.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta xét } \left| \int_0^1 K(t, s)x_0(s)ds - \int_0^1 K(t, s)x_n(s)ds \right| &\leq \int_0^1 |K(t, s)| \cdot |x_n(s) - x_0(s)|ds \\ &\leq \int_0^1 |K(t, s)| \cdot |x_n(s) - x_0(s)|ds \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Như vậy $\forall t \in [0, 1]$, ta có :

$$\left| \int_0^1 K(t, s)x_0(s)ds \right| \leq \left| \int_0^1 K(t, s)x_n(s)ds \right| + \frac{1}{n} \leq \|A\| \cdot \|x_n\| + \frac{1}{n}.$$

Trong bất đẳng thức này ta cho $t = t_0$ thì sẽ thu được

$$\int_0^1 |K(t_0, s)|ds \leq \|A\| \cdot \|x_n\| + \frac{1}{n}.$$

Vì $\|x_n\| \leq 1$, nên cho qua giới hạn ta thu được

$$\int_0^1 |K(t_0, s)|ds \leq \|A\|. \text{ Vậy có kết luận } \|A\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |K(t, s)|ds$$

$$4. \Delta P = 0,0541.$$

$$\Delta Q = 0,075$$

$$\Delta R = 0,42992.$$

$$\text{Ta có } \delta S = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,05}{10}, \text{ từ đó } \Delta S = \frac{0,05}{3 \cdot 10} \sqrt[3]{10}$$

$$\Delta K = 0,005.$$

5. Để thấy $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, đồng thời $\forall x, y \in \mathbf{R}$ thì

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \text{ với } q < 1.$$

(Hãy nhớ lại định lý Lagrange). Từ đó có f là ánh xạ co.

6. Ta có $[a, b]$ là tập compact trong $\mathbf{R}$ và $f(x)$ liên tục trên đó, nên $\exists q = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| = f'(x_0)$

với $x_0 \in [a, b]$ mà $|f'(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$ nên $q < 1$.

Từ đó rút ra $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|, \forall x, y \in [a, b]$.

Vậy có $f(x)$ là ánh xạ co trên $[a, b]$.

7. Xét $X = \mathbf{R}, f_1: X \rightarrow X$ xác định bởi $f_1(x) = x^2$.

Xét $f_2: X \rightarrow X$ xác định bởi $f_2(x) = 2x + 3$.

Xét $f_3: X \rightarrow X$ xác định bởi $f_3(x) = x^3$.

Cả ba ánh xạ này đều không phải là ánh xạ co.

9. Giả sử rằng hệ $\{e_i\}_{i=1}^n$ là phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại các α_i ($i = \overline{1, n}$)

sao cho $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > 0$ và $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \theta$. Lần lượt nhân vô hướng đẳng thức này với

e_j ($j = \overline{1, n}$) ta thu được:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i (e_i, e_j) = 0, \\ j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ hệ phương trình thuần nhất ẩn $(t_i)_{i=1}^n$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n t_i (e_i, e_j) = 0 \\ j = \overline{1, n} \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, vậy định thức $G(e_1, \dots, e_n) = \det((e_i, e_j)_{i,j=1}^n) \neq 0$.

Ngược lại, giả sử $G(e_1, \dots, e_n) = 0$ thì hệ phương trình
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n t_i (e_i, e_j) = 0 \\ j = \overline{1, n} \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường $(\alpha_i)_{i=1}^n$. Khi đó đặt $e = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$.

Xét $(e, e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (e_i, e_j) = 0$, do đó $\|e\|^2 = (e, e) = \left(e, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (e, e_j) = 0$

Vậy ta có $e = 0$, vậy có hệ $\{e_i\}_{i=1}^n$ là phụ thuộc tuyến tính. Từ đó có điều phải chứng minh.

CHƯƠNG II.

2. Ta có: $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n^2 + x_n} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{(x_n + 1)}$

Vậy $\frac{1}{x_n + 1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \Delta \left(-\frac{1}{x_n} \right)$.

Vậy $\sum_{k=1}^{1991} \frac{1}{x_k + 1} = -\sum_{k=1}^{1991} \Delta \left(\frac{1}{x_k} \right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{1992}}$

do đó $\sum_{k=1}^{1991} \frac{1}{x_k + 1} = 2 - \frac{1}{x_{1992}}$.

Mặt khác dễ thấy $\{x_n\}_n$ là dãy đơn điệu tăng nên có $0 < \frac{1}{x_{1992}} < 1$, từ đó

$$\left[\sum_{k=1}^{1991} \left(\frac{1}{x_k + 1} \right) \right] = 1.$$

3. a. Xét $S_1 = \sum_{k=1}^n k$. Ta có $\Delta k^2 = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Delta k^2 - \frac{1}{2}$

Vậy $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Delta k^2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2} [(n+1)^2 - 1] - \frac{n}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

b. $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n \Delta \left[\frac{k}{6} (2k^2 - 3k + 1) \right] \Rightarrow S_2 = \frac{(n+1)}{6} [2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1]$

12.832.1
12.832.2
12.832.3
12.832.4
12.832.5
12.832.6
12.832.7
12.832.8
12.832.9
12.832.10
12.832.11
12.832.12
12.832.13
12.832.14
12.832.15
12.832.16
12.832.17
12.832.18
12.832.19
12.832.20
12.832.21
12.832.22
12.832.23
12.832.24
12.832.25
12.832.26
12.832.27
12.832.28
12.832.29
12.832.30
12.832.31
12.832.32
12.832.33
12.832.34
12.832.35
12.832.36
12.832.37
12.832.38
12.832.39
12.832.40
12.832.41
12.832.42
12.832.43
12.832.44
12.832.45
12.832.46
12.832.47
12.832.48
12.832.49
12.832.50
12.832.51
12.832.52
12.832.53
12.832.54
12.832.55
12.832.56
12.832.57
12.832.58
12.832.59
12.832.60
12.832.61
12.832.62
12.832.63
12.832.64
12.832.65
12.832.66
12.832.67
12.832.68
12.832.69
12.832.70
12.832.71
12.832.72
12.832.73
12.832.74
12.832.75
12.832.76
12.832.77
12.832.78
12.832.79
12.832.80
12.832.81
12.832.82
12.832.83
12.832.84
12.832.85
12.832.86
12.832.87
12.832.88
12.832.89
12.832.90
12.832.91
12.832.92
12.832.93
12.832.94
12.832.95
12.832.96
12.832.97
12.832.98
12.832.99
12.832.100

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$c. S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n \Delta \left[\frac{k(k-1)}{2} \right]^2 = \left[\frac{(n+1)n}{2} \right]^2.$$

$$d. S_4 = \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{6.5}.$$

$$e. S_5 = \sum_{k=1}^n k^5 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \cdot \left(\frac{2n^2+2n-1}{3} \right).$$

7. Nếu coi rằng $f(x) = x^2$ và P_1 là tập hợp các đa thức sinh bởi hai phần tử $\{1, x\}$.

Ta phải tìm đa thức bậc nhất $Qx = -ax - b$ sao cho $\max_{|x| \leq 1} |f(x) - (-ax - b)| = \max_{|x| \leq 1} |f(x) - Q(x)|$ đạt min. Như vậy bài toán trở thành

tìm $Q(x)$ là xấp xỉ đều tốt nhất của $f(x)$ trên $[-1, 1]$. Vì rằng $f(x) = x^2$ là hàm chẵn nên $Q(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow a = 0$. Đặt $m = \min_{|x| \leq 1} f(x) = 0$, $M = \max_{|x| \leq 1} f(x) = 1$.

Vậy $f(x) = x^2$ có đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không trên $[-1, 1]$ là $\frac{M+m}{2} = \frac{1}{2}$. Vậy $-b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$.

Vậy có $a = 0$, $b = -\frac{1}{2}$.

8. Nếu coi rằng $f(x) = x^3$, $P_2 = \{1, x, x^2\}$.

$Q(x) = -ax^2 - bx - c$ thì bài toán đã cho trở thành bài toán tìm $Q(x) \in P_2$ sao cho :

$$\max_{|x| \leq 1} |f(x) - Q(x)| \text{ đạt min.}$$

Như vậy bài toán được hiểu là tìm xấp xỉ đều tốt nhất $Q(x) \in P_2$ của hàm số $f(x) = x^3$. Vì rằng x^3 là hàm số lẻ, nên $Q(x)$ là lẻ, vậy $a = c = 0$.

Ta có $Q(x) = f(x) - T_3(x) \cdot \frac{2^3}{3^5}$, trong đó $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$,

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$, do vậy $Q(x) = \frac{3x}{4}$, vậy $b = -\frac{3}{4}$.

Như vậy, rút ra $a = c = 0$, $b = -\frac{3}{4}$.

9. $a = -1$, $b = \frac{1}{8}$.

10. $a = 1, b = \frac{1}{8}$.

12. $a = -2 + 2\lambda, b = 0$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) là các cặp a, b phải tìm.

14. Để làm đại diện, ta giải bài toán 8 bằng phương pháp sơ cấp: Tìm a, b, c để

$\max_{|x| \leq 1} |x^3 + ax^2 + bx + c|$ đạt min.

Kí hiệu $f(x) = |x^3 + ax^2 + bx + c|$, $M = \max_{|x| \leq 1} |f(x)|$ thì

$$f(1) = |1 + a + b + c|$$

$$f(-1) = |-1 + a - b + c| = |1 - a + b - c|$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{8} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right|$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{8} - \frac{a}{4} + \frac{b}{2} - c\right|$$

Vậy $f(1) + f(-1) \geq |2 + 2b|$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi có

$$(1 + a + b + c)(1 - a + b - c) \geq 0.$$

Tương tự $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) \geq \left|\frac{1}{4} + b\right|$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi có

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b - c\right) \geq 0$$

$$\text{Từ đó } f(1) + f(-1) + 2\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Ta có } 6M \geq f(1) + f(-1) + 2\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \geq \frac{3}{2}.$$

Vậy $M \geq \frac{1}{4}$, xét dấu = xảy ra khi và chỉ khi có hệ

$$\begin{cases} (1 + a + b + c)(1 - a + b - c) \geq 0 \\ \left(\frac{1}{8} + \frac{a}{4} + b + c\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{a}{4} + b - c\right) \geq 0 \\ (2 + 2b)\left(-\frac{1}{2} - 2b\right) \geq 0 \\ f(1) = f(-1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = M = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } a = c = 0, b = -\frac{3}{4}.$$

1.0327.2.

CHƯƠNG III

1. a. Dùng phương pháp Gauss, ta đưa hệ phương trình đã cho đến hệ

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,05x_3 + 0,5x_4 = 1,35 \\ x_2 + 13,40x_3 - 29,00x_4 = 71,20 \\ x_3 - 1,72298x_4 = 4,72298 \\ 1,11998x_4 = -1,11998 \end{cases}$$

Từ đó nghiệm là $x^* = (1,00000 ; 2,00000 ; 3,00000 ; -1,00000)$.

2. a. $x^* = (1 ; -1 ; 2 ; 3)$

b. $x^* = (-1,25778 ; 0,04348 ; 1,03917 ; 1,48238)$.

c. Đưa hệ đã cho về dạng :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{20,9}(21,70 - 1,2x_2 - 2,1x_3 - 0,9x_4) \\ x_2 = \frac{1}{21,2}(27,40 - 1,2x_1 - 1,5x_3 - 2,5x_4) \\ x_3 = \frac{1}{19,8}(28,76 - 2,1x_1 - 1,5x_2 - 1,3x_4) \\ x_4 = \frac{1}{32,1}(49,72 - 0,9x_1 - 2,5x_2 - 1,3x_3) \end{cases}$$

Thử thấy rằng hệ này thỏa mãn các điều kiện để áp dụng phương pháp lặp đơn.

Với $x^{(0)} = (1,04 ; 1,30 ; 1,45 ; 1,55)$

Thay vào tính toán có :

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{20,9}(21,70 - 1,560 - 3,045 - 1,395) = 0,75$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{21,2}(27,46 - 1,248 - 2,175 - 3,875) = 0,95$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{19,8}(28,76 - 2,184 - 1,950 - 2,015) = 1,14$$

$$x_4^{(1)} = \frac{1}{32,1}(49,72 - 0,936 - 3,250 - 1,885) = 1,36.$$

Với $k = 2$ thì có :

$$x_1^{(2)} = 0,8106$$

$$x_2^{(2)} = 1,0118$$

$$x_3^{(2)} = 1,2117$$

$$x_4^{(2)} = 1,4077.$$

Với $k = 3$ thì có

$$x_1^{(3)} = 0,7978$$

$$x_2^{(3)} = 0,9977$$

$$x_3^{(3)} = 1,1975$$

$$x_4^{(3)} = 1,3983.$$

Với $k = 4$ có :

$$x^{(4)} = (0,8004 ; 1,0005 ; 1,2005 ; 1,4003).$$

$$x^{(5)} = (0,7999 ; 0,9999 ; 1,1999 ; 1,3999).$$

Với $x^{(5)}$ thì có độ chính xác đến 10^{-3} .

Để ý rằng nghiệm đúng của hệ $(0,8 ; 1,0 ; 1,2 ; 1,4)$.

8. Nếu chọn xấp xỉ ban đầu $x^{(0)} = (4,67 ; 7,62 ; 9,05)$

thì tính toán theo thuật toán Seidel ta rút ra rằng

$$x^{(1)} = (4,66667 ; 7,61941 ; 9,04768).$$

$$x^{(2)} = (4,6619 ; 7,61897 ; 9,04752).$$

Có thể thấy $x^{(2)}$ chính xác đến $5 \cdot 10^{-4}$.

12. Phép nhân đó không phải là một chuẩn.

Thật vậy, xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ thì $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Từ đó $\mathcal{L}(A) = 1$, $\mathcal{L}(A^2) = 2$, điều này trái với bất đẳng thức :

$$\|A^2\| = \|A \cdot A\| \leq \|A\| \cdot \|A\|,$$

với $\| \cdot \|$ là một chuẩn bất kỳ.

CHƯƠNG IV.

1. a) $y_3 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{11 \cdot 189} + \frac{x^{15}}{15 \cdot 63^2}.$

b) $y_3 = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{13}{45}x^6 + \frac{4}{63}x^7 + \frac{1}{20}x^8 + \frac{4}{135}x^9 + \frac{x^{11}}{275}.$

2. a) $y = 1 - 0,01x + 1,9999x^2 - 0,0067x^3 - 0,0020x^5.$

b) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{7}x^{7/2} + \frac{1}{35}x^5 + \frac{2}{455}x^{13/2}.$

4. $y_1 = 1$, $y_2 = 1,005000$, $y_3 = 1,010025$, $y_4 = 1,025175$,
 $y_5 = 1,045679$, $y_6 = 1,07821$, $y_7 = 1,103976$,
 $y_8 = 1,142615$, $y_9 = 1,188320$, $y_{10} = 1,241794$.
5. $y_1 = 1$, $y_2 = 0,99091$, $y_3 = 0,97530$, $y_4 = 0,95520$,
 $y_5 = 0,93219$, $y_6 = 0,90754$, $y_7 = 0,88188$,
 $y_8 = 0,85598$, $y_9 = 0,83026$, $y_{10} = 0,80502$.

6. 0,0451.

7. 0,8032.

8. $y(1) = 3,36$.

9.

$\begin{matrix} a \\ t \end{matrix}$	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
0,1	0,09548	0,06910	0,05414	0,04450	0,03778	0,03282
0,2	0,18364	0,13437	0,10593	0,08742	0,07441	0,06478
0,3	0,26679	0,19694	0,15604	0,12919	0,11022	0,09640

11.

x	0,3	0,5	0,8	1,0
y	0,7645	0,6511	0,5146	0,4388

12.

t	x	y
0,4	1,60942	0,75058
0,5	2,71222	0,92917

13. $y = 2 + c_1 \sin x + c_2 (\cos x + 1) + c_3 \sin 2x + c_4 (\cos 2x - 1)$

$$c_1 = \frac{152}{63}; c_2 = \frac{1}{9}; c_3 = -\frac{2}{9}; c_4 = -\frac{38}{63}.$$

14. $y = x + c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x)$

$$c_1 = -\frac{5}{2}; c_2 = \frac{119}{52}.$$

15. $y = c_1 x(x-1) + c_2 x^2(x-1)$

$$c_1 = 0,195; c_2 = 0,364.$$

16. $y = x + c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x) + c_3(x^4 - 4x)$

$$c_1 = 0,088; c_2 = -0,170; c_3 = 0,090.$$

CHƯƠNG V

1. $u_{n,m+1} + u_{m+1,m} - 4u_{n,m} + u_{n-1,m} + u_{n,m-1} = m^2nh^5$

$u_{n,0} = nh$, $u_{m,N} = 2 + nh$, $n = 0, \dots, N$; $Nh = 1$

$u_{m,0} = 2mh$, $u_{N,m} = 1 + 2mh$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$; $Mh = 1$.

($x_n = nh$, $t_m = mh$).

Cấp xấp xỉ của phương trình sai phân là $O(h^2)$.

(1;3)	(2;3)	(3;3)	
(1;2)	(2;2)	(3;2)	
(1;1)	(2;1)	(3;1)	

Hình 5.7

3. Do tính đối xứng hoàn toàn của các giá trị của hàm cần tìm nên chỉ cần thiết lập phương trình sai phân tại các điểm lưới (1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2).

Ta có :

$$\begin{cases} u_{21} + u_{12} - 4u_{11} = -0,0625 \\ u_{22} + 2u_{11} - 4u_{12} = -0,0625 \\ 2u_{11} + u_{22} - 4u_{21} = -0,0625 \\ 2u_{12} + 2u_{21} - 4u_{22} = -0,0625 \end{cases}$$

Vì $u_{12} = u_{21}$ nên thay vào hệ phương trình trên, giải ra ta được $u_{11} = 0,0429$,
 $u_{12} = u_{21} = 0,0547$, $u_{22} = 0,0703$.

4. Giá trị nghiệm tại p, q, r, s được cho trong bảng

β	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
p	15,20	15,25	15,30	15,35	15,40
q	20,53	20,69	20,84	20,99	21,14
r	25,09	25,24	25,39	25,53	25,68
s	14,12	14,17	14,22	14,27	14,32

5. Nếu $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ sơ đồ sai phân hội tụ với mọi l và h .

Nếu $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$ sơ đồ sai phân hội tụ khi

$$\frac{l}{h} \leq \frac{1}{4\theta - 2}.$$

6. Hội tụ với mọi l , h .

7. a) Lược đồ sai phân hiện

$$u_{m,n+1} = \frac{u_{m-1,n} + u_{m+1,n}}{2}$$

$$u_{0,n} = t_n, \quad u_{5,n} = 0,5 + t_n,$$

$$u_{m,0} = \frac{x_m^2}{2}, \quad m = 1, \dots, 5, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Kết quả tính cho trong bảng

n	u_{0n}	u_{1n}	u_{2n}	u_{3n}	u_{4n}	u_{5n}
0	0,00	0,02	0,08	0,18	0,32	0,50
1	0,02	0,04	0,10	0,20	0,34	0,52
2	0,04	0,06	0,12	0,22	0,36	0,54
3	0,06	0,08	0,14	0,24	0,38	0,56
4	0,08	0,10	0,16	0,26	0,40	0,58

b) Lược đồ sai phân ẩn

$$2u_{m-1,l} - 5u_{m,l} + 2u_{m+1,l} = -u_{m,0}$$

$$u_{0l} = 0,08, \quad u_{5l} = 0,58, \quad u_{m0} = \frac{x_m^2}{2},$$

$$m = 1, 2, 3, 4.$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được

$$u_{0l} = 0,08; \quad u_{1l} = 0,10; \quad u_{2l} = 0,16,$$

$$u_{3l} = 0,26, \quad u_{4l} = 0,40, \quad u_{5l} = 0,58.$$

8. Kết quả tìm được thể hiện trong bảng sau :

t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
0,020	0,31065	0,60232	0,85466	1,04521	1,14988	1,14460	1,01787	0,76358	0,41201
0,015	0,31969	0,62129	0,88494	1,8803	1,20549	1,21172	1,08370	0,82401	0,44346
0,010	0,32821	0,63939	0,91437	1,13049	1,26168	1,28049	1,16177	0,88692	0,48625
0,005	0,33607	0,65641	0,94271	1,17234	1,31826	1,35103	1,24272	0,97251	0,53111
0,000	0,34315	0,67213	0,96967	1,21330	1,37500	1,42322	1,32705	1,06222	0,61797

$$9. u(x, t) = 1/(x^2 + 2t + 1)$$

$$10. u(x, t) = te^{-\alpha x}$$

$$11. u(x, t) = 1/(x + \alpha t + 1).$$

$$12. u(x, t) = 1/(x + t + \alpha)$$

$$13. u(x, t) = \sin \pi x \sin \pi t.$$

$$15. u(x, t) = x^2.$$

$$16. u(x, t) = x^2 + \alpha y^2$$

$$17. a) u(x, y) = x^2 - y^2 - 1$$

$$b) u(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$$

$$c) u(x, y) = 2xy.$$

CHƯƠNG VI

1. Để dàng chứng minh được rằng, toán tử

$$A(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 xs^2 y(s) ds + 1$$

là toán tử co trong không gian $C_{[0,1]}$.

Lấy $y_0(x) = 1$

$$y_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xs^2 y_n(s) ds + 1.$$

2. Chứng minh tương tự như bài 1.

3. Chứng minh tương tự như bài 1.

4. Trước tiên nhận thấy rằng $y(x) \equiv 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Lấy $y_0 = 1$

$$y_{n+1}(x) = \int_a^x y_n(s) ds.$$

Ta chứng minh được $y_n(x)$ hội tụ đều đến 0. Hơn nữa $y(x) \equiv 0$ là nghiệm duy nhất.

5. Để giải phương trình

$$y = \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x) \quad x \in [a, b].$$

Ta dựa vào biểu diễn

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, s)f(s)ds.$$

$$\text{Có } K(x, s) = K_1(x, s) = e^{x-s}$$

$$K_2(x, s) = \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} dz = e^{x-s} \int_s^x dz = e^{x-s} (x-s)$$

$$K_3(x, s) = \int_s^x e^{x-s} e^{z-s} (z-s) dz = e^{x-s} \frac{(x-s)^2}{2}.$$

Tương tự

$$K_{n+1}(x, s) = e^{x-s} \frac{(x-s)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$R(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, s) = e^{x-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-s)^n}{n!} = e^{x-s} \cdot e^{x-s} = e^{2(x-s)}.$$

Khi đó

$$y(x) = x + \int_0^x e^{2(x-s)} s ds.$$

Lấy tích phân ta được nghiệm chính xác của phương trình.

6. Ta tìm y dưới dạng

$$y(x) = C_1 + 2xC_2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2},$$

$$\text{trong đó } C_1 = \int_0^1 y(s) ds, \quad C_2 = \int_0^1 sy(s) ds.$$

Để xác định C_1, C_2 ta lập hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^1 \left(C_1 + 2xC_2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} \right) dx \\ C_2 = \int_0^1 x \left(C_1 + 2xC_2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} \right) dx \end{cases}$$

$$\text{Giải ra ta được } C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{7}{12}.$$

$$\text{Từ đó ta có } y(x) = x + \frac{1}{2}.$$

7. Giải tương tự như bài 6.

9. Xấp xỉ hàm $-x(e^{xs} - 1)$ bởi hàm suy biến dựa vào việc phân tích hàm $e^{xs} - 1$ thành chuỗi Taylo. Ta hạn chế ở 4 số hạng đầu tiên.

Ta có :

$$e^{xs} - 1 = xs + \frac{(xs)^2}{2} + \frac{(xs)^3}{3!} + \omega_4(x, s)$$

$$K(x, s) = x(e^{xs} - 1) = x \left[xs + \frac{(xs)^2}{2} + \frac{(xs)^3}{3!} + \omega_4(x, s) \right]$$

$$= x^2s + \frac{x^3s^2}{2} + \frac{x^4s^3}{3!} + x\omega_4(x, s).$$

Đặt $K_3(x, s) = x^2s + \frac{x^3s^2}{2} + \frac{x^4s^3}{3!}$, $\delta_4(x, s) = -x\omega_4(x, s)$.

Để giải phương trình tích phân với hạch suy biến

$$y_3(x) = - \int_0^1 K_3(x, s)y(s)ds + e^x - x.$$

Ta tìm $y_3(x)$ dưới dạng

$$y_3(x) = -C_1x^2 - C_2x^3 - C_3x^4 + e^x - x$$

Lấy $e \approx 2,72$. Giải phương trình tích phân với hạch suy biến theo phương pháp chung ta được

$$C_1 \approx 0,5, \quad C_2 \approx 0,17, \quad C_3 \approx 0,06.$$

Do đó nghiệm gần đúng của phương trình đã cho là

$$y_3(x) = e^x - x - 0,5x^2 - 0,17x^3 - 0,06x^4.$$

ТÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Я.И. Альберг, И.П.Рязанцева, Вариационные неравенства с разрывными монотонными отображениями, ДАН СССР, 262(1982)6 No6, 1289-1293.
2. В.Б. Андресь, О равномерной сходимости некоторых разностных схем, ЖВМ и МФ, 6(1966), No2, 238-250.
3. М.М. Вайнберг, Вариационный метод и метод монотонных операторов, Наука, М. 1972.
4. В.К. Иванов, Некоторые задачи в топологических пространствах, Сиб. Мат. 10(1969), No5, 1065-1074.
5. Л.В. Канторович, Р.П. Акилов, функциональный анализ, Наука, М.1984.
6. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, Приближенные методы высшего анализа, ГИТТЛ, Л.1949.
7. М.А. Красносельский, Е.А. Лифшиц, А.В. Соболев, Позитивные линейные системы, Наука, М. 1985.
8. М.А. Красносельский и другие, Приближенное решение операторных уравнений, Наука, М. 1981.
9. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, М., 1981.
10. Н.С. Курпель, Проекционно - итеративные методы решения операторных уравнений, Наукова - Аумка, Киев, 1968.
11. О.А. Ладыженская, Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными, УМН, 12(1957), 5, 123-148.
12. О.А. Лисковец, Вариационные методы решения неустойчивых задач, Наука и Техника, Минск, 1981.
13. О.А. Лисковец, Решение уравнений первого рода с монотонным оператором при немонотонных возмущениях, ДАН БССР, 27(1983), No2, 101-104.
14. О.А. Лисковец, Регуляризация задач с разрывными немонотонно возмущенными операторами, ДАН СССР, 272(1983), No1, 30-34.
15. Я.Д. Мамедов, Методы вычислений, Маарив, Баку, 1988.
16. Я.Д. Мамедов, Кхуат Ван Нинь, Сходимость двусторонних приближений к решению операторных уравнений с немонотонной правой частью, Учен. записки. БГУ, сер. физ - Мат. Наук, 1992, No1, 55-99.

17. В.П. Маслов, Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений, Наука, М.1987.
18. Г.И. Марфук, Методы вычислительной математики, наука, М. 1990.
19. В.М. Мусаев, нелинейные уравнения Типа Вольтерра - фредгольма, АПУ им. Н.Туси, Баку, 1992.
20. С.М. Никольский, Приближенные функции многих переменных и теоремы вложения, Наука, М., 1969.
21. С.М. Никольский, Граничные свойства функций, определенных на области сугольными точками, МАТ. СБ. 43(85), 1957, 127 - 144.
22. О.А. Олейник, О решении системы уравнений прандтля методом конечных разностей, прикл. Мат. и Мех. 31(1967), 1, 90 - 100.
23. В.С. Рябенский, точный перенос разностных краевых условий, функц. анализ и его прил. 24(1990), вы 3, 90 - 91.
24. А.А. Самарский, в ведение в теорию разностных схем, наука, М. 1971.
25. А.В. Скороход, Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений, наукова, Димка, Киев, 1987.
26. В.П. Танана, Об устойчивости метода невязки при решении некорректных задач, Изв. Вузов, Мат. 1974, No 4, 75 - 82.
27. В.П. Танана, приближенное решение операторных уравнений первого рода в локально выпуклых пространствах, Из. Вузов, Мат. 1973, No 9, 70 - 77.
28. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, Методы решения некорректных задач, Наука, М., 1979.
29. Нгуен Тьонг, О равномерной сходимости разностных схем повышенного порядка точности для уравнения Пуассона, ЖВМ и МФ20 (1980), No1, 97-103.
30. R.A. Adams, Sobolev spaces, Acad. Press, 1975.
31. M.V. Altaiski, p-adic wavelet decomposition vs Fourier analysis on spheres, Indian J. Pure Appl. Math. 28(2)(1997), 117 - 205.
32. C.Phạm Kỳ Anh, Giải tích số, Nhà xb ĐHQG Hà Nội, 1999.
33. J.P. Aubin, H. Frankowska, Set-valued Analysis, Birkhauser, Boston - Basel - Berlin, 1990.
34. J.P. Aubin, Interpolation. et Approximation optimales et splines functions, J. Math. Anal. Appl. 24(1968), 1-24.
35. C.Baiocchi and A.Capelo Disequazioni variazionali e quasivariazionali, vol. 12, Pitagora, 1978.
36. L.P. Belluce and W.A. Kirk, Fixed Point Theorems for Certain Classes of Nonexpansive Mappings, Proc. Amer. Math. Sci-20 (1969), 111-116.

1.232.2

37. G. Beyklin, On the Representation of Operators in Bases of Compactly Supported Wavelets, SIAM(*), J. Num. Anal. 6 (1992), No 6, 1716 - 1740.
38. O. Beyklin, E. Coifman and V. Roklin, Fast Wavelet Transform and Numerical Algorithms, I, Comm on Pure and Appl. Math. XLIV (1991), 141 - 183.
39. B. Bialecki, Graeme Fairweather and K.R. Bennet, Fast direct Solvers for Piecewise Hermite Bicubic orthogonal Spline Collocation equations, SIAM*, J. Num. Anal. 29(1992), 156 - 173.
40. O.V. Besov, Théorèmes de prolongement des espaces fonctionnels, Congrès Int. des math., Nice II (1970), 467 - 473.
41. Tran Quoc Binh, Nguyen Minh Chuong, On a Fixed Point Theorem, Functional Analysis and its Application, 30 (1996) 93 - 94 (Russian).
42. Tran Quoc Binh, Nguyen Minh Chuong, On a Fixed Point Theorem for Nonexpansive Nonlinear Operator, Acta Mathematica Vietnamica, 24 (1999), No 1, 1 - 8.
43. Tran Quoc Binh and Nguyen Minh Chuong, Fixed Point Type Theorems and Projection - Iteration Approximation, Preprint ICTP, IC/93/241, Miramare - Trieste, Italy, 1993.
44. H. Brezis, L. Nirenberg, Degree Theory and BMO, I. Compact Manifolds without Boundaries, II Compact Manifolds with Boundary, Selecta. Math (N.S) 1 (1995), No 2, 197 - 263, 2 (1996), No 3, 309 - 368.
45. F.E. Browder, Existence and Approximation Solution of Nonlinear Variational Inequalities, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, (1966), No 4, 1080.
46. F.E. Browder, On the Unification of the Calculus of Variations and the Theory of Monotone Nonlinear Operators in Banach Spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 56 (1965), No 2, 419 - 425.
47. F.E. Browder, Nonlinear Maximal Monotone Operators in Banach Spaces, Math-Ann. 175 (1968). № 1, 89-113
48. F.E. Browder, Nonlinear Variational Inequalities and Maximal Monotone Mappings in Banach Spaces, Math. Ann. 183 (1969) No 3, 213 - 231.
49. F.E. Browder, Bui an Ton, Convergence of Approximants by Regularization for Solution of Nonlinear Functional Equations in Banach Spaces, Math. Z. 106 (1968), No 1, 1 - 16.
50. F.E. Browder, Non Expansive Nonlinear Operator in a Banach Space, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 54(1965), 1011 - 1014.
51. F. E. Browder and W. Petryshyn, The Solution of Nonlinear Functional Equations in Banach Spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 72(1966), 571-575.
52. Le Van Chong, On the Existence of Solution for a General Form of Variational and Quasivariational Inequalities, ZAA, 1984, Bd 3 (6), 541-548.

(*) Society Industrial Applied Mathematics

53. Charles K. Chui, An Introduction to Wavelets, Academic Press, New York, 1995.
54. Nguyen Minh Chuong, Nguyen Van Khai, On Multistep Newton - Zeidel Methods for Quasilinear Operator Equations, Acta Math. Vietnamica 17 (1992), No 2, 103 - 114.
55. Nguyen Minh Chuong, Ha Tien Ngoan, Nguyen Minh Tri, Le Quang Trung, Partial Differential Equations, Education Publ. House, Ha Noi, 2000.
56. Nguyen Minh Chuong, Ya.D.Mamedov, Khuat Van Minh, Approximate Solution of Operator Equations, Sci. & Tech. Publ. House, Ha Noi, 1992.
57. Nguyen Minh Chuong, Nguyen Van Co, An Iteration Scheme for Nonexpansive Mappings in Metric Space of Hyperbolic Type, Vietnamese J. Math., to appear.
58. Nguyen Minh Chuong, Nguyen Van Kinh, Regularization of Variational Inequalities with Perturbed Nonmonotone and Discontinuous Operators, Differentialnye Uravnenija 27 (1991), No 12, 2171 - 2172.
59. Nguyen Minh Chuong, Le Dinh Thinh and Nguyen Van Khai, Newton - Zeidel Method for Quasilinear Operator Equations in Supermetric Spaces, ICTP, IC/89/300, Miramare - Trieste, Italy, 1989.
60. Nguyen Minh Chuong, Ta Ngoc Tri, The Integral Wavelet Transform on $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, FCAA, 3 (2000), No 2, 133 - 140.
61. Nguyen Minh Chuong, Ta Ngoc Tri, The Integral Wavelet Transform in Weighted Sobolev Spaces and Some Inverse Formulas, Preprint 99/45, Hanoi.
62. Nguyen Minh Chuong, Bui Kien Cuong, Nguyen Thi Thanh Huong, Convergence Estimate of Wavelet - Galerkin Solutions of Integral Differential Equations, Preprint 2000/9, Hanoi.
63. Nguyen Minh Chuong and Nguyen Van Tuan, Spline Collocation Methods for a System of Nonlinear Fredholm. Volterra Integral Equations, Acta Math. Vietnamica, 21(1996), No1, 155-169.
64. Nguyen Minh Chuong and Nguyen Van Tuan, Spline Collocation Methods for Fredholm. Volterra Integro-Differential Equations of High Order, Vietnam J. of Math. 25: 1(1997) 15-24.
65. Nguyen Minh Chuong, Khuat Van Ninh, On Approximative Normal Values of Multivalued Operators in Vector Topological Spaces, J. Izv. Vuzov SSSR; 1991, No9, 89, VINITI 29-04-91.
66. Nguyen Minh Chuong and Nguyen Van Tuan, Spline Collocation Methods for Fredholm Integro-Differential Equations of Second Order, Acta Math. Vietnamica 20(1995), No 1, 85-98.
67. R. Coifman, P.L. Lions. Y. Meyer et Semmes, Compacité par compensation des espaces de Hardy, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, 309(1989), 945-949.
68. R. Coifman and Y. Meyer, Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, 312(1991), 259 - 261.
69. Nguyen Huu Cong, A Parallel DIRK Method for Stiff Initial Value Problems, J. Comput. Appl. Math. 53(1994), CAMO 1709 T, 1-7.

70. Michael G. Crandall and P.L. Lions, Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations in Infinite Dimensions, IV. Hamiltonians with Unbounded Linear Terms, *J.Funct. Anal.* 90(1990), 237 - 283.
71. W.Dahmen, S. Prösdorf, R.Schneider, Wavelet Approximation Methods for Pseudo-differential Equations, I. Stability of Convergenco, *Math. Z.* 215(1994), 583 - 620, II Matrix Compression and Fast Solution, Preprint, No 37, Berlin, 1993.
72. Ingrid Daubechies, Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* XLI (1988), 909-996.
73. Ingrid Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, CBMS, Lecture Notes nr. 61, SIAM, Philadelphia, 1992.
74. Ingrid Daubechies, The Wavelet Transform, Time-frequency Localization and Spline Analysis, *IEEE, Transf. Inform. Theory*, 36(1990), 961-1005.
75. K.Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg, 1985.
76. Phạm Huy Diên, Đinh Thế Lục, Tạ Duy Phương, Practice Computation on MAPLE V, Education Publ. House, Hanoi, 1998.
77. M.Edelstein, On Fixed and Periodic Points Under Contractive Mappings, *J. London Math. Soc.* 37(1962), 74-79.
78. A. Jeffrey, H. Brezis, and R.G. Douglas, Numerical Analysis, Springer - Verlag, Berlin, 1998.
79. M. Furi, A. Vignoli, A Fixed Point Theorem in Complete Metric Spaces, *Boll. Un. Math. Monthly*, 72(1965), 1004-1006.
80. R. Gorenflo, A. Pfeiffer, Diskretisierung nichtlinearer abelscher Integralgleichungen erster Art, *ZAMM, Z.angew. Math. Mech.* 70(1990), No6, 564-565.
81. Alfred Gray, Modern Differential Gelometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA, Springer - Verlag, Berlin, 1998.
82. Phan Văn Hap, Le Dinh Thinh, Computational Methods and Algorithms, Education Publ. House, Hanoi, 2000.
83. K.M. Heal, M.L. Hansen, K.M. Rickard, MAPLE V learning guide, Waterloo. Maple Inc., Canada, 1996.
84. E.N.Houstic, E.A. Vavalis and J.R. Rice, Convergence of $O(h^4)$ Cubic Spline Collocation Methods for Elliptic Partial Differential Equations, *SIAM, J. Num. Anal.* 25(1988), No1, 54-74.
85. Nguyen Van Khai, On an Iterative Method for Solving Discontinuous Operator Equations, *Vietnam J. of Math* 18(1990), No4, 19-23.
86. Nguyen Van Kinh, On the Stability of Discrepancy Method for Solution of the first Kind Operator Equations with Perturbed Operators, *J. Vyschisl. Mat. i at. Fiz.* 29(1989), No10, 1458-1465.
87. Nguyen Van Kinh, The Approximate Solutions of the First Kind Operator Equation in Locally Topological Vector Space by Discrepancy Method, *Acta. Math. Vietnamica*, 16(1991), No1, 1-12.

88. R.E. Klima and N.P. Sigmon, Abstract Algebra. Applications with MAPLE, Springer - Verlag Berlin, 1999.
89. H. Ishii, P.L. Lions, Viscosity Solutions of Fully Nonlinear Second Order Elliptic Partial Differential Equations, J. of Differential Equations, 83(1990), 26-78.
90. W.A. Kirk, A Fixed Point for Mappings Which do not Increase Distances, Amer. Math. Monthly 72(1965), 1004-1006.
91. Prem K. Kythe, An Introduction to Boundary Element Methods, CRC Press, Boca Raton, 1995.
92. Th. R. Lucas, A Generalization of L-Splines, Num. Math. 15(1970), 359-370.
93. Stephan G. Mallat, Multiresolution Approximations and Wavelet Orthogonal Bases of $L^2(\mathbb{R})$, Trans. Amer. Math. Soc. 315 (1985), No1, 69-87.
94. Y. Meyer, Ondelettes et opérateurs, I, II, III, Hermanr, Paris, 1990-92.
95. Y. Meyer, Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées, Lectures Univ. of Torino, Italy, 1986.
96. U. Mosco, Implicit Variational Problems and Quasivariational Inequalities, Lecture Note in Math. 543, Springer-Verlag, 1976.
97. Nguyen Quynh Nga, Nguyen Minh Chuong, On a Nonlinear Set-Valued Inequality, Differentialnye Uravnenija (accepted).
98. Khuat Van Ninh, A Method for Approximately Solving Operator Equations, Proc. Conference on "Problems on Functional Analysis and Physical Math" dedicated to 80th BGU, Bacu, 1999.
99. Khuat Van Ninh, Convergence of Two Side Approximations to Solutions of an Integral Systems of Equations of Fredholm-Volterra Type, Izv. Acad. Nauk. Azerbaidzan, 18(1998), No2, 40-45.
100. Khuat Van Ninh, Ya. D. Mamedov, Boundary Problems for Differential Equations of First Order with Parameter, Proc. IMM AS. Azerbaijan, V.9, 1998, 58-63.
101. Khuat Van Ninh, V.M. Musaev, Theorems on Mixed System of Partial Differential and Integral Inequalities, Vesnik, BPU 1993, No1-2, 46-55.
102. O.A. Oleinik, V.V. Zhikov, On the Homogenization of Elliptic Operators with Almost-Periodic Coefficients, Conferenza Giugno 1982, Italy.
103. James M. Ortega, Solution of Partial Differential Equations on Vector and Parallel Computers, SIAM, Philadelphia, 1985.
104. W.V. Petryshyn, Fixed Point Theorems for Various Classes of 1-Set Contractive and 1-ball-Contractive Mappings in Banach Spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 182(1973), 323-352.
105. W.V. Petryshyn and T.E. Williamson, Strong and Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Quasi-Nonexpansive Mappings, J. Math. Anal. and Appl. 13(1973), 459-479.
106. P.M. Prenter, Splines and Variational Methods, A Wiley. Intersc. Publ. John Wiley Sons, New York, London, Toronto, 1975.

107. Andreas Riedel, The Wavelet Transform on Sobolev Spaces and its Approximation Properties, Num. Math. 38(1991), 875-894.
108. A.P. Robertson, W. Robertson, Topological Vector Spaces, Cambridge, 1964.
109. V.N. Sadovskii, On a Fixed Point Principle, Funct. Anal. Appl. 1(1987), 74-76 (in Russian).
110. M.H. Schultz and R.S. Varga, L-Splines, Num. Math. 10(1967) 345-369.
111. S. Smale, Complexity Aspect of Numerical Analysis, ICM Berkeley, 1986.
112. Yu. D. Sokolov, On a Problem of The Theory of Unsteady Motion of Groundwater, Ukrain. Math. J. 5(1953), 159-170.
113. Gilbert Strang, Wavelets and Dilation Equations: a Brief Introduction, SIAM Review, 31(1989), No4, 614-627.
114. Nguyen Van Tuan, Spline Collocation Methods for Neumann Problem for Elliptic Equations, Vietnam J. of Math. 24(1996), No1, 83-96.
115. Nguyen Tuong, Sur les coefficients de Fourier de fonctions de plusieurs variables, Vietnam J. de Math. 9(1981), No2, 31-32.
116. Nguyen Tuong, Sur la convergence uniforme des schémas aux différences approchant le deuxième problème aux limites pour l'équation biharmonique à plusieurs variables, Vietnam J. de Math. 10 (1982), No1, 1-3.
117. Nguyen Tuong, Sur la convergence uniforme des schémas aux différences de haute précision pour l'équation biharmonique, Vietnam J. de Math., 12(1984), No3, 1-3.
118. Y. Van and Graeme Fairweather, Orthogonal Spline Collocation Method for Some Partial Integro-Differential Equation, SIAM J. Num. Anal. 29(1992), No3, 755-768.
119. R.S. Varga, Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Analysis, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1971.
120. W. Vanconcelos, Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Springer, Berlin, 1997.
121. Walter Gander, Jiří Hřebíček Solving Problems in Scientific Computing Using MAPLE and MATLAB, Springer - Verlag, Berlin, 1997.
122. C.E. Greenwell - Yanik and G. Fairweather, Analyses of Spline Collocation Methods for Parabolic and Hyperbolic Problems in Two Space Variables, SIAM, J. Num. Anal. 23(1986), No2, 282-296.
123. E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Vol I-IV, Springer, Berlin, 1985-88.

Lời nói đầu

Phần một

CƠ SỞ CỦA GIẢI TÍCH SỐ

Chương I :	MỘT SỐ KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU	7
	§1. Không gian mêtric	7
	§2. Không gian Banach	14
	§3. Không gian Hilbert	23
	§4. Phương trình vi phân	28
	§5. Số gần đúng và sai số	32
	Bài tập	38
Chương II.	GIẢI TÍCH SỐ TRONG GIẢI TÍCH	40
	I. Lý thuyết nội suy	40
	§1. Đa thức nội suy Lagrange	41
	§2. Đa thức nội suy Newton	47
	§3. Đa thức nội suy Hermitte	56
	§4. Spline đa thức	58
	II. Xấp xỉ đều và phương pháp bình phương tối thiểu	61
	§5. Xấp xỉ đều	61
	§6. Phương pháp bình phương tối thiểu	68
	III. Vi phân và tích phân số	77
	§7. Tính gần đúng đạo hàm	78
	§8. Tính gần đúng tích phân,	
	Phương pháp Monte - Carlo	81
	IV. Vài ví dụ tính toán trên MAPLE V	90
	Bài tập	93
Chương III.	GIẢI TÍCH SỐ TRONG ĐẠI SỐ	96
	I. Giải tích số trong Đại số tuyến tính	96
	§1. Mở đầu	96
	§2. Phương pháp Gauss	97
	§3. Phương pháp phân rã	99
	§4. Phương pháp trực giao	103
	§5. Phân tích sai số	104

§6. Phương pháp lập đơn	107
§7. Phương pháp Seidel	111
§8. Vấn đề tìm ma trận nghịch đảo	114
§9. Bài toán giá trị riêng	117
§10. Ví dụ dự tính toán Đại số tuyến tính trên MAPLE V	126
II. Giải gần đúng phương trình phi tuyến	128
§11. Mở đầu	128
§12. Phương pháp lập đơn	130
§13. Phương pháp dây cung	133
§14. Phương pháp Newton	136
§15. Hệ phi tuyến	137
§16. Phương trình đại số bậc cao.	140
Bài tập	147
Chương IV. GIẢI GẦN ĐÚNG CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHẦN THƯỜNG	151
§1. Phương pháp lập đơn	152
§2. Phương pháp Euler và Euler cải tiến	156
§3. Phương pháp Runge - Kutta.	160
§4. Phương pháp Adams.	165
§5. Giải hệ phương trình vi phần.	168
§6. Phương pháp sai phân giải bài toán biên	175
§7. Phương pháp Galerkin	178
§8. Phương pháp Collocation	180
§9. Giải phương trình vi phần thường bằng chương trình MAPLE V	183
Bài tập	188
Chương V. GIẢI GẦN ĐÚNG CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG	191
§1. Phương pháp lưới	191
§2. Sự ổn định của lược đồ sai phân	210
§3. Phương pháp đường thẳng	214
Bài tập	224
Chương VI. GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHẦN	230
§1. Phương pháp lập đơn	230
§2. Phương pháp Newton - Kantorovich.	234
§3. Phương pháp hạch suy biến	236
§4. Phương pháp mômen và phương pháp bình phương tối thiểu.	242
§5. Phương trình tích phân tuyến tính Volterra - Fredholm.	246
Bài tập	250

Phần hai

MỘT SỐ VẤN ĐỀ HIỆN ĐẠI

Chương VII.	MỘT SỐ KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU (tiếp theo)	252
	§1. Không gian tôpô lối địa phương	252
	§2. Không gian mêtric. Không gian Banach	258
	§3. Không gian Sobolev.	263
Chương VIII.	PHƯƠNG TRÌNH VOLTERRA - FREDHOLM	272
	§1. Một số khái niệm.	272
	§2. Phương pháp lặp tổng quát.	273
	§3. Phương pháp xấp xỉ hai phía.	279
Chương IX.	PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THUỘC LOẠI ELLIPTIC	283
	<i>I. Sơ đồ sai phân đối với phương trình vi phân thuộc loại elliptic trong không gian H^{2m} và C.</i>	283
	§1. Sự xấp xỉ và sự hội tụ	283
	§2. Hàm riêng và giá trị riêng của toán tử sai phân Laplace Δ^0	290
	§3. Tương tự sai phân định lí nhúng Sobolev	295
	§4. Ứng dụng	304
	<i>II. Sơ đồ sai phân đối với phương trình vi phân thuộc loại elliptic trong không gian $H^{2m,p}$ và C</i>	313
	§5. Không gian $\bar{L}_p(w_h)$ và $\bar{H}^{2m,p}(w_h)$	314
	§6. Liên hệ giữa Không gian $L_p(G)$ và Không gian $\bar{L}_p(w_h)$	319
	§7. Ứng dụng : Lược đồ sai phân chính xác bậc bốn đối với phương trình Poisson.	326
Chương X.	XẤP XỈ BẰNG SPLINE VÀ SÓNG NHỎ.	333
	<i>I. Xấp xỉ bằng Spline</i>	333
	§1. Phương pháp spline collocation đối với phương trình vi phân, phương trình vi tích phân.	333
	§2. Phương pháp spline collocation đối với hệ phương trình tích phân phi tuyến Fredholm - Volterra.	339
	§3. Các thuật toán giải phương trình spline collocation.	
	Thuật toán song song.	342
	§4. Hàm spline với phương trình giả vi phân	349
	§5. Xấp xỉ không gian Sobolev bằng L - spline.	352

II. Xấp xỉ bằng sóng nhỏ	357
§6. Sóng nhỏ	357
§7. Phép biến đổi sóng nhỏ tích phân	365
§8. Xấp xỉ sóng nhỏ đối với phương trình giả vi phân.	375
Chương XI. GIẢI XẤP XỈ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ	390
§1. Phép lặp ẩn, toán tử cô đặc (condensing).	390
§2. Phương pháp điều chỉnh. Bài toán biến phân đa trị phi tuyến	399
§3. Phương pháp không khớp trong không gian tôpô lỗi địa phương	414
Đáp số và hướng dẫn giải các bài tập.	433
Tài liệu tham khảo.	446

CONTENTS

Foreword

Part one

BASIC OF NUMERICAL ANALYSIS

Chapter I.	BACKGROUND MATERIALS	7
§1.	Metric spaces	7
§2.	Banach spaces	14
§3.	Hilbert spaces	23
§4.	Differential equations	28
§5.	Approximation numbers and errors.	32
	<i>Exercises</i>	38
Chapter II.	NUMERICAL ANALYSIS IN MATHEMATICAL ANALYSIS	40
I. Interpolation theory		40
§1.	Lagrangian interpolates	41
§2.	Newtonian interpolates	47
§3.	Hermitian interpolates	56
§4.	Polynomial spline	58
II. Uniform approximation and least square methods		61
§5.	Uniform approximation	61
§6.	Least square methods	68
III. Numerical differentiation and Integration		77
§7.	Numerical differentiation	78
§8.	Numerical integration. Monte-Carlo method.	81
IV. Computation examples on MAPLE V		90
	<i>Exercises.</i>	93

Chapter III.	NUMERICAL ANALYSIS IN ALGEBRA.	96
	<i>I. Numerical analysis in linear algebra.</i>	96
	§1. Introduction	96
	§2. Gauss method	97
	§3. Splitting method	99
	§4. Orthogonal method	103
	§5. Error analysis	104
	§6. Simple iteration method.	107
	§7. Seidel method	111
	§8. Problems on inverse matrix	114
	§9. Eigenvalue problem	117
	§10. Examples on computing linear algebra on MAPLE V	126
	<i>II. Numerical analysis of nonlinear equations</i>	128
	§11. Introduction	128
	§12. Simple iteration method	130
	§13. Cord method	133
	§14. Newton method	136
	§15. Nonlinear systems	137
	§16. Algebraic equations of high degree.	140
	<i>Exercices</i>	147
Chapter IV.	NUMERICAL ANALYSIS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS	151
	§1. Simple iteration method.	152
	§2. Euler and modified Euler method	156
	§3. Runge - Kutta method	160
	§4. Adams method.	165
	§5. Systems of differential equations	168
	§6. Difference method for boundary value problems	175
	§7. Galerkin method	178
	§8. Collocation method	180
	§9. Computation on MAPLE V.	183
	<i>Exercices</i>	188
Chapter V.	NUMERICAL ANALYSIS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS.	191
	§1. Net method	191
	§2. Stability of difference scheme	210
	§3. Line method.	214
	<i>Exercices</i>	224

1.4.00-2
B.228.2

Chapter VI.	NUMERICAL ANALYSIS OF INTEGRAL EQUATIONS	230
	§1. Simple iteration method.	230
	§2. Newton - Kantorovich method	234
	§3. Degenerate kernel method	236
	§4. Moment method and least square method	242
	§5. Volterra - Fredholm linear integral equation	246
	<i>Exercices</i>	250

Part two

SOME MODERN PROBLEMS

Chapter VII.	BACKGROUND MATERIALS (CONTINUED)	252
	§1. Uniformly convex topological spaces	252
	§2. Metric spaces. Banach spaces	258
	§3. Sobolev spaces	263
Chapter VIII.	VOLTERRA - FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS	272
	§1. Some definitions	272
	§2. General iteration method	273
	§3. Two sides approximation	279
Chapter IX.	DIFFERENCE METHOD FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ELLIPTIC TYPE	283
	<i>I. Difference schemes for differential equations of elliptic type in spaces H^{2m} and C.</i>	283
	§1. Approximation and Convergence.	283
	§2. Eigenvectors and eigenvalues of Laplace difference operator Δ^0	290
	§3. Difference analog of Sobolev imbedding theorems	295
	§4. Applications.	304
	<i>II. Difference schemes for differential equations of elliptic type in spaces $H^{2m,p}$ and C</i>	313
	§5. The spaces $\bar{L}_p(w_h)$ and $\bar{H}^{2m,p}(w_h)$	314
	§6. Relation between the spaces $L_p(G)$ and $\bar{L}_p(w_h)$	319
	§7. Applications : Difference scheme with accuracy of order 4 for Poisson equation.	326

Chapter X.	SPLINE AND WAVELET APPROXIMATION	333
<i>I. Spline approximation</i>		333
§1. Spline collocation methods for differential equations, integro - differential equations		333
§2. Spline collocation methods for systems of nonlinear equations		339
§3. Algorithms for spline collocation equations.		
Parallel algorithm		342
§4. Splines and pseudo-differential equations		349
§5. L - Spline approximation		352
<i>II. Wavelet approximation</i>		357
§6. Wavelets		357
§7. Integral wavelet transform		365
§8. Wavelet approximation of pseudo-differential equations		375
Chapter XI.	APPROXIMATE SOLUTION OF OPERATOR EQUATIONS	390
§7. Implicit iteration method. Condensing operators		390
§8. Regularization methods. Nonlinear set-valued variational problems		399
§9. Discrepancy method in uniformly convex topological vector spaces		414
Answers and hints to exercises		433
References.		446

3.2007.2

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu :

NGUYỄN HUY ĐOAN

Biên tập tái bản :

TRẦN PHƯƠNG DUNG

Biên tập kĩ thuật :

NGUYỄN LIÊN HƯƠNG

Trình bày bìa :

TẠ TRỌNG TRÍ

Chế bản :

PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

GIẢI TÍCH SỐ

Mã số: 7K471T7-DAI

In 1.000 bản, khổ 14,5 x 20,5cm. Tại Nhà in Hà Nam
Số 29 - QL 1A - P. Quang Trung - TX. Phủ Lý - Hà Nam
Số in: 45. Giấy phép xuất bản số: 11-2007/CXB/249-2119/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2007.



CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYỀN – HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn

TÌM ĐỌC SÁCH CĐSP BỘ MÔN TOÁN CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. Đại số đại cương (GTCĐSP) | Hoàng Xuân Sinh |
| 2. Xác suất thống kê (GTCĐSP) | Phạm Văn Kiều
Lê Thiên Hương |
| 3. Quy hoạch tuyến tính (GTCĐSP) | Phí Mạnh Ban |
| 4. Phương pháp dạy học môn Toán –
Tập 1, 2 (GTCĐSP) | Phạm Gia Đức |
| 5. Thực hành giải toán (GTCĐSP) | Vũ Dương Thuý |
| 6. Bài tập đại số đại cương | Bùi Duy Hiền |
| 7. Bài tập đại số tuyến tính | Hoàng Xuân Sinh
Trần Phương Dung |
| 8. Bài tập số học | Nguyễn Tiến Quang |
| 9. Bài tập giải tích – tập 1, 2 | Nguyễn Thuý Thanh |

Bạn đọc có thể mua tại các Công ti Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên; 187B Giảng Võ; 232 Tây Sơn; 23 Tràng Tiền.

Tại Đà Nẵng : Số 15 Nguyễn Chí Thanh; Số 62 Nguyễn Chí Thanh.

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu, Quận 1; Cửa hàng 451B - 453, Hai Bà Trưng, Quận 3; 240 Trần Bình Trọng – Quận 5.

Tại Thành phố Cần Thơ : Số 5/5, đường 30/4.

Website : www.nxbgd.com.vn



Giá : 33.000 đ